МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.Б.01 ФИЛОСОФИЯ

Специальность
21.05.04 Горное дело

Специализация № 4

Открытые горные работы

формы обучения: **очная, заочная**

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	9
4	Методические рекомендации по написанию эссе	11
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	14
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	15
7	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	17
	Заключение	20
	Список использованных источников	21

ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

Самостоятельная работа студента (СРС) - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

Самостоятельная работа студента - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблем;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тесты по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [1].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[2].

---

[1] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u37/metod_rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем времени на подготовку к устному опросу зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы

3.Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

Доклад должен соответствовать следующим требованиям:

- тема доклада должна быть согласованна с преподавателем и соответствовать теме занятия;

- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;

- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны тсоответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;

- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)

2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.

3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

Общая структура доклада

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

Вступление.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Основная часть.

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

Заключение.

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

Критерии оценки доклада, сообщения	*Количество баллов*
Содержательность, информационная насыщенность доклада	1
Наличие аргументов	1
Наличие выводов	1
Наличие презентации доклада	1
Владение профессиональной лексикой	1
Итого:	5

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

4. Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);

2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе?

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

Источники. Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогоа обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия,* где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

Дискуссия (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

Дискуссия обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

Дискуссия- диалог чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

Дискуссия - спор используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,

- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;

- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;

- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;

- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

Подготовка студентов к дискуссии: если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

В проведении дискуссии выделяется несколько этапов.

Этап 1-й, введение в дискуссию: формулирование проблемы и целей дискуссии; определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

Этап 2-й, обсуждение проблемы: обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

Этап 3-й, подведение итогов обсуждения: выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь

на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Долгоруков А Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov net/case/case.study.html/

2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Фролова Н. А Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.Б.1.02 ИСТОРИЯ

Направление подготовки
21.05.04 Горное дело

Специальность
Специализация №3 «Открытые горные работы»

форма обучения: очная, заочная

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	4
2	Методические указания по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	9
4	Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	10
5	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	11
	Заключение	14
	Список использованных источников	15

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентовonline и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[1]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентовс текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия,

---

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

Дискуссия занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

Метод «мозговой атаки» или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в

качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;
- время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

Презентация, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю; групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;

- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;

- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;

- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим метода

2. Методические указанияпо подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются дляосвещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии[2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубинаответа.
3. Сознательность ответа(учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложенияматериала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).

---

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod_rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).

6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).

7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

3.Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать

---

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://prisb.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной

дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения

воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;

- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П Немецкий язык Переводческое реферирование: практикум. М. КДУ, 2008. – 368с

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата [Электронный ресурс] Режим доступа. http.//www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С 5

5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа:http://lesgaft.spb ru/sites/default/files/u57/metod rekomendacii dlya studentov 2 1 pdf

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Специальность

21.05.04 Горное дело

Специализация № 3

Открытые горные работы

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья) 3

1.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы 3

1.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции 5

1.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения 6

ТЕМА 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование) 35

2.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы 35

2.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции 36

2.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения 38

ТЕМА 3. Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир) 53

3.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы 53

3.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции 54

3.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения .. 58

ТЕМА 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность) 74

4.1 Лексические единицы, необходимые для освоения темы 74

4.2 Устные темы для развития коммуникативной компетенции 82

4.3 Систематизация грамматического материала: теория и упражнения .. 82

ТЕМА 1. Бытовая сфера общения (Я и моя семья)

Тематика общения:

1. Я и моя семья
2. Дом, жилищные условия
3. Мой рабочий день
4. Досуг и развлечения.

Проблематика общения:

1. Взаимоотношения в семье, семейные традиции.
2. Устройство квартиры/загородного дома.
3. Рабочий день студента
4. Досуг в будние и выходные дни, активный и пассивный отдых.

1.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения темы курса:

родственник relative, relation
родители parents
мать (мама) mother (mom, mum, mama, mamma, mummy, ma)
отец (папа) father (dad, daddy, papa, pa)
жена wife
муж husband
супруг(а) spouse
ребенок, дети child, children
дочь daughter
сын son
сестра sister
брат brother
единственный ребенок only child
близнец twin
близнецы, двойняшки twins
брат-близнец twin brother
сестра-близнец twin sister
однояйцевые близнецы identical twins
тройняшки triplets
бабушка и дедушка grandparents
бабушка grandmother (grandma, granny, grandmamma)
дедушка grandfather (grandpa, granddad, grandpapa, grandad)
внуки grandchildren
внучка granddaughter
внук grandson
прабабушка great-grandmother
прадедушка great-grandfather
прабабушка и прадедушка great-grandparents
правнуки great-grandchildren
тётя aunt
дядя uncle
крестный (отец) godfather
крестная (мать) godmother
отчим, приемный отец stepfather
мачеха, приемная мать stepmother
сводный брат stepbrother
сводная сестра stepsister
брат по одному из родителей half-brother
сестра по одному из родителей half-sister

приемный, усыновленный сын adopted son
приемная, удочеренная дочь adopted daughter
приемный ребенок adopted child
патронатная семья, приемная семья foster family
приемный отец foster father
приемная мать foster mother
приемные родители foster parents
приемный сын foster son
приемная дочь foster daughter
приемный ребенок foster child
неполная семья (с одним родителем) single-parent family
родня the kin, the folks
племянница niece
племянник nephew
двоюродный брат cousin (male)
двоюродная сестра cousin (female)
двоюродный брат (сестра), кузен (кузина) first cousin
троюродный брат (сестра) second cousin
четвероюродный брат (сестра) third cousin
родня со стороны мужа или жены in-laws
свекровь mother-in-law (husband's mother)
свёкор father-in-law (husband's father)
тёща mother-in-law (wife's mother)
тесть father-in-law (wife's father)
невестка, сноха daughter-in-law
зять son-in-law
шурин, свояк, зять, деверь brother-in-law
свояченица, золовка, невестка sister-in-law
семейное положение marital status
холостой, неженатый, незамужняя single
женатый, замужняя married
брак marriage
помолвка engagement
помолвленный, обрученный engaged
развод divorce
разведенный divorced
бывший муж ex-husband
бывшая жена ex-wife
расставшиеся, не разведенные, но не проживающие одной семьей separated
вдова widow
вдовец widower
подружка, невеста girlfriend
друг, парень, ухажер boyfriend
любовник, любовница lover
ухажер, жених, подружка, невеста, обрученный fiance
свадьба wedding
невеста на свадьбе bride
жених на свадьбе (bride)groom
медовый месяц honeymoon

1.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My family

My name is Vladimir Petrov. I am … years old. I was born in 19… in Nizhniy Tagil. I went to school when I was 7. In 20… I finished school number 10 in Ekaterinburg. This year I entered the Ural State Mining University. In five years I shall graduate from this University.

I live in the center of Ekaterinburg. I work at the Ministry of Foreign Trade. I'm an engineer & I am also a student. Many engineers in our Ministry learn foreign languages.

My family is not large. I have a wife & two children. My wife's name is Ann & children's names are Nick & Natalie.

My wife is an economist. My wife is a young woman. She is twenty – nine years old. She works at the Ministry of Foreign Trade, too. She goes to the office every day. My wife doesn't learn English. She already knows English very well. She reads many English books, magazines & newspapers. My wife is also a student. She learns German. She likes languages very much & is going to learn French next year.

My daughter is a girl of ten. She goes to school. She has a lot of subjects at school. She also learns English. She also helps her mother at home.

My son is a little boy. He was born five years ago. I take him to the kindergarten every morning.

My parents are not old. My father is 53. He is an engineer. He graduated from The Ural Polytechnical Institute. He works at a big plant. My mother is 51. She is a teacher. She teaches Russian at school. She graduated from the Leningrad Teachers' Training University.

My sister's name is Katya. She works at an office. Besides she studies at an Evening Department. She is married. Her husband is a doctor. He works at a hospital. They have a little son. He is only six months old.

My elder brother, Boris by name, does not stay with us. He lives in Gorky in a large two-roomed flat. He is a designer. He has also a family of his own. He has a wife & two children: a boy & a girl. Their son is already a pupil. My brother & his family often come to see us. We also visit them sometimes.

I also have a grandfather & a grandmother. They are pensioners. My grandmother looks after the house & does the cooking. We usually take our children to the country in summer to stay with their grandparents. They love their grandchildren very much.

My student's life

I'm a student of The Ural State Mining University. I have been a student only one month. I can't speak English very well yet. I am just a beginner. I live in a hostel. It is rather a long way from the University. In fact, it takes me about an hour to get to the University. But it gives me no trouble at all, as I like to get up early. I don't need an alarm-clock to wake me up. I am an early - riser.

Though the hostel is far from the University it is very comfortable & has all modern conveniences.

As a rule I get up at 6.30, do morning exercises & have shower. I don't have a bath in the morning; I have a bath before I go to bed.

For breakfast I have a boiled egg & a cup of coffee in order not to waste the time. At about 7.30 I am quite ready to go. It is about 5 minutes walk from the hostel to the stop. I usually take the 7.40. bus. I walk to the stop as I have plenty of time to catch my bus.

I come to the University 5 minutes before the lesson begins. So I can have a chat with my friends. The majority of my group mates are from Ekaterinburg the others either come from different towns of our country. We usually have a lot of things to talk about.

We don't go out to the lunch. There is a good canteen at the University. It is on the ground floor. But I should say that you have to stand in a queue to have lunch.

I come to the hostel from the University at about 3 o'clock. I live in a single room & have nobody to speak with. In the evening I sometimes go out with my friends. We go to the cinema if there is something new or to the club if there is a dancing party there. But often I stay in, watch TV

programs or listen to the music. Then I read a book for half an hour or so & go to sleep. That doesn't take me long, as a rule.

My flat

I live in Ekaterinburg in a sixteen-storied dwelling house in the center of the city.
Five years ago our old wooden house was pulled down & we moved here into three-room flat with all modern conveniences.

Now we have running water, gas, electricity, central heating & a refuse chute. We live on the top floor & from the balcony we have a good view of the park. Besides we needn't mount the staircase because there is a lift to take us up.

The entrance hall is rather small. There is a hallstand & a mirror-stand there.

The sitting-room is a spacious simply furnished room. The floor spacious is about 15 square meters. It is not overcrowded with furniture. Everything fits in well. Nothing is out of place here. Next to the window there is a sofa with a stand – lamp. The bookcase in the corner of the room is full of books. On the left there are two comfortable arm-chairs opposite the TV-set & leaf – table.

In the bedroom we have dark brown suite of furniture of the latest model & thick carpet. Near the wall there is a divan-bed. In the built-in-wardrobe we keep our clothes & bed linen.
The adjoining room is the children's room. The bright pattern of the curtains & of wall paper makes the room look gay. There is a writing desk with a desk lamp, a small sofa & a lot of toys there.

In the kitchen there is a fridge, a cupboard, a kitchen table & a gas-stove. Over the sink there is a plate-rack. All kitchen utensils are close at hand.

In the corridor there is a built-in-closet, where we keep our vacuum-cleaner, electric iron & other household objects.

In the bathroom there is a bath-tub & a shower, a towel-rack & a wash-basin with a shelf above it. There tooth-brushes, a cake of soap & some shaving articles on it. Near the bath-room there is a lavatory.

There is nothing special about our flat, no rich decorations but we are accustomed to it & cannot compare it to the old one.

1.3 Систематизация грамматического материала:

1. Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях. Порядок слов в вопросительном предложении. Безличные предложения.
2. Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные).
3. Имя существительное. Артикли (определенный, неопределенный, нулевой).
4. Функции и спряжение глаголов *to be* и *to have*. Оборот *there+be*.
5. Имя прилагательное и наречие. Степени сравнения. Сравнительные конструкции.
6. Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат).

Порядок слов в английском предложении

В русском языке, благодаря наличию падёжных окончаний, мы можем переставлять члены предложения, не меняя основного смысла высказывания. Например, предложения Студенты изучают эти планы и Эти планы изучают студенты совпадают по своему основному смыслу. Подлежащее в обоих случаях - студенты, хотя в первом предложении это слово стоит на первом месте, а во втором предложении - на последнем.

По-английски такие перестановки невозможны. Возьмём предложение The students study these plans Студенты изучают эти планы. Если подлежащее и дополнение поменяются местами, то получится бессмыслица: These plans study the students Эти планы изучают студентов. Произошло это потому, что слово plans, попав на первое место, стало подлежащим.

Английское предложение имеет твёрдый порядок слов.

Порядок слов в английском предложении показан в этой таблице:

I	II	III Дополнение	IV

					Обстоятельство
Подлежащее	**Сказуемое**	**Косвенное без предлога**	**Прямое**	**Косвенное с предлогом**	
We Мы	study изучаем		math математику		
He Он	gives дает	us нам	lessons уроки		in this room. в этой комнате
She Она	reads читает		her notes свои заметки	to Peter Петру	every day. каждый день

Вопросительное предложение

Общее правило построения вопросов в английском языке таково: Все вопросы (кроме специальных вопросов к подлежащему предложения) строятся путем инверсии. Инверсией называется нарушение обычного порядка слов в английском предложении, когда сказуемое следует за подлежащим.

В тех случаях, когда сказуемое предложения образовано без вспомогательных глаголов (в Present и Past Indefinite) используется вспомогательный глагол to do в требуемой форме - do/does/did.

Общие вопросы

Общий вопрос задается с целью получить подтверждение или отрицание высказанной в вопросе мысли. На общий вопрос обычно дается краткий ответ: "да" или "нет".

Для построения общего вопроса вспомогательный или модальный глагол, входящий в состав сказуемого, ставится в начале предложения перед подлежащим.

а) Примеры сказуемого с одним вспомогательным глаголом: Is he speaking to the teacher? - Он говорит с учителем?

б) Примеры сказуемого с несколькими вспомогательными глаголами:

You will be writing letters to us. – Ты будешь писать нам письма.

Will you be writing letters to us? – Будешь ли ты писать нам письма?

Примеры с модальными глаголами:

She can drive a car. – Она умеет водить машину.

Can she drive a car? - Она умеет водить машину? (Yes, she can.; No, she cannot)

Когда в составе сказуемого нет вспомогательного глагола (т.е. когда сказуемое выражено глаголом в Present или Past Indefinite), то перед подлежащим ставятся соответственно формы do / does или did; смысловой же глагол ставится в форме инфинитива без to (словарная форма) после подлежащего.

С появлением вспомогательного глагола do на него переходит вся грамматическая нагрузка - время, лицо, число: в Present Indefinite в 3-м лице ед. числа окончание -s, -es смыслового глагола переходит на глагол do, превращая его в does; а в Past Indefinite окончание прошедшего времени -ed переходит на do, превращая его в did.

Do you go to school? – Ходишь ли ты в школу?

Do you speak English well? - Ты хорошо говоришь по-английски?

Ответы на общие вопросы

Общий вопрос требует краткого ответа "да" или "нет", которые в английском языке образуются следующим образом:

а) Положительный состоит из слова Yes за которым (после запятой) идет подлежащее, выраженное личным местоимением в им. падеже (никогда не используется существительное) и тот вспомогательный или модальный глагол, который использовался в вопросе (вспомогательный глагол согласуется с местоимением ответа);

б) Отрицательный ответ состоит из слова No, личного местоимения и вспомогательного (или модального) глагола с последующей частицей not

Например: Are you a student? - Ты студент?

Yes, I am. - Да.; No, I am not. - Нет.

Do you know him? – Ты знаешь его?
Yes, I do. – Да (знаю).; No, I don't. – Нет (не знаю).

Специальные вопросы

Специальный вопрос начинается с вопросительного слова и задается с целью получения более подробной уточняющей информации. Вопросительное слово в специальном вопросе заменяет член предложения, к которому ставится вопрос.

Специальные вопросы могут начинаться словами:

who? – кто? whom? – кого? whose? - чей? what? – что? какой? which? – который?

when? – когда? where? – где? куда? why? – почему? how? – как?

how much? – сколько? how many? – сколько? how long? – как долго? сколько времени?

how often? – как часто?

Построение специальных вопросов:

1) Специальные вопросы ко всем членам предложения, кроме подлежащего (и его определения) строятся так же, как и общие вопросы – посредством инверсии, когда вспомогательный или модальный глагол ставится перед подлежащим.

Специальный вопрос (кроме вопроса к подлежащему) начинается с вопросительного слова или группы слов за которым следуют вспомогательный или модальный глагол, подлежащее и смысловой глагол (сохраняется структура общего вопроса).

Вопрос к прямому дополнению:

What are you reading? Что ты читаешь?
What do you want to show us? Что вы хотите показать нам?

Вопрос к обстоятельству

Обстоятельства бывают разного типа: времени, места, причины, условия, образа действия и др.

He will come back tomorrow. – Он вернется завтра.
When will he come back? – Когда он вернется?
What did he do it for? Зачем он это сделал?
Where are you from?

Вопрос к определению

Вопрос к определению начинается с вопросительных слов what какой, which (of) который (из), whose чей, how much сколько (с неисчисляемыми существительными), how many сколько (с исчисляемыми существительными). Они ставятся непосредственно перед определяемым существительным (или перед другим определением к этому существительному), а затем уже идет вспомогательный или модальный глагол.

What books do you like to read? Какие книги вы любите читать?
Which books will you take? Какие книги (из имеющихся) вы возьмете?

Вопрос к сказуемому

Вопрос к сказуемому является типовым ко всем предложениям: "Что он (она, оно, они, это) делает (делал, будет делать)?", например:

What does he do? Что он делает?

Специальные вопросы к подлежащему

Вопрос к подлежащему (как и к определению подлежащего) не требует изменения прямого порядка слов, характерного для повествовательного предложения. Просто подлежащее (со всеми его определениями) заменяется вопросительным местоимением, которое исполняет в вопросе роль подлежащего. Вопросы к подлежащему начинаются с вопросительных местоимений:

who – кто (для одушевленных существительных)
what - что (для неодушевленных существительных)
The teacher read an interesting story to the students yesterday.
Who read an interesting story to the students yesterday?

Сказуемое в таких вопросах (после who, what в роли подлежащего) всегда выражается глаголом в 3-м лице единственного числа (не забудьте про окончание -s в 3-м лице ед. числа в Present Indefinite. Правила образования -s форм см. здесь.):
Who is reading this book? Кто читает эту книгу?
Who goes to school?

Альтернативные вопросы

Альтернативный вопрос задается тогда, когда предлагается сделать выбор, отдать чему-либо предпочтение.

Альтернативный вопрос может начинаться со вспомогательного или модального глагола (как общий вопрос) или с вопросительного слова (как специальный вопрос) и должен обязательно содержать союз or - или. Часть вопроса до союза or произносится с повышающейся интонацией, после союза or - с понижением голоса в конце предложения.

Например вопрос, представляющий собой два общих вопроса, соединенных союзом or:
Is he reading or is he writing?
Did he pass the exam or did he fail?

Вторая часть вопроса, как правило, имеет усеченную форму, в которой остается (называется) только та часть, которая обозначает выбор (альтернативу):
Is he reading or writing?

Разделительные вопросы

Основными функциями разделительных вопросов являются: проверка предположения, запрос о согласии собеседника с говорящим, поиски подтверждения своей мысли, выражение сомнения.

Разделительный (или расчлененный) вопрос состоит из двух частей: повествовательной и вопросительной.

Первая часть - повествовательное утвердительное или отрицательное предложение с прямым порядком слов.

Вторая часть, присоединяемая через запятую, представляет собой краткий общий вопрос, состоящий из местоимения, заменяющего подлежащее, и вспомогательного или модального глагола. Повторяется тот вспомогательный или модальный глагол, который входит в состав сказуемого первой части. А в Present и Past Indefinite, где нет вспомогательного глагола, употребляются соответствующие формы do/ does/ did.

В второй части употребляется обратный порядок слов, и она может переводится на русский язык: не правда ли?, не так ли?, верно ведь?

1. Если первая часть вопроса утвердительная, то глагол во второй части стоит в отрицательной форме, например:
You speak French, don't you? You are looking for something, aren't you? Pete works at a plant, doesn't he?

2. Если первая часть отрицательная, то во второй части употребляется утвердительная форма, например:
It is not very warm today, is it? John doesn't live in London, does he?

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Write questions and answers for the following statements, as in the example.

1 Paul was tired when he got home.
...Was Paul tired when he got home? Yes, he was...
2 They live in London.
3 She can't play the piano.
4 The film starts at nine o'clock.
5 You had an English lesson last night.
6 She has got blue eyes.
7 We didn't want to go to the beach.
8 He should follow the doctor's advice.

2. Write the short form of the following negative questions

1 Can they not decide where to go on holiday?

...Can't they decide where to go on holiday?...

2 Did Claire not invite you to her party?

3 Do you not enjoy watching horror films?

4 Have you not finished your homework yet?

5 Can she not go to town on her own?

6 Does he not know where we live?

7 Has Sue not done the shopping for you?

8 Did he not give you any details?

3. Fill in the gaps with the correct question word(s).

A: Now for the general knowledge part of the quiz.

1) ...*What*... is the capital of Egypt?

B: Cairo.

A: That's correct. 2) ... can you see the Mona Lisa?

B: In the Louvre, in Paris.

A: Well done, that's right. 3) ... wrote 'Romeo and Juliet'?

B: Charles Dickens.

A: No, that's incorrect. It was Shakespeare. 4) ... are the Olympic Games held?

B: Every four years.

A: Correct. 5) ... did the Second World War begin?

B: I think it was in 1939.

A: Yes, you're right. And the final question in this round is: 6) ... players are there in a hockey team?

B: Eleven.

A: Correct. Well, at the end of that round, Contestant 2 has the most points, so he goes through to the final round to play for our star prize.

4. Fill in who, whose, what, which, where, when, how long, how often, what time, why, how much or how many.

is your jacket?' 'It's the red one.'

1. '...*Which*... is your jacket?' 'It's the red one.'
2. '...is your birthday?' 'It's next week.'
3. '... is Mary?' 'She's in her bedroom.'
4. '... have you been waiting?' Only five minutes.'
5. '... do you go shopping?' Once a week.'
6. '... are you doing at the moment?' I'm watching TV.'
7. ' ... are you writing to?' 'Uncle Tom.'
8. '...do you start work?' At nine o'clock in the morning.'
9. '... pieces of toast do you want?' Two, please.'
10. '... isn't she at work today?' Because she's ill.'
11. '... did you spend last month?' About £500.'
12. ' ... party are you going tonight?' 'Alison's'

5. Fill in the gaps with what, which or how.

1 A: ...*What*... do you want to do when you leave school?
B: I'm not really sure. I'd like to be a vet.

2 A: ... bag do you prefer - the black one or the brown one?
B: I like the black one best.

3 A: ... old are you?
B: It was my birthday last week. Now I'm fifteen.

4 A: ... did you get my telephone number?
B: I looked in the staff address book.

5 A: ... shall we do on Saturday?
B: Let's just stay at home and watch a video.

6 A: … house did you prefer — the one we saw first or second?
B: I didn't like either. We'll have to keep looking.
7 A: … many pairs of shoes did you buy last year?
B: Only two. One in the summer and one in the winter.
8 A: … is your favourite food?
B: Roast chicken.

6. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 **The tiger** is the largest member of the cat family.
...Which is the largest member of the cat family?...
2 A mature male tiger weighs **between 160 and 230 kg**.
3 Tigers are usually **orange with black stripes**.
4 Tigers live **in Russia, China, India and South-East Asia.**
5 **The Javan tiger, the Bali tiger and the Caspian tiger** are extinct.
6 Tigers eat **a variety of smaller animals, including deer.**
7 Tigers can produce young **at any time of year.**
8 Tigers usually have **two or three** cubs at a time.
9 Tigers live **for an average of eleven years.**
10 Tigers are hunted **for sport or for their fur**.

7. Write questions to which the words in bold are the answers.

Claudette is **32 years old**. She lives **in Paris, France**, and has lived there **since she was 5 years old.** Claudette works as **a lawyer** for a successful law firm, and she travels to work **by car** every day. Claudette is married. Her husband's name is **Jean**. They have **two** dogs. She loves **to take the dogs for long walks** every evening **after work.** Claudette has several hobbies, such as **reading and playing the piano**, but her **favourite hobby is cooking**. Jean thinks this is good, too, **because he gets to eat the wonderful meals she makes.**

8. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 **The Petersons** have bought a dog.
...Who has bought a dog?...
2 The Petersons have bought **a dog.**
...What have the Petersons bought?...
3 Rachel is writing **a letter**.
4 **Rachel** is writing a letter.
5 **Brian** likes this car.
6 Brian likes **this car**.
7 Dad broke **the window**.
8 **Dad** broke the window.
9 **Mother** will make a birthday cake.
10 Mother will make **a birthday cake**.
11 **Robin** is going to bake some biscuits.
12 Robin is going to bake **some biscuits**.

9. Write questions to which the words in bold are the answers.

1 Wendy doesn't agree with **her friend's decision**.
...What doesn't Wendy agree with?...
2 James is listening to **some old records**.
3 Sharon is waiting for **the bus**.
4 The boys were talking about **football**.
5 She has got a letter from **her pen-friend**.
6 Martin is thinking about **his holiday**.
7 This jacket belongs to **Stacey.**
8 Pauline was married to **Nigel.**

10. Complete the questions.

1 There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which …*book is Sue's*...?' 'The one on the table.'
b) 'Whose …*book is on the table*…?' 'Sue's.'
2 Steven wrote four letters.
a) 'Who … ?' 'Steven.'
b) 'How many … ?' 'Four.'
3 Teresa is going to wash the car.
a) 'Who … ?' Teresa.'
b) 'What … ?' 'The car.'
4 Kate visited John in hospital yesterday.
a) 'Who … ?' 'Kate.'
b) 'Who … ?' 'John.'
5 David has taken Frank's new CD.
a) 'Whose …?' 'Frank's.'
b) 'Who …?' 'David.'
6 Alice is going to the cinema tonight.
a) 'Who …?' 'Alice.'
b) 'Where …?'The cinema.'

Безличные предложения

Поскольку в английском языке подлежащее является обязательным элементом предложения, в безличных предложениях употребляется формальное подлежащее, выраженное местоимением it. Оно не имеет лексического значения и на русский язык не переводится.

Безличные предложения используются для выражения:

1. Явлений природы, состояния погоды: It is/(was) winter. (Была) Зима. It often rains in autumn. Осенью часто идет дождь. It was getting dark. Темнело. It is cold. Холодно. It snows. Идет снег.

2. Времени, расстояния, температуры: It is early morning. Ранее утро. It is five o'clock. Пять часов. It is two miles to the lake. До озера две мили. It is late. Поздно.

3. Оценки ситуации в предложениях с составным именным (иногда глагольным) сказуемым, за которым следует подлежащее предложения, выраженное инфинитивом, герундием или придаточным предложением: It was easy to do this. Было легко сделать это.
It was clear that he would not come. Было ясно, что он не придет.

4. С некоторыми глаголами в страдательном залоге в оборотах, соответствующих русским неопределенно-личным оборотам: It is said he will come. Говорят, он придет.

Местоимение. The Pronoun.
Классификации местоимений.

1	**personal**	личные
2	**possessive**	притяжательные
3	**demonstrative**	указательные
4	**indefinite and negative**	неопределенные и отрицательные
5	**quantifiers**	количественные
6	**reflexive**	возвратные
7	**reciprocal**	взаимные
8	**relative**	относительные
9	**defining**	определительные
10	**interrogative**	вопросительные

I. Личные (personal) местоимения

Общий падеж		**Объектный падеж**	
I	я	**me**	мне, меня
he	он	**him**	его, ему

she	она	**her**	ей, о ней
it	оно, это	**it**	ей, ему, этому
we	мы	**us**	нам, нас
they	они	**them**	им, их
you	ты, вы	**you**	тебе, вам

Внимание! He (он) и she (она) в английском языке можно говорить только про людей
Все остальные английские существительные (предметы, животные, явления природы, чувства и т. д.) - обозначаются – it (оно, это)

he	**she**	**it**
a boy – мальчик	**a girl** – девочка	**a cat** – кот
a man – мужчина	**a woman** – женщина	**a wall** – стена
brother – брат	**sister** – сестра	**rain** – дождь
father – отец	**mother**– мама	**love** – любовь
Nick – Николай	**Kate** – Катя	**a hand** – рука
Mr Grey – мистер Грей	**Mrs Grey** – миссис Грей	**an apple** - яблоко

Англичане говорят It's me, а не It's I (это я).

II. Притяжательные (possessive) местоимения

Притяжательные местоимения выражают принадлежность и имеют в английском языке **две формы - основную** (после этой формы обязательно требуется существительное).
Whose pen is it? - *Чья это ручка?* - It's my pen. - *Это моя ручка.*
И **абсолютную** (существует самостоятельно, без существительного) **- It's mine. -** *Это моя.*

Личное местоимение	Основная форма	Абсолютная форма
I – я	**my (toy) - моя (игрушка)**	**his - его**
he – он	**his (toy) - его (игрушка)**	**hers - ее**
she – она	**her (toy) - ее (игрушка)**	**its - его (этого)**
it – оно, это	**its (toy) - его (не о человеке)**	**ours - наша**
we – мы	**our (toy) - наша (игрушка)**	**yours - ваша, твоя**
you – ты, вы	**your (toy) - ваша, твоя (игрушка)**	**theirs - их**
they - они	**their (toy) - их (игрушка)**	

III. Указательные (demonstrative) местоимения

this (это, эта, этот) – **these** (эти) **that** (то, та, тот) - **those** (те)

IV. Неопределенные (indefinite) и отрицательные (negative) местоимения

Местоимения some, any, every, и их производные

• Если у вас есть, например, яблоки и вы знаете, сколько их, вы говорите.
I have/I have got three apples. *У меня есть 3 яблока.*
• Если вы не знаете точное количество, то используйте **неопределенное местоимение some: I have/I have got apples.** *У меня есть несколько яблок (некоторое количество).*

Производные от неопределенных местоимений

Слово "**think**" обозначает "**вещь**" (не обязательно материальная).
Слово "**body**" обозначает "**тело**". Эти слова являются основой для целого ряда словообразований

Thing используется для неодушевленных (что-то):

some **something** – *что-то, что-нибудь*

any	**thing**	**anything** - *что-то, что-нибудь*
no		**nothing** - *ничего, ничто*
every		**everything** - *все*
	Body/one - для одушевленных (кто-то):	
some		**somebody/someone** – *кто-то, кто-нибудь*
any	**body/one**	**anybody/anyone** - *кто-то, кто-нибудь*
no		**nobody / no one** - *никого, никто*
every		**everybody /everyone** – *все, каждый*

Местоимение **some** и основа **body** должны произноситься и писаться слитно, в противном случае вместо **somebody** – *кто-то*, получится **some body** - *какое-то тело*,
Something/somebody/someone - в утвердительных предложениях, **anything/anybody/anyone** - в отрицательных и вопросительных предложениях**, nothing/nobody/no one** – в отрицательных.
Anything/anybody/anyone - также используются в утвердительных предложениях, но в значении *что угодно/кто угодно*

somewhere - *где-нибудь, куда-нибудь*	**anywhere** - *где угодно*
nowhere - *нигде*	**everywhere** - *везде*

V. Количественные (quantifiers) местоимения

Many и much - оба слова обозначают **" много"**, С **исчисляемыми** существительными (теми, которые можно посчитать, можно образовать множественное число) используется слово **many**, а с **неисчисляемыми** - слово **much**.

many girls - *много девочек*	**much snow** - *много снега*
many boys - *много мальчиков*	**much money** - *много денег*
many books - *много книжек*	**much time** - *много времени*

How many? } **сколько?** **How many girls?** - *Сколько девочек?*
How much? } **сколько?** **How much sugar?** - *Сколько сахара?*
How much sugar? - *Сколько сахара?*

a lot of... - много - используется и с исчисляемыми, и с неисчисляемыми существительными a lot без (of) используется и без существительного.

a lot of
girls – много девочек
sugar - много сахара

Сравните: He writes **a lot** of funny stories. *Он пишет много забавных рассказов.*
He writes **a lot.** *Он много пишет.*

<u>В утвердительных</u> предложениях используйте **a lot of.**
<u>В отрицательных</u> и в вопросительных **many/much,**

Сравните:

(+) My grandmother often cooks **a lot of** tasty things. *Моя бабушка часто готовит много вкусного.*

(-) But we don't eat **much.** *Но мы не едим много.* (?) Do you eat much? *Вы много едите?*

Иногда слова **much** и **a lot** являются синонимами слова **"часто":**

Do you ski **much**? *Вы много (часто) катаетесь на лыжах?* No, not much (= not often).Нет, не часто.

Few, little, a few, a little

С неисчисляемыми существительными используйте слово little (мало), а с исчисляемыми - few (мало).

few books - мало книг	**little time** - мало времени
few girls - мало девочек	**little money** - мало денег
few boys - мало мальчиков	**little snow** - мало снега
little } **мало (т.е. надо еще)**	**a little** } **немного (т.е. пока хватает)**

few	a few

VI. Возвратные (reflexive) местоимения

Возвратные местоимения образуются от личных местоимений в объектном падеже и притяжательных местоимений прибавлением **- self** в единственном числе и **- selves** во множественном числе. Возвратные местоимения используются для того, чтобы показать, что объект, названный подлежащим предложения сам совершает действие

Личное местоимение	Возвратное местоимение	Пример	Перевод
I	myself	I did it myself	Я сделал это сам
he	himself	He did it himself.	Он сделал это сам.
she	herself	She did it herself	Она сделала это сама
you	yourself	You did it yourself.	Вы сделали это сами.
they	themselves	They did it themselves.	Они сделали это сами.
we	ourselves	We did it ourselves	Мы сделали это сами.

VII. Взаимные (reciprocal) местоимения

Each other - друг друга (относится к двум лицам или предметам)
One another - друг друга (относится к большему количеству лиц или предметов).
They spoke to <u>each other</u> rather friendly. *Они разговаривали друг с другом довольно дружелюбно.*
They always help <u>one another</u>. *Они всегда помогают друг другу.*

VIII. Относительные (relative) местоимения

Who (whom), whose, which, that

who	**Именительный падеж <u>who</u> (подлежащее)** **The girl <u>who</u> is playing the piano is my sister.** *Девочка, которая играет на пианино, - моя сестра.*
	Объектный падеж <u>whom</u> (дополнение) **The man <u>whom</u> I love the best is your brother.** *Человек, которого я люблю больше всех, – твой брат.*
which	**Для неодушевленных предметов и животных** **The flowers <u>which</u> you brought me were pretty nice.** *Цветы, которые ты мне принес, очень милые.*
whose	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>whose</u> book we read yesterday.** *Это человек, книгу которого мы читали вчера.*
	Для неодушевленных существительных **We saw the tree <u>whose</u> leaves were absolutely yellow.** *Мы увидели дерево, листья которого были абсолютно желтыми.*
that	**Для одушевленных существительных** **This is the man <u>that</u> we saw yesterday.** *Это мужчина, которого мы видели вчера.*
	Для неодушевленных существительных **This is the film <u>that</u> we saw yesterday.** *Это фильм, который мы видели вчера.*

IX. Определительные (defining) местоимения

all

Употребление	Примеры	Перевод
определяет неисчисляемые существительные	He spent **all his** time fishing on the lake.	Он провел все свое время, ловя рыбу на озере.
определяет исчисляемые существительные	**All the** boys like football. **(the после all!)**	Все мальчишки любят футбол.
all = everything	I know **all/everything.**	Я знаю всё.
all = everybody	**All** were hungry. **Everybody** was hungry.	Все были голодны. Все были голодны.
we all = ail of us you all = all of you they all = ail of them	We **all** love you very much = **All** of us love you very much.	Мы все тебя очень любим

both

Употребление	Примеры	Перевод
определяет существительные	**Both (the/my) friends like football.**	Оба моих друга любят футбол
допускается использование артикля вместо указательных местоимений после both	**Both these/the men are Russian.**	Оба (эти) мужчины - русские.
употребляется вместо существительного	**He gave me two apples. Both were sweet.**	Он дал мне два яблока. Оба были сладкими.
they both = both of them you both = both of you we both = both of us	**They both (both of them) came to visit us.**	Они оба пришли навестить нас.
в устойчивой конструкции **both...and.**	**Both mother father were at home**	И мама, и папа были дома.
в отрицательных предложениях **вместо both** используется **neither**	**Both of them know English. Neither of them know English.**	Они оба знают английский. Ни один из них не знает английского.

either/neither

	Употребление	Примеры	Перевод
either	любой из двух (артикль не ставится)	**I've got 2 cakes. Take either cake.**	У меня 2 пирожных. Возьми любое.
	каждый, оба, и тот, и другой	**There are windows on either side of the house.**	С обеих сторон дома есть окна.
	заменяет существительное (глагол в ед. числе)	**Either of dogs is always hungry.**	Любая из собак вечно голодная.
neither	отрицательное местоимение-определение (ни тот, ни другой)	**Neither of examples is correct.**	Ни один из примеров не верен.
	в констр. neither.. .nor (ни.. .ни)	**I like neither tea, nor coffee.**	Я не люблю ни чай, ни кофе.

other, another, the other, the others (другой, другие)

	Употребление	Примеры	Перевод
the other	другой (второй), другой из двух	**You've got 2 balls: one and the other.**	У тебя 2 мяча: один и другой.
another	другой из многих, еще один	**Take another ball.**	Возьми другой мяч.

			(Любой, но не этот)
other	другие (любые), не последние	**Take other 2 balls.**	Возьми другие 2 мяча (Из многих.)
the others	другие (определенные)	**There are 4 balls: 2 balls are red and the others are blue.**	Есть 4 мяча. 2 красных, а другие 2 - синие.

X. Вопросительные (interrogative) местоимения

what	что	**What's this?**	Что это?
which	который	**Which of them?**	Который из них?
who	кто, кого	**Who was that?**	Кто это был?
whom	кого	**Whom did you meet?**	Кого ты встретил?
whose	чей	**Whose book is it?**	Чья это книга?

Имя существительное. The Noun

Категории	Существительные в русском языке	Существительное в английском языке
Число	**Изменяется**	**Изменяется**
Падеж	**Изменяется**	**Не изменяется**

Выполните упражнения на закрепление материала:

*. **Fill in the gaps with the correct subject or object pronoun.***

1 A. Do your brothers play football?
B. Yes, ...*they*... play … all the time … think …'s a brilliant game
2 A Does Susan eat chocolate?
B: Yes … eats … all the time … says . 's her favourite food
3 A Do your parents know Mr Jones?
B Yes, know very well lives next door to
4 A Does Claire like David?
B: No, … doesn't like … very much. … says …'s too noisy.
5 A Do you listen to rock music?
B Yes, listen to … all the time . think 's fantastic
6 A Does Tony enjoy fishing?
B: Oh, yes . enjoys … very much .. says … relaxes him

2. Fill in the gaps with there or it.

1 By the time I got home, . *it* . was nearly ten o'clock
2 'Is your birthday today?" No, .. was last week.'
3 Come here, Simon .. is someone here to see you I think . is your friend, Rod.
4 … wasn't warm enough to go to the beach, so we went to the cinema.
5 … wasn't very much money left after I had paid for the shopping.

3. Fill in the gaps with one or it.

1 A I need a loaf of bread
B. I'll buy ...*one*... this afternoon.
2 A. Is the phone ringing?
B: I can't hear .
3 A 'Titanic' is an amazing film
B I know, I've seen twice
4 A When was the last time you read a book?
B: I haven't read for months.

5 A: Have you got a car?
B: No. I can't afford … .
6 A: Do you like the new Rolling Stones CD?
B: I haven't heard … yet.
7 A: I need a dress for the party.
B: I'll lend you … .

4. Fill in the correct possessive adjective or pronoun.

1 A: Have you met ...*your*... new neighbours yet?
B: No. I've seen … children in the garden, though.
2 A: You took … coat home last night.
B: I know, I'm sorry. I thought it was … because they're both black.
3 A: What's wrong with Rosie?
B: Oh, she's been having problems with … back recently.
4 A: James is doing well at school.
B: I know … teacher says he's very advanced for his age.
5 A: Is this bag … ?
B: Oh, yes, thank you. I nearly forgot it.
6 A: Julie and Frank are so lucky … house is beautiful.
B: Yes, and it's so much bigger than … I envy them.
7 A: I like … shirt. It's like Sandra's.
B: Actually, it is … I borrowed it from her yesterday.
8 A: Why did you lend Tom … car?
B: Because … is being repaired at the moment.

5. Fill in its or it's.

1 The car is nice to drive, but I don't like ...its... colour.
2 This town is wonderful … got lots of shops!
3 I'm staying at home today because … cold outside.
4 Let's go in here … my favourite restaurant.
5 A bird has built … nest in our garden.
6 The company I work for has changed … name.

6. Fill in a possessive adjective or the.

1 A dog bit him on ...*the*... leg.
2 I banged … head on the cupboard door.
3 Karen put … arm around Jane's shoulder.
4 Don't put … feet on the table!
5 You shouldn't have punched Tom in … stomach.
6 Paul patted Lisa on … shoulder.

7. Fill in the gaps with of where necessary, and my, your, etc. own.

1 John doesn't live with his parents any more. He's got a flat ...*of his own*...
2 She doesn't travel by bus any more because she's got … car.
3 I don't need to borrow your umbrella. I've got one … .
4 Haven't you got … pen? You're always borrowing mine.
5 My job includes doing research in … time.
6 Sam is tired of using his friend's computer, so he is going to buy one… .
7 The couple moved into … house after they got married.
8 Don't let the dog sleep on your bed. It's got a bed … .

8. Connect the nouns using -'s, -' or ...of…

1 car/Helen ...*Helen's car*…
2 the manager/the restaurant
3 shoes/women
4 the results/the test
5 bicycles/my daughters

6 secretary/the assistant manager
7 the corner/the room
8 house/their parents
9 the back/the classroom
10 shoes/William
11 walk/an hour
12 partner/Jim
13 Rome/the streets
14 UN/headquarters

9. Rewrite the sentences using the correct possessive form.

1 Nobody went to **the meeting last week**.
..Nobody went to last week's meeting...
2 The **drive** to the airport takes **two hours**.
3 They will get their exam results **six weeks from now**
4 I look after **James - Karen — children**.
5 I received the letter in **the post - yesterday**
6 It's autumn **The tree - the leaves** are falling off.
7 Graham never listens to **his doctor - the advice.**
8 Are you going to **Jane - Paula - the party**?
9 He has never done a **hard day of work** in his life
10 At the moment I'm staying with a **friend - my**
11 I think I'll order **the special of today**.
12 The man knocked on **the house - the door**
13 The ticket inspector looked at **the people – the tickets.**
14 **Mrs Jones - Miss Smith – cars** are being serviced
15 **The sales target this month** is two million pounds.

10. Fill in the gaps with the correct reflexive pronoun.

1 The girl has hurt … *herself*... .
2 He put the fire out by …
3 She is looking at … in the mirror.
4 They are serving …
5 He cooked the food by …
6 They bought this house for ..
7 They are enjoying .
8 He introduced …

The Plural Form of Nouns

Образование множественного числа у английских существительных

Способ образования	Примеры	Перевод
после глухих согласных	**a book - books** **a cup - cups**	**книга - книги** **чашка - чашки**
после звонких согласных и гласных -	a name - names a girl - girls	**имя – имена** **девочка - девочки**
после шипящих, свистящих звуков -ch, -sh. -x. -s, -z -es	a palace - palaces a bush - bushes a box - boxes a church - churches	дворец - дворцы куст - кусты коробка - коробки церковь - церкви
слово заканчивается на -y: 1) гласная +y	**a toy - toys** **a boy - boys**	игрушка - игрушки мальчик - мальчики

2) согласная + y	**a family - families** **a story - stories**	**семья - семьи** **история - истории**
слово заканчивается на *-file*	**a leaf - leaves** **a shelf - shelves**	лист - листья полка - полки

Особые случаи образования множественного числа

Ед. число	**Мн. число**	**Перевод**
man	**men**	мужчина - мужчины
woman	women	женщина - женщины
foot	**feet**	нога (стопа) – ноги (стопы)
child	**children**	ребенок – дети
goose	geese	гусь - гуси
mouse	mice	мышь - мыши
ox	oxen	**бык - быки**
tooth	teeth	**зуб - зубы**

Слова - заместители существительных **Substitutions: one/ones**

При повторном использовании одного и того же существительного в одном предложении, вместо него следует использовать one (в единственном числе) и ones (во множественном числе):
This table is bigger that that one - Этот стол больше, чем тот (стол)
These table are bigger than those ones. - Эти столы больше, чем те (столы).

Со словами one/ones может быть использован артикль, если перед ними стоит прилагательное.	
What apple do you want? **Какое ты хочешь яблоко?** **The red one. Красное.**	**What apples do you want?** **Какие яблоки ты хочешь?** **The red ones. Красные.**

Английские существительные не имеют падежных окончаний традиционно выделяют два падежа -общий и притяжательный.

Общий падеж

И. п. Эта девочка хорошо говорит по-английски.	This girl speaks English well.
Р. п. Это собака той девочки.	It's a dog of that girl
Д. п. Я дал яблоко той девочке. .	I gave an apple to that girl.
В. п. Я вижу маленькую девочку. .	I can see a little girl.
Т. п. Я люблю гулять с этой девочкой.	I like to play with this girl.
П. п. Я часто думаю об этой девочке.	I often think about this girl.

Притяжательный падеж. The Possessive Case

Образование притяжательного падежа

	Образование	**Примеры**	**Перевод**
существительные в единственном числе	**'s**	**bird's house** **child's ball**	домик птички мячик ребенка
существительные во множественном числе (группа исключений)	**'s**	**children's ball** **women's rights**	мячик детей права женщин
существительное во множественном числе	**'**	**girls' toy** **birds' house**	игрушка девочек домик птичек

Формула притяжательного падежа обычно имеют лишь одушевленные существительные, обозначающие живое существо, которому что-то принадлежит,

my mother's book - мамина книга,

this girl's bail - мячик девочки,

the bird's house - домик птички

Для того, чтобы показать принадлежность объекта неодушевленному предмету, используется предлог of:

the handle of the door (ручка (от) двери), но чаще образуется составное существительное door-handle,

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Fill in the gaps with an appropriate noun + of to indicate quantity.

1 a ... carton/glass/jug of ... orange juice
2 a … cheese
3 a … bread
4 a … coffee
5 a … water
6 a … wine
7 a … chocolate
8 a … crisps
9 a … honey
10 a … meat
11 a … spaghetti
12 a … flour

2. Fill the gaps with a, an, or some where necessary.

1 a) We had ...some... delicious food last night,
b) We had ...a... delicious meal last night.
2 a) There is … beautiful furniture in that shop,
b) There is … beautiful table in that shop.
3 a) I'm thirsty. I need … drink.
b) I'm thirsty. I need … water.
4 a) She's just bought … expensive clothes.
b) She's just bought … expensive dress.
5 a) They booked … room in advance.
b) They booked … accommodation in advance
6 a) The band played … lovely song.
b) The band played … lovely music.
7 a) We had … heatwave last week.
b) We had … hot weather last week.
8 a) I can't do this job alone. I need … assistant
b) I can't do this job alone. I need … help.
9 a) He has got … heavy luggage to carry.
b) He has got … heavy suitcase to carry.
10 a) I need … cutlery to eat this food with.
b) I need … knife and fork to eat this food with.
11 a) She has got … important job to do.
b) She has got … important work to do.
12 a) He found … coin on the ground.
b) He found … money on the ground.

3. Complete the sentences using the noun in brackets in the singular or plural form and a/an where necessary.

1. He gave me a box' of my favourite ...chocolates.... (chocolate)
2. His favourite food is … . (chocolate)
3. She bought … on her way to work. (paper)
4. He placed all the important … in his briefcase. (paper)
5. I need some … to write this message on. (paper)
6. Hurry up! We don't have much …. (time)
7. She has visited us several … this month. (time)
8. He has no … but he is keen to learn. (experience)
9. She had a lot of exciting … during her travels. (experience)
10. We went far a walk in the … after lunch. (wood)
11. His desk is made of …… . (wood)
12. Jane is in her… reading a book. (room)
13. We have got plenty of … for a party in here. (room)
14. I am going to have my … cut tomorrow. (hair)
15. There was …in my soup. (hair)
16. I'm thirsty. I need … of water. (glass)
17. Susan only wears her … when she reads. (glass)
18. This ornament is made of coloured …. . (glass)
19. Helen bought … in the sale at the electrical store. (iron)
20. The old gate was made of … .(iron)

4. Cross out the expressions which cannot be used with the nouns, as in the example.

1 There are **several, many, <u>much,</u> plenty of, <u>too little</u>** things you can do to help.
2 He has met **a couple of, a few, very little, plenty of, too much** interesting people.
3 She earns **few, hardly any, plenty of, several, a great deal** of money.
4 We have got **no, many, lots of, a great deal of, a few** work to do.
5 Don't worry, there's **a little, plenty of, a couple of, many, a lot of** time.
6 **Both, Several, A large quantity of, Plenty of, Too much** students applied for the course.
7 He's got **no, hardly any, a little, some, a small amount of** qualifications.
8 She's got **hardly any, several, a little, a few, a lot of** experience in dealing with customers.
9 There is **too much, a lot of, hardly any, few, several** salt in this soup.
10 There is **a little, many, too much, a great number of, some** traffic on the roads today.

5. Underline the correct word.

1 A: I have a Physics exam tomorrow.
B: Oh dear. Physics **<u>is</u>/are** a very difficult subject.
2 A: My office is three miles from my house.
B: Three miles **is/are** a long way to walk to work.
3 A: My little brother has got measles.
B: Oh dear. Measles **is/are** quite a serious illness.
4 A: Jane looked nice today, didn't she?
B: Yes. Her clothes **were/was** very smart.
5 A: I've got two pounds. I'm going to buy a CD.
B: Two pounds **is/are** not enough to buy a CD.
6 A: The classroom was empty when I walked past.
B: Yes. The class **was/were** all on a school outing.
7 A: Have you just cleaned the stairs?
B: Yes, so be careful. They **is/are** very slippery.
8 A: Did you ask John to fix your car?
B: Yes. His advice **was/were** that I take it to a garage.

9 A: Did you enjoy your holiday?
B: Yes, thank you. The weather **was/were** wonderful.
10 A: These trousers **is/are** very old.
B: You should buy a new pair.
11 A: How **is/are** the company doing lately?
B: Great. We opened up two more branches.
12 A: I am going to travel for two years when I finish school.
B: Two years **is/are** a long time to be away from home.

6. Finish the sentences, as in the example.

1 You need a lot of experience to do this job. A lot of experience ...is needed to do this job...
2 They gave us some interesting information. The information …
3 She likes Maths more than any other subject. Maths …
4 We had mild weather this winter. The weather …
5 We called the police immediately. The police …
6 I told them some exciting news. The news …
7 He was irritated because of the bad traffic. He was irritated because the …
8 I stayed in very luxurious accommodation. The accommodation …
9 The driver took the luggage out of the car. The luggage …
10 She gave me very sensible advice. The advice she gave me …
11 These shorts are too big for me. This pair of shorts …
12 The hotel is in magnificent surroundings. The hotel surroundings …
13 She's got long blonde hair. Her hair …

Артикль. The Article

1. Неопределенный a/an (используется перед исчисляемыми существительными в единственном числе)

a cat –кот a dog –собака a boy – мальчик a girl -девочка
a teacher - учитель

2. Определенный the (может использоваться с любыми существительными)

the cat -кот the houses –дома the water -вода the weather –погода
the flowers - цветы

Если слово начинается с гласной буквы, к артиклю "a" добавляется буква "n", для того, чтобы две гласные не сливались: an apple (яблоко), an orange (апельсин), an author (автор) и т. д. Слово "an hour" (час) начинается с согласной буквы "h", но в слове эта буква не читается, т.е. слово начинается с гласного звука, поэтому к артиклю "a" также добавляется n = an

Упоминая объект впервые, перед ним ставят неопределенный артикль a/an при вторичном с упоминании того же самого объекта, перед ним ставят определенный артикль the

I see a cat, Я вижу кота (одного). The cat is black. (этот) Кот – черный.

This is a kitten. Это - котенок. (Один из многих) The kitten is hungry. (этот) Котенок - голодный.

I have a book- У меня есть книга. The book is interesting. (эта) Книга - интересная.

Неопределенный артикль a/an опускается перед исчисляемыми существительными и существительными во множественном числе.

a pen - pens (ручка - ручки) a dog - dogs (собака - собаки) a book - books (книга -книги)
- water (вода) - snow (снег) - meat (мясо)

Использование неопределенного артикля a

один из множества (любой)	This is a cat.
первое упоминание в тексте	I see a bird.
при упоминании профессии	My brother is a pilot.
в восклицательных предложениях	What a good girl! What a surprise!

	Such a fine room!
вместо слова один	She is coming for a week.
в определенных конструкциях there is a... I have a... he has a... I see a... this is a... that is a ... It is a... Iama... he/she is a...	There is a book here. I have got a nice coat. He has a kind smile. I see a wolf. This is a dog. That is a doctor. It is a red pen. I am a good swimmer. He/she is a tourist
в ряде устойчивых словосочетаний at a quarter.., in a loud, (a low, an angry voice) to have a good time a lot of to go for a walk such a... after a while in a day (a month, a week, a year)	Come at a quarter to 8. Don't speak to him in an angry voice. We had a good time in the country. She has got a lot of presents. Let's go for a walk. He is such a clever boy. You'll see them after a while. We are living in a day.

Использование определенного артикля the

если речь идет о конкретном лице или предмете	The pen is on the table.
при повторном упоминании того же самого объекта	I see a cat. The cat is black.
если слово обозначает нечто, существующее в единственном лице, с частями света	the sun, the moon, the Earth
со словами: only (только), main (главный), central (центральный), left (левый), right (правый), wrong (неправильный), next (следующий), last (последний), final (заключительный)	The only man I love the main road to the left, to the right It was the right answer. the final test
с порядковыми числительными	the first, the tenth
с прилагательными в превосходной степени	the kindest, the most interesting the best
с музыкальными инструментами и танцами	to play the piano, to dance the tango
с обобщающими существительными (класс людей» животных, термины, жанры)	The Britons keep their traditions.
с названиями музеев, кинотеатров, кораблей, галерей, газет, журналов	the Hermitage the Tretyakov Gallery the Avrora the Seasame Street
с названиями океанов, рек, морей, каналов, пустынь, групп, островов, штатов, горных массивов, наименований с of	the Atlantic ocean the Neva river the Black sea Changing of the Guard

Использование определенного артикля в ряде устойчивых словосочетаний

in the middle, in the corner	The table is in the middle of the room.
in the morning, In the evening, in the afternoon	I never drink coffee in the evening.
what's the use?	What's the use of going there so late?
to the cinema, to the theatre, to the shop, to the market	Do you like going to the theatre? He works at the shop.

at the cinema, at the theatre, at the shop, at the market the fact is (was) that... where is the…? in the country, to the country	The fact is that I have no money at all. Where is the doctor? We always spend summer in the country.

Сколько бы прилагательных-определений ни стояло перед существительным, все эти определения ставятся между артиклем и существительным: A big, black, fat cat большой, черный, толстый кот.

Случаи, когда артикль не употребляется

если, перед существительным стоит притяжательное местоимение	a pen - my pen a dog - his dog the teacher - our teacher the apple - her apple
если перед существительным стоит указательное местоимение	the cats - those cats the books - these books a mouse - this mouse
если стоит другое существительное в притяжательном падеже	a car - father's car the horse - farmer's horse a bike - brother's bike the doll - sister's doll
если перед существительным стоит, количественное числительное	5 balls, 7 bananas, 2 cats
если перед существительным стоит отрицание “no”	She has no children. I see no birds.
перед именами	Mike, Kate, Jim, etc
с названиями дней недели	Sunday, Monday, etc.
с названиями месяцев	May, December, etc.
с названиями времен года	in spring, in winter
с названиями цветов	white, etc. I like green
с названиями спортивных игр	football, chess, etc.
с названиями блюд, напитков	tea, coffee, soup, etc,
с названиями праздников	Easter, Christmas, etc.
с названиями языков, если нет слова (язык). Если есть, нужен артикль the	English, etc. I learn English, the English language
с названиями стран	Russia, France, etc HO: the USA, the United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, the Netheriands, the Ukraine, the Congo
с названиями городов	Moscow, Paris, etc.
с названиями улиц, площадей	Trafalgar Square
с названиями парков	St James’ Park, Hyde Park
с названиями мостов	Tower Bridge
с названиями одиночных гор	Kilimanjaro
с названиями озер	Loch Ness
с названиями континентов	Asia, Australia, etc.
с названиями одиночных островов	Cyprus
если перед существительными стоит вопросительное или отрицательное	what animals can swim? I know what thing you have lost!

местоимение	

ГЛАГОЛ (THE VERB)

Глаголом называется часть речи, обозначающая действие или состояние предмета или лица.

В английском языке признаком глагола в неопределенной форме (инфинитиве) является частица to.

По своей структуре глаголы делятся на:

1. Простые, состоящие только из одного корня:

to fire - стрелять; зажигать
to order - приказывать
to read - читать
to play - играть

2. Производные, состоящие из корня и префикса, из корня и суффикса или из корня, префикса и суффикса:

to unpack - распаковывать
to dismiss - увольнять, отпускать
to realize - представлять себе
to shorten - укорачивать (ся)
to encounter - встречать (ся), наталкивать (ся)
to regenerate - перерождаться, возрождаться

3. Сложные, состоящие из двух основ (чаще всего основы существительного или прилагательного и основы глагола):

to broadcast (broad + cast) - передавать по радио
to whitewash (white + wash) - белить

4. Составные, состоящие из глагольной основы и наречия или предлога:

to carry out - выполнять
to sit down - садиться

По значению глаголы делятся на смысловые и служебные.

1. Смысловые глаголы имеют самостоятельное значение, выражают действие или состояние: Lomonosov as a poet and scientist played a great role in the formation of the Russian literary language. Как поэт и ученый Ломоносов сыграл огромную роль в создании русского литературного языка.

2. Служебные глаголы не имеют самостоятельного значения и употребляются для образования сложных форм глагола или составного сказуемого. Они являются спрягаемым элементом сказуемого и в его формах выражается лицо, число и время. К ним относятся:

1. Глаголы-связки to be быть, to become становиться, to remain оставаться, to grow становиться, to get, to turn становиться, to look выглядеть, to keep сохраняться.

Every man is the maker of his own fortune. Каждый человек-творец своей судьбы.

2. Вспомогательные глаголы to be, to do, to have, to let, shall, will (should, would):

The kitchen was supplied with every convenience, and there was even a bath-room, a luxury the Gerhardts had never enjoyed before. На кухне имелись все удобства; была даже ванная комната- роскошь, какой Герхардты никогда до сих пор не обладали.

3. Модальные глаголы can, may, must, ought, need: He that would eat the fruit must climb the tree. Кто любит фрукты, должен влезть на дерево (чтобы сорвать). (Любишь кататься-люби и саночки возить.)

Все формы глагола в английском языке делятся на личные и неличные.

Личные формы глагола выражают время, лицо, число, наклонение. Они выполняют в предложении функцию сказуемого. К личным формам относятся все формы времен действительного и страдательного залога (изъявительного и сослагательного наклонения):

As you leave the Kremlin by Spassky Gate you come out on the Red Square. Если вы выходите из Кремля мимо Спасских Ворот, вы оказываетесь на Красной площади.

Неличные формы глагола не различаются по лицам и числам. Они не могут самостоятельно выполнять в предложении функцию сказуемого, но могут входить в его состав. К неличным формам относятся: инфинитив, причастие и герундий. Every step towards eliminating nuclear weapons is in the interests of every nation. Любой шаг в направлении уничтожения ядерного оружия служит интересам каждого государства.

Личные формы глагола в английском языке имеют три наклонения: изъявительное (the Indicative Mood), повелительное (the Imperative Mood) и сослагательное (the Subjunctive Mood).

Глаголы в изъявительном наклонении выражают реальное действие, передают факты: His son goes to school. Его сын учится в школе.
She has written an interesting article. Она написала интересную статью.
A new building of the theatre was built in this street. На этой улице построили новое здание театра.

Глаголы в повелительном наклонении выражают приказание, просьбу, совет, запрещение, команду:
"Don't buy them", warned our cautious driver. "Не покупайте их", - предупредил наш осторожный шофер.
Undertake not what you cannot perform but be careful to keep your promise. Не беритесь за то, что не сможете выполнить, но старайтесь сдержать обещание.

Глаголы в сослагательном наклонении выражают действие не реальное, а желательное или предполагаемое: If there were no bad people, there would be no good lawyers. Если бы не было плохих людей, не было бы хороших адвокатов.

Как личные, так и неличные формы глагола имеют **два залога**: действительный (the Active Voice) и страдательный (the Passive Voice).

Глаголы в действительном залоге выражают действие, которое производится подлежащим: I inform you that I have carried out the mission. Сообщаю, что я выполнил задание.

Глаголы в страдательном залоге выражают действие, которое испытывает на себе подлежащее: I was informed that the mission had been carried out. Мне сообщили, что задание было выполнено.

Формы глагола могут выражать отношение между действием и временем. В русском языке бывают глаголы **совершенного и несовершенного вида**. **Глаголы совершенного вида** обозначают действие, которое закончено, и есть его результат:
Он прочитал эту статью с интересом.

Глаголы несовершенного вида обозначают действие, указывая на его повторяемость, длительность, незаконченность: Вчера он читал эту статью с интересом. (Но он мог и не прочитать ее).

Вид глагола в русском языке выражается либо изменением его формы, либо с помощью суффиксов и приставок. Видовые значения глагола в английском языке выражаются сочетанием вспомогательного глагола с причастием настоящего или прошедшего времени смыслового глагола.

В английском языке четыре видо-временных группы глагола: неопределенные времена (Indefinite Tenses), продолженные времена (Continuous Tenses), совершенные времена (Perfect Tenses), и совершенные продолженные времена (Perfect Continuous Tenses). В каждой временной группе три времени: настоящее (Present), прошедшее (Past), будущее (Future).

Глагол “to be”

A: Are you from England?
B: No, we aren't. We're from China.

He's Tom and she's Helen. They are friends.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Am I?

I am	I'm	I am not	I'm not	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Is he?
He is	He's	He is not	He isn't	Is she?
She is	She's	She is not	She isn't	Is it?
It is	It's	It is not	It isn't	Are we?
We are	We're	We are not	We aren't	Are you?
You are	You're	You are not	You aren't	Are they?
They are	They're	They are not	They aren't	

Краткими ответами называются ответы на вопросы, начинающиеся с глагольной формы is /are; в кратком ответе содержание вопроса не повторяется. Употребляется только Yes или No, далее личное местоимение в именительном падеже и глагольная форма is (isn't) / are (aren't). Например: Are you British? No, I'm not.
Yes, I am /we are. No, I'm not/we aren't.
Yes, he/she/it is. No, he/she/it isn't.
Yes, they are. No, they aren't.

WAS/WERE

Bob is eighty. He's old and weak.
Mary, his wife is seventy-nine. She's old too.
Fifty years ago they were young. Bob was strong. He wasn't weak. Mary was beautiful. She wasn't old.
В прошедшем простом времени (past simple) глагол "to be" с личными местоимениями в именительном падеже имеет следующие формы: was для I, he, she, it и –were для –we, you, they. В вопросахwas/were ставятся перед личным местоимением в именительном падеже (I, you, he и т.д.) или существительным. Например: She was ill yesterday. -> Was she ill yesterday? Отрицания образуются путем постановки not после was/were. Например: She was not ill yesterday. She wasn't ill yesterday.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I was	I was not	I wasn't	Was I?
You were	You were not	You weren't	Were you?
He was	He was not	He wasn't	Was he?
She was	She was not	She wasn't	Was she?
It was	It was not	It wasn't	Was it?
We were	We were not	We weren't	Were we?
You were	You were not	You weren't	Were you?
They were	They were not	They weren't	Were they?

ОБОРОТ THERE IS/THERE ARE

There is a sofa in the room. There are two pictures on the wall. There isn't a TV in the room. What else is there in the room?

Мы употребляем конструкцию there is/there are, чтобы сказать, что кто-то или что-то существует или находится в определенном месте. Краткая форма there is – there's. There are не имеет краткой формы. Например: There is (There's) a sofa in the room. There are four children in the garden.

Вопросительная форма: Is there? Are there? Например: Is there a restaurant in the town? Are there any apples in the basket?

Отрицательная форма: There isn't …/There aren't … Например: There is not / isn't a man in the room. There are not/aren't any cars in the street.

Краткие ответы строятся с помощью Yes, there is/are или No, there isn't / aren't. Содержание вопроса не повторяется.

Yes, there is. No, there isn't.
Yes, there are. No, there aren't.

Мы употребляем there is / there are, чтобы сказать, что что-то существует или находится в определенном месте, it is / they are - когда уже упоминали об этом. Например: There is a house in the picture.

It is a big house. (Но не: It's a house in the picture.)
There are three books on the desk.
They are history books. (Но не: They are three books on the desk.)

Конструкция There was/There were

This is a modern town today.
There are a lot of tall buildings and shops. There are cars and there isn't much peace and quiet.
This is the same town fifty years ago.
There weren't any tall buildings. There were some old houses. There weren't many cars and there wasn't much noise.

Конструкция There was/There were - это There is / There are в форме past simple. There was употребляется с существительными в единственном числе. Например: There was a post office in the street thirty years ago. There were употребляется с существительными во множественном числе. Например: There were a few houses in the street thirty years ago.

В вопросах was/were ставятся перед there. Например: Was there a post office in the street thirty years ago? Were there any houses in the street thirty years ago?

Отрицания строятся путем постановки not после was / were. Например: There was not / wasn't a post office in the street thirty years ago. There were not / weren't any houses in the street thirty years ago.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
There was	There was not	There wasn't	Was there?
There were	There were not	There weren't	Were there?

Краткие ответы строятся с помощью Yes или No и there was/there were. Содержание вопроса не повторяется.

Was there a book on the desk? Yes, there was. No, there wasn't.
Were there any people in the shop? Yes, there were. No, there weren't.

Глагол Have got

A bird has got a beak, a tail and wings.
Has she got long hair? No, she hasn't. She's got short hair.
What have they got? They've got roller blades. They haven't got skateboards.
She has got a headache.

Have (got) используется:

а) чтобы показать, что что-то принадлежит кому-то. Например: He's got a ball.
б) при описании людей, животных или предметов. Например: She's got blue eyes.
в) в следующих высказываниях: I've got a headache. I've got a temperature. I've got a cough, I've got a toothache, I've got a cold, I've got a problem.

Утверждение		Отрицание		Вопрос
Полная форма	Краткая форма	Полная форма	Краткая форма	Have I (got)?
I have (got)	I've (got)	I have not (got)	I haven't (got)	Have you (got)?
You have (got)	You've (got)	You have not (got)	You haven't (got)	Has he (got)?
He has (got)	He's (got)	He has not (got)	He hasn't (got)	Has she (got)?
She has (got)	She's (got)	She has not (got)	She hasn't (got)	Has it (got)?
It has (got)	It's (got)	It has not (got)	It hasn't (got)	Have we (got)?
We have (got)	We've (got)	We have not (got)	We haven't (got)	Have you (got)?

You have (got) They have (got)	You've (got) They've (got)	You have not (got) They have not (got)	You haven't (got) They haven't (got)	Have they (got)?

Had

Grandpa, did you have a TV when you were five?
No, I didn't. People didn't have TV's then. They had radios.

Have (had) в past simple имеет форму Had для всех лиц.

Вопросы строятся с помощью вспомогательного глагола did, личного местоимения в именительном падеже и глагола - have. Например: Did you have many toys when you were a child? Отрицания строятся с помощью did not и have. Например: I did not / didn't have many toys when I was a child.

Утверждение	Отрицание		Вопрос
	Полная форма	Краткая форма	
I had	I did not have	I didn't have	Did I have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
He had	He did not have	He didn't have	Did he have?
She had	She did not have	She didn't have	Did she have?
It had	It did not have	It didn't have	Did it have?
We had	We did not have	We didn't have	Did we have?
You had	You did not have	You didn't have	Did you have?
They had	They did not have	They didn't have	Did they have?

Имя прилагательное. The Adjective

Категории	**Прилагательное в русском языке**	**Прилагательное в английском языке**
Число	изменяется	не изменяется
Род	изменяется	не изменяется
Падеж	изменяется	не изменяется

Образование имен прилагательных

Имена прилагательные бывают: **простые и производные**

К **простым** именам прилагательным относятся прилагательные, не имеющие в своем составе **ни приставок, ни суффиксов: small** - *маленький*, **long** - *длинный*, **white** - *белый*.

К **производным** именам прилагательным относятся прилагательные, имеющие в своем составе **суффиксы** или **приставки**, или одновременно и те, и другие.

Суффиксальное образование имен прилагательных

Суффикс	**Пример**	**Перевод**
- ful	use**ful** doubt**ful**	**полезный** **сомневающийся**
- less	help**less** use**less**	**беспомощный** **бесполезный**
- ous	fam**ous** danger**ous**	**известный** **опасный**
- al	form**al** central	**формальный** **центральный**
- able	eat**able** cap**able**	**съедобный** **способный**

Приставочный способ образования имен прилагательных

Приставка	Пример	Перевод
un -	**un**cooked **un**imaginable	**невареный** **невообразимый**
in -	**in**capable **in**human	**неспособный** **негуманный**
il -	**il**legal **il**liberal	**нелегальный** **необразованный**
im -	**im**possible **im**practical	**невозможный** **непрактичный**
dis -	**dis**honest **dis**agreeble	**бесчестный** **неприятный**
ir -	**ir**regular **ir**responsible	**неправильный** **безответственный**
Некоторые имена прилагательные являются составными и образуются из двух слов, составляющих одно понятие: **light-haired** – светловолосый, **snow-white** – белоснежный.		

Прилагательные, оканчивающиеся на – ed и на - ing

- ed	**- ing**
Описывают чувства и состояния	**Описывают предметы, вещи, занятия, вызывающие эти чувства**
interested – интересующийся, заинтересованный	**interesting -** интересный
bored - скучающий	**boring -** скучный
surprised - удивленный	**surprising -** удивительный

Степени сравнения прилагательных

Английские прилагательные не изменяются ни по числам, ни по родам, но у них есть **формы степеней сравнения.**

Имя прилагательное в английском языке имеет **три формы** степеней сравнения:

- положительная степень сравнения **(Positive Degree);**

- сравнительная степень сравнения **(Comparative Degree);**

- превосходная степень сравнения **(Superlative Degree).**

Основная форма прилагательного - положительная степень. Форма сравнительной и превосходной степеней обычно образуется от формы положительной степени одним из следующих способов:

1. -er, -est

Односложные прилагательные образуют **сравнительную степень** путем прибавления **к форме прилагательного в положительной степени** суффикса **- er.** Примерно, тоже самое мы делаем и в русском языке - добавляем "е" (большой - больше, холодный - холоднее).

Превосходная степень образуется путем прибавления суффикса **- est. Артикль the обязателен!!!**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень
cold - холодный	cold**er -** холоднее	the cold**est -** самый холодный
big - большой	bigg**er -** больше	the bigg**est -** самый большой
kind - добрый	kind**er -** добрее	the kind**est -** самый добрый

По этому же способу образуются степени сравнения двусложных прилагательных оканчивающихся **на -y, -er, -ow, -ble:**

Положительная степень	Сравнительная степень	Превосходная степень

clever — умный **easy** - простой **able** - способный **busy** - занятой	clever**er - умнее** **easier - проще** abl**er - способнее** busi**er - более занятой**	**the** clever**est - самый умный** **the** easi**est - самый простой** **the** abl**est - самый способный** **the** busi**est - самый занятой**

При образовании степеней сравнения посредством суффиксов – **er и – est** соблюдаются следующие **правила орфографии:**

Если прилагательное заканчивается на немое **“e”** , то при прибавлении – **er и – est немое “e” опускается:**
large – larg**er - the** larg**est** / большой – больше – самый большой
brave – brav**er – the** brav**est** / смелый – смелее – самый смелый

Если прилагательное заканчивается **на согласную с предшествующим кратким гласным звуком,** то в сравнительной и превосходной степени **конечная согласная буква удваивается:**
big – big**ger** – big**gest** / большой – больше – самый большой
hot – hot**ter** – hot**test** / горячий – горячее – самый горячий
thin – thin**ner** – thin**nest** / тонкий – тоньше – самый тонкий

Если прилагательное **заканчивается на “y” с предшествующей согласной,** то в сравнительной и превосходной степени **“y” переходит в “i”:**
busy – busi**er** – busi**est / занятой – более занятой – самый занятой**
easy – eas**ier** – eas**iest / простой – проще – самый простой**

2. more, the most

Большинство двусложных прилагательных и прилагательных, состоящих из трех и более слогов, образуют сравнительную степень при помощи слова **more**, а **превосходную** – при помощи слова **most**.
Эти слова ставятся перед именами прилагательными в положительной степени:

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
beautiful - красивый **interesting – интересный** **important - важный**	**more beautiful** - красивее **more interesting** - интереснее **more important** - важнее	**the most beautiful** - самый красивый **the most interesting** - самый интересный **the most important** - самый важный

Особые формы

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
good - хороший **bad** - плохой **little** - маленький **much/many** - много **far** - далекий/далеко **old** - старый	**better** - лучше **worse** - хуже **less** - меньше **more** - больше **farther/further** - дальше **older/elder** - старше	**the best** - самый лучший **the worst** - самый плохой **the least** - самый маленький, меньше всего **the most** - больше всего **the farthest/furthest** - самый дальний **the oldest/eldest** - самый старый

3. less. the least

Для выражения **меньшей** или **самой низкой степени** качества предмета по сравнению с другими предметами употребляются соответствующие слова **less** – менее и **the least** – наименее, которые ставятся перед прилагательными в форме положительной степени.

Положительная степень	**Сравнительная степень**	**Превосходная степень**
beautiful – красивый **interesting** - интересный	**less beautiful** - менее красивый	**the least beautiful** – самый некрасивый

important - важный	**less interesting** – менее интересный **less important** - менее важный	**the least interesting** – самый неинтересный **the least important** – самый неважный

Другие средства сравнения двух предметов или лиц

Конструкция	Комментарий	Примеры
As…as (такой же, так же)	**Для сравнения двух объектов одинакового качества**	He is **as** a strong **as** a lion Он такой же сильный, как лев. She is **as** clever **as** an owl. Она такая же умная, как сова.
Not so…as (не такой, как)	**в отрицательных предложениях**	He is **not so** strong **as** a lion. Он не такой сильный, как лев. She is **not so** clever **as** an owl. Она не такая умная, как сова.
The…the (с двумя сравнительными степенями)	**показывает зависимость одного действия от другого**	**The more** we are together **the happier** we are. Чем больше времени мы проводим вместе, тем счастливее мы становимся. **The more** I learn this rule **the less** I understand it. Чем больше я учу это правило, тем меньше я его понимаю.

Особые замечания об употреблении сравнительных и превосходных степеней имен прилагательных:

- Сравнительная степень может быть усилена употреблением перед ней слов со значением **«гораздо, значительно»:**

His new book is **much more** interesting than previous one. *Его новая книга гораздо более интересная, чем предыдущая.*

This table **is more** comfortable than **that one**. *Этот стол более удобный чем тот.*

- После союзов **than** и **as** используются либо личное местоимение в именительном падеже с глаголом, либо личное местоимение в объектном падеже:

I can run **as** fast **as** him **(as he can).** *Я могу бегать так же быстро, как он.*

Числительное. The numeral

Перед **сотнями, тысячами, миллионами** обязательно называть их количество, даже если всего одна сотня или одна тысяча:

126 – one hundred twenty six

1139 – one thousand one hundred and thirty nine

В составе числительных – сотни, тысячи и миллионы не имеют окончания множественного числа: **two hundred – 200, three thousand – 3000, и т.д.**

НО: окончание множественного числа добавляется hundred, thousand, million, когда они выражают неопределенное количество сотен, тысяч, миллионов. В этом случае после них употребляется существительное с предлогом **"of":**

hundreds of children – сотни детей

thousands of birds- тысячи птиц

millions of insects – миллионы насекомых

Начиная с 21, числительные образуются так же как в русском языке:

20+1=21 (twenty + one = **twenty one**)

60+7=67 (sixty + seven = **sixty seven**) и т.д.

Как читать даты

1043	ten forty-three
1956	nineteen fifty-six
1601	sixteen o one
2003	two thousand three
В 2003 году	in two thousand three
1 сентября	the first of September
23 февраля	the twenty-third of February

ДРОБНЫЕ ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ (FRACTIONAL NUMERALS)

В простых дробях (Common Fractions) числитель выражается количественным числительным, а знаменатель порядковым:

1/7- one seventh одна седьмая

При чтении простых дробей, если числитель их больше единицы, к знаменателю прибавляется окончание множественного числа –s

2/4 - two fourths - две четвертых

2/3 -two thirds - две третьих

3 1/5 - three and one fifth - три целых и одна пятая

1/2 - one second, a second, one half, a half - одна вторая, половина

1/4 -one fourth, a fourth, one quarter, a quarter – одна четвертая, четверть

В десятичных дробях (Decimal Fractions) целое число отделяется точкой, и каждая цифра читается отдельно. Нуль читается nought [nɔ:t] (в США - zero ['zierou])

4.25 four point twenty-five; four point two five

0.43 nought point forty-three; nought point four three

Существительные, следующие за дробью, имеют форму единственного числа, и перед ними при чтении ставится предлог –of

2/3 metre- two thirds of a metre

две третьих метра

0.05 ton - nought point nought five of a ton

ноль целых пять сотых тонны

Существительные, следующие за смешанным числом, имеют форму множественного числа и читаются без предлога of:

35 1 /9 tons -thirty-five and one ninth tons

14 65 metres -one four (или fourteen) point six five (или sixty-five) metres

В обозначениях номеров телефонов каждая цифра читается отдельно, нуль здесь читается [ou]:

224-58-06 ['tu:'tu:'fo:'faiv'eit'ou'siks]

ТЕМА 2. Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)

Тематика общения:

1. Высшее образование в России и за рубежом.
2. Мой вуз.
3. Студенческая жизнь.

Проблематика общения:

1. Уровни высшего образования.
2. Уральский государственный горный университет.
3. Учебная и научная работа студентов.
4. Культурная и спортивная жизнь студентов.

2.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

The Ural State Mining University

Mining University – Горный университет; **higher educational institution -** высшее учебное заведение; **to provide** - зд. Предоставлять; **full-time education -** очное образование; **extramural education -** заочное образование; **to award** – награждать; **post-graduate courses** – аспирантура;	**scientific research centre** - центр научных исследований; **master of science -** кандидат наук; **capable** – способный; **to take part in -** принимать участие; **graduate –** выпускник; **to dedicate** – посвящать; **to carry out scientific work** - выполнять научную работу;

Faculty of Mining Technology - горно – технологический; **Faculty of Engineering and Economics** - инженерно-экономический; **Institute of World Economics –** Институт мировой экономики; **Faculty of Mining Mechanics** - горно-механический; **Faculty of Civil Protection –** гражданской защиты; **Faculty of City Economy** – городского хозяйства;	**Faculty of Geology & Geophysics –** геологии и геофизики; **Faculty of extramural education** – заочный; **department –** кафедра; **dean –** декан; **to train specialists in** - готовить специалистов; **to consist of** - состоять из; **preparatory –** подготовительный; **additional –** дополнительный; **to offer** – предлагать;

to house - размещать /ся/; **building** – здание; **Rector's office –** ректорат; **Dean's office –** деканат; **department** – кафедра; **library** – библиотека; **reading hall -** читальный зал; **assembly hall -** актовый зал; **layout** - расположение, план; **administrative offices** - административные отделы;	**computation centre** - вычислительный центр; **canteen** – столовая; **to have meals –** питаться; **hostel –** общежитие; **to go in for sports** - заниматься спортом; **wrestling** – борьба; **weight lifting -** тяжелая атлетика; **skiing -** катание на лыжах; **skating** - катание на коньках; **chess** – шахматы;

academic work - учебный процесс; **academic year** - учебный год; **to consist of -** состоять из; **bachelor's degree -** степень бакалавра;	**general geology** - общая геология; **foreign language** - иностранный язык; **to operate a computer -** работать на компьютере;

course of studies - курс обучения; **to last** - длиться; **term** - семестр; **to attend lectures and classes** - посещать лекции и занятия; **period** - пара, 2 – х часовое занятие; **break** - перерыв; **subject** - предмет; **descriptive geometry** - начертательная геометрия;	**to take a test (an exam)** - сдавать зачет, экзамен; **to pass a test (an exam)** - сдать зачет, экзамен; **to fail a test (an exam)** - не сдать зачет, экзамен; **to fail in chemistry** - не сдать химию; **holidays, vacations** - каникулы; **to present graduation paper** - представлять дипломные работы; **for approval** - к защите;

The Faculty of Mining Technology trains specialists in: mine surveying - маркшейдерская съемка; underground mining of mineral deposits - подземная разработка месторождений полезных ископаемых; mine and underground construction - шахтное и подземное строительство; surface mining (open-cut mining) - открытые горные работы; physical processes of mining, oil and gas production - физические процессы горного и нефтегазового производства; placer mining - разработка россыпных месторождений; town cadastre - городской кадастр.

The Institute of World Economics trains specialists in: land improvement, recultivation and soil protection - мелиорация, рекультивация и охрана земель; engineer protection of environment in mining - инженерная защита окружающей среды в горном деле; computer systems of information processing and control - автоматизированные системы обработки информации и управления; economics and management at mining enterprises - экономика и управление на предприятиях горной промышленности.

The Faculty of Mining Mechanics trains specialists in: electromechanical equipment of mining enterprises - электромеханическое оборудование горных предприятий; designing & production of mining, oil and gas machinery - конструирование и производство горных и нефтегазопромысловых машин; technological and service systems of exploitation and maintenance of machines and equipment - технологические и сервисные системы эксплуатации и ремонта машин и оборудования; motorcars and self-propelled mining equipment - автомобили и самоходное горное оборудование; electric drive and automation or industrial units and technological complexes - электопривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов; automation of technological processes and industries - автоматизация технологических процессов и производств; mineral dressing - обогащение полезных ископаемых.

The Faculty of Geology & Geophysics trains specialists in: geophysical methods of prospecting and exploring mineral deposits - геофизические мет оды поисков и разведки месторождений полезных ископаемых; according to some specializations: geoinformatics – геоинформатика; applied geophysics - прикладная геофизика; structural geophysics - структурная геофизика; geological surveying and exploration or mineral deposits - геологическая съемка и поиски МПИ; geology and mineral exploration - геология и разведка МПИ; prospecting and exploration or underground waters and engineering - geological prospecting - поиски и разведка подземных вод и инженерно-геологические изыскания; applied geochemistry, petrology and mineralogy - прикладная геохимия, петро логия и минералогия; drilling technology - технология и техника разведки МПИ.

2.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

This text is dedicated to the history of the Ural State Mining University formerly called the Sverdlovsk Mining Institute. It was founded in 1917. It is the oldest higher technical educational institution in the Urals. In 1920 the Mining Institute became a faculty of the Ural State University and in 1925 of the Ural Polytechnical Institute. In 1930 this faculty was reorganized into the Mining Institute. The Institute was named after V.V. Vakhrushev the USSR Coal Industry Minister in 1947. It was awarded the Order of the Red Banner of Labour in 1967.

In 1993 the Sverdlovsk Mining Institute was reorganized into The Ural State Academy of Wining and Geology. In 2004 The Ural State Academy of Mining and Geology was reorganized into The Ural State Mining University. The University provides full-time and extramural education in many specialities. There are post graduate courses at the University as well.

The University is an important scientific research center. Many doctors and masters of Science teach and carry out scientific work at the University. Capable students take part in research projects. The graduates of the University work all over the country.

There are six faculties at the Ural State Mining University: Faculty of Mining Technology; Faculty of Mining Mechanics; Faculty of Geology & Geophysics; Faculty of Civil Protection; Faculty of City Economy; Faculty of Extramural Education; and The Institute of World Economics.

Besides there is a Preparatory faculty where young people get special training before taking entrance exams. The Faculty of Additional Education offers an opportunity to get the second higher education.

Each faculty trains mining engineers in different specialities.

There are many specialities at the Faculty of Extramural Education where students have to combine work with studies. Very often the Ural State Mining University organizes training specialists in new modern specialities.

Faculties consist of Departments. Each faculty is headed by the Dean. The head of the Academy is the Rector.

The University is housed in four buildings. Building, One houses - the Rector's office, the Deans' offices, number of administrative offices, Faculty of City Economy, the Faculty or Mining Mechanics with its numerous departments and laboratories (labs).

Building Two houses the Faculty of Mining Technology, Faculty of Civil Protection, the Deans' offices, many departments, labs and the computation centre.

Building Three houses the Faculty of Geology & of Geophysics, the Faculty of Extramural Education, the Dean's offices, many departments and labs. The Ural Geological Museum, the Museum of the History of the Ural State Mining University and some administrative offices are also housed in this building.

Building Four houses The Institute of World Economics, the Dean's office, departments and labs, the library, reading halls, the Assembly hail, the students cultural centre and a large canteen where students can have their meals.

The library and the reading halls provide students with all kinds of reading: textbooks, reference books / справочники/ dictionaries, magazines and fiction/ художественная литература/.

Besides not far from the University there are four five-storied buildings of the student hostel, where most students live. Near the hostels there is a House of Sports. There students can go in for- different kinds of sports: chess, badminton, table tennis, boxing, wrestling, weight lifting, basketball, volleyball, handball.

The Ural State Mining University offers students three different programs of higher education such as: Bachelors, Diplomate Engineers and Magisters.

The course of studies for a bachelor's degree lasts four years. The academic year begins in September and ends in June. It consists of two terms - September to January and February to June. Students attend lectures and practical classes. As a rule, there are three or four periods of lectures and Classes a day with 20 minutes break between them.

During their first two years students take the following subjects: higher mathematics, physics, chemistry, theoretical air-mechanics, descriptive geometry, general geology, mineralogy, geodesy, history, a foreign language (English, French or German). Besides all the students learn to operate a computer.

Students take their tests and exams at the end of each term. After exams students have their holidays or vacations. At the end of the academic year the students of the academy have practical work at mines, mineral dressing plants, geological & geophysical parties. At the end of the final year students present their graduation papers for approval. After getting the Bachelor's degree the graduates have a possibility to continue their education. They can enter a Diplomate Engineer's course or studies

which lasts one academic year or the graduates can take a two-year program of Magister's degree. After defending final papers these graduates can enter the post-graduate courses.

2.3 Систематизация грамматического материала:

1. Образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Образование видовременных форм глагола в активном залоге

Present Simple употребляется для выражения:

1. постоянных состояний,

2. повторяющихся и повседневных действий (часто со следующими наречиями: always, never, usually и т.д.). Mr Gibson is a businessman. He lives in New York, (постоянное состояние) He usually starts work at 9 am. (повседневное действие) He often stays at the office until late in the evening, (повседневное действие)

3. непреложных истин и законов природы, The moon moves round the earth.

4. действий, происходящих по программе или по расписанию (движение поездов, автобусов и т.д.). The bus leaves in ten minutes.

Маркерами present simple являются: usually, always и т.п., every day / week / month / year и т.д., on Mondays I Tuesdays и т.д., in the morning / afternoon / evening, at night / the weekend и т.д.

Present Continuous употребляется для выражения:

1. действий, происходящих в момент речи He is reading a book right now.

2. временных действий, происходящих в настоящий период времени, но не обязательно в момент речи She is practising for a concert these days. (В данный момент она не играет. Она отдыхает.)

3. действий, происходящих слишком часто и по поводу которых мы хотим высказать раздражение или критику (обычно со словом "always") "You're always interrupting me!"(раздражение)

4. действии, заранее запланированных на будущее. He is flying to Milan in an hour. (Это запланировано.)

Маркерами present continuous являются: now, at the moment, these days, at present, always, tonight, still и т.д.

Во временах **группы Continuous** обычно **не употребляются** глаголы:

1. выражающие восприятия, ощущения (see, hear, feel, taste, smell), Например: This cake tastes delicious. (Но не: This cake is tasting delicious)

2. выражающие мыслительную деятельность [know, think, remember, forget, recognize(ze), believe, understand, notice, realise(ze), seem, sound и др.],
Например: I don't know his name.

3. выражающие эмоции, желания (love, prefer, like, hate, dislike, want и др.), Например: Shirley loves jazz music.

4. include, matter, need, belong, cost, mean, own, appear, have (когда выражает принадлежность) и т.д. Например: That jacket costs a tot of money. (Но не: That jacket is costing a lot of money.)

Present perfect употребляется для выражения:

1. действий, которые произошли в прошлом в неопределенное время. Конкретное время действия не важно, важен результат, Kim has bought a new mobile phone. (Когда она его купила? Мы это не уточняем, поскольку это не важно. Важного, что у нее есть новый мобильный телефон.)

2. действий, которые начались в прошлом и все еще продолжаются в настоящем, We has been a car salesman since /990. (Он стал продавцом автомобилей в 1990 году и до сих пор им является.)

3. действий, которые завершились совсем недавно и их результаты все еще ощущаются в настоящем. They have done their shopping. (Мы видим, что они только что сделали покупки, поскольку они выходят из супермаркета с полной тележкой.)

4. Present perfect simple употребляется также со словами "today", "this morning / afternoon" и т.д., когда обозначенное ими время в момент речи еще не истекло. He has made ten photos this morning. (Сейчас утро. Указанное время не истекло.)

К маркерам present perfect относятся: for, since, already, just, always, recently, ever, how long, yet, lately, never, so far, today, this morning/ afternoon / week / month / year и т.д.

Present perfect continuous употребляется для выражения:

1. действий, которые начались в прошлом и продолжаются в настоящее время He has been painting the house for three days. (Он начал красить дом три дня назад и красит его до сих пор.)

2. действий, которые завершились недавно и их результаты заметны (очевидны) сейчас. They're tired. They have been painting the garage door all morning. (Они только что закончили красить. Результат их действий очевиден. Краска на дверях еще не высохла, люди выглядят усталыми.)

Примечание.

1. С глаголами, не имеющими форм группы Continuous, вместо present perfect continuous употребляется present perfect simple. Например: I've known Sharon since we were at school together. (А не: I've been knowing Sharon since we were at school together.)

2. С глаголами live, feel и work можно употреблять как present perfect continuous, так и present perfect simple, при этом смысл предложения почти не изменяется.
Например: He has been living/has lived here since 1994.

К маркерам present perfect continuous относятся: for. since. all morning/afternoon/week/day и т.д., how long (в вопросах).

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Put the verbs in brackets into the present simple or the present continuous.

1 A: *Do you know* (you/know) that man over there?
B: Actually, I do. He's Muriel's husband.

2 A: Are you doing anything tomorrow evening?
B: Yes. I … (see) Jack at nine o'clock.

3 A: I … (see) you're feeling better.
B: Yes, I am, thank you.

4 A: What's that noise?
B: The people next door … (have) a party.

5 A: Graham … (have) a new computer.
B: I know. I've already seen it.

6 A: This dress …. (not/fit) me any more.
B: Why don't you buy a new one?

7 A: Your perfume … (smell) nice. What is it?
B: It's a new perfume called Sunshine.

8 A: What is Jane doing?
B: She … (smell) the flowers in the garden.

9 A: What … (you/look) at?
B: Some photos I took during my holidays. They aren't very good, though.

10 A: You … (look) very pretty today.
B: Thank you. I've just had my hair cut.

11 A: I … (think) we're being followed.
B: Don't be silly! It's just your imagination.

12 A: Is anything wrong?
B: No. I … (just/think) about the party tonight.

13 A: This fabric … (feel) like silk.
B: It is silk, and it was very expensive.

14 A: What are you doing?

B: I ... (feel) the radiator to see if it's getting warm.

15 A: She ... (be) generous, isn't she?
B: Yes, she has never been a mean person.

16 A: He ... (be) very quiet today, isn't he?
B: Yes, I think he has some problems.

17 A: Would you like some cherries?
B: Yes, please. I ... (love) cherries. They're my favourite fruit.

18 A: I'm sorry, but I ... (not understand) what you mean.
B: Shall I explain it again?

19 A: The children are making lots of noise today.
B: I know, but they ... (have) fun.

20 A: This cake ... (taste) awful.
B: I think I forgot to put the sugar in it!

2. Fill in the gaps with recently, how long, yet, for, always, ever, already, since, so far or just. Sometimes more than one answer is possible.

1 A: Has Tom finished his exams ...yet...?
B: No. He finishes them next Thursday.

2 A: ... has Janet been working at the hospital?
B: She has been working there ... she left school.

3 A: How are you finding your new job?
B: Great. I haven't had any problems ... .

4 A: Is John at home, please?
B: No, I'm afraid he's ... gone out.

5 A: Have you been waiting long?
B: Yes, I've been here ... two hours.

6 A: Has Martin ... been to Spain?
B: No. I don't think so.

7 A: Have you spoken to Matthew ... ?
B: Yes. I phoned him last night.

8 A: Can you do the washing-up for me, please?
B: Don't worry. Mike has ... done it.

9 A: Lucy has ... been musical, hasn't she?
B: Yes, she started playing the piano when she was five years old.

10 A: Shall we go to that new restaurant tonight?
B: Yes. I have ... been there. It's really nice.

11 A: Your dog's been barking ... three hours!
B: I'm sorry. I'll take him inside.

12 A: Have you finished reading that bodk yet?
B: No. I've ... started it.

3. Put the verbs in brackets into the present perfect or continuous, using short forms where appropriate.

1 A: How long ...*have you known*... (you/know) Alison?
B: We ... (be) friends since we were children.

2 A: Who ... (use) the car?
B: I was. Is there a problem?

3 A: What are Andrew and David doing?
B: They ... (work) in the garden for three hours.

4 A: Why is Sally upset?
B: She ... (lose) her bag.

5 A: I ... (always/believe) that exercise is good for you.

B: Of course, it's good to keep fit.

6 A: Emily … (teach) maths since she left university.
B: Yes, and she's a very good teacher, too.

7 A: Fred … (open) a new shop.
B: Really? Where is it?

8 A: This pie is delicious.
B: Is it? I … (not/taste) it yet.

9 A: Have you found your umbrella yet?
B: No, I … (look) for it for an hour now.

10 A: You look exhausted.
B: Well, I … (clean) the windows since 8 o'clock this morning.

11 A: Can I have some more lemonade, please?
B: Sorry, your brother … (just/drink) it all.

12 A: Have you got new neighbours?
B: Yes, they … (just/move) to the area.

4. Put the verbs in brackets into the present perfect or the present perfect continuous.

Dear Connie,

I hope you are enjoying yourself at university. I'm sure you 1)*...'ve been studying...* (study) hard. Everything is fine here at home. Billly 2) … (just/receive) his school report. It was bad, as usual. He 3) … (decide) to leave school next year and find a job. Fiona 4) … (go) to the gym every day for the past two weeks. She 5) … (try) to get in shape for the summer. She 6) … (already/plan) her holiday in the sun. Your father 7) … (sell) the old car and he 8) … (buy) a new one. It's lovely — much nicer than the old one.

Anyway, write soon.

Love, Mum

5. Fill in the gaps with have/has been (to) or have/has gone (to).

Jack: Hi, Jill. Where's Paul?

Jill: Oh, he 1) *...has gone to...* London for a few days.

Jack: Really! I 2) … London recently. I came back yesterday. 3) … you … there?

Jill: No, I haven't. Paul 4) … twice before, though. Where's Sarah?

Jack: She 5) … Spain for two weeks with her parents. They 6) … there to visit some friends.

Jill: When is she coming back?

Jack: They'll all be back next weekend.

6. Choose the correct answer.

1 'What time does the train leave?'
'I think it ..*A*... at 2 o'clock.'
A leaves
B has been leaving
C has left

2 'Where are Tom and Pauline?'
They … e supermarket.'
A have just gone
B have been going
C go

3 What is Jill doing these days?'
She … for a job for six months.'
A is looking
B has been looking
C looks

4 Is Mandy watching TV?'
No. She … her homework right now.'
A is always doing
B is doing
C does

5 'Have you been for a walk?'
'Yes. I often … for walks in the evenings.'
A have gone
B am going
C go

6 'Have you seen any films lately?'
'Yes. Actually, I … two this week.'
A have seen
B am seeing
C see

7 'What … ?'
'It's a piece of cherry pie. Mum made it yesterday.'
A are you eating
B do you eat
C have you eaten

8 'Are you going on holiday this summer?'
'Yes. I … enough money.'
A am saving
B have already saved
C save

9 'Is Todd reading the newspaper?'
'No. He … dinner at the moment.'
A has been making
B makes
C is making

10 'Have you bought any new CDs recently?'
'Yes. Actually, I … two this week.'
A have bought
B have been buying
C am buying

11 'What time does the play start?'
'I think it … at 8 o'clock.'
A has been starting
B starts
C has started

12 'Where is Mark?'
'He … to the library to return some books.'
A has gone
B has been
C is going

13 'What … ?'
'It's a letter to my pen-friend. I'm telling her my news.'
A have'you written
B do you write
C are you writing

*7. **Underline the correct tense.***

1. Liz and I are good friends. We **know/<u>have known</u>** each other for four years.
2. Sarah is very tired. She **has been working / is working** hard all day.
3. Where is John?' 'He's upstairs. He **does/is doing** his homework.'
4. I can't go to the party on Saturday. I **am leaving/ have been leaving** for Spain on Friday night.
5. Jane **has finished/is finishing** cleaning her room, and now she is going out with her friends.
6. I didn't recognise Tom. He **looks/is looking** so different in a suit.
7. I don't need to wash my car. Jim **washes/has washed** it for me already.
8. Ian **has been talking/is talking** to his boss for an hour now.
9. Claire's train **arrives/has arrived** at 3 o'clock. I must go and meet her at the station.
10. 'Would you like to borrow this book?' 'No, thanks. I **have read/have been reading** it before.'
11. 'Where **are you going/do you go**?' To the cinema. Would you like to come with me?'
12. Have you seen my bag? I **am searching/have been searching** for it all morning.
13. 'Is Colin here?' 'I don't know. I **haven't seen/ haven't been seeing** him all day.'
14. Sophie is very clever. She **is speaking/speaks** seven different languages.
15. We **are moving/have moved** house tomorrow. Everything is packed.

8. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 Who ...*has been using* ... (use) my toothbrush?
2 'What ... (you/do)?' 'I ... (write) a letter.'
3 Samantha ... (play) tennis with friends every weekend.
4 Tim and Matilda ... (be) married since 1991.
5 Uncle Bill ... (just/decorate) the bathroom.
6 Pauline and Tom ... (sing) in the school choir twice a week.
7 Who ... (you/speak) to?
8 Sarah is very happy. She ... (win) a poetry competition.
9 He ... (drink) two cups of coffee this morning.
10 My friend ... (live) in America at the moment.
11 They ... (usually/change) jobs every five years.
12 I ... (normally/cut) my hair myself.
13 Linda ... (study) in the library for three hours.
14 We ... (play) in a concert next weekend.
15 Who ... (read) my diary?
16 Tim ... (leave) the house at 7 o'clock every morning.
17 ... (your mother/work) in a bank?
18 ... (you/drink) coffee with your breakfast every day?
19 We ... (make) plans for our summer holidays right now.
20 They... (move) house in September.

9. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 A: What ...*are you doing*... (you/do)?
B: Nothing. I ... (just/finish) my lunch.
2 A: Where ... (you/be) all morning?
B: I ... (clean) my house since 8 o'clock.
3 A: ... (you/do) anything next weekend?
B: No, I ... (not/make) any plans yet.
4 A: Jane looks great. ... (she/lose) weight?
B: Yes, she ... (exercise) a lot recently.
5 A: ... (be/you) busy right now?
B: Yes, I ... (just/start) typing this report.
6 A: Where is Peter?
B: He ... (wash) the car at the moment.
7 A: Who ... (be) your favourite actor?

B: I … (like) Sean Connery since I was a child.

8 A: … (you/do) your homework yet?

B: Almost; I … (do) it now.

10. Put the verbs in brackets into the correct tense.

Dear Nick,

This is just a short note to tell you I 1) *...'m arriving/arrive...* (arrive) at the airport at 5 pm on Saturday, 10th December. I 2) … (be) very busy recently, and that's why I 3) … (not/write) to you for a while. I 4) … (plan) this trip for months, so now I 5) … (look forward) to spending some time with you and your family. I 6) … (hope) you will be able to meet me at the airport. Please give my love to your wife and the children.

See you soon,
James

Past simple употребляется для выражения:

1. действий, произошедших в прошлом в определенное указанное время, то есть нам известно, когда эти действия произошли, They graduated four years ago. (Когда они закончили университет? Четыре года назад. Мы знаем время.)

2. повторяющихся в прошлом действий, которые более не происходят. В этом случае могут использоваться наречия частоты (always, often, usually и т.д.), He often played football with his dad when he was five. (Но теперь он уже не играет в футбол со своим отцом.) Then they ate with their friends.

3. действий, следовавших непосредственно одно за другим в прошлом.

They cooked the meal first.

4. Past simple употребляется также, когда речь идет о людях, которых уже нет в живых. Princess Diana visited a lot of schools.

Маркерами past simple являются: yesterday, last night / week / month / year I Monday и т.д., two days I weeks I months I years ago, then, when, in 1992 и т.д.

People used to dress differently in the past. Women used to wear long dresses. Did they use to carry parasols with them? Yes, they did. They didn't use to go out alone at night.

• **Used to** (+ основная форма глагола) употребляется для выражения привычных, повторявшихся в прошлом действий, которые сейчас уже не происходят. Эта конструкция не изменяется по лицам и числам. Например: Peter used to eat a lot of sweets. (= Peter doesn't eat many sweets any more.) Вопросы и отрицания строятся с помощью did / did not (didn't), подлежащего и глагола "use" без -d.

Например: Did Peter use to eat many sweets? Mary didn't use to stay out late.

Вместо "used to" можно употреблять past simple, при этом смысл высказывания не изменяется. Например: She used to live in the countryside. = She lived in the countryside.

Отрицательные и вопросительные формы употребляются редко.

Past continuous употребляется для выражения:

1. временного действия, продолжавшегося в прошлом в момент, о котором мы говорим. Мы не знаем, когда началось и когда закончилось это действие, At three o'clock yesterday afternoon Mike and his son were washing the dog. (Мы не знаем, когда они начали и когда закончили мыть собаку.)

2. временного действия, продолжавшегося в прошлом (longer action) в момент, когда произошло другое действие (shorter action). Для выражения второго действия (snorter action) мы употребляем past simple, He was reading a newspaper when his wife came, (was reading = longer action: came = shorter action)

3. двух и более временных действий, одновременно продолжавшихся в прошлом. The people were watching while the cowboy was riding the bull.

4. Past continuous употребляется также для описания обстановки, на фоне которой происходили события рассказа (повествования). The sun was shining and the birds were singing. Tom was driving his old truck through the forest.

Маркерами past continuous являются: while, when, as, all day / night / morning и т.д.
when/while/as + past continuous (longer action) when + past simple (shorter action)

Past perfect употребляется:

1. для того, чтобы показать, что одно действие произошло раньше другого в прошлом. При этом то действие, которое произошло раньше, выражается past perfect simple, а случившееся позже - past simple,
They had done their homework before they went out to ptay yesterday afternoon. (=They did their homework first and then they went out to ptay.)

2. для выражения действий, которые произошли до указанного момента в прошлом,
She had watered all the flowers by five o'clock in the afternoon.
(=She had finished watering the flowers before five o'clock.)

3. как эквивалент present perfect simple в прошлом. То есть, past perfect simple употребляется для выражения действия, которое началось и закончилось в прошлом, а present perfect simple - для действия, которое началось в прошлом и продолжается (или только что закончилось) в настоящем. Например: Jill wasn't at home. She had gone out. (Тогда ее не было дома.) ЛИ isn 't at home. She has gone out. (Сечас ее нет дома.)

К маркерам past perfect simple относятся: before, after, already, just, till/until, when, by, by the time и т.д.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous. Which was the longer action in each sentence?

1. They ...*were cleaning*... (clean) the windows when it ...*started*... (start) to rain.
Cleaning the windows was the longer action.
2. As he ... (drive) to work, he ... (remember) that his briefcase was still at home.
3. Melanie ... (cook) dinner when her husband ... (come) home.
4. I ... (hear) a loud crash as I ... (sit) in the garden.
5. She ... (type) a letter when her boss ... (arrive).
6. While the dog ... (dig) in the garden, it ... (find) a bone.
7. Mary ... (ride) her bicycle when she ... (notice) the tiny kitten.
8. While I ... (do) my homework, the phone ... (ring).

2. A policeman is asking Mrs Hutchinson about a car accident she happened to see yesterday. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous.

P: What 1) ...*were you doing*... (you/do) when you 2) ... (see) the accident, madam?
H: I ... (walk) down the street.
P: What exactly 4) ... (you/see)?
H: Well, the driver of the car 5)... (drive) down the road when suddenly the old man just 5) ... (step) in front of him! It 6) ... (be) terrible!
P: 8) ... (the driver/speed)?
H: No, not really, but the old man 9) ... (not/look) both ways before he ... (try) to cross the road.
P: 11) ... (anyone else/see) the accident?
H: Yes, the lady in the post office.
P: Thank you very much.

3. Put the verbs in brackets into the past simple or the past continuous.

A As soon as Margaret 1) ...*got*... (get) off the train, she 2) ... (pull) her coat around her. Rain 3) ... (fall) heavily and a cold wind 4) ... (blow) across the platform. She 5) ... (look) around, but no one 6)

... (wait) to meet her. She 7) ... (turn) to leave when she 8) ... (hear) footsteps. A man 9) ... (walk) towards her. He 10) ... (smile) at her, then he 11) ... (say), 'You're finally here.'

B George 1) ... (pick) up his bag then, 2) ... (throw) it over his shoulder. It 3) ... (get) dark and he 4) ... (have) a long way to go. He wished that he had let someone know that he was coming. It 5) ... (start) to rain, and he was feeling cold and tired from the long journey. Suddenly, he 6) ... (hear) a noise, then he 7) ... (see) two bright lights on the road ahead. A car 8) ... (head) towards him. It slowed down and finally 9) ... (stop) beside him. A man 10) ... (sit) at the wheel. He 11) ... (open) the door quickly and 12) ... (say) 'Get in, George.'

C Andy 1) ... (step) into the house and 2) ... (close) the door behind him. Everything 3) ... (be) quiet. His heart 4) ... (beat) fast and his hands 5) ... (shake) as he crept silently into the empty house, but he was trying not to panic. He soon 6) ... (find) what he 7) ... (look) for. He smiled with relief as he put on the clothes. The men who 8) ... (follow) him would never recognise him now.

4. Imagine that you were present when these things happened, then, in pairs, ask and answer questions, as in the example.

SA: What were you doing when the burglar broke in?
SB: I was watching TV.
SA: What did you do?
SB: I called for help.

1 The burglar broke in.
2 The storm broke.
3 The lights went out.
4 The boat overturned.
5 The earthquake hit.
6 The building caught fire.

5. Rewrite each person's comment using used to or didn't use to.

1 Sally - 'I don't walk to work any more.'
I used to walk to work.
2 Gordon - 'I've got a dog now.'
3 Lisa - 'I don't eat junk food any more.'
4 Jane - 'I go to the gym every night now.'
5 Paul - 'I'm not shy any more.'
6 Edward - 'I live in a big house now.'
7 Helen - 'I haven't got long hair any more.'
8 Frank - 'I eat lots of vegetables now.'

6. Choose the correct answer.

1 'I find it hard to get up early.'
'You ...*3*... to getting up early once you start working.'
A are used
B will get used
C were used

2 'Do you often exercise now?'
'No, but I ... to exercise a lot when I was at school.'
A used
B will get used
C am used

3 'Aren't you bothered by all that noise?'
'No, we ... to noise. We live in the city centre.'
A were used
B will get used

C are used

4 'Does your sister travel a lot?'
'No, but she … to before she got married.'
A didn't use
B used
C wasn't used

5 'I don't like wearing a suit every day.'
'Don't worry, you … to it very soon.'
A are used
B will get used
C were used

6 'Sandra … to using a computer, but now she enjoys it.'
'It's a lot easier for her now.'
A isn't used
B will get used
C wasn't used

7 'Do you remember the things we … to do when we were kids?'
'Of course I do. How could I forget what fun we had!'
A used
B were used
C got used

8 'Do you like living in the city?'
'Well, I … to it yet, but it's okay.'
A am not used
B wasn't used
C am used

7. Fill in the gaps with one of the verbs from the list in the correct form. Use each verb twice.

wash, walk, play, work

1 I used to ...*work*... in a shop, but now I work in an office.
2 I can't concentrate. I'm not used to … in such a noisy office.
3 Tom lived in the country for years. He used to … miles every day.
4 I'm exhausted. I'm not used to … such long distances.
5 Mary used to … her clothes by hand, but now she uses a washing machine.
6 We haven't got a washing machine, so we're used to … our clothes by hand.
7 The children are bored with the bad weather. They're used to … outside.
8 When we were younger, we used to … cowboys and Indians.

8. Put the verbs in brackets into the past simple or the present perfect.

1. A: Do you know that man?
B: Oh yes. He's a very good friend of mine. I 1) ...*'ve known*... (know) him for about ten years.
A: I think I 2) … (meet) him at a business meeting last month.

2. A: Mum 1) … (lose) her purse.
B: Where 2) … (she/lose) it?
A: At the supermarket while she was shopping.

3. A: Who was on the telephone?
B: It 1) … (be) Jane.
A: Who is Jane?
B: Someone who 2) … (work) in my office for a few years. She's got a new job now, though.

4. A: Who is your favourite singer?
B: Freddie Mercury. He 1) ... (have) a wonderful voice.
A: Yes, I agree. He 2) ... (enjoy) performing live, too.

9. Fill in the gaps with one of the verbs from the list in the past perfect continuous.

read, scream, argue, try, eat, watch

1. Emily was angry. She ...*had been arguing*... with her parents for an hour.
2. Hannah felt sick. She ... chocolates all afternoon.
3. Allan had a headache. His baby sister ... for half an hour.
4. Emily was frightened. She ... a horror film for half an hour.
5. Simon was confused. He ... to win the game for hours.
6. John was very tired. He ... all night.

10. Put the verbs in brackets into the correct past tense.

A: On Monday morning, Jo 1) ... *missed*... (miss) the bus and had to walk to school. When she 2) ... (arrive), the bell 3) ... (already/ring)', and lessons 4) ... (start). The children 5) ... (work) quietly when Jo 6) ... (walk) into the'classroom.

B: When Jamie 1) ... (get) to the party, a lot of people 2) ... (dance) to pop music. Everyone 3) ... (wear) jeans and T-shirts. Jamie 4) ... (buy) a new suit for the party and he 5) ... (wear) that. He 6) ... (feel) quite silly because everyone 7) ... (look) at him.

Future simple употребляется:

1. для обозначения будущих действий, которые, возможно, произойдут, а возможно, и нет, We'll visit Disney World one day.

2. для предсказаний будущих событий (predictions), Life will be better fifty years from now.

3. для выражения угроз или предупреждений (threats / warnings), Stop or I'll shoot.

4. для выражения обещаний (promises) и решений, принятых в момент речи (on-the-spot decisions), I'll help you with your homework.

5. с глаголами hope, think, believe, expect и т.п., с выражениями I'm sure, I'm afraid и т.п., а также с наречиями probably, perhaps и т.п. / think he will support me. He will probably go to work.

К маркерам future simple относятся: tomorrow, the day after tomorrow, next week I month / year, tonight, soon, in a week / month year и т.д.

ПРИМЕЧАНИЕ

Future simple не употребляется после слов while, before, until, as soon as, after, if и when в придаточных предложениях условия и времени. В таких случаях используется present simple. Например: I'll make a phone call while I wait for you. (А не:... whilo I will wait for you.) Please phone me when you finish work.

В дополнительных придаточных предложениях после "when" и "if" возможно употребление future simple. Например: I don't know when I if Helen will be back.

He is going to throw the ball.

Be going to употребляется для:

1. выражения заранее принятых планов и намерений на будущее,

Например: Bob is going to drive to Manchester tomorrow morning.

2. предсказаний, когда уже есть доказательства того, что они сбудутся в близком будущем. Например: Look at that tree. It is going to fall down.

We use the **future continuous**:

a) for an action which will be in progress at a stated for an action which will be future time. *This time next week, we'll be cruising round the islands.*

b) for an action which will definitely happen in the future as the result of a routine or arrangement. *Don't call Julie. I'll be seeing her later, so I'll pass the message on.*

c) when we ask politely about someone's plans for the near future (what we want to know is if our wishes fit in with their plans.) *Will you be using the photocopier for long?*
No. Why?
I need to make some photocopies.

We use the **future perfect**:

1. For an action which will be finished before a stated future time. *She will have delivered all the newspapers by 8 o'clock.*

2. The future perfect is used with the following time expressions: before, by, by then, by the time, until/till.

We use the future perfect continuous

1. to emphasize the duration of an action up to a certain time in the future. *By the end of next month, she will have been teaching for twenty years.*

The future perfect continuous is used with by . for

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Tanya Snirnoff is a famous astrologer. She's been invited on a TV show to give her astrological predictions for next year. Using the prompts below, make sentences, as in the example.
e.g. An earthquake will strike Asia.

1 earthquake/strike/Asia
2 Tom Murray/win/elections
3 economy/not improve/significantly
4 number of road accidents/increase
5 America/establish/colony/on Mars
6 scientists/not discover/cure for common cold

2. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the examples.
SA Are you going to pay the bill?
SB: Yes, that's what I'm going to do
SA. Are you going to complain to the manager?
SB. No, that's not what I'm going to do.

1. pay the bill (√)
2. complain to the manager (X)
3. take the skirt back to the shop (√)
4. buy the jumper (√)
5. ask the bank manager for a loan (X)
6. order the food (√)
7. book the airline tickets (X)

3. Fill in the gaps with the correct form of will or be going to and the verb in brackets.

1 A: Why are you buying flour and eggs?
B: Because I *'m going to make* (make) a cake
2 A I have decided what to buy Mum for her birthday.
B: Really. What … (you/buy) for her?
3 A: Did you ask Jackie to the party?
B: Oh no! I forgot! I … (ask) her tonight.
4 A Could I speak to Jim, please?
B: Wait a minute I … (get) him for you.
5 A. What are your plans for the weekend?

B: I … (spend) some time with my friends.

6 A: What are you doing on Friday night?
B: Oh, I … (probably/stay) at home with my family.

7 A: Have you tidied your room yet?
B: No, but I promise I … (do) it this afternoon.

8 A: Look at that boy!
B: Oh yes! He … (climb) the tree.

9 A: Jason is very clever for his age.
B: Yes. He says he … (become) a doctor when he grows up.

10 A: I'm too tired to cut the grass.
B: Don't worry! I (cut) it for you.

4. Fill in the gaps with shall, will or the correct form of be going to.

1 A: It's too hot in here.
B: You're right. I *...will...* open a window.

2 A: … I put the baby to bed, now?
B: Yes, he looks a little tired.

3 A: Have you seen Lucy recently?
B: No, but I … meet her for lunch later today.

4 A: Have you done the shopping yet?
B: No, but I … probably do it tomorrow, after work.

5 A: … we ask Mr Perkins for help with the project?
B: That's a good idea. Let's ask him now.

5. Replace the words in bold with will/won't or shall I/we, as in the example.

1 I've asked Paul to talk to the landlord, but he **refuses to** do it.
I've asked Paul to talk to the landlord, but he won't do it.

2 **Do you want me** to make a reservation for you?

3 **Can** you call Barry for me, please?

4 **Why don't we** try this new dish?

5 Where **do you want me** to put these flowers?

6. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example.

SA: *When will you do the gardening?*
SB: *I'll do it after I've done the shopping.*

1 do the gardening / do the shopping
2 post the letters / buy the stamps
3 iron the clothes / tidy the bedroom
4 water the plants / make the bed
5 do your homework / have my dinner
6 pay the bills / take the car to the garage

7. Put the verbs in brackets into the present simple or the future simple.

1 A: I'm going to the gym tonight.
B: Well, while you *...are...* (be) there, I … (do) the shopping.

2 A: … (you/call) me when you … (get) home?
B: Yes, of course.

3 A: As soon as John … (come) in, tell him to come to my office.
B: Certainly, sir.

4 A: I'm exhausted.
B: Me too. I wonder if David … (come) to help tonight.

5 A: Are you going to visit Aunt Mabel this afternoon?

B: Yes, I ... (visit) her before I ... (do) the shopping.

6 A: Is George going to eat dinner with us?
B: No, by the time he ... (get) home it ... (be) very late.

7 A: When ... (you/pay) the rent?
B: When I ... (get) my pay cheque.

8 A: What are your plans for the future?
B: I want to go to university after I ... (finish) school.

9 A: If you ... (pay) for dinner, I ... (pay) for the theatre.
B: Okay, that's a good idea.

10 A: Can you give this message to Mike, please?
B: Well, I'll try, but I doubt if I ... (see) him today.

8. Put the verbs in brackets into the future simple, the present simple or the present continuous.

1 A: I *...am seeing...* (see) Roger at seven o'clock tonight.
B: Really? I thought he was out of town.

2 A: ... (you/do) anything on Friday morning?
B: No, I'm free.

3 A: I ... (go) to the cinema. There's a new film on. Do you want to come with me?
B: What time ... (the film/start)?

4 A: Helen ... (have) a party the day after tomorrow. ... (you/go)?
B: As a matter of fact, I haven't been invited.

5 A: The new exhibition ... (open) on April 3rd and ... (finish) on May 31st.
B: I know. I ... (go) on the first day.

6 A: Aunt Maggie ... (come) to visit us tomorrow.
B: I know. What time ... (she/arrive)?

7 A: Excuse me, what time ... (the train/leave)?
B: At half past three, madam.

8 A: Michael Jackson ... (give) a concert at the Olympic Stadium next week.
B: I know. I ... (want) to get a ticket.

9 A: I'm really thirsty.
B: I ... (get) you a glass of water.

10 A: Are you looking forward to your party?
B: Yes. I hope everyone ... (enjoy) it.

11 A: How old is your sister?
B: She .. (be) twelve next month.

12 A: What are you doing tonight?
B: I ... (probably/watch) TV after dinner.

9. A) Cliff Turner has his own business and it is doing well. He has already decided to expand. Look at the prompts and say what he is going to do, as in the example.

1. employ more staff

He's going to employ more staff.

2. advertise in newspapers and magazines
3. equip the office with computers
4. increase production
5. move to bigger premises
6. open an office abroad

B) Cliff is always busy. Look at his schedule and say what his arrangements are for the next few days. Make sentences, as in the example.

Wednesday 12th: fly to Montreal

He is flying to Montreal on Wednesday.
Thursday 13th: give an interview to The Financial Times
Friday 14th: have lunch with sales representatives
Saturday 15th: have a meeting with Japanese ambassador
Sunday 16th: play tennis with Carol

10. In Pairs, ask and answer the following questions using I (don't) think/expect I will or I hope /'m sure/'m afraid I will/won't, as in the example.
SA: *Do you think you will pass your exams?*
SB: *I hope I will./I'm afraid I won't.*
1 pass/exams
2 move house
3 take up / new hobby
4 make / new friends
5 start having music lessons
6 have / party on / birthday
7 learn/drive

ТЕМА 3. Социально-культурная сфера общения (Я и моя страна. Я и мир)

Тематика общения:

1. Екатеринбург – столица Урала.
2. Общее и различное в национальных культурах

Проблематика общения:

1. Мой родной город.
2. Традиции и обычаи стран изучаемого языка.
3. Достопримечательности стран изучаемого языка.

3.1 Запоминание слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My town

a building – здание
downtown – деловой центр города
town outskirts – окраина города
a road – дорога
an avenue – проспект
a pavement/a sidewalk - тротуар
a pedestrian – пешеход
a pedestrian crossing – пешеходный переход
traffic lights – светофор
a road sign – дорожный знак
a corner – угол
a school - школа
a kindergarten – детский сад
a university - университет
an institute – институт
an embassy - посольство
a hospital - больница
a shop/a store/a shopping centre/a supermarket – магазин, супермаркет
a department store – универмаг
a shopping mall/centre – торговый центр
a food market – продуктовый рынок
a greengrocery – фруктово-овощной магазин
a chemist`s/a pharmacy/a drugstore - аптека
a beauty salon – салон красоты
a hairdressing salon/a hairdresser`s - парикмахерская
a dental clinic/a dentist`s – стоматологическая клиника
a vet clinic – ветеринарная клиника
a laundry – прачечная
a dry-cleaner`s – химчистка
a post-office – почтовое отделение
a bank – банк
a cash machine/a cash dispenser - банкомат
a library – библиотека
a sight/a place of interest - достопримечательность
a museum – музей
a picture gallery – картинная галерея
a park – парк
a fountain – фонтан
a square – площадь
a monument/a statue – памятник/статуя
a river bank – набережная реки

a beach – пляж
a bay - залив
a café – кафе
a restaurant – ресторан
a nightclub – ночной клуб
a zoo - зоопарк
a cinema/a movie theatre - кинотеатр
a theatre – театр
a circus - цирк
a castle - замок
a church – церковь
a cathedral – собор
a mosque - мечеть
a hotel – отель, гостиница
a newsagent's – газетный киоск
a railway station – железнодорожный вокзал
a bus station - автовокзал
a bus stop – автобусная остановка
an underground (metro, subway, tube) station – станция метро
a stadium – стадион
a swimming-pool – плавательный бассейн
a health club/a fitness club/a gym – тренажерный зал, фитнесс клуб
a playground – игровая детская площадка
a plant/a factory – завод/фабрика
a police station – полицейский участок
a gas station/a petrol station – заправочная автостанция, бензоколонка
a car park/a parking lot - автостоянка
an airport - аэропорт
a block of flats – многоквартирный дом
an office block – офисное здание
a skyscraper - небоскреб
a bridge – мост
an arch – арка
a litter bin/a trash can – урна
a public toilet – общественный туалет
a bench - скамья

3.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

Ekaterinburg – an Industrial Centre

Ekaterinburg is one of the leading industrial centres of Russia. There are over 200 industrial enterprises of all-Russia importance in it. The key industry is machine-building. The plants of our city produce walking excavators, electric motors, turbines, various equipment for industrial enterprises.

During the Great Patriotic War Sverdlovsk plants supplied the front with arms and munitions and delivered various machinery for restoration of Donbass collieries and industrial enterprises of the Ukraine.

The biggest plants of our city are the Urals Heavy Machine Building Plant (the Uralmash), the Urals Electrical Engineering Plant (Uralelectrotyazhmash), the Torbomotorny Works (TMZ), the Chemical Machinery Building Works (Chimmash), the Verkh Iset Metallurgical Works (VIZ) and many others.

The Urals Heavy Machinery Building Plant was built in the years of the first five-year plan period. It has begun to turn out production in 1933. The machines and equipment produced by the Uralmash have laid the foundation for the home iron and steel, mining and oil industries. The plant

produces walking excavators and draglines, drilling rigs for boring super-deep holes, crushing and milling equipment for concentrators. The plant also produces rolling-mills, highly efficient equipment for blast furnaces, powerful hydraulic presses and other machines. The trade mark of the Uralmash is well-known all over the world.

The Electrical Engineering plant was put into operation in 1934. At the present time it is a great complex of heavy electrical machine-building. It produces powerful hydrogenerators, transformers, air and oil switches, rectifiers & other electrical equipment. Besides, it is one of the main producers of high-voltage machinery.

The Turbo-Motorny Works produces turbines & diesel motors for powerful trucks. The turbines manufactured by this plant are widely known not only in our country, but also abroad. The plant turned out its first turbines in 1941.

The Urals Chemical Works, the greatest plant in the country, produces machinery for the chemical industry. It also produces vacuum- filters used in different branches of oil industry.

The Verkh-Iset Metallurgical Works the oldest industrial enterprise in Ekaterinburg is now the chief producer of high grade transformer steel in the country.

Now complex mechanization & automation of production processes are being used at all industrial enterprises of Ekaterinburg. Its plants make great contribution to the development of our country's national economy.

The History of Ekaterinburg

The famous Soviet poet V. Mayakovsky called out city "A Worker and a Fighter" and these words most fully reflect the features of Ekaterinburg.

Ekaterinburg is nowadays one of the leading industrial cities of Russia, an administrative & cultural centre of the Sverdlovsk region. It is the capital of the Urals.

Ekaterinburg has sprung up in the upper reaches of the Iset River in the middle part of the Urals Mountains near the border of Europe and Asia. It stretches from North to South for 25 km. and 15 km. from East to West.

The history of our city is very interesting. It was founded at the beginning of the XVIII century as a fortress-factory in connection with the construction of the Urals iron works. The works was constructed under the supervision of Tatishchev, a mining engineer, who was sent to the Urals by Peter the first. It was put into operation in November 1723. This date is considered to be the date of the birthday of city. It was named Ekaterinburg. On the place of the first works there is the Historical Square now.

The town grew and developed as the centre of an important mining area where the mining administration office was located. Ekaterinburg was an ordinary provincial town like many others in Russia before the October Revolution. It had only one theatre, four hospitals, one mining school and not a single higher school.

At the end of the XIX century Ekaterinburg became one of the centres of the revolutionary struggle. Many squares, streets and houses of the city keep the memory of the revolutionary events and the Civil War in the Urals. They are: the 1905 Square, a traditional place of the revolutionary demonstrations of the working people, the rocks "Kamenniye Palatki", a memorial park now, which was the place of illegal meetings of Ekaterinburg workers, the Opera House where the Soviet power was proclaimed in November 8, 1917 and many others.

Ekaterinburg is closely connected with the life and activities of many famous people. Here Y.M. Sverdlov, the leader of the Urals Party organization before the Revolution and the first President of the Soviet state, carried out his revolutionary work. In 1924 Ekaterinburg was renamed in his memory.

The name of such a famous scientist and inventor of the radio as Popov, and the names of such writers as Mamin-Sibiriyak and Bazhov are also connected with Ekaterinburg.

After the October Socialist Revolution the town has changed beyond recognition. It grew quickly in the years of the first five-year plan periods. Nowadays our city is constantly growing and

developing. Modern Ekaterinburg is a city of wide straight streets, multistoried blocks of flats, big shops, beautiful palaces of culture, cinemas, fine parks and squares.

The centre of the city is 1905 Square with the monument to V.I. Lenin and the building of the City Soviet. The main street is Lenin Avenue. The total area of the city is over 400 sq. km. The population is about two million.

In connection with its 250th anniversary and for its outstanding achievements in the development of the national economy of our country Ekaterinburg was awarded the Order of Lenin.

Ekaterinburg – a Center of Science & Education

Ekaterinburg is one of the largest & most important centers of science & education in our country. The city has 15 higher schools. The oldest of them are the Mining & the Polytechnical Institutes, the Urals State University founded in 1920, the Medical & Pedagogical & many others. Ekaterinburg higher schools train specialists for practically all branches of industry, economy, education & science. The city has a student population of about 80 thousand. Besides, there are many secondary and vocational schools and over 50 technical schools (colleges). The oldest of them is the Mining Metallurgical College named after Polzunov, founded in 1847.

Much important scientific research work is carried on in Ekaterinburg. The Urals Branch of Sciences, now called the Urals Scientific Centre (UNZ), was founded in 1932. Its first chairman was the famous Soviet scientist, mineralogist and geochemist A.E. Fersman. UNZ is the main centre of scientific work now. It contains nine institutes which solve the most important theoretical and practical problems in the field of geology, mining, metallurgy, biology, economy and others.

The city has more than 120 research and designing institutions, among them Uralmechanobr, Unipromed, Nipigormash and others. It is worth mentioning that important scientific and research work is also carried on in educational establishments and at the industrial enterprises of the city, such as the Uralmash, Uralelectrotyazmash and others.

Thousands of research workers, among them 5 academicians, 10 Corresponding members of the Russian Academy of Sciences, many Doctors and Masters of Science are engaged in scientific and research work. Ekaterinburg has contributed greatly to the development of Russian science.

Ekaterinburg - a Cultural Centre

Ekaterinburg is not only an industrial and educational, but also a large cultural centre. There is a lot to be seen in the city. There are many theatres, cinemas, museums, clubs, libraries, palaces of culture, the Art Gallery and the Circus in it.

The Art Gallery houses a splendid collection of paintings of Russian and Soviet artists such as Repin, Polenov, Levitan, Perov, Slusarev, Burak, Pimenov and many others. Here you will see one of the world famous collections of metal castings made in Kasli and especially a cast Iron pavilion. It was shown in Paris at the World Exhibition and awarded the Highest Prize.

Ekaterinburg is famous for its theaters. They are the Opera & Ballet House, the Drama Theatre, the Musical Comedy, the Children's and Puppet Theatres, the Cinema and Concert Hall "Cosmos". The Opera House was built in 1912. Many famous singers such as S. Lemeshev, I. Koslovsky, I. Arkhipova, B. Shtokolov and many others sang in that theatre. Ekaterinburg has a Philharmonic Society, film and television studios, the Urals Russian Folk Choir which is well known both at home and abroad.

There are many museums in the city: the Museum of Local Studies, the Sverdlov Museum, the Museum of Mamin-Sibiriyak, the Bazhov Museum, the Museum of Architecture. But the Urals Geological Museum is the most famous one. It is a real treasure-house of the Urals riches. The museum was opened in 1937.

Ekaterinburg is a green city with its squares, gardens and parks. The largest and the best of the parks is the Central Park of Culture and Rest. The Central Square of the City is the 1905 Square. Besides, there are some others: the Labor Square, one of the oldest of the city, located in front of the House of Trade Unions, the Komsomolskaya Square with the monument to the Urals Komsomol, the Paris Commune Square with the monument to Y.M. Sverdlov.

There are lots of monuments in the city. They are: the monument dedicated to the students and teachers of the Urals Polytechnical Institute who perished in the Great Patriotic War, the monument to the Urals Tank Corps, the monuments to Bazhov, Popov, Ordjonikidze, Malishev and many others.

There are a lot of places of interest in our city. Any visitor who comes to our city is invited to take sightseeing around it. We will be shown the historical places such as the rocks "Kamenniye Palatki", the Pupils' Creation Palace, the Historical Square, the 1905 Square.

There are several memorials to those who gave their lives in the struggle against fascism, the obelisk in the Square of Communards with the eternal flame. Such famous places of interest at the city pond with granite-lined embankment, the Palace of Youth, the lake Shartash, the Uktus Mountains and some others are most popular with the citizens of Ekaterinburg as well as with its visitors.

Ekaterinburg is a city of sports. There are a lot of sports grounds, stadiums, sports halls and a beautiful Palace of Sport in it. Ekaterinburg is often called the Winter Sports Capital. All sorts of important skiing & skating events are held in the Uktus Mountains.

Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland

The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland (the UK) occupies most of the territory of the British Isles. It consists of four main parts: England, Scotland, Wales and Northern Ireland. London is the capital of England. Edinburgh is the capital of Scotland, Cardiff— of Wales and Belfast — of Northern Ireland. The UK is a small country with an area of some 244,100 square kilometres. It occupies only 0.2 per cent of the world's land surface. It is washed by the Atlantic Ocean in the north-west, north and south-west and separated from Europe by the Severn, but the most important waterway is the Thames.

The climate is moderate and mild. But the weather is very changeable. The population of the United Kingdom is over 57 million people. Foreigners often call British people "English", but the Scots, the Irish and the Welsh do not consider themselves to be English. The English are Anglo-Saxon in origin, but the Welsh, the Scots and the Irish are Celts, descendants of the ancient people, who crossed over from Europe centuries before the Norman Invasion. It was this people, whom the Germanic Angles and Saxons conquered in the 5th and 6th centuries AD. These Germanic conquerors gave England its name — "Angle" land. They were conquered in their turn by the Norman French, when William the Conqueror of Normandy landed near Hastings in 1066. It was from the union of Norman conquerors and the defeated Anglo-Saxons that the English people and the English language were born. The official language of the United Kingdom is English. But in western Scotland some people still speak Gaelic, and in northern and central parts of Wales people often speak Welsh.

The UK is a highly developed industrial country. It is known as one of the world's largest producers and exporters of machinery, electronics, textile, aircraft, and navigation equipment. One of the chief industries of the country is shipbuilding.

The UK is a constitutional monarchy. In law, Head of the State is Queen. In practice, the country is ruled by the elected government with the Prime Minister at the head. The British Parliament consists of two chambers: the House of Lords and the House of Commons. There are three main political parties in Great Britain: the Labour, the Conservative and the Liberal parties. The flag of the United Kingdom, known as the Union Jack, is made up of three crosses. The big red cross is the cross of Saint George, the patron saint of England. The white cross is the cross of Saint Andrew, the patron saint of Scotland. The red diagonal cross is the cross of Saint Patrick, the patron saint of Ireland.

The United Kingdom has a long and exciting history and a lot of traditions and customs. The favorite topic of conversation is weather. The English like to drink tea at 5 o'clock. There are a lot of high daysin Great Britain. They celebrate Good Friday, Christmastide, Christmas, Valentine`s day and many others. It is considered this nation is the most conservative in Europe because people attach greater importance to traditions; they are proud of them and keep them up. The best examples are their money system, queen, their measures and weights. The English never throw away old things and don't like to have changes.

Great Britain is a country of strong attraction for tourists. There are both ancient and modern

monuments. For example: Hadrian Wall and Stonehenge, York Cathedral and Durham castle. It is no doubt London is the most popular place for visiting because there are a lot of sightseeing like the Houses of Parliament, Buckingham Palace, London Bridge, St Paul's Cathedral, Westminster Abbey, the Tower of London. Also you can see the famous Tower Clock Big Ben which is considered to be the symbol of London. Big Ben strikes every quarter of an hour. You will definitely admire Buckingham Palace. It's the residence of the royal family. The capital is famous for its beautiful parks: Hyde Park, Regent's Park. The last one is the home of London Zoo.

3.3 Систематизация грамматического материала:

1. Модальные глаголы и их эквиваленты.
2. Образование видовременных форм глагола в пассивном залоге.
3. Основные сведения о согласовании времён, прямая и косвенная речь.

Модальные глаголы

Глаголы	Значение	Примеры
CAN	физическая или умственная возможность/умение	I can swim very well. – Я очень хорошо умею плавать.
	возможность	You can go now. — Ты можешь идти сейчас.You cannot play football in the street. – На улице нельзя играть в футбол.
	вероятность	They can arrive any time. – Они могут приехать в любой момент.
	удивление	Can he have said that? – Неужели он это сказал?
	сомнение, недоверчивость	She can't be waiting for us now. – Не может быть, чтобы она сейчас нас ждала.
	разрешение	Can we go home? — Нам можно пойти домой?
	вежливая просьба	Could you tell me what time it is now? – Не могли бы вы подсказать, который сейчас час?
MAY	разрешение	May I borrow your book? – Я могу одолжить у тебя книгу?
	предположение	She may not come. – Она, возможно, не придет.
	возможность	In the museum you may see many interesting things. – В музее вы можете увидеть много интересных вещей.
	упрек – только **MIGHT (+ perfect infinitive)**	You might have told me that. – Ты мог бы мне это сказать.
MUST	обязательство, необходимость	He must work. He must earn money. – Он должен работать. Он должен зарабатывать деньги.
	вероятность (сильная степень)	He must be sick. — Он, должно быть, заболел.
	запрет	Tourists must not feed animals in the zoo. — Туристы не должны кормить животных в зоопарке.
SHOULD OUGHT TO	моральное долженствование	You ought to be polite. – Вы должны быть любезными.
	совет	You should see a doctor. – Вам следует сходить к врачу.
	упрек, запрет	You should have taken the umbrella. – Тебе следовало взять с собой зонт.
SHALL	указ, обязанность	These rules shall apply in all circumstances. – Эти правила будут действовать при любых

		обстоятельствах.
	угроза	You shall suffer. — Ты будешь страдать.
	просьба об указании	Shall I open the window? – Мне открыть окно?
WILL	готовность, нежелание/отказ	The door won't open. — Дверь не открывается.
	вежливая просьба	Will you go with me? – Ты сможешь пойти со мной?
WOULD	готовность, нежелание/отказ	He would not answer this question. – Он не будет отвечать на этот вопрос.
	вежливая просьба	Would you please come with me? — Не могли бы вы пройти со мной.
	повторяющееся/привычное действие	We would talk for hours. – Мы беседовали часами.
NEED	необходимость	Do you need to work so hard? – Тебе надо столько работать?
NEEDN'T	отсутствие необходимости	She needn't go there. — Ей не нужно туда идти.
DARE	Посметь	How dare you say that? – Как ты смеешь такое говорить?

Модальные единицы эквивалентного типа		
to be able (to) = can	Возможность соверш-я конкрет-го дей-ия в опред. момент	She **was able** to change the situation then. (Она тогда была в состоянии (могла) изменить ситуацию).
to be allowed (to) = may	Возмож-ть совер-ия дей-ия в наст.-м, прош-ом или буд-ем + оттенок разрешения	My sister **is allowed to** play outdoors. (Моей сестре разрешается играть на улице).
to have (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом или буд-ем при опред-х об-вах	They **will have to** set up in business soon. (Им вскоре придется открыть свое дело).
to be (to)= ought, must, should	Необходимость совер-я дей-я в наст.-м, прош-ом при наличии опред. планов, распис-ий и т.д.	We **are to** send Nick about his business. (Мы должны (= планируем) выпроводить Ника

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Rephrase the following sentences using must, mustn't, needn't, has to or doesn't have to.

1 **You aren't allowed** to park your car in the college car park.

...You mustn't park your car in the college car park...

2 **I strongly advise** you to speak to your parents about your decision.

3 **It isn't necessary** for Emma to attend tomorrow's staff meeting.

4 **Jack is obliged** to wear a suit and a tie at work because the manager says so.

5 **I'm sure** Antonio is from Milan.

6 **It's necessary** for Roger to find a job soon.

7 **It's forbidden** to use mobile phones inside the hospital.

8 Susan **is obliged to** work overtime because her boss says so.

2. Rephrase the following sentences using didn't need to or needn't have done.

1 It wasn't necessary for him to wash the car. It wasn't dirty.

...He didn't need to wash the car...

2 It wasn't necessary for her to buy so many oranges, but she did.

3 It wasn't necessary for us to take an umbrella. It wasn't raining.

4 It wasn't necessary for us to turn on the light. It wasn't dark.

5 It wasn't necessary for him to call me today, but he did.
6 It wasn't necessary for you to make sandwiches for me, but you did.
7 It wasn't necessary for them to make reservations at the restaurant, but they did.

3. Rewrite the sentences using the word in bold.

1 It isn't necessary for Mark to buy new clothes for the reception.
need *..Mark doesn't need to/needn't buy new clothes for the reception...*
2 You aren't allowed to pick these flowers. **must**
3 Sarah is obliged to type her compositions at university. **has**
4 It wasn't necessary for Paula to make the beds. **need**
5 It is your duty to obey the law. **must**
6 It wasn't necessary for Bob to wait for me, but he did. **need**
7 It is forbidden to throw litter on the beach. **must**
8 I'm sure Ronald is at home. **must**
9 It wasn't necessary for Alice to bake a cake for the party. **need**
10 It wasn't necessary for George to stay at work late last night, but he did. **have**

4. Fill in the gaps with an appropriate modal verb.

1 A: ... *May/Can/Could*... I borrow your pen, please?
B: No, you … .I'm using it.
2 A: I'm bored. What shall we do?
B: We … go for a walk.
A: No, we … because it's raining.
B: Let's watch a video, then.
3 A: My parents told me I … go to the party tonight.
B: Never mind, I … go either. We … stay at home together, though.
4 A: Sir, … .I speak to you for a moment, please?
B: Certainly, but later today; I'm busy now.
5 A: Excuse me?
B: Yes?
A: … you tell me where the post office is, please?
B: Certainly. It's on the main road, next to the school.
6 A: Is anyone sitting on that chair?
B: No, you … take it if you want to.

5. Choose the correct answer.

1 " Todd was a very talented child.'
I know. He ..*B*... play the piano well when he was seven.'
A couldn't B could C can
2 I've just taken a loaf out of the oven.
Oh, that's why I … smell fresh bread when I came home.
A was able to B can't C could
3 'How was the test?'
Easy. All the children … pass it.'
A were able to B could C can't
4 What are you doing this summer?'
'I hope I'll … go on holiday with my friends.'
A could B be able to C can

6 Rewrite the sentences using the words in bold.

1 Do you mind if I leave the door open for a while?
can *...Can I leave the door open for a while?...*

2 You're obliged to take notes during the lecture. **have**
3 I'm sorry, but you aren't allowed to enter this room. **must**
4 Jack managed to unlock the door. **able**
5 It wasn't necessary for Ann to cook dinner, but she did. **need**
6 Let's play a game of chess. **could**
7 I'm certain Sarah is bored with her work. **must**
8 I strongly advise you to take up sport. **must**
9 I'm certain Liz isn't interested in your ideas. **can**
10 You may take the car tonight if you want. **can**

7. Study the situations and respond to each one using an appropriate modal verb.

1 You want to go on holiday with your friends this year. Ask your parents for **permission.**
...Can I go on holiday with my friends this year?...
2 You are at a job interview. You type fast, you use computers and you speak two foreign languages. Tell the interviewer about your **abilities**.
3 Your brother is trying to decide what to buy your mother for her birthday. You **suggest** a box of chocolates.
4 Your jacket is dirty and you want to wear it next week. It is **necessary** to take it to the dry cleaner's.
5 You want to have a day off work next week. Ask for your boss' **permission.**
6 You are in the car with your uncle. It's hot and you want him to open the window. Make a **request.**
7 Your mother is going to the shops. She asks you if you want anything. You tell her it **isn't necessary** to get anything for you.

8. Complete the sentences using must or can't.

1 I'm certain they go to bed early on Sunday nights. They *...must go to bed early on Sunday nights...*
2 I'm sure John didn't stay late at the office. John *...can't have stayed late at the office...*
3 I'm certain he hasn't arrived yet. He ...
4 I'm certain they are working together. They ...
5 I'm sure Amy hasn't finished her homework. Amy ...
6 I'm certain she was having a bath when I rang. She ...
7 I'm sure he hasn't won the prize. He ...
8 I'm sure she is looking for a new house. She ...
9 I'm certain Paul didn't invite Linda to the party. Paul ...
10 I'm certain you have been planning the project. You ...
11 I'm sure she was writing a letter. She ...
12 I'm certain they hadn't paid the bill. They ...
13 I'm sure he had been fixing the pipe. He ...

9. Rephrase the following sentences in as many ways as possible.

1 Perhaps Laura has left the phone off the hook. *...Laura may/might/could have left the phone off the hook...*
2 Surgeons are obliged to scrub their hands before operating on patients.
3 Do you mind if I open the window?
4 It wasn't necessary for Peter to wash the dog, so he didn't.
5 Emily managed to reach the top shelf, even though she didn't have a ladder.
6 It's forbidden to copy files without the manager's permission.
7 Why don't we spend this evening at home?
8 I'm certain Patrick misunderstood my instructions.
9 I'm sure Helen didn't know about her surprise party.

10. Rephrase the following sentences in as many ways as possible.

1 Perhaps they are at work.

They ...*may/might/could be at work*...

2 Perhaps he is waiting outside. He ...

3 It's possible she will work late tonight. She ...

4 It's likely he was driving too fast. He ...

5 It's possible they made a mistake. They ...

6 Perhaps he has missed the bus. He ...

7 It's possible she has been playing in the snow. She ...

8 It's likely we will be leaving tomorrow. We ...

9 It's likely he will stay there. He ...

10 Perhaps she had been trying to call you. She ...

11 It's likely they had seen the film already. They ...

12 It's possible he is studying in the library. He ...

Страдательный залог (Passive Voice)

образуется при помощи вспомогательного глагола to be в соответствующем времени, лице и числе и причастия прошедшего времени смысл. глагола – Participle II (III –я форма или ed-форма).

В страдательном залоге не употребляются:

1) Непереходные глаголы, т.к. при них нет объекта, который испытывал бы воздействие, то есть нет прямых дополнений которые могли бы стать подлежащими при глаголе в форме Passive.

Переходными в англ. языке называются глаголы, после которых в действительном залоге следует прямое дополнение; в русском языке это дополнение, отвечающее на вопросы винительного падежа – кого? что?: to build строить, to see видеть, to take брать, to open открывать и т.п.

Непереходными глаголами называются такие глаголы, которые не требуют после себя прямого дополнения: to live жить, to come приходить, to fly летать, cry плакать и др.

2) Глаголы-связки: be – быть, become – становиться/стать.

3) Модальные глаголы.

4) Некоторые переходные глаголы не могут использоваться в страдательном залоге. В большинстве случаев это глаголы состояния, такие как:

to fit годиться, быть впору to have иметь to lack не хватать, недоставать to like нравиться

to resemble напоминать, быть похожим to suit годиться, подходить и др.

При изменении глагола из действительного в страдательный залог меняется вся конструкция предложения:

- дополнение предложения в Active становится подлежащим предложения в Passive;
- подлежащее предложения в Active становится предложным дополнением, которое вводится предлогом by или вовсе опускается;
- сказуемое в форме Active становится сказуемым в форме Passive.

Особенности употребления форм Passive:

1. Форма Future Continuous не употребляется в Passive, вместо нее употребляется Future Indefinite:

At ten o'clock this morning Nick will be writing the letter. –At ten o'clock this morning the letter will be written by Nick.

2. В Passive нет форм Perfect Continuous, поэтому в тех случаях, когда нужно передать в Passive действие, начавшееся до какого-то момента и продолжающееся вплоть до этого момента, употребляются формы Perfect:

He has been writing the story for three months. The story has been written by him for three months.

3. Для краткости, во избежание сложных форм, формы Indefinite (Present, Past, Future) часто употребляются вместо форм Perfect и Continuous, как в повседневной речи так и в художественной литературе. Формы Perfect и Continuous чаще употребляются в научной литературе и технический инструкциях.

This letter has been written by Bill. (Present Perfect)

This letter is written by Bill. (Present Indefinite – более употребительно)

Apples are being sold in this shop. (Present Continuous)

Apples are sold in this shop. (Present Indefinite – более употребительно)

4. Если несколько однотипных действий относятся к одному подлежащему, то вспомогательные глаголы обычно употребляются только перед первым действием, например: The new course will be sold in shops and ordered by post.

Прямой пассив (The Direct Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует прямому дополнению предложения в Active. Прямой пассив образуется от большинства переходных глаголов.

I gave him a book. Я дал ему книгу. A book was given to him. Ему дали книгу. (или Книга была дана ему)

The thief stole my watch yesterday. Вор украл мои часы вчера.

My watch was stolen yesterday. Мои часы были украдены вчера.

В английском языке имеется ряд переходных глаголов, которые соответствуют непереходным глаголам в русском языке. В английском они могут употребляться в прямом пассиве, а в русском – нет. Это:to answer отвечать кому-л.

to believe верить кому-л. to enter входить (в) to follow следовать (за) to help помогать кому-л.

to influence влиять (на) to join присоединяться to need нуждаться to watch наблюдать (за)

Так как соответствующие русские глаголы, являясь непереходными, не могут употребляться в страдательном залоге, то они переводятся на русский язык глаголами в действительном залоге:

Winter is followed by spring.

А при отсутствии дополнения с предлогом by переводятся неопределенно-личными предложениями: Your help is needed.

Косвенный пассив (The Indirect Passive)

Это конструкция, в которой подлежащее предложения в Passive соответствует косвенному дополнению предложения в Active. Она возможна только с глаголами, которые могут иметь и прямое и косвенное дополнения в действительном залоге. Прямое дополнение обычно означает предмет (что?), а косвенное – лицо (кому?).

С такими глаголами в действительном залоге можно образовать две конструкции:

а) глагол + косвенное дополнение + прямое дополнение;

б) глагол + прямое дополнение + предлог + косвенное дополнение:

а) They sent Ann an invitation.- Они послали Анне приглашение.

б) They sent an invitation to Ann. - Они послали приглашение Анне.

В страдательном залоге с ними также можно образовать две конструкции – прямой и косвенный пассив, в зависимости от того, какое дополнение становится подлежащим предложения в Passive. К этим глаголам относятся:to bring приносить

to buy покупать to give давать to invite приглашать to leave оставлять

to lend одалживать to offer предлагать to order приказывать to pay платить

to promise обещать to sell продавать to send посылать to show показывать

to teach учить to tell сказать и др.

Например: Tom gave Mary a book. Том дал Мэри книгу.

Mary was given a book. Мэри дали книгу. (косвенный пассив – более употребителен)

A book was given to Mary. Книгу дали Мэри. (прямой пассив – менее употребителен)

Выбор между прямым или косвенным пассивом зависит от смыслового акцента, вкладываемого в последние, наиболее значимые, слова фразы:

John was offered a good job. (косвенный пассив) Джону предложили хорошую работу.

The job was offered to John. (прямой пассив) Работу предложили Джону.

Глагол to ask спрашивать образует только одну пассивную конструкцию – ту, в которой подлежащим является дополнение, обозначающее лицо (косвенный пассив):

He was asked a lot of questions. Ему задали много вопросов.

Косвенный пассив невозможен с некоторыми глаголами, требующими косвенного дополнения (кому?) с предлогом to. Такое косвенное дополнение не может быть подлежащим в Passive, поэтому в страдательном залоге возможна только одна конструкция – прямой пассив, то есть вариант: Что? объяснили, предложили, повторили…Кому? Это глаголы:to address адресовать

to describe описывать to dictate диктовать to explain объяснять to mention упоминать

to propose предлагать to repeat повторять to suggest предлагать to write писать и др.

Например: The teacher explained the rule to the pupils. – Учитель объяснил правило ученикам. The rule was explained to the pupils. – Правило объяснили ученикам. (Not: The pupils was explained…)

Употребление Страдательного залога

В английском языке, как и в русском, страдательный залог употр. для того чтобы:

1. Обойтись без упоминания исполнителя действия (70% случаев употребления Passive) в тех случаях когда:

а) Исполнитель неизвестен или его не хотят упоминать:

He was killed in the war. Он был убит на войне.

б) Исполнитель не важен, а интерес представляет лишь объект воздействия и сопутствующие обстоятельства:

The window was broken last night. Окно было разбито прошлой ночью.

в) Исполнитель действия не называется, поскольку он ясен из ситуации или контекста:

The boy was operated on the next day. Мальчика оперировали на следующий день.

г) Безличные пассивные конструкции постоянно используются в научной и учебной литературе, в различных руководствах: The contents of the container should be kept in a cool dry place. Содержимое упаковки следует хранить в сухом прохладном месте.

2. Для того, чтобы специально привлечь внимание к тому, кем или чем осуществлялось действие. В этом случае существительное (одушевленное или неодушевленное.) или местоимение (в объектном падеже) вводится предлогом by после сказуемого в Passive.

В английском языке, как и в русском, смысловой акцент приходится на последнюю часть фразы. He quickly dressed. Он быстро оделся.

Поэтому, если нужно подчеркнуть исполнителя действия, то о нем следует сказать в конце предложения. Из-за строгого порядка слов английского предложения это можно осуществить лишь прибегнув к страдательному залогу. Сравните:

The flood broke the dam. (Active) Наводнение разрушило плотину. (Наводнение разрушило что? – плотину)

The dam was broken by the flood. (Passive) Плотина была разрушена наводнением. (Плотина разрушена чем? – наводнением)

Чаще всего используется, когда речь идет об авторстве:

The letter was written by my brother. Это письмо было написано моим братом.

И когда исполнитель действия является причиной последующего состояния:

The house was damaged by a storm. Дом был поврежден грозой.

Примечание: Если действие совершается с помощью какого-то предмета, то употребляется предлог with, например:

He was shot with a revolver. Он был убит из револьвера.

Перевод глаголов в форме Passive

В русском языке есть три способа выражения страдательного залога:

1. При помощи глагола "быть" и краткой формы страдательного причастия, причем в настоящем времени "быть" опускается:

I am invited to a party.

Я приглашён на вечеринку.

Иногда при переводе используется обратный порядок слов, когда русское предложение начинается со сказуемого: New technique has been developed. Была разработана новая методика.

2. Глагол в страдательном залоге переводится русским глаголом, оканчивающимся на –ся(-сь):

Bread is made from flour. Хлеб делается из муки.

Answers are given in the written form. Ответы даются в письменном виде.

3. Неопределенно-личным предложением (подлежащее в переводе отсутствует; сказуемое стоит в 3-м лице множественного числа действительного залога). Этот способ перевода возможен только при отсутствии дополнения с предлогом by (производитель действия не упомянут):

The book is much spoken about. Об этой книге много говорят.

I was told that you're ill. Мне сказали, что ты болен.

4. Если в предложении указан субъект действия, то его можно перевести личным предложением с глаголом в действительном залоге (дополнение с by при переводе становится подлежащим). Выбор того или иного способа перевода зависит от значения глагола и всего предложения в целом (от контекста):

They were invited by my friend. Их пригласил мой друг.(или Они были приглашены моим другом.)

Примечание 1: Иногда страдательный оборот можно перевести двумя или даже тремя способами, в зависимости от соответствующего русского глагола и контекста:

The experiments were made last year.

1) Опыты были проведены в прошлом году.

2) Опыты проводились в прошлом году.

3) Опыты проводили в прошлом году.

Примечание 2: При переводе нужно учитывать, что в английском языке, в отличие от русского, при изменении залога не происходит изменение падежа слова, стоящего перед глаголом (например в английском she и she, а переводим на русский - она и ей):

Примечание 3: Обороты, состоящие из местоимения it с глаголом в страдательном залоге переводятся неопределенно-личными оборотами:

It is said… Говорят… It was said… Говорили…

It is known… Известно… It was thought…Думали, полагали…

It is reported… Сообщают… It was reported…Сообщали…и т.п.

В таких оборотах it играет роль формального подлежащего и не имеет самостоятельного значения: It was expected that he would return soon. Ожидали, что он скоро вернется.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. What happens to a car when it is taken for a service? Look at the prompts and make sentences using the present simple passive, as in the example.

1. the oil / change

The oil is changed.

2. the brakes / test

3. the filters / replace

4. air / put / in the tyres

5. the battery / check

6. the lights / test
7. broken parts / repair
8. it / take / for a test drive
9. the radiator / fill / with water

2. Mr Sullivan, who is a director, is preparing a scene for his new film. Read the orders and respond using the present continuous passive, as in the example.

1. Move that scenery, please.
It's being moved now, Mr Sullivan.
2. Put those props in place, please.
3. Call the actors, please.
4. Check their costumes, please.
5. Turn on the lights, please.

3. Detective Maguire is talking to a police officer about a burglary which happened early yesterday morning. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example

1. Have you dusted the house for fingerprints yet?
the house / dust / for fingerprints yesterday
Yes, the house was dusted for fingerprints yesterday.
2. Have you found any evidence yet?
a piece of material / find / this morning
3. Have you interviewed the house owners yet?
they / interview / last night
4. Have you questioned the neighbours yet?
they / question / this morning
5. Have you arrested any suspects yet?
two men / arrest / yesterday evening
6. Have you interrogated the suspects yet?
they / interrogate / last night
7. Have you recovered the stolen goods yet?
they / recover / this morning
8. Have you written your report yet?
it / complete / an hour ago

4. Helen and Chris moved house two years ago. Yesterday, they drove past their old house and saw that it looked very different. Describe the changes using the present perfect simple passive, as in the example.

1. the outside walls / paint
The outside walls have been painted.
2. new windows / put in
3. a garden pond / make
4. the trees / cut down
5. a lot of flowers / plant
6. the old gate / replace

5. A young actress is hoping to star in a new film. Her friend is asking her what is going to happen. Respond to her questions using the passive infinitive, as in the example.

1. Will they audition you for the new film?
Well, I hope to be auditioned.
2. Will they give you a leading role?
3. Will they pay you a lot of money?
4. Will they send you to Hollywood?

5. Will they introduce you to all the stars?
6. Will they ask you to give a TV interview?
7. Will they give you an award?

6. Put the verbs in brackets into the correct passive tense.

1. A: Who looks after your garden for you?
B: It ...*is looked after*... (look after) by my brother.
2. A: That's a beautiful dress. Where did you buy it?
B: Actually, it ... (make) for me by my aunt.
3. A: Have you typed that letter yet, Miss Brown?
B: It ... (type) right now, sir.
4. A: Did you make the coffee when you got to work this morning?
B: No, it .... (already/make) by the time I got there.
5. A: Are you going to pick up the children today?
B: No, they ... (pick up) by Roger. I've already arranged it.
6. A: Where is your watch?
B: I broke it. It ... (repair) at the moment.
7. A: Has the new furniture for my bedroom arrived?
B: No, it ... (not/deliver) yet.
8. A: They are building a new sports centre in town.
B: I know. It ... (open) by the mayor next month.

7. Rewrite the sentences in the passive, where possible.

1. John opened the door.
...The door was opened by John.
2. They didn't come home late last night.
...It cannot be changed.
3. Their nanny takes them to the park every day.
4. I left very early yesterday afternoon.
5. Meg asked the policeman for directions.
6. Charles is moving house next month.
7. The letter arrived two days ago.
8. Sam took these photographs.

8. Fill in by or with.

1. The lock was broken ...*with*... a hammer.
2. This book was written ... my favourite author.
3. The cake was decorated... icing.
4. The tiger was shot ... a gun.
5. Claire was shouted at ... her teacher.
6. He was hit on the head ... an umbrella.

9. Rewrite the sentences in the passive.

1. Someone is repairing the garden fence.
...The garden fence is being repaired....
2. Do they teach Latin at this school?
3. I don't like people pointing at me.
4. She hit him on the head with a tennis racquet.
5. Michael has made the preparations.
6. Is Tim cleaning the house?
7. Who built the Pyramids?
8. The boss is going to give us a pay rise.

9. I expect they will deliver my new car soon.
10. The police are questioning the suspects.
11. Did your next door neighbours see the thieves?
12. Paul remembers his teacher asking him to star in the school play.
13. A lot of children use computers nowadays.
14. Who smashed the kitchen window?
15. They won't have completed the work by the end of the month.
16. The children will post the letters.
17. People make wine from grapes.
18. Had Helen closed the windows before she left the house?
19. Jill hasn't done the housework yet.
20. They may not deliver the parcel today.

10. Put the verbs in brackets into the correct passive tense.

A: Do you still work at Browns and Co?
B: Yes, I do. I 1) ...*have been employed*... (employ) by Mr Brown for five years now, you know.
A: Oh. Do you still enjoy it?
B: Oh yes! I 2) ... (give) a promotion last year and I'm very happy.
A: A promotion? So, what is your job now?
B: I 3) ... (make) Head of European Sales.
A: So, what do you do?
B: Well, sometimes I 4) ... (send) to other countries on business.
A: I see. Do they pay you well?
B: Well, I 5) ... (pay) quite well and I expect I 6) ... (give) a pay rise soon.
A: Good for you!

Согласование времен (Sequence of Tenses)

Если в главном предложении сказуемое выражено глаголом в одной из форм прошедшего времени, то в придаточном предложении употребление времен ограничено. Правило, которому в этом случае подчиняется употребление времен в придаточном предложении, называется согласованием времен.

Правило 1: Если глагол главного предложения имеет форму настоящего или будущего времени, то глагол придаточного предложения будет иметь любую форму, которая требуется смыслом предложения. То есть никаких изменений не произойдет, согласование времен здесь в силу не вступает.

Правило 2: Если глагол главного предложения имеет форму прошедшего времени (обычно Past Simple), то глагол придаточного предложения должен быть в форме одного из прошедших времен. То есть в данном случае время придаточного предложения изменится. Все эти изменения отражены в нижеследующей таблице:

Переход из одного времени в другое	Примеры	
Present Simple » Past Simple	He **can speak** French – Он говорит по-французски.	Boris said that he **could speak** French – Борис сказал, что он говорит по-французски.
Present Continuous » Past Continuous	They **are listening** to him – Они слушают его	I **thought** they **were listening** to him – Я думал, они слушают его.
Present Perfect » Past Perfect	Our teacher **has asked** my parents to help him – Наш учитель попросил моих родителей помочь ему.	Mary **told** me that our teacher **had asked** my parents to help him – Мария сказала мне, что наш учитель попросил моих родителей помочь ему.

Past Simple » Past Perfect	I **invited** her – Я пригласил ее.	Peter **didn't know** that I **had invited** her – Петр не знал, что я пригласил ее.
Past Continuous » Past Perfect Continuous	She **was crying** – Она плакала	John **said** that she **had been crying** – Джон сказал, что она плакала.
Present Perfect Continuous » Past Perfect Continuous	It **has been raining** for an hour – Дождь идет уже час.	He **said** that it **had been raining** for an hour – Он сказал, что уже час шел дождь.
Future Simple » Future in the Past	She **will show** us the map – Она покажет нам карту.	I **didn't expect** she **would show** us the map – Я не ожидал, что она покажет нам карту.

Изменение обстоятельств времени и места при согласовании времен.

Следует запомнить, что при согласовании времен изменяются также некоторые слова (обстоятельства времени и места).

this » that
these » those
here » there
now » then
yesterday » the day before
today » that day
tomorrow » the next (following) day
last week (year) » the previous week (year)
ago » before
next week (year) » the following week (year)

Перевод прямой речи в косвенную в английском языке

Для того чтобы перевести прямую речь в косвенную, нужно сделать определенные действия. Итак, чтобы передать чьи-то слова в английском языке (то есть перевести прямую речь в косвенную), мы:

1. ***Убираем кавычки и ставим слово that***

Например, у нас есть предложение:

She said, "I will buy a dress". Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы передать кому-то эти слова, так же как и в русском, мы убираем кавычки и ставим слово that – «что».

She said that ….. Она сказала, что….

2. ***Меняем действующее лицо***

В прямой речи обычно человек говорит от своего лица. Но в косвенной речи мы не может говорить от лица этого человека. Поэтому мы меняем «я» на другое действующее лицо. Вернемся к нашему предложению.

She said, "I will buy a dress". Она сказала: «Я куплю платье».

Так как мы передаем слова девушки, вместо «я» ставим «она»:

She said that she ….. Она сказала, что она….

3. Согласовываем время

В английском языке мы не можем использовать в одном предложении прошедшее время с настоящим или будущим. Поэтому, если мы говорим «сказал» (то есть используем прошедшее время), то следующую часть предложения нужно согласовать с этим прошедшем временем. Возьмем наше предложение:

She said, "I will buy a dress". Она сказала: «Я куплю платье».

Чтобы согласовать первую и вторую части предложения, меняем will на would. *см. таблицу выше.*

She said that she would buy a dress. Она сказала, что она купит платье.

4. Меняем некоторые слова

В некоторых случаях мы должны согласовать не только времена, но и отдельные слова. Что это за слова? Давайте рассмотрим небольшой пример.

She said, "I am driving now". Она сказала: «Я за рулем сейчас».

То есть она в данный момент за рулем. Однако, когда мы будем передавать ее слова, мы будем говорить не про данный момент (тот, когда мы говорим сейчас), а про момент времени в прошлом (тот, когда она была за рулем). Поэтому мы меняем now (сейчас) на then (тогда) *см. таблицу выше.*

She said that she was driving then. Она сказала, что она была за рулем тогда.

Вопросы в косвенной речи в английском языке

Вопросы в косвенной речи, по сути, не являются вопросами, так как порядок слов в них такой же, как в утвердительном предложении. Мы не используем вспомогательные глаголы (do, does, did) в таких предложениях.

He asked, "Do you like this cafe?" Он спросил: «Тебе нравится это кафе?»

Чтобы задать вопрос в косвенной речи, мы убираем кавычки и ставим if, которые переводятся как «ли». Согласование времен происходит так же, как и в обычных предложениях. Наше предложение будет выглядеть так:

He asked if I liked that cafe. Он спросил, нравится ли мне то кафе.

Давайте рассмотрим еще один пример:

She said, "Will he call back?" Она сказала: «Он перезвонит?»

She said if he would call back. Она сказала, перезвонит ли он.

Специальные вопросы в косвенной речи

Специальные вопросы задаются со следующими вопросительными словами: what – что when – когда how – как why - почему where – где which – который

При переводе таких вопросов в косвенную речь мы оставляем прямой порядок слов (как в утвердительных предложениях), а на место if ставим вопросительное слово.

Например, у нас есть вопрос в прямой речи:

She said, "When will you come?". Она сказала: «Когда ты придешь?»

В косвенной речи такой вопрос будет выглядеть так:

She said when I would come. Она сказала, когда я приду.

He asked, "Where does she work?" Он спросил: «Где она работает?»

He asked where she worked. Он спросил, где она работает.

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Fill in the gaps with the correct pronoun or possessive adjective.

1. James said, 'My boss wants me to go to London tomorrow.'
James said ...*his*... boss wanted to go to London the following day.
2. Mary said, 'I'm waiting for my son to come out of school.'
Mary said that … was waiting for … son to come out of school.
3. George said, 'I've bought a new car for my mum.'
George said … had bought a new car for … mum.
4. Julie said to me, 'I need you to help me with the shopping.'
Julie told me that … needed … to help … with the shopping.
5. John said, 'I'd like to take you out to dinner.'
John said … 'd like to take … out to dinner.
6. Helen said to Jane, 'I think your new haircut is lovely.'
Helen told Jane that … thought … new haircut was lovely.

2. Turn the following sentences into reported speech.

1. Robin said, These biscuits taste delicious.' ...
Robin said (that) the biscuits tasted delicious....

2. “I can't see you this afternoon because I've got a lot to do,' Ann told me.
3. She came into the room holding some letters in her hand and said, 'I found these while I was tidying the desk drawers.'
4. Fiona said, That picture was painted by my great-grandfather.'
5. “Those were good times for my family,' Jack said.
6. 'I received a parcel this morning, but I haven't opened it yet,' Tom said.
7. "You mustn't do that again,' Mum said to Bob.
8. “These shoes are worn out. You'd better throw them away,' Mum said to me.

3. Turn the following sentences into reported speech.

1 He said, 'I'm going to the station.'

...He said (that) he was going to the station....

2 Tina said, 'You should exercise regularly.'
3 They said, 'We had booked the room before we left.'
4 Tom said, This meal is delicious.'
5 'I've written you a letter,' she said to her friend.
6 'We've decided to spend our holidays in Jordan,' they told us.
7 Jill said, “I'll go to the bank tomorrow.'
8 She said to him, 'We've been invited to a wedding.'
9 She told me, 'You must leave early tomorrow.'
10 They've gone out for the evening,' Jessie said to me.
11 They said, 'We may visit Joe tonight.'
12 She said, 'I can meet you on Tuesday.'
13 Keith said, There is a letter for you on the table.'
14 'We won't be visiting Tom this evening,' Sam told us.
15 Eric said, They had been talking on the phone for an hour before I interrupted them.'
16 'I haven't spoken to Mary since last week,' Gloria said.
17 They delivered the letters this morning,' she said.
18 He said, 'I'd like to buy this jumper.'
19 They aren't going on holiday this year,' he said.
20 Jane said, 'I haven't finished my homework yet.'
21 'I'm going to bed early tonight,' Caroline said.
22 'My mother is coming to visit us,' I said.
23 'We don't want to watch a film tonight,' the children said.
24 'He's playing in the garden now,' his mother said.
25 She said, 'You must do your homework now.'

4. Turn the sentences into reported speech. In which of the following sentences do the tenses not change? In which do they not have to be changed? Why?

1 The article says, “The artist only uses oil paints.'

...The article says (that) the artist only uses oil paints....

... The tenses do not change because the introductory verb is in the present simple....

2 'They are working hard today,' he said.
3 'I've done the things you asked me to do,' Mary said.
4 The sun rises in the east,' she said.
5 'He broke the window,' they said.
6 'We've never been on holiday abroad,' they said.
7 Mum says, 'Dinner is ready.'
8 “I'll start cooking at six o'clock,' she said.
9 'We went to the supermarket yesterday,' he said.
10 Mrs Jones says, 'My daughter is going to have a baby.'
11 'You're never going to get a job,' Dad always says.

12 'Fish live in water,' he said.
13 'We went to the beach last weekend,' they said.
14 'He showed me his photographs,' she said.
15 'I'm working on my project now,' Billy said.

5. Turn the following sentences into reported speech.

1 'Seaweed grows in the sea,' the teacher said to the students.
...The teacher said to the students/told the students (that) seaweed grows/grew in the sea....
2 'I saw Amanda at the cinema,' she said, (up-to-date reporting)
3 They don't live here any more,' he said to me. (out-of-date reporting)
4 "Canada is a large country,' he said.
5 The Statue of Liberty is in America,' she said to us
6 "I'll help you with your homework,' he said, (out-of-date reporting)
7 'I would go on holiday if I had enough money,' Bill said, (up-to-date reporting)
8 'If I'm free, I'll call you,' Tom said, (up-to-date reporting)
9 'You should make a decision,' he said to us.
10 'You can ask John for advice,' she said, (up-to-date reporting)

6. Turn the following into reported questions.

1 'Where do you live?' I asked her.
...I asked her where she lived....
2 'How old will you be on your next birthday?" he asked me.
3 'Where is your umbrella?' she asked her daughter.
4 'Do you like playing football?' John asked us.
5 The boss asked, 'What time are you going home today?'
6 'Will you take the children to school today?' he asked.
7 'Who called you today?' she asked.
8 'When will you decorate the kitchen?' Martha asked.
9 'Who broke my vase?' I asked.
10 Father asked, 'Will you help me lift these boxes, please?'
11 'Can you speak a foreign language?' she asked her.
12 'Where is the tourist information centre?' we asked.

7. Yesterday, Marion met a couple who were on holiday in London. They were looking at a map. She asked them some questions. Turn them into reported questions.

1 'Are you lost?'
...Marion asked them if/whether they were lost....
2 'Can you speak English?'
3 'Where are you from?'
4 'Is your hotel near here?'
5 'Where do you want to go?'
6 'Were you looking for Big Ben?'
7 'Have you been to the British Museum?'
8 'Have you visited Buckingham Palace?'
9 'Do you like London?'

8. Fill in the gaps with the introductory verbs in the list in the correct form.

order, tell, ask, beg, suggest
1 'Please visit me in hospital,' Joan said to Colin.
Joan ...*asked*... Colin to visit her in hospital.
2 'Let's eat out this evening,' Paul said to her.
Paul … eating out that evening.

3 'Please, please be careful,' she said to him.
She .. him to be careful.
4 'Don't go near the fire.' Dad said to us.
Dad us not to go near the fire.
5 'Be quiet!' the commander said to the troops.
The commander the troops to be quiet

9. Turn the following sentences into reported speech.

1 'Let's try the exercise again.'
The ballet teacher suggested trying the exercise again.
2 'Lift your leg higher please, Rachel.'
3 'Turn your head a little more.'
4 'Don't lean back.'

10. Turn the following sentences into reported speech.

1 The doctor said to the patient. 'Come back to see me again next week.'
. The doctor told the patient to go back and see him again the following week/the week after.
2 The guard said to the driver, 'Stop!'
3 He said, 'Shall we go for a walk?'
4 She said to him, 'Please, please don't leave me!'
5 Jenny said to Dave, 'Please help me with this
6 She said to him, 'Open the window, please.'
7 Mother said, 'How about going for a drive?'
8 She said, 'Let's eat now.'

ТЕМА 4. Профессиональная сфера общения (Я и моя будущая специальность)

Тематика общения:

1. Избранное направление профессиональной деятельности.

4.1 Запомните слова и выражения, необходимые для освоения тем курса:

My speciality

The Earth's Crust and Useful Minerals

cause - v заставлять; вызывать; влиять; причинять; *n* причина, основание; дело; общее дело; *syn* **reason**

clay - *n* глина; глинозем

consolidate - v твердеть, затвердевать, уплотнять(ся); укреплять; *syn* **solidify**

crust - *n* кора; *геол.* земная кора

decay - v гнить, разлагаться; *n* выветривание *(пород);* распад, разложение

derive - v (from) происходить, вести свое происхождение *(от);* наследовать

destroy - v разрушать; уничтожать; **destructive** *a* разрушительный

dissolve v растворять

expose - v выходить *(на поверхность);* обнажаться; **exposure** - *n* обнажение

external - *a* внешний

extrusive - *a* эффузивный, излившийся *(о горной породе)*

force - v заставлять, принуждать; ускорять движение; *n* сила; усилие

glacier - *n* ледник, глетчер

grain - *n* зерно; **angular grains** - угловатые зерна *(минералов);* **grained** - *a* зернистый

gravel - *n* гравий, крупный песок

internal - *a* внутренний

intrusive - *a* интрузивный, плутонический

iron - *n* железо

layer - *n* пласт

like - *a* похожий, подобный; *syn* **similar;** *ant* **unlike;** *adv* подобно

lime - *n* известь, **limestone** - *n* известняк

loose - *a* несвязанный, свободный; рыхлый

make up - v составлять; *n* состав *(вещества)*

particle - *n* частица; включение

peat - *n* торф; торфяник

represent - v представлять собою; означать; быть представителем; **representative** - представитель; **representative** - *a* характерный, типичный

rock – *n* горная порода; **igneous** - изверженная порода; **sedimentary** - осадочная порода

sand - *n* песок

sandstone - *n* песчаник; **fine-grained (medium-grained, coarse-grained)** - мелкозернистый (среднезернистый, грубозернистый) песчаник

sediment - *n* отложение; осадочная порода; **sedimentary** - *a* осадочный; **sedimentation** - *n* образование осадочных пород

schist - *n (кристаллический)* сланец; **schistose** - *a* сланцеватый, слоистый

shale - *n* сланец, сланцевая глина, глинистый сланец; **clay** - глинистый сланец; **combustible ..., oil ...** - горючий сланец

siltstone - *n* алеврит

stratification - *n* напластование, залегание

stratify - v напластовываться; отлагаться пластами; **stratified** *a* пластовый; *syn* **layered, bedded**

substance - *n* вещество, материал; сущность

thickness - *n* толщина, мощность

value - *n* ценность; важность; величина; значение; **valuable** - *a* ценный *(о руде)*

vary - v изменять(ся); отличать(ся); *syn* **differ, change (from); variable** - *a* переменный, непостоянный; **various** *a* различный; *syn* **different**

contain - v содержать *(в себе),* вмещать

crack - *n* трещина; щель; v давать трещину; трескаться, раскалываться

contract - v сжиматься; сокращаться

dust - *n* пыль

expand - v расширяться); увеличивать(ся) в объеме; **expansion** *n* расширение; *ant* **contract**

fissure - *n* трещина *(в породе, угле);* расщелина; щель

fracture - *n* трещина; излом; разрыв; v ломать(ся); раздроблять *(породу)*

freeze - *v* замерзать; замораживать; застывать

gradual - *a* постепенный; **gradually** *adv* постепенно

hard - *a* твердый, жесткий; *ant* **soft;** тяжелый (о *работе); adv* сильно, упорно; **hardly** *adv* едва, с трудом

hole - *n* отверстие; скважина; шпур; шурф

influence - *n* влияние; v **(on, upon)** влиять (не *что-л.)*

lateral - *a* боковой

occur - *v* залегать; случаться; происходить; *syn* **take place, happen; occurrence** - *n* залегание; **mode of occurrence** - условия залегания

penetrate - *v* проникать *(внутрь),* проходить через *(что-л.)*

phenomenon - *n* явление; *pl* **phenomena**

pressure - *n* давление; **lateral pressure** боковое *(горизонтальное)* давление; **rock pressure** горное давление, давление породы

rate - *n* степень, темп; скорость, норма; производительность; сорт; *syn* **speed, velocity**

refer - v (to) ссылаться *(на что-л.);* относиться *(к периоду, классу)*

resist - *v* сопротивляться; противостоять; противодействовать; **resistance** - *n* сопротивление; **resistant** - *a* стойкий; прочный; сопротивляющийся

size - *n* размер; величина; класс *(угля)*

solution – *n* раствор; **soluble** - *a* растворимый; **solvent** - растворитель; *a* растворяющий

succession – *n* последовательность, непрерывный ряд; **in succession** последовательно

undergo (underwent, undergone) - *v* испытывать *(что-л.),* подвергаться *(чему-л.)*

uniform – *a* однородный; одинаковый

weathering - *n* выветривание; эрозия *(воздействию, влиянию и т.д.)*

to be subjected to подвергаться

Rocks of Earth's Crust

abyssal - *a* абиссальный, глубинный; **hypabissal** - *a* гипабиссальный

adjacent - *a* смежный, примыкающий

ash - *n* зола

belt - *n* пояс; лента; ремень

body - *n* тело, вещество; **solid (liquid, gaseous) bodies** твердые (жидкие, газообразные) вещества; породная масса; массив; месторождение; пласты

common - *a* обычный; общий; *syn* **general;** *ant* **uncommon**

cool - v охлаждать(ся); остывать; прохладный; *ant* **heat** нагревать(ся)

dimension - *n* измерение; *pl* размеры; величина; *syn* **measurement, size**

dust - *n* пыль

dyke – *n* дайка

extrusion - *n* вытеснение; выталкивание; *ant* **intrusion** вторжение; *геол.* интрузия *(внедрение в породу изверженной массы)*

fine - *a* тонкий, мелкий; мелкозернистый; высококачественный; тонкий; прекрасный, ясный (о *погоде);* изящный; **fine-graded (fine-grained)** мелкозернистый, тонкозернистый; **fines** - *n pl* мелочь; мелкий уголь

flow - v течь, литься; *n* течение; поток; **flow of lava** поток лавы
fragmentary - *a* обломочный, пластический
glass - *n* стекло; **glassy** - *a* гладкий, зеркальный; стеклянный
gold - *n* золото
inclined - *a* наклонный
mica - *n* слюда
permit - *v* позволять, разрешать; *syn* **allow, let; make possible**
probably - *adv* вероятно; *syn* **perhaps, maybe**
shallow - *a* мелкий; поверхностный; *ant* **deep** глубокий
sill - *n* силь, пластовая интрузия
stock - *n* шток, небольшой батолит
vein - *n* жила, прожилок, пропласток
band - *n* слой; полоса; прослоек *(породы); syn* **layer**
cleave - *v* расщепляться; трескаться, отделяться по кливажу; **cleavage** *n* кливаж
constituent - *n* составная часть, компонент
define - *v* определять, давать определение
distribute - v **(among)** распределять (между); раздавать;
disturb - *v* нарушать; смещать
excess - *n* избыток, излишек; *ant* **deficiency**
flaky - *a* слоистый; похожий на хлопья
fluid - *n* жидкость; жидкая или газообразная среда
foliate - *v* расщепляться на тонкие слои; **foliated** - *a* листоватый, тонкослоистый; *syn* **flaky**
marble - *n* мрамор
mention - *v* упоминать, ссылаться; *n* упоминание
plate - *n* пластина; полоса *(металла)*
pressure - *n* давление; **rock pressure (underground pressure)** горное давление, давление горных пород
relate - *v* относиться; иметь отношение; **related** *a* родственный; **relation** - *n* отношение; **relationship** - *n* родство; свойство; **relative** - *a* относительный; соответственный
run (ran, run) - *v* бегать, двигаться; течь; работать (о *машине);* тянуться, простираться; управлять *(машиной);* вести *(дело, предприятие)*
schistose - *a* сланцеватый; слоистый
sheet - *n* полоса
slate - *n* сланец; *syn* **shale**
split (split) - *v* раскалываться, расщепляться, трескаться; *syn* **cleave**
trace - *n* след; **tracing** – *n* прослеживание
at least по крайней мере
to give an opportunity (of) давать возможность *(кому-л., чему-л.)*
in such a way таким образом

Fossil Fuels

accumulate - v накапливать; скопляться
ancient - *a* древний, старинный; *ant* **modern**
associate - v связывать, соединять, ассоциироваться; *syn* **connect, link**
burn (burnt) - v сжигать; гореть; жечь
charcoal - *n* древесный уголь
convenient - *a* удобный, подходящий
crude - *a* сырой, неочищенный
dig (dug) - v добывать; копать; **digger** - n угольный экскаватор; землеройная машина
divide - v делить; (from) отделять; разделять
evidence - *n* доказательство; очевидность; признак(и)
fossil - *a* окаменелый, ископаемый; *n* ископаемое *(органического происхождения);* окаменелость

heat - v нагревать; *n* теплота

liquid - *a* жидкий; n жидкость; *ant* **solid**

manufacture - *v* изготовлять, производить; *syn* **produce**

mudstone - *n* аргиллит

purpose - *n* цель, намерение; *syn* **aim, goal**

shale - *n* глинистый сланец

the former … the latter - первый *(из вышеупомянутых)* последний *(из двух названных)*

bench - *n* слой, пачка *(пласта)*

blend - v смешивать(ся); вклинивать(ся)

combustion - *n* горение, сгорание; **spontaneous combustion** самовоспламенение, самовозгорание

continuity - *n* непрерывность, неразрывность

domestic - *a* внутренний; отечественный

estimate - v оценивать; *n* оценка; смета

fault - *n* разлом, сдвиг *(породы);* сброс; **faulting** *n* образование разрывов или сбросов

fold - *n* изгиб, складка, флексура; **foulding** - *n* складчатость, смешение *(пласта)* без разрыва

inflame - v воспламеняться; загорать(ся); **inflammable** - *a* воспламеняющийся, горючий, огнеопасный; **flame** - *n* пламя

intermediate - *a* промежуточный, вспомогательный

liable - *a* (to) подверженный; подлежащий *(чему-л.)*

luster - *n* блеск *(угля, металла);* **lustrous** - *a* блестящий

matter - *n* вещество; материя

moisture - *n* влажность, сырость; влага

parting - *n* прослоек

plane - *n* плоскость; **bedding plane** плоскость напластования

rank - *n* класс, тип; **coal rank** группа угля, тип угля

regular - *a* правильный; непрерывный; *ant* **irregular** неправильный; неравномерный; **regularity** *n* непрерывность; правильность

similar - *a* похожий, сходный; подобный; *syn* **alike, the same as**

smelt - v плавить *(руду);* выплавлять *(металл)*

store - v запасать, хранить на складе; вмещать

strata - *n pl от* **stratum** пласты породы; свита *(пластов);* формация, напластования породы; *syn* **measures**

thickness - *n* мощность *(пласта, жилы)*

uniform - *a* однородный; равномерный; **uniformity** *n* однородность; единообразие

utilize - v использовать; *syn* **use, apply, employ**

volatile - *a* летучий, быстро испаряющийся

Prospecting and Exploration

aerial - *a* воздушный; надземный

certain - *a* определенный; некоторый; **certainly** *adv* конечно

cost - (cost) v стоить; *n* цена; стоимость

crop - v (out) обнажать(ся), выходить на поверхность *(о пласте, породе); syn* **expose;** засевать, собирать урожай

dredging - *n* выемка грунта; драгирование

drill - v бурить, сверлить; *n* бурение, сверление; бурильный молоток; **drilling** - *n* бурение, сверление; **core-drilling** колонковое (керновое) бурение

drive (drore, driven) - v проходить *(горизонтальную выработку);* приводить в движение; управлять *(машиной); n* горизонтальная выработка; привод; передача

evidence – *n* основание; признак(и); свидетельства

expect - v ожидать; рассчитывать; думать; предлагать

explore - v разведывать месторождение полезного ископаемого с попутной добычей; **exploratory** - *a* разведочный; **exploration** - *n* детальная разведка; разведочные горные работы по месторождению

galena - *n* галенит, свинцовый блеск

indicate - v указывать, показывать; служить признаком; означать

lead - *n* свинец

look for - v искать

open up - v вскрывать *(месторождение);* нарезать *(новую лаву, забой);* **opening** - *n* горная выработка; подготовительная выработка; вскрытие месторождения

panning - *n* промывка *(золотоносного песка в лотке)*

processing - *n* обработка; - **industry** обрабатывающая промышленность

prove - v разведывать *(характер месторождения или залегания);* доказывать; испытывать, пробовать; **proved** - *a* разведанный, достоверный; **proving** - *n* опробование, предварительная разведка

search - v исследовать; (for) искать *(месторождение); n* поиск; *syn* **prospecting**

sign - *n* знак, символ; признак, примета

store - v хранить, накапливать *(о запасах)*

work - v работать; вынимать, извлекать *(уголь, руду);* вырабатывать; **workable** - *a* подходящий для работы, пригодный для разработки, рабочий *(о пласте);* рентабельный; **working** - *n* разработка, горная выработка

adit - *n* горизонтальная подземная выработка, штольня

angle - *n* угол

approximate - *a* приблизительный

bit - *n* режущий инструмент; буровая коронка, коронка для алмазного бурения; головка бура, сверло; **carbide bit** армированная коронка, армированный бур; **diamond bit** - алмазная буровая коронка

borehole - *n* скважина, буровая скважина

crosscut - *n* квершлаг

dip - *n* падение *(залежи);* уклон, откос; v падать

enable - v давать возможность или право *(что-л. сделать)*

exploit - v разрабатывать *(месторождение);* эксплуатировать; **exploitation** - *n* разработка; эксплуатация

measure - *n* мера; мерка; критерий; степень; *pl* свита, пласты; v измерять

overburden - *n* покрывающие породы, перекрывающие породы; верхние отложения, наносы; вскрыша

pit - *n* шахта; карьер, разрез; шурф

reliable - *a* надежный; достоверный

rig - *n* буровой станок, буровая вышка; буровая каретка; буровое оборудование

sample - *n* образец; проба; v отбирать образцы; опробовать, испытывать

section - *n* участок, секция, отделение, отрезок, разрез, профиль, поперечное сечение; **geological** ~ геологический разрез *(пород)*

sequence - *n* последовательность; порядок следования; ряд

sink (sank, sunk) - v проходить *(шахтный ствол, вертикальную выработку);* углублять; погружать; опускать; **sinking** - *n* проходка *(вертикальных или наклонных выработок);* **shaft sinking** - проходка ствола

slope - *n* наклон; склон; бремсберг; уклон; v клониться, иметь наклон; **sloping** - *a* наклонный; **gently sloping** - с небольшим наклоном

steep - *a* крутой, крутопадающий, наклонный

strike - *n зд.* простирание; v простираться; **across the strike** - вкрест простирания; **along (on) the strike** по простиранию

trench - *n* траншея, канава; котлован; v копать, рыть, шурфовать

to make use (of) использовать, применять

to take into consideration принимать во внимание; *syn* **take into account**

General Information on Mining

access - *n* доступ

affect - v воздействовать *(на что-л.);* влиять; *syn* **influence**

barren - *a* непродуктивный; пустой *(о породе)*

chute - *n* скат, спуск; углеспускная выработка; жёлоб

compare - v (with) сравнивать, проводить параллель

contribute - v способствовать, содействовать; делать вклад *(в науку);* **make a (one's) ~ to smth.** сделать вклад во что-л.

cross-section - *n* поперечное сечение, поперечный разрез, профиль

develop - v разрабатывать *(месторождение);* развивать *(добычу);* производить подготовительные работы; **development** - *n* подготовительные работы; развитие добычи; развитие

drift - *n* штрек, горизонтальная выработка

ensure - v обеспечивать, гарантировать; *syn* **guarantee**

face - *n* забой; лава

floor - л почва горной выработки, почва пласта (жилы); **quarry** ~ подошва карьера; пол, настил

govern - v править, управлять; руководить; определять, обусловливать

inclination - *n* уклон, скат, наклон *(пластов);* наклонение; **seam** ~ падение *(пласта);* наклон *(пласта)*

incline - *n* уклон, бремсберг, скат; наклонный ствол; **gravity** ~ бремсберг

inclined - *a* наклонный; **flatly** ~ слабо наклонный; **gently** ~ наклонного падения; **medium** ~ умеренно наклонный *(о пластах);* **steeply** ~ крутопадающий

level - *n* этаж, горизонт, горизонтальная горная выработка; штольня; уровень *(инструмент);* нивелир; ватерпас; горизонтальная поверхность

recover - v извлекать *(целики);* выбирать, очищать; добывать *(уголь и т.п.);* восстанавливать

remove - v удалять; убирать; устранять; перемещать; **removal** - *n* вскрыша; выемка; уборка *(породы);* извлечение *(крепи);* перемещение; **overburden** - удаление вскрыши

rib - *n* ребро; выступ; узкий целик, предохранительный целик; грудь забоя

roof - *n* крыша; кровля выработки; кровля пласта *(или* жилы); перекрытие; ~ **support** - крепление кровли

shaft - *n* шахтный ствол; **auxiliary** ~ вспомогательный ствол; **hoisting** ~ подъемный ствол; главный шахтный ствол

tabular - *a* пластовый (о *месторождении);* пластообразный; плоский; линзообразный; *syn* **bedded, layered**

waste - *n* пустая порода; отходы; *syn* **barren rock**

well - *n* буровая скважина; колодец, источник; водоем; зумф

capital investment - капитальные вложения

gate road - промежуточный штрек

in bulk - навалом, в виде крупных кусков

metal-bearing - содержащий металл

production face/working - очистной забой

productive mining - эксплуатационные работы

in view of - ввиду чего-л., принимая во внимание что-л.

with a view to - с целью

advantage - *n* преимущество; превосходство; выгода; польза; **advantageous** - *a* выгодный; благоприятный, полезный; **to take advantage of smth** воспользоваться чём-л.

caving - *n* обрушение *(кровли);* разработка с обрушением

deliver - v доставлять, подавать; питать; нагнетать; произносить *(речь);* читать *(лекцию)*

entry - *n* штрек; выработка горизонтальная; *pl* подготовительные выработки; нарезные выработки; штреки

giant - *n* гидромонитор

gravity - *n* сила тяжести; вес, тяжесть; **by** ~ самотеком, под действием собственного веса

haul - v доставлять; откатывать; подкатывать; перевозить; **haulage** - *n* откатка; доставка; транспортировка *(по горизонтали)*

longwall - *n* лава; выемка лавами; сплошной забой, сплошная или столбовая система разработки; *syn* **continuous mining; ~ advancing on the strike** выемка лавами прямым ходом по простиранию; сплошная система разработки по простиранию; **~ advancing to the rise** сплошная система разработки с выемкой по восстанию; ~ to **the dip** сплошная система разработки с выемкой по падению; ~ **retreating** выемка лавами обратным ходом; столбовая система разработки лавами

lose (lost) - v терять; **loss** - *n* потеря, убыток

pillar - *n* целик; столб; **shaft** ~ околоствольный целик; ~ **method** столбовая система разработки; ~ **mining** выемка целиков

predominate - v преобладать, превалировать; превосходить; господствовать, доминировать

protect - v охранять, защищать

reach - v простираться, доходить до; добиваться, достигать

satisfy - v удовлетворятъ(ся)

shield - *n* щит; ~ **method** щитовой метод проходки, щитовой способ

room - *n* камера; очистная камера; **room-and-pillar method** камерно-столбовая система разработки

stowing - *n* закладка *(выработанного пространства)*

method of working система разработки

the sequence of working the seams - последовательность отработки пластов

goaf — завал; обрушенное пространство

double-ended drum bearer — комбайн с двойным барабаном

to identify — опознавать

appraisal — оценка

susceptibility — чувствительность

concealed — скрытый, не выходящий на поверхность

crusher — дробилка

concentration — обогащение

blending — смешивание; составление шихты

screen — сортировать (обыден. уголь); просеивать

froth floatation — пенная флотация

core drilling — колонковое бурение

to delineate — обрисовывать, описывать

lender — заимодавец

feasibility — возможность

in situ mining — повторная разработка месторождения в массиве

screening — просеивание; грохочение

processing — обработка, разделение минералов

Mining and Environment

break v **(broke, broken)** отбивать *(уголь или породу)*, обрушивать кровлю; разбивать; ломать; л отбойка, обрушение; **break out** отбивать, производить выемку

(руды .или породы); расширять забой; **breakage** л разрыхление, дробление

drill - *n* бур; .перфоратор, бурильный молоток; сверло; v бурить; car ~ буровая тележка; **mounted** ~ перфоратор на колонке; колонковый бурильный молоток; **drilling** - *n* бурение

dump -*n* отвал *(породы);* склад угля; опрокид; **external** ~ внешний отвал; **internal** ~ внутренний отвал; v сваливать (в *отвал);* разгружать; отваливать; опрокидывать *(вагонетку);*

dumper опрокид; самосвал; отвалообразователь; **dumping** л опрокидывание; опорожнение; опрокид; *syn* **tip**

environment - *n* окружение; окружающая обстановка/среда

explode - v взрывать, подрывать; **explosion** - *n* взрыв; **explosive** - *n* взрывчатое вещество; *a* взрывчатый

friable - *a* рыхлый; хрупкий; рассыпчатый; слабый (о *кровле)*

handle - v перегружать; доставлять; транспортировать; управлять машиной; *n* ручка; рукоять; скоба; **handling** - *n* подача; погрузка; перекидка, доставка; транспортировка; обращение с машиной

heap - v наваливать; нагребать; *n* породный отвал, терриконик; *syn* **spoil ~, waste ~**

hydraulicklng - *n* гидродобыча; гидромеханизированная разработка

load - v нагружать, грузить, наваливать; *n* груз; нагрузка; **loader** - *n* погрузочная машина, навалочная машина, перегружатель; грузчик; **cutter-loader** - комбайн, комбинированная горная машина

lorry - *n* грузовик; платформа; *syn* **truck**

mention - v упоминать

overcasting - *n* перелопачивание *(породы)*

pump - *n* насос; **gravel** ~ песковый насос; **sludge** ~ шламовый насос; v качать; накачивать; откачивать

reclamation - *n* восстановление; осушение; извлечение крепи; ~ **of land** восстановление участка *(после открытых работ)*

sidecastiag - *n* внешнее отвалообразование

site - *n* участок, место; **building** ~ строительная площадка

slice - *n* слой; **slicing** - *n* выемка слоями, разработка слоями

strip - v производить вскрышные работы; разрабатывать, очищать *(лаву);* вынимать породу или руду; *n* полоса; **stripper** - *n* забойщик; вскрышной экскаватор; **stripping** - *n* открытая разработка, открытые горные работы; вскрыша; вскрытие наносов

unit - *n* агрегат; установка; устройство; прибор; узел; секция; деталь; машина; механизм; единица измерения; участок

washery - *n* углемойка; рудомойка; моечный цех

to attract smb's attention привлекать чье-л. внимание

backhoe - *n* обратная лопата

blast - *n* взрыв; v взрывать; дуть; продувать; **blasting** - *n* взрывание; взрывные работы; взрывная отбойка

block out - v нарезать залежь на блоки; нарезать столбы

clearing - *n* выравнивание почвы; планировка грунта

crash - v дробить; разрушать; обрушать(ся)

earth-mover - *n* землеройное оборудование; *syn* **excavator**

excavator - *n* экскаватор; **bucket-wheel** - роторный экскаватор; **multi-bucket** ~ многочерпаковый экскаватор; **single-bucket** - одночерпаковый экскаватор

grab - *n* грейфер, ковш, черпак; экскаватор; v захватывать;

grabbing - погрузка грейфером; захватывание

hoist - *n* подъемное установка (машина); подъемник; лебедка; v поднимать; **hoisting** шахтный подъем

plough - *n* струг

power shovel - *n* механическая лопата; экскаватор типа механической лопаты

range - *n* колебание в определенных пределах

rate - *n* норма; скорость, темп; коэффициент; степень; разрез; сорт; мощность; расход *(воды)*

remote - *a* отдаленный; ~ **control** дистанционное управление

result - v (in) приводить (к); иметь своим результатом; (from) следовать (из), происходить в результате

safety - *n* безопасность; техника безопасности

slope - *n* забой, сплошной забой, очистной забой; v очищать забой, вынимать породу, уголь; *syn* **face; sloping** очистные работы; очистная выемка; **open sloping** выемка с открытым забоем; **shrinkage sloping** выемка системой с магазинированием *(руды)*

support - v крепить; поддерживать; подпирать; *n* стойка; опора; поддержание; крепление; *syn* **timbering; powered roof** - механизированная крепь; **self-advancing powered roof** - передвижная механизированная крепь

4.2 Подготовьте устный рассказ по теме на основе предложенного:

My speciality is Geology

I am a first year student of the Ural State Mining University. I study at the geological faculty. The geological faculty trains geologic engineers in three specialities: mineral prospecting and exploration, hydrogeology and engineering geology, drilling technology.

Geology is the science which deals with the lithosphere of our planet. Geology studies the composition of the Earth's crust, its history, the origin of rocks, their distribution and many other problems.

That is why the science of geology is commonly divided into several branches, such as:

1. General Geology which deals with the composition arid the structure of the Earth and with various geological processes going on below the Earth's surface and on its surface.
2. Petrology which studies the rocks of the Earth.
3. Mineralogy which investigates the natural chemical compounds of the lithosphere.
4. Paleontology which deals with fossil remains of ancient animals and plants found in rocks.
5. Historic Geology which treats of the Earth's history.
6. Structural Geology which deals with the arrangement of rocks due to the Earth's movements.
7. Economic Geology which deals with occurrence, origin and distribution of mineral deposits valuable to man.

All these branches of geology are closely related to each other.

Geology is of great practical importance because it supplies industry with all kinds of raw materials, such as ore, coal, oil, building materials, etc.

Geology deals with the vital problem of water supply. Besides, many engineering projects, such as tunnels, canals, dams, irrigation systems, bridges etc. need geological knowledge in choosing construction sites and materials.

The practical importance of geology has greatly increased nowadays. It is necessary to provide a rapid growth of prospecting mineral deposits, such as ores of iron, copper, lead, uranium and others, as well as water and fossil fuels (oil, gas and coal). They are badly needed for further development of all the branches of the national Economy of our country and for creating a powerful economic foundation of the society. The graduates of the geological faculty of the Ural State Mining University work all over the country in mines, geological teams and expeditions of the Urals, Siberia, Kasakhstan, in the North and Far East, etc. as well as abroad.

Very often geologists have to work under hard climatic and geological conditions. They must be courageous, strong and purposeful people, ready to overcome any hardships which nature has put in their way to its underground treasure-house.

4.3 Систематизация грамматического материала:

1. Неличные формы глагола: инфинитив, причастия, герундий.
2. Основные сведения о сослагательном наклонении.

Инфинитив. The Infinitive

Инфинитив - это неличная глагольная форма, которая только называет действие и выполняет функции как глагола, так и существительного. Инфинитив отвечает на вопрос что делать?, что сделать?

Формальным признаком инфинитива является частица to, которая стоит перед ним, хотя в некоторых случаях она опускается. Отрицательная форма инфинитива образуется при помощи частицы not, которая ставится перед ним It was difficult not to speak. *Было трудно не говорить.*

Формы инфинитива

	Active Voice	Passive Voice
Simple	to write	to be written
Continuous	to be writing	
Perfect	to have written	to have been written
Perfect Continuous	to have been writing	

Глаголы, после которых используется инфинитив:

to agree - соглашаться
to arrange - договариваться
to ask – (по)просить
to begin – начинать
to continue продолжать
to decide – решать
to demand - требовать
to desire – желать
to expect – надеяться
to fail – не суметь
to forget – забывать
to hate - ненавидеть
to hesitate – не решаться
to hope - надеяться
to intend – намереваться
to like – любить, нравиться
to love – любить, желать
to manage - удаваться
to mean - намереваться
to prefer - предпочитать
to promise - обещать
to remember – помнить
to seem - казаться
to try – стараться, пытаться
to want хотеть

Например:
He asked to change the ticket *Он попросил поменять билет.*
She began to talk *Она начала говорить.*

Значение разных форм инфинитива в таблице

Формы инфинитива	**Чему я рад?**	
Simple	I am glad **to speak** to you	Рад поговорить с вами (Всегда радуюсь, когда говорю с вами)
Continuous	I am glad **to be speaking** to you	Рад, что сейчас разговариваю с вами.
Perfect	I am glad **to have spoken** to you.	Рад, что поговорил с вами.
Perfect Continuous	I am glad **to have been speaking** to you.	Рад, что уже давно (все это время) разговариваю с вами.
Simple Passive	I am (always) glad **to be told** the news	Всегда рад, когда мне рассказывают новости

Perfect Passive	I am glad **to have been told** the news.	Рад, что мне рассказали новости.

Причастие. Participle

В английском языке причастие — это неличная форма глагола, которая сочетает в себе признаки глагола, прилагательного и наречия.

Формы причастия

		Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Participle I (Present Participle)	Simple	**writing**	**being written**
	Perfect	**having written**	**having been written**
Participle II (Past Participle)			**written**

Отрицательные формы причастия образуются с помощью частицы **not**, которая ставится перед причастием: not asking — не спрашивая,not broken — не разбитый.

Как переводить разные формы причастия на русский язык

Формы причастия	причастием	деепричастием
reading	читающий	читая
having read		прочитав
being read	читаемый	будучи читаемым
having been read		будучи прочитанным
read	прочитанный	
building	строящий	строя
having built		построив
being built	строящийся	будучи строящимся
having been built		будучи построенным
built	построенный	

Герундий. Gerund

Герундий — это неличная форма глагола, которая выражает название действия и сочетает в себе признаки глагола и существительного. Соответственно, на русский язык герундий обычно переводится существительным или глаголом (чаще неопределенной формой глагола). Формы, подобной английскому герундию, в русском языке нет.

My favourite occupation is reading. *Мое любимое занятие — чтение.*

Формы герундия

	Active (Активный залог)	Passive (Пассивный залог)
Simple	**writing**	**being written**
Perfect	**having written**	**having been written**

Запомните глаголы, после которых употребляется только герундий!

admit (признавать), advise (советовать), avoid (избегать),
burst out (разразиться), delay (задерживать), deny (отрицать),
dislike (не нравиться), enjoy (получать удовольствие), escape (вырваться, избавиться),
finish (закончить), forgive (прощать), give up (отказываться, бросать),
keep on (продолжать), mention (упоминать), mind (возражать - только в “?”и “-“),
miss (скучать), put off (отложить), postpone (откладывать),
recommend (рекомендовать), suggest (предлагать), understand (понимать).

Герундий после глаголов с предлогами

accuse of (обвинять в), agree to (соглашаться с), blame for (винить за),
complain of (жаловаться на), consist in (заключаться в), count on /upon (рассчитывать на),
congratulate on (поздравлять с), depend on (зависеть от), dream of (мечтать о),
feel like (хотеть, собираться), hear of (слышать о), insist on (настаивать на),

keep from (удерживать(ся) от), look forward to (с нетерпением ждать, предвкушать),
look like (выглядеть как), object to (возражать против),
persist in (упорно продолжать), praise for (хвалить за), prevent from (предотвращать от),
rely on (полагаться на), result in (приводить к), speak of, succeed in (преуспевать в),
suspect of (подозревать в), thank for (благодарить за), think of (думать о)

He has always dreamt of visiting other countries. — *Он всегда мечтал о том, чтобы побывать в других странах.*

to be + прилагательное / причастие + герундий

be afraid of (бояться чего-либо), be ashamed of (стыдиться чего-либо),
be engaged in (быть занятым чем-либо), be fond of (любить что-либо, увлекаться чем-либо),
be good at (быть способным к), be interested in (интересоваться чем-либо),
be pleased at (быть довольным), be proud of (гордиться чем-либо),
be responsible for (быть ответственным за), be sorry for (сожалеть о чем-либо),
be surprised at (удивляться чему-либо), be tired of (уставать от чего-либо),
be used to (привыкать к).

I'm tired of waiting. — *Я устал ждать.*

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Complete the sentences with the correct infinitive tense.

1 She has grown taller. She seems ...*to have grown taller*.
2 He is getting used to his new job. He appears
3 Kate makes friends easily. She tends
4 He has finished the report. He claims
5 It is raining over there. It seems
6 He is on a diet. He appears
7 They have sailed round the world. They claim
8 She is feeling better. She seems

2. Fill in the correct infinitive tense.

1 A: What would you like ...*to do*... (do) tonight?
B: Let's ... (go) to an Italian restaurant.
2 A: What's Liz doing?
B: She seems ... (look) for something in her bag.
3 A: Alan has been offered a new job!
B: No, he hasn't. He just pretended ... (offer) a new job.
4 A: Colin claims ... (meet) lots of famous people.
B: I know, but I don't believe him.
5 A: Look at those two men outside. What are they doing?
B: They appear ... (empty) the rubbish bins.
6 A: Would you like to go to the cinema tonight?
B: Not really. I would prefer ... (go) to the theatre.
7 A: Tara seems ... (work) hard all morning.
B: Yes, she hasn't even stopped for a cup of coffee.
8 A: Why is Tom at work so early this morning?
B: He wants ... (finish) early so that he can go to the concert tonight.

3. Rephrase the following sentences, as in the example.

1 He must wash the car. I want ...*him to wash the car*...
2 You mustn't be late for work. I don't want ...
3 Claire must tidy her bedroom. I want ...

4 She mustn't go to the disco. I don't want …
5 They must go to school tomorrow. I want …
6 Gary mustn't make so much noise. I don't want …
7 You mustn't make a mess. I don't want …
8 He must mend his bike. I want …

4. Complete the sentences with too or enough and the adjective in brackets.

1 A: Would you like to come to the disco?
B: Oh no. I'm *...too tired...* to go to a disco, (tired)
2 A: Can you reach that top shelf?
B: No, I'm not … to reach it. (tall)
3 A: Did they go on a picnic yesterday?
B: No. It was … to go on a picnic, (cold)
4 A: Did Jane enjoy the horror film?
B: No. She was … to enjoy it. (scared)
5 A: Does Tom go to school?
B: No. He isn't … to go to school yet. (old)
6 A: Will you go to London by bus?
B: No. The bus is … . I'll take the train, (slow)
7 A: Did she like the dress you bought?
B: Yes, but it was … .(big)
8 A: Take a photograph of me!
B: I can't. It isn't … in here, (bright)

5. Rewrite the sentences using too.

1 This music is so slow that I can't dance to it.
...This music, is too slow for me to dance to...
2 The bird is so weak that it can't fly.
3 She's so busy that she can't come out with us.
4 The car was so expensive that he couldn't buy it.
5 These shoes are so small that they don't fit me.
6 The book is so boring that she can't read it.
7 I was so tired that I couldn't keep my eyes open.
8 The coffee was so strong that he couldn't drink it.

6. Underline the correct preposition and fill in the gaps with the -ing form of the verb in brackets.

1 He is ill. He is complaining **with/<u>about</u>** *...having...* (have) a headache.
2 Marcus went out instead **for/of** … (do) his homework.
3 Tracy was very excited **with/about** … (go) to the party.
4 I hope you have a good excuse **of/for** … (be) so late.
5 Sam is interested **in/for** … (take up)French lessons.
6 You can't stop him **to/from** … (take)the job if he wants to.
7 Susie ran because she was worried **about/of** … (miss) the bus.
8 Thank you **to/for** … (help) me with my homework.
9 She felt tired because she wasn't used **to/with** … (work) so hard.
10 His boss blamed him **for/of** … (lose) the deal.
11 I am in charge **in/of** … (make) the Christmas deliveries.
12 We are thinking **of/from** … (buy) a new car next month.
13 Sandra apologised **for/about** … (ruin) the performance.
14 Ian was talking **with/about** … (open) a shop in York.

7. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 It's no use ...*talking*... (talk) to Bob; he won't change his mind.
2 She will ... (return) the books next weekend.
3 It was good of you ... (help) me fix my bicycle.
4 The man suggested ... (call) the police in, to investigate.
5 I can't get used to ... (live) in such a hot country.
6 He admitted ... (rob) the bank.
7 You had better ... (hurry), or you'll be late for work.
8 They refused ... (give) me my money back.
9 She is too short ... (become) a fashion model.
10 My parents let me ... (stay) up late at weekends.
11 Our teacher makes us ... (do) homework every evening.
12 The kitchen windows need ... (clean).
13 They have begun ... (make) preparations for the party.
14 He advised her ... (speak) to her boss.
15 I dislike ... (go) to the theatre alone.
16 Mr. Roberts was seen ... (leave) his house at 12:15 last night.
17 My sister can't stand ... (watch) horror films. She gets terribly scared.
18 Can you imagine ... (spend) your holidays on the moon?
19 There's no point in ... (call) again. There's no one at home.
20 I don't allow people ... (smoke) in my house.
21 It was silly of you ... (forget) to lock the door.
22 He risks ... (lose) his wallet when he leaves it on his desk.

8. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 A: Is Anne in the room?
B: Yes. I can see her ...dancing... (dance) with her husband over there.
2 A: Did you see the robber?
B: Yes. I saw him ... (get) into the car and drive away.
3 A: Is John here today?
B: Yes. I heard him ... (talk) on the phone as I walked past his office.
4 A: Colin is good at speaking in public, isn't he?
B: Yes. I heard him ... (make) a speech last month. It was excellent.
5 A: I walked past the sports centre today.
B: So did I, and I stopped for a moment to watch some boys ... (play) football.
6 A: Your hair looks great today.
B: Thanks. I watched the hairdresser ... (dry) it so I could learn how to do it myself.
7 A: That's a music school, isn't it?
B: That's right. I often hear the students ... (sing) as I walk past.
8 A: Did you stay until the end of the contest?
B: Yes. I listened to the chairman ... (announce) the results before I went home.
9 A: How do you know Tim is at home?
B: I saw him ... (cut) the grass as I was driving home.
10 A: How do you know that man stole the watch?
B: I saw him ... (put) it in his pocket and leave the shop without paying.

9. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

1 I'll never forget ...*sailing*... (sail) down the Danube on that warm spring night last year.
2 Please don't forget ... (pay) the bill.
3 John said he remembers ... (buy) the newspaper, but now he can't find it.
4 Did you remember ... (post) my letters today?
5 Gloria regrets ... (shout) at her sister.
6 I regret ... (inform) you that we cannot give you your money back.

7 The students went on … (write) for another hour.
8 After cleaning the windows, he went on … (wash) the car.
9 We are sorry … (announce) that the 7:15 train to Liverpool has been cancelled.
10 I'm sorry for … (miss) your birth day party; I'll make it up to you.
11 She stopped … (go) to the gym after she had got back into shape.
12 They stopped … (have) a rest before they continued their journey.
13 They tried … (open) the door, but it was stuck.
14 You should try … (make) your own clothes. It's much cheaper.
15 I'm sorry. I didn't mean … (break) your vase.
16 Being a teacher means … (correct) a lot of homework.
17 I like … (tidy) my room at week ends because I don't have time during the week.
18 They like … (play) in the sea on hot days.

10. Put the verbs in brackets into the correct infinitive form or the -ing form.

My neighbour, Mr. Mason, loves 1) …*spending*… (spend) time in his garden. He would rather 2) … (work) outside than stay indoors, even when it is snowing! Early in the morning, you can 3) … (see) Mr. Mason 4) … (eat) breakfast in his garden, and late at night he is there again, with a cup of cocoa in his hand. I'd like 5) … (help) sometimes when there is lots of work to do, but Mr. Mason prefers 6) … (do) everything himself. He doesn't mind 7) … (get) cold and wet in the winter, and his wife says it's no use 8) … (try) to make him wear a waterproof jacket because he hates 9) … (wear) them! Mr. Mason says he will go on 10) … (garden) until he is too old 11) … (do) it!

Основные сведения о сослагательном наклонении

Conditionals are clauses introduced with if. There are three types of conditional clause: Type 1, Type 2 and Type 3. There is also another common type, Type 0.

Type 0 Conditionals: They are used to express something which is always true. We can use when (whenever) instead of it. *If/When the sun shines, snow melts.*

Type 1 Conditionals: They are used to express real or very probable situations in the present or future. *If he doesn't study hard, he won't pass his exam.*

Type 2 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the present and, therefore, are unlikely to happen in the present or future. *Bob is daydreaming. If I won the lottery, I would buy an expensive car and I would go on holiday to a tropical island next summer.*

Type 3 Conditionals: They are used to express imaginary situations which are contrary to facts in the past. They are also used to express regrets or criticism. *John got up late, so he missed the bus. If John hadn't got up late, he wouldn't have missed the bus.*

	If-clause (hypothesis)	Main clause (result)	Use
Type 0 general truth	if + present simple	present simple	something which is always true
	If the temperature falls below 0 °C, water turns into ice.		
Type 1 real present	if + present simple, present continuous, present perfect or present perfect continuous	future/imperative can/may/might/must/should/ could + bare infinitive	real - likely to happen in the present or future
	If he doesn't pay the fine, he will go to prison. If you need help, come and see me. If you have finished your work, we can have a break. If you're ever in the area, you should come and visit us.		
Type 2 unreal present	if + past simple or past continuous	would/could/might + bare infinitive	imaginary situation contrary

			to facts in the present; also used to give advice
	If I had time, I would take up a sport. (but I don't have time - untrue in the present) If I were you, I would talk to my parents about it. (giving advice)		
Type 3 unreal past	if + past perfect or past perfect continuous	would/could/might + have + past participle	imaginary situation contrary to facts in the past; also used to express regrets or criticism
	If she had studied harder, she would have passed the test. If he hadn't been acting so foolishly, he wouldn't have been punished.		

Conditional clauses consist of two parts: the if -clause (hypothesis) and the main clause (result). When the if - clause comes before the main clause, the two clauses are separated with a comma. When the main clause comes before the if - clause, then no comma is necessary.

e.g. a) If I see Tim, I'll give him his book.

b) I'll give Tim his book if I see him.

We do not normally use will, would or should in an if - clause. However, we can use will or would after if to make a polite request or express insistence or uncertainty (usually with expressions such as / don't know, I doubt, I wonder, etc.).

We can use should after if to talk about something which is possible, but not very likely to happen.

e.g. a) If the weather is fine tomorrow, will go camping. (NOT: If the weather will be fine...)

b) If you will fill in this form, I'll process your application. (Will you please fill in... - polite request)

c) If you will not stop shouting, you'll have to leave. (If you insist on shouting... - insistence)

d) I don't know if he will pass his exams, (uncertainty)

e) If Tom should call, tell him I'll be late. (We do not think that Tom is very likely to call.)

We can use unless instead of if... not in the if -clause of Type 1 conditionals. The verb is always in the affirmative after unless.

e.g. Unless you leave now, you'll miss the bus. (If you don't leave now, you'll miss the bus.) (NOT: Unless you don't leave now, ...)

We can use were instead of was for all persons in the if - clause of Type 2 conditionals.

e.g. If Rick was/were here, we could have a party.

We use If I were you ... when we want to give advice.

e.g. If I were you, I wouldn't complain about it.

The following expressions can be used instead of if: provided/providing that, as long as, suppose/supposing, etc.

e.g. a) You can see Mr. Carter provided you have an appointment. (If you have an appointment...)

b) We will all have dinner together providing Mary comes on time. (... if Mary comes ...)

c) Suppose/Supposing the boss came now, ...

We can omit if in the if - clause. When if is omitted, should (Type 1), were (Type 2), had (Type 3) and the subject are inverted.

e.g. a) Should Peter come, tell him to wait. (If Peter should come,...)

b) Were I you, I wouldn't trust him. (If I were you, ...)

c) Had he known, he would have called. (If he had known, ...)

Выполните упражнения на закрепление материала:

1. Look at the prompts and make Type 1 conditional sentences, as in the example.
e.g. If we cut down all the forests, the world's climate will change.
1 cut down/ all forests / world's climate / change
2 not stop/use / aerosols /destroy / ozone layer
3 find / alternative sources of energy / solve / some of our environmental problems
4 temperatures / go up / by a few degrees /sea levels / rise
5 recycle / waste / save / natural resources
6 population / continue to increase / not be enough food for everyone

2. Lisa is trying to decide where to go on holiday. She would like to go to one of these places. In pairs, ask and answer questions using the prompts below, as in the example.
A) SPAIN FOR A WEEK
£180 Inclusive!!
2-star hotel beach
Free water sports

B) A TWO WEEK CAMPING HOLIDAY IN THE SOUTH OF FRANCE
ONLY £280 per person
Self-catering

1. How long / be away / choose / Spain?
SA: How long will she be away if she chooses Spain?
SB: If she chooses Spain, she'll be away for a week.
2. Where / go / like / camping?
3. How much / pay / go to / France?
4. What / do / go to / Spain?
5. Where / go / want / cheap holiday?

3. Study the situations, then make Type 2 conditional sentences, as in the example.
I don't have a car, so I have to wait for the bus every day.
1. If I ...had... (have) a car, I ...wouldn't have to... (not/have to) wait for the bus every day.
I never do my homework, so my teacher always gets angry with me.
2. If I ... (do) my homework, my teacher ... (not/get) angry with me.
I live in a small house, so I can't invite friends over.
3. If I ... (live) in a bigger house, I ... (be able to) invite friends over.
I never get up early, so I y am always late for school.
4. If I ... (get up) earlier, I ... (not/be) late for school.

4. Complete the sentences to make Type 3 conditional sentences, as in the example.
1. If he ...hadn't noticed... (not/notice) the mould in one of his glass dishes, Alexander Fleming ...would never have discovered... (never/discover) penicillin.
2. If he ... (sell) some of his paintings, Van Gogh ... (get) some recognition during his lifetime.
3. If Barbara Streisand ... (change) the shape of her nose, her career ... (never/be) the same.
4. If Anne Sullivan ... (not/teach) her, Helen Keller ... (not/be able to) communicate.
5. If Naomi Campbell ... (not/be) so beautiful, she ... (never/become) a supermodel.

5. Read the story below and make Type 3 conditional sentences, as in the example.
e.g. 1) ...if Sally hadn't been in a hurry, she would nave left some important notes at home....
Sally had a terrible day yesterday. She was in a hurry, so she left some important notes at home. She wasn't prepared for her meeting with a new client, so the meeting was a disaster. The client was

disappointed, and as a result he refused to do business with the company. The boss shouted at Sally, so she got upset.

6. Match the items in column A with those in column B in order to make correct Type 0 conditional sentences, as in the example.

e.g. 1 - c ...if you add sugar to a cup of coffee, the coffee tastes sweeter...

A

1. Add sugar to a cup of coffee.
2. Throw salt onto snow.
3. Put an apple in a bowl of water.
4. Water plants regularly.
5. Lie in the sun too long.
6. Take regular exercise.

B

a The apple floats.
b Your skin turns red.
c The coffee tastes sweeter.
d You feel healthy.
e The plants grow.
f The snow melts.

7. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 A: What time will you be home tonight?
B: I'm not sure. If I ...have to... (have to) work late. I ...'ll call... (call) you.
2 A: I felt very tired at work today.
B: Well, if you ... (not/watch) the late film, you ... (not/feel) so tired
3 A: Should I buy that car?
B: Why not? If I ... (have) the money, I ... (buy) it myself.
4 A: If you ... (pass) a chemist's, ... (you/get) me some cough medicine?
B: Yes, certainly.
5 A: My sister seems very upset at the moment.
B: Were I you, I ... (talk) to her about it.
6 A: Unless you ... (hurry), you ... (be) late again.
B: No, I won't. There's plenty of time.
7 A: Oh! I forgot to ask Sarah over for dinner.
B: If I ... (speak) to her today, I ... (ask) her for you.
8 A: May I join the club, please?
B: Provided you ... (be) over eighteen, you can join the club.
9 A: What a lovely restaurant! I'm glad we came here.
B: If you ... (not/burn) the dinner, we ... (not/come) here!
10 A: Just think. If I ... (not/move) to York, I ... (never/meet) you.
B: I know, wasn't it lucky?
11 A: Jo doesn't spend enough time with me.
B: Well, if she ... (have) the time, I'm sure she ... (try), but she's very busy.
12 A: Did you give Bill the message?
B: No, but when I ... (see) him, I ... (tell) him the news.

8. Choose the correct answer.

1 'If you ...C... that plate, you'll burn your fingers.'

'Why? Has it been in the oven?'
A would touch
B will touch
C touch
2 ' ... you're busy, we'll talk now.'
'That's fine. I'm not busy at the moment.'
A If
B Provided
C Unless
3 'If you watch the news, you ... a lot.'
'I know. I watch it every day.'
A learn
B were learning
C would learn
4 '... you wear warm clothes, you won't get cold.'
'I'll wear an extra jumper.'
A Unless
B Providing
C Supposing
5 'Shall I invite John to the party?'
'Well, were I you, I ... him.'
A would invite
B will invite
C am inviting
6 '... the teacher comes back now, what will you do?'
'I don't know.'
A When
B Providing
C Supposing
7 'Could I see the menu, please?'
'Yes, sir. If you ... a seat, I will fetch it for you.'
A take
B had taken
C have taken
8 'Don't cry. Everything will be alright.'
'Yes, but if I ... the bus, I wouldn't have been late for school.'
A didn't miss
B hadn't missed
C don't miss
9 'When water boils, it ... steam.'
'Yes, I know; and the steam is hot, too.'
A would produce
B produce
C produces
10 'Can you help me, please?'
'Well, if I wasn't studying, I ... you.'
A would help
B help
C will help
11 'John crashed his car yesterday.'
'I know, but if he hadn't been changing the cassette, he ...'
A won't crash

B wouldn't crash
C wouldn't have crashed
12 'Can I have some chocolate, please?'
'If you behave yourself, I you some later.'
A would buy
B might buy
C buy
13 'Should you see Colin ... and tell me.'
'I will.'
A come
B to come
C will come
14 'If we were rich, we ... expensive clothes.'
'Well, unfortunately we aren't rich!'
A could afford
B can afford
C afford

9. Put the verbs in brackets into the correct tense.

1 If I ...were... (be) you, I wouldn't drive in the snow.
2 Peter ... (be able to) help you if he was here.
3 If I had closed the window, the cat ... (not/jump) out.
4 I ... (call) for help if I got stuck in a lift.
5 Had I known him, I ... (talk) to him.
6 John ... (may/lose) his job if he is rude to the boss.
7 If you ... (save) some money, you would have been able to go on holiday last year.
8 You may win if you ... (take) part in the contest.
9 If I had toothache, I ... (go) to the dentist.
10 They would have helped us move house if we ... (ask) them.
11 If Jane ... (be) older, she could live by herself.
12 We would have changed our plans if we ... (hear) the weather forecast.
13 Emma ... (send) a card if she had remembered it was their anniversary.
14 Robert ... (feel) better if you talked to him.
15 If Sam was still living nearby, you ... (can/invite) him for dinner.
16 If you ... (put) your money in your wallet, you will not lose it.
17 If you ... (like) chocolate, you will love this cake.
18 If Bill ... (come) home early, he will eat dinner with us.
19 Sandra will join us later unless she ... (have) a lot of work to do.

10. Fill in the gaps using when or if.

1 A: Have you phoned Paul yet?
B: No, I'll phone him ...when... I get home.
2 A: ... I get a new job soon, I may have a party.
B: That's a good idea.
3 A: I really liked that dress we saw.
B: Well, you can buy it ... you get paid.
4 A: Shall we go somewhere this weekend?
B: Yes ... it's sunny, we could go to the beach.
5 A: Did you make this cake yourself?
B: Yes ... you like it, I'll give you the recipe.
6 A: Is Jane still asleep?
B: Yes ... she wakes up, I'll tell her you're here.

7 A Have you done your homework?
B: No. I'll do it … we've finished dinner.
8 A We've run out of milk
B: Well, I go to the shops, I'll buy some more

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

по дисциплине

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Специальность

21.05.04 Горное дело

Авторы: Кузнецов А.М., Тетерев Н.А.

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА……4
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ……5
ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЗАЩИТЫ ЧЕЛОВЕКА ОТ ОПАСНОСТЕЙ……5
ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ……5
ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ……5
ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ И ТРАВМАТИЗМ НА ПРОИЗВОДСТВЕ……5
УПРАВЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ……5
СОЦИАЛЬНАЯ ЗАЩИТА РАБОТНИКОВ……5
НАДЗОР И КОНТРОЛЬ ЗА СОСТОЯНИЕМ ОХРАНЫ ТРУДА……5
ОТВЕТСТВЕННОСТЬ ЗА НАРУШЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ОХРАНЫ ТРУДА……6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ……7
ЗАКЛЮЧЕНИЕ……11
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……12

ВВЕДЕНИЕ

Современный человек живет в мире различного рода опасностей, т.е. явлений, процессов, объектов, постоянно угрожающих его здоровью и самой жизни. Не проходит и дня, чтобы газеты, радио и телевидение не принесли тревожные сообщения об очередной аварии, катастрофе, стихийном бедствии, социальном конфликте или криминальном происшествии, повлекших за собой гибель людей и громадный материальный ущерб.

По мнению специалистов, одной из причин создавшейся ситуации является недостаточный уровень образования – обучения и воспитания – человека в области обеспечения безопасной деятельности. Только постоянное формирование в людях разумного отношения к опасностям, пропаганда обязательности выполнения требований безопасности может гарантировать им нормальные условия жизни и деятельности.

В курсе БЖД излагаются теория и практика защиты человека от опасных и вредных факторов природного и антропогенного происхождения в сфере деятельности.

Данный курс предназначен для формирования у будущих специалистов сознательного и ответственного отношения к вопросам безопасности, для привития им теоретических знаний и практических навыков, необходимых для создания безопасных и безвредных условий деятельности в системе «человек – среда», проектирования новой безопасной техники и безопасных технологий, прогнозирования и принятия грамотных решений в условиях нормальных и чрезвычайных ситуаций.

В процессе изучения курса БЖД студенту предстоит решить следующие задачи: усвоить теоретические основы БЖД; ознакомиться с естественной системой защиты человека от опасностей; изучить систему искусственной защиты в условиях нормальных (штатных) и чрезвычайных (экстремальных) ситуаций; ознакомиться с проблемами заболеваемости и травматизма на производстве; изучить вопросы управления безопасностью деятельности.

Успешное изучение курса студентами возможно при наличии соответствующей учебной литературы. Предлагаемое вниманию студентов и преподавателей учебное пособие подготовлено в соответствии с учебной программой курса БЖД для студентов всех направлений и специальностей.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В последующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Безопасность жизнедеятельности». Она содержит названия разделов с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов на зачет. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Для углубленного освоения темы рекомендуется дополнительная литература. При освоении указанных ниже тем рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента.

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По учебникам освойте каждый структурный элемент темы.

3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы и упражнения.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Основные понятия и определения. Характеристика форм трудовой деятельности. Опасности среды обитания. Основные положения теории риска. Системный анализ безопасности. Принципы, методы и средства обеспечения безопасности.

ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЗАЩИТЫ ЧЕЛОВЕКА ОТ ОПАСНОСТЕЙ

Анатомо-физиологическая характеристика человека. Анализаторы человека. Защитные механизмы организма.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ

Гелиофизические и метеорологические факторы. Производственная пыль. Механические опасности. Опасности при эксплуатации сосудов, работающих под давлением. Механические колебания и волны. Электробезопасность. Электромагнитные излучения. Световой климат. Ионизирующие излучения. Световой климат. Ионизирующие излучения. Химические опасности. Биологические опасности. Психологические опасности. Экологические опасности. Социальные опасности. Санитарно-гигиенические требования к устройству и содержанию предприятий.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ

Общая характеристика чрезвычайных ситуаций. Стихийные бедствия. Аварии на особо опасных объектах экономики. Аварии на объектах горной промышленности и подземных геологоразведочных работ. Чрезвычайные ситуации, связанные с применением современных средств поражения. Прогнозирование и оценка обстановки при чрезвычайных ситуациях. Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций. Устойчивость функционирования объектов экономики в чрезвычайных ситуациях. Ликвидация последствий чрезвычайных ситуаций. Единая государственная система предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций.

ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ И ТРАВМАТИЗМ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Заболеваемость. Травматизм. Методы анализа травматизма.

УПРАВЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Правовые основы обеспечения безопасности деятельности. Обязанности работодателя по обеспечению безопасных условий труда. Время отдыха. Подготовка работников к безопасному труду. Система управления охраной труда на предприятии. Экономические аспекты охраны труда.

СОЦИАЛЬНАЯ ЗАЩИТА РАБОТНИКОВ

НАДЗОР И КОНТРОЛЬ ЗА СОСТОЯНИЕМ ОХРАНЫ ТРУДА ОТВЕТСТВЕННОСТЬ ЗА НАРУШЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ОХРАНЫ ТРУДА

• КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите основные термины теории безопасности деятельности, дайте их определения.
2. Охарактеризуйте основные формы трудовой деятельности.
3. Что понимают под опасностью среды обитания? Как классифицируют опасности?
4. Сформулируйте аксиому о потенциальной опасности деятельности.
5. В чем состоит идентификация (распознавание) опасности?
6. Что такое квантификация опасностей?
7. Назовите методы анализа безопасности деятельности.
8. Приведите примеры расчета производственного риска.
9. В чем заключается концепция приемлемого риска?
10. Что такое управление риском?
11. Охарактеризуйте системный анализ безопасности деятельности.
12. Перечислите принципы, методы и средства обеспечения безопасности.
13. Изложите сущность естественной системы защиты человека от опасностей.
14. Дайте анатомо-физиологическую характеристику человека.
15. Какова роль анализаторов человека в обеспечении безопасности его деятельности?
16. Опишите зрительный, слуховой и обонятельный анализаторы.
17. Опишите вестибулярный, кинестетический и кожный анализаторы.
18. Что понимают под защитными механизмами человеческого организма?
19. Охарактеризуйте действие гелиофизических и метеорологических факторов на человека.
20. Какое действие оказывают высокие и низкие температуры, повышенная и пониженная влажность на организм человека?
21. Как действуют на организм человека вредные газы и пары?
22. В чем заключается вредное действие производственной пыли на организм? Как ведется борьба с пылью?
23. Назовите средства индивидуальной защиты работающих от пыли.
24. Как классифицируют механические опасности?
25. Перечислите методы и средства защиты от механических опасностей.
26. Укажите, как обеспечивается безопасность при эксплуатации сосудов, работающих под давлением.
27. Охарактеризуйте действие инфразвука и ультразвука на организм и меры защиты от них.
28. Объясните действие шума на организм. Перечислите методы и средства коллективной и индивидуальной защиты от шума.

29. Как борются с вибрацией на горных предприятиях?
30. Объясните действие электрического тока на организм человека.
31. Укажите опасности, связанные с применением электрического тока на горных предприятиях.
32. Назовите основные меры безопасности при эксплуатации электроустановок.
33. Перечислите средства индивидуальной защиты от поражения электрическим током.
34. В чем состоит молниезащита зданий и сооружений?
35. Назовите способы защиты работающих от воздействия электрических и электромагнитных полей.
36. Укажите меры защиты от инфракрасного, ультрафиолетового и лазерного излучений.
37. Как влияет освещение на условия труда? Перечислите виды освещения.
38. Укажите средства нормализации освещения производственных помещений, рабочих мест и горных выработок.
39. Охарактеризуйте виды ионизирующих излучений.
40. Назовите общие принципы защиты от ионизирующих излучений.
41. Охарактеризуйте методы и средства защиты от ионизирующих излучений.
42. Перечислите химические опасности (вредные вещества) и укажите меры защиты от них.
43. Назовите биологические опасности и меры защиты от них.
44. Что понимают под психологическими опасностями?
45. Какие естественные факторы воздействуют на биосферу Земли?
46. В чем заключается антропогенное воздействие на природу?
47. Назовите методы и средства обеспечения экологической безопасности на горных предприятиях.
48. Какие санитарно-гигиенические требования предъявляются к устройству и содержанию предприятий?
49. Что такое чрезвычайная ситуация?
50. Перечислите признаки, характеризующие чрезвычайные ситуации.
51. Как классифицируют чрезвычайные ситуации по причинам возникновения?
52. Охарактеризуйте стихийные бедствия. Укажите мероприятия по предупреждению и ликвидации последствий стихийных бедствий.
53. Перечислите виды аварий на особо опасных объектах экономики (народного хозяйства). В чем заключается профилактика возникновения аварий на таких объектах?
54. Какие аварии происходят на объектах горной промышленности? Укажите методы профилактики и ликвидации таких аварий.
55. Охарактеризуйте чрезвычайные ситуации, связанные с применением современных средств поражения.

56. Перечислите основные принципы и способы защиты населения от чрезвычайных ситуаций.
57. Какие действия надлежит выполнить населению при стихийных бедствиях и авариях?
58. Укажите действия населения при возникновении угрозы нападения противника.
59. Какие действия должно выполнять население в очагах поражения и после выхода из них?
60. Какие факторы влияют на устойчивость функционирования объектов экономики?
61. Перечислите основные мероприятия по повышению устойчивости функционирования объектов экономики.
62. Назовите принципы организации и проведения аварийно-спасательных и других неотложных работ (АСиДНР) в чрезвычайных ситуациях мирного и военного времени.
63. Какие приемы и способы проведения АСиДНР используются в очагах поражения?
64. Перечислите меры безопасности при проведении АСиДНР.
65. По каким признакам классифицируют травмы и несчастные случаи на производстве?
66. Перечислите причины травматизма.
67. Укажите причины несчастных случаев на шахтах.
68. Опишите порядок расследования и учета несчастных случаев на производстве.
69. В чем заключается профилактика травматизма?
70. Какие методы используются при анализе травматизма?
71. Как расследуются профессиональные заболевания?
72. Кто назначает комиссию по расследованию профессионального заболевания?
73. Каким образом определяется окончательный диагноз острого профессионального заболевания?
74. Назовите меры профилактики профессиональных заболеваний.
75. Назовите меры профилактики производственного травматизма.
76. Изложите правовые основы обеспечения безопасности деятельности.
77. Какие обязанности возложены на администрацию предприятия по обеспечению охраны труда?
78. Перечислите виды подготовки работников к безопасному труду.
79. Что понимают под системой управления охраной труда на предприятиях?
80. Назовите основные нормативные документы, обеспечивающие безопасность деятельности.
81. Какова продолжительность ежедневной работы?
82. Какова профессиональная подготовка работников к безопасному труду?

83. Опишите систему управления охраной труда.
84. Назовите фонды охраны труда.
85. Чем обусловливается эффективность мероприятий по охране труда?
86. Опишите медицинское обслуживание работников.
87. Какие существуют льготы и компенсации за вредные и опасные условия труда?
88. Поясните суть обязательного социального страхования от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний.
89. Назовите обязательные принципы обязательного страхования от несчастных случаев на производстве и профзаболеваний.
90. Кто имеет право на получение страховых выплат в случае смерти застрахованного?
91. Как осуществляются страховые выплаты по социальному страхованию?
92. Как начисляется пособие по временной нетрудоспособности?
93. Каков порядок привлечения к дисциплинарной ответственности?
94. Кто может привлекать к дисциплинарной ответственности.
95. Кто может привлекать к административной ответственности?
96. В каких случаях привлекают к уголовной ответственности?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В среде обитания человека постоянно присутствуют естественные, техногенные и антропогенные опасности.

Полностью устранить негативное влияние естественных опасностей человечеству до настоящего времени не удается. Реальные успехи в защите человека от стихийных явлений сводятся к определению наиболее вероятных зон их действия и ликвидации возникающих последствий.

Мир техногенных опасностей вполне познаваем, и у человека есть достаточно способов и средств для защиты.

Антропогенные опасности во многом обусловлены недостаточным вниманием человека к проблеме безопасности, склонностью к риску и пренебрежению опасностью. Часто это связано с ограниченными знаниями человека о мире опасностей и негативных последствиях их проявления. Воздействие антропогенных опасностей может быть сведено к минимуму за счет обучения населения и работающих основам безопасности жизнедеятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Безопасность жизнедеятельности [Текст]: учебное пособие / В.В. Токмаков, Ю.Ф. Килин, А.М. Кузнецов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский государственный горный университет. - 4-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург: УГГУ, 2018. - 272 с.

Безопасность жизнедеятельности: учебное пособие / В.А. Подюков, В.В. Токмаков, В.М. Куликов ; под ред. В.В. Токмакова ; Уральский государственный горный уни-верситет. - 3-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург : УГГУ, 2007. - 314 с.

Белов С. В. Безопасность жизнедеятельности и защита окружающей среды (техносферная безопасность): учебник. 5-е изд., исправл. и доп. – М.: Изд-во «Юрай», 2015. – 702с.

Безопасность жизнедеятельности: энциклопедический словарь / под ред. проф. Русака О. Н. – СПб.: Инф-изд. агент «Лик», 2003.

Безопасность жизнедеятельности: Учебник для вузов / К. З. Ушаков, Н. О. Каледина, Б. Ф. Кирин, М. А. Сребный / под ред. К. З. Ушакова. – М.: Изд-во МГГУ, 2000. – 430 с.

Воронов Е. Т., Резник Ю. Н., Бондарь И. А. Безопасность жизнедеятельности. Теоретические основы БЖД. Охрана труда: учебное пособие. – Чита: Изд-во ЧитГУ, 2010. – 390 с.

Занько Н. К., Малаян К. Р., Русак О. Н. Безопасность жизнедеятельности: учебник. – М.: Лань, 2012. – 672 с.

Субботин А. И. Управление безопасностью труда: учебное пособие. – М.: Изд-во МГГУ, 2014. – 266 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург

Содержание

Цели и задачи дисциплины 3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы 3
Требования к оформлению контрольной работы 3
Содержание контрольной работы 3
Выполнение работы над ошибками 9
Критерии оценивания контрольной работы 9
Образец титульного листа 10

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен 1 вариант контрольной работы.

Содержание контрольной работы

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращением, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений

		Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.

		Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени
13	Что понимают под закаливанием.	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит.	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется.	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) ровной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным. рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что.	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) приучается чувство общей усталости и повышает тонус организма

21	Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимость управлять динамикой работоспособности занимающихся В) выделение частей в уроке требует Министерство образования России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставится задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3 Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу 5 Ходьба с постепенным повышение частоты шагов. 6. Прыжки 7 Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе	А) 1. 2. 3, 4, 5, 6. 7. 8 Б) 7. 5, 8, 6, 2. 3. 2, 1, 4 В) 3. 7. 5. 8. 1. 2. 6. 4 Г) 3. 1. 2, 4, 7, 6. 8. 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2,1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2 Гибкость 3 быстрота 4 Сила	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2,3,1,4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4,2 ,3, 1
27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы

		Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения роста тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнить перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную последовательность. 1. Дыхательные упражнения 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые	А) 1, 2, 5, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6.Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленом суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное действие Г) предпочтения учителя

42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля.	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»,

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине
ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа _____

Преподаватель: Петров Петр Петрович

Екатеринбург
2019

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург

Содержание

Цели и задачи дисциплины 3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы 3
Требования к оформлению теста 3
Содержание теста 3
Содержание опроса 9
Выполнение работы над ошибками 11

Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

Требования к оформлению теста

Задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в тесте.

Выполненный тест необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если тест выполнен без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен, тест, вопросы для проведения опроса.

Содержание теста

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращением, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений

		Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.

		Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени
13	Что понимают под закаливанием?	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит.	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется.	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) ровной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным. рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что.	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) приучается чувство общей усталости и повышает тонус организма

21	Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимость управлять динамикой работоспособности занимающихся В) выделение частей в уроке требует Министерство образования России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставится задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3 Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу 5 Ходьба с постепенным повышение частоты шагов. 6. Прыжки 7 Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе	А) 1. 2. 3, 4, 5, 6. 7. 8 Б) 7. 5, 8, 6, 2. 3. 2, 1, 4 В) 3. 7. 5. 8. 1. 2. 6. 4 Г) 3. 1. 2, 4, 7, 6. 8. 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2,1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2 Гибкость 3 быстрота 4 Сила	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2,3,1,4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4,2 ,3, 1
27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы

		Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения роста тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнить перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную последовательность. 1. Дыхательные упражнения 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые	А) 1, 2, 5, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	упражнения с отягощением и без них. 4 дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5 Повторный бег на короткие дистанции. 6 Ходьба. 7 Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленом суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчленённого упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное действие Г) предпочтения учителя

42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля.	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Критерии оценивания теста

Оценка за тест определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ – 2 балл Максимум 90 баллов.

Результат теста

Тест оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»,

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПРОСА

1. Определение понятий в области физической культуры
2. Понятие «здоровье» и основные его компоненты
3. Факторы, определяющие здоровье человека
4. Образ жизни и его составляющие
5. Разумное чередование труда и отдыха, как компонент ЗОЖ
6. Рациональное питание и ЗОЖ
7. Отказ от вредных привычек к соблюдение правил личной и общественной гигиены.
8. Двигательная активность — как компонент ЗОЖ
9. Выполнение мероприятий по закаливанию организма.
10. Физическое самовоспитание и самосовершенствование как необходимое условие реализации мероприятий ЗОЖ.
11. Врачебный контроль как обязательная процедура для занимающихся физической культурой.
12. Самоконтроль — необходимая форма контроля человека за физическим состоянием
13. Методика самоконтроля физического развития.
14. Самостоятельное измерение артериального давления и частоты сердечных сокращений
15. Проведение функциональных проб для оценки деятельности сердечно-сосудистой системы.
16. Проведение функциональных проб для оценки деятельности дыхательной системы
17. Самоконтроль уровня развития физических качеств, быстроты, гибкости, ловкости, силы и выносливости
18. Ведение дневника самоконтроля
19. Цель и задачи физического воспитания в вузе
20. Специфические функции физической культуры.
21. Социальная роль и значение спорта.
22. Этапы становления физической культуры личности студента.
23. Понятия физическая культура, физическое воспитание, физическое развитие, физическое совершенство.

24. Реабилитационная физическая культура. виды. краткая характеристика
25. Разделы учебной программы дисциплины «Физическая культура».
26. Комплектование учебных отделений студентов для организации и проведения занятий по физическому воспитанию.
27. Преимущества спортивно-ориентированной программы дисциплины «Физическая культура» для студентов.
28. Особенности комплектования студентов с различным характером заболеваний в специальном учебном отделении.
29. Зачетные требования по учебной дисциплине «Физическая культура».
30. Формирование двигательного навыка.
31. Устойчивость организма к воздействию неблагоприятных факторов
32. Мотивация и направленность самостоятельных занятий
33. Утренняя гигиеническая гимнастика
34. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений
35. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
36. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
37. Особенности самостоятельных занятий женщин.
38. Мотивация и направленность самостоятельных занятий. Утренняя гигиеническая гимнастика.
39. Физические упражнения в течение учебного дня. физкультминутки, физкультпаузы.
40. Самостоятельные тренировочные занятия структура. требования к организации и проведению.
41. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений
42. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом
43. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
44. Особенности самостоятельных занятий женщин.
45. Роль физической культуры в профессиональной деятельности бакалавра и специалиста.
46. Производственная физическая культура. ее цели и задачи.
47. Методические основы производственной физической культуры.
48. Производственная физическая культура в рабочее время.
49. Физическая культура и спорт в свободное время.
50. Профилактика профессиональных заболеваний и травматизма средствами физической культуры.
51. Понятие ППФП. её цель. задачи Прикладные знания. умения и навыки
52. Прикладные психические качества.
53. Прикладные специальные качества
54. Факторы. определяющие содержание ППФП. формы труда, условия труда.
55. Факторы. определяющие содержание ППФП: характер труда. режим труда и отдыха.
56. Дополнительные факторы. определяющие содержание ППФП.
57. Средства ППФП.
58. Организация и формы ППФП в вузе
59. Понятия общей и специальной физической подготовки
60. Отличия понятий спортивная подготовка и спортивная тренировка.
61 Стороны подготовки спортсмена.
62 Средства спортивной подготовки
63. Структура отдельного тренировочного занятия.
64. Роль подготовительной части занятия в тренировочном процессе
65. Понятие «физическая нагрузка». эффект ее воздействия на организм.
66. Внешние признаки утомления.
67. Виды и параметры физических нагрузок.
68. Интенсивность физических нагрузок.
69. Психофизиологическая характеристика умственной деятельности.
70. Работоспособность: понятие, факторы, периоды
71. Физические упражнения в течение учебного дня для поддержания работоспособности
72. Бег как самое эффективное средство восстановления и повышения работоспособности.
73. Плавание и работоспособность
74. Методические принципы физического воспитания. сущность и значение
75. Принципы сознательности и активности. наглядности в процессе физического воспитания.
76. Принципы доступности и индивидуализации. систематичности и динамичности.
77. Средства физической культуры.
78. Общепедагогические методы физического воспитания.
79. Методы обучения технике двигательного действия.
80. Этапы обучения двигательного действия.
81. Методы развития физических качеств. равномерный. повторный. интервальный.
82. Метод круговой тренировки. игровой и соревновательный методы.
83. Сила как физическое качество. общая характеристика силовых упражнений.
84. Методы развития силы
85. Выносливость виды выносливости. особенности развития выносливости.

86. Развитие физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости.
87. Понятие «спорт». Его принципиальное отличие от других видов занятий физическими упражнениями.
88. Массовый спорт, понятие, цель, задачи.
89. Спорт высших достижений: понятие, цель, задачи.
90. Студенческий спорт, его организационные особенности
91. Студенческие спортивные соревнования
92. Студенческие спортивные организации
93. Всероссийский физкультурно-спортивный комплекс «ГТО» (Готов к труду и обороне)

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенного теста необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данного теста. Тесты, тесты являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург

Содержание

Цели и задачи дисциплины 3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы 3
Требования к оформлению контрольной работы 3
Содержание контрольной работы 3
Выполнение работы над ошибками 10
Критерии оценивания контрольной работы 10
Образец титульного листа 11

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Элективные курсы по физической культуре и спорту» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «элективные курсы по физической культуре и спорту» представлено 2 варианта контрольной работы.

Содержание контрольной работы

Вопросы для групповой дискуссии

1 .Что можно отнести к средствам физического воспитания?
2. Влияние климатогеографического фактора на здоровье и работоспособность человека
3. Чем отличается спорт от физической культуры?
4. Что мы относим к материальным ценностям физической культуры, а что – к духовным?
5. В чем состоит взаимосвязь физической и умственной деятельности человека?
6. Причины возникновения таких явлений как гипокинезия и гиподинамия
7. Для чего нужна адаптивная физическая культура?
8. При выборе вида спорта на какие аспекты и характеристики необходимо обратить основное внимание.

Контрольная работа №1

Вариант 1

ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. Часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности – это:

а) физическая культура; б) спорт; в) туризм; г) физическое развитие.

2. Физическое воспитание – это:

а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;

б) приобщение человека к физической культуре;

в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;

г) процесс формирования определенных физических и психических качеств.

3. Чем спорт отличается от физической культуры:

а) наличием специального оборудования; б) присутствием зрителей; в) наличием соревновательного момента; г) большой физической нагрузкой.

4 Какой из ниже перечисленных принципов не относится к основным принципам физического воспитания:

а) сознательности и активности; б) наглядности; в) последовательности;

г) систематичности;

5 Под физическим развитием понимается:

а) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни;

б) размеры мускулатуры, форма тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность;

в) процесс совершенствования физических качеств, при выполнении физических упражнений;

г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

а) естественное состояние организма без болезней и недомоганий;

б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;

в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;

г) все перечисленное.

2. Состояние здоровья обусловлено:

а) резервными возможностями организма; б) образом жизни;

в) уровнем здравоохранения; г) отсутствием болезней.

3. Что не относятся к внешним факторам, влияющим на человека:

а) природные факторы; б) факторы социальной среды; в) генетические факторы;

г) биологические факторы.

4. Сколько времени необходимо нормальному человеку для ночного сна:

а) 5 – 6 часов; б) 6 – 7 часов; в) 7 – 8 часов; г) 8 – 9 часов.

5. К активному отдыху относится:

а) сон; б) отдых сидя; в) занятия двигательной деятельностью; г) умственная деятельность.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическими упражнениями называются:

а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;

б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;

в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;

г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Занятия физическими упражнениями отличаются от трудовых действий:

а) интенсивностью; б) задачами; в) местом проведения; г) все ответы верны.

3. Физические упражнения являются:

а) принципом физического воспитания; б) методом физического воспитания;

в) средством физического воспитания; г) функцией физического воспитания.

4. Что не относится к методам физического воспитания:

а) игровой; б) регламентированного упражнения; в) словесный и сенсорный;

г) самостоятельный.

5. Метод в физической культуре – это

а) основное положение, определяющее содержание учебного процесса по физической культуре;

б) руководящее положение, раскрывающее принципы физической культуры;

в) конкретная причина, заставляющая человека выполнять физические упражнения;

г) способ применения физических упражнений.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Физическая подготовка – это:

а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;

б) приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;

в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;

г) процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

2. К основным физическим качествам относятся:

а) рост, вес, объем бицепсов, становая сила; б) бег, прыжки, метания, лазания;
в) сила, выносливость, быстрота, ловкость, гибкость; г) взрывная сила, прыгучесть, меткость.

3. Различают гибкость:
а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
г) простую и сложную.

4. Какие виды спорта развивают преимущественно выносливость:
а) спортивные единоборства; б) циклические; в) спортивные игры; г) ациклические.

5. Скоростно-силовые качества преимущественно развиваются:
а) в тяжелой атлетике; б) в акробатике; в) в конькобежном спорте; г) в лыжном спорте.

Вариант 2

ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. На что преимущественно влияют занятия по физической культуре:
а) на интеллектуальные способности;
б) на удовлетворение социальных потребностей;
в) на воспитание лидерских качеств;
г) на полноценное физическое развитие.

2. Физическая культура – это:
а) часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности;
б) часть наука о природе двигательной деятельности человека
в) вид воспитательного процесса, специфика которого заключена в обучении двигательным актам и управлением развитием и совершенствованием физических качеств человека;
г) процесс физического образования и воспитания, выражающий высокую степень развития индивидуальных физических способностей.

3. Что не относиться к компонентам физической культуры:
а) физическое развитие; б) спорт высших достижений; в) оздоровительно-реабилитационная физическая культура;
г) гигиеническая физическая культура.

4. Выбрать правильное определение термина «Физическое развитие»:
а) физическое развитие – это педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) физическое развитие – это приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
в) физическое развитие – это биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
г) физическое развитие – это процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

5. Теоретический материал учебного предмета «Физическая культура и спорт» в высших учебных заведениях включает в себя:
а) фундаментальные знания общетеоретического характера;
б) инструктивно-методические знания;
в) знания о правилах выполнения двигательных действий;
г) все вышеперечисленное.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Что понимается под закаливанием:
а) купание в холодной воде и хождение босиком;
б) приспособление организма к воздействиям внешней среды;
в) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми;
г) укрепление здоровья.

2. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:
а) естественное состояние организма без болезней и недомоганий;
б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
г) все перечисленное.

3. Какое понятие не относится к двигательной активности человека:
а) гипоксия; б) гиподинамия; в) гипокинезия; г) гипердинамия.

4. Какая из перечисленных функций не относится к функции кожи:
а) защита внутренней среды организма; б) теплорегуляция; в) выделение из организма продуктов обмена веществ;
г) звукоизоляция.

5. Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому что:
а) обеспечивает ритмичность работы организма;

б) позволяет правильно планировать дела в течение дня;
в) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня.
г) позволяет избегать неоправданных физических напряжений

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1 Физическое упражнение - это

а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений.
б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания

2. Положительное влияние физических упражнений на развитие функциональных возможностей организма будет зависеть

а) от технической и физической подготовленности занимающихся;
б) от особенностей реакций систем организма в ответ на выполняемые упражнения;
г) от состояния здоровья и самочувствия занимающихся во время выполнения упражнений;
г) от величины физической нагрузки и степени напряжения в работе определенных мышечных групп.

3 Что не относиться к средствам физического воспитания:

а) физические упражнения.
б) подвижные игры;
в) соревнования.
в) спортивные игры.

4 Что относится к методическим принципам физического воспитания.

а) сознательность и активность;
б) наглядность и доступность;
в) систематичность и динамичность;
г) все вышеперечисленное

5. Регулярные занятия физическими упражнениями способствует повышению работоспособности, потому что

а) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости.
б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации.
в) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения;
г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнять больший объем физической работы за отведенный отрезок времени.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1 Степень владения техникой действий, при которой повышена концентрация внимания на составные операции (части), наблюдается неустойчивое решение двигательной задачи – это

а) двигательное умение; в) массовый спорт. в) двигательный навык.
г) спорт высших достижений.

2 Для воспитания быстроты используются

а) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции;
б) подвижные и спортивные игры;
в) упражнения на быстроту реакции и частоту движений;
г) двигательные упражнения, выполняемые с максимальной скоростью.

3 Различают два вида выносливости:

а) абсолютная и относительная, б) общая и специальная, в) активная и пассивная,
г) динамическую и статическую.

4 Процесс воспитания физических качеств, обеспечивающих преимущественное развитие тех двигательных способностей, которые необходимы для конкретной спортивной дисциплины - это

а) общая физическая подготовка; б) двигательное умение, в) специальная физическая подготовка, г) двигательный навык.

5 Различают силу

а) абсолютную и относительную, б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
г) статическую и динамическую

Контрольная работа №2

Вариант 1

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1 В комплекс утренней гимнастики следует включать

а) упражнения с отягощением. б) упражнения статического характера;
в) упражнения на гибкость и дыхательные упражнения; г) упражнения на выносливость.

2 К объективным показателям самоконтроля относится

а) частота сердечных сокращений. б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.

3 При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает

а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.

4 Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять

а) после приема пищи. б) после сна натощак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда. г) перед сном.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1 Регулярные занятия доступным видом спорта, участия в соревнованиях с целью укрепления здоровья, коррекции физического развития и телосложения, активного отдыха, достижение физического совершенствования – это

а) спорт высших достижений;

б) лечебная физическая культура.

в) профессионально-прикладная физическая культура;

в) массовый спорт.

2 Какой вид спорта наиболее эффективно развивает гибкость и ловкость

а) фехтование.

б) баскетбол;

в) фигурное катание,

г) художественная гимнастика.

3 Количество игроков одной команды в волейболе на площадке;

а) 7; б) 6; в) 5; г) 8.

4 Как осуществляется контроль за влиянием физических нагрузок на организм во время занятий физическими упражнениями:

а) по частоте дыхания.

б) по частоте сердечно-сосудистых сокращений;

в) по объему выполненной работы.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Степень владения техникой действия, при которой управление движением происходит автоматически, и действия отличаются надежностью – это

а) двигательное умение;

б) массовый спорт.

в) двигательный навык;

г) спорт высших достижений.

2 Как дозируются упражнения на гибкость:

а) до появления пота,

б) до снижения амплитуды движений;

в) по 12-16 циклов движений.

г) до появления болевых ощущений.

3 При воспитании силы применяются специальные упражнения с отягощениями. Их отличительная особенность заключается в том, что:

а) в качестве отягощения используется собственный вес человека.

б) они выполняются до утомления;

в) они вызывают значительное напряжение мышц.

г) они выполняются медленно.

4 В каком из перечисленных видов спорта преимущественно развивается выносливость

а) в фигурном катании;

б) в пауэрлифтинге.

в) в художественной гимнастике;

г) в лыжном спорте.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что

а) обеспечивают усиленную работу мышц;

б) обеспечивают выполнение большого объема мышечной работы с разной интенсивностью.

в) обеспечивают усиленную работу систем дыхания и кровообращения;

г) обеспечивают усиленную работу системы энергообеспечения

2 Меры профилактики переутомления:

а) посидеть 3-4 минуты;
б) сменить вид деятельности.
в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации.
г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

3 При нагрузке средней интенсивности частота пульса достигает
а) 100 – 130 уд/мин;
б) 130 – 150 уд/мин;
в) 150 – 170 уд/мин;
г) более 170 уд/мин

4. Что называется «разминкой», проводимой в подготовительной части занятия:
а) чередование легких и трудных общеразвивающих упражнений;
б) чередование беговых и общеразвивающих упражнений;
в) подготовка организма к предстоящей работе.
г) чередование беговых упражнений и ходьбы.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

Специально направленное и избирательное использование средств физической культуры и спорта для подготовки человека к определенной профессиональной деятельности – это
а) спорт высших достижений;
б) лечебная физическая культура.
в) производственная физическая культура;
г) массовый спорт.

1 ППФП строится на основе и в единстве с
а) физической подготовкой. б) технической подготовкой. в) тактической подготовкой.
г) психологической подготовкой.

3 Какая из нижеперечисленных задач не является задачей ППФП
а) развитие физических способностей, специфических для данной профессии.
б) формирование профессионально-прикладных сенсорных умений и навыков;
в) сообщение специальных знаний для успешного освоения практических навыков трудовой деятельности;
г) повышение функциональной устойчивости организма к неблагоприятному воздействию факторов окружающей среды.

4 Что не является формой занятий по ППФП:
а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия

Вариант 2

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1 Определение повседневных изменений в подготовке занимающихся – это.
а) педагогический поэтапный контроль;
б) педагогический текущий контроль.
в) педагогический оперативный контроль;
г) педагогический двигательный контроль.

1 В комплекс утренней гимнастики не рекомендуется включать:
а) упражнения на гибкость.
б) дыхательные упражнения;
в) упражнения с отягощением.
г) упражнения для всех групп мышц.

2 Самостоятельные тренировочные занятия не рекомендуется выполнять
а) за час до приема пищи.
б) после сна натощак;
в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда;
г) за 3 часа до отхода ко сну

4. Дневник самоконтроля нужен для.
а) коррекции содержания и методики занятий физическими упражнениями;
б) контроля родителей;
в) личного спортсмена;
г) личного тренера.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1 К циклическим видам спорта не относится.
а) волейбол;
б) стайерский бег.
в) плавание;

г) спортивная ходьба

2. Какой из перечисленных видов спорта преимущественно развивает координацию движений:

а) спортивная гимнастика;

б) лыжный спорт.

в) триатлон;

г) атлетическая гимнастика.

3. Систематическая плановая многолетняя подготовка и участие в соревнованиях в избранном виде спорта с целью достижения максимальных спортивных результатов – это:

а) спорт высших достижений.

б) лечебная физическая культура;

в) профессионально-прикладная физическая культура;

в) массовый спорт.

4. Какие упражнения включаются в разминку почти во всех видах спорта.

а) упражнения на развитие выносливости;

б) упражнения на развитие гибкости и координации движений;

в) бег и общеразвивающие упражнения.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Какая из представленных способностей не относится к группе координационных.

а) способность сохранять равновесие;

б) способность точно дозировать величину мышечных усилий;

в) способность быстро реагировать на стартовый сигнал;

г) способность точно воспроизводить движения в пространстве

2. Почему на занятиях по «физической культуре» выделяют подготовительную, основную и заключительную части

а) так удобнее распределять различные по характеру упражнения.

б) выделение частей занятий связано с необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся.

в) выделение частей в занятии требует Министерство науки и образования;

г) перед занятием, как правило, ставятся 3 задачи, и каждая часть предназначена для них

3. Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:

а) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий;

б) степень преодолеваемых при их выполнении трудностей;

в) утомлением, возникающим в результате их выполнения.

г) частотой сердечных сокращений

4. Назовите количество игроков на волейбольной площадке

а) 4; б) 5; в) 6; г) 7.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. К объективным показателям самоконтроля относится

а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит. г) сон.

2. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает

а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.

3. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнить.

а) после приема пищи; б) после сна натощак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.

4. Меры профилактики переутомления.

а) посидеть 3-4 минуты;

б) сменить вид деятельности.

в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;

г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

1. Система методически обоснованных физических упражнений, физкультурно-оздоровительных и спортивных мероприятий, направленных на повышение и сохранение устойчивой и профессиональной дееспособности – это.

а) физкультурная пауза.

б) производственная физическая культура.

в) спорт высших достижений;

г) массовый спорт.

2. Профессионально-прикладная физическая подготовка - это

а) специализированный вид физического воспитания, осуществляемый в соответствии с особенностями и требованиями данной профессии.

б) система профессиональных мероприятий, осуществляемая в соответствии с особенностями данной профессии;

в) процесс формирования специализированных знаний, умений и навыков;
г) целенаправленное воздействие на развитие физических качеств человека посредством нормированных нагрузок
3 Какой вид спорта наиболее эффективно развивает координационные способности монтажников-высотников?
а) фехтование; б) баскетбол; в) мото-спорт; г) гимнастика.
4 Что не является формой занятий по **ППФП**.
а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 40 баллов

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

20-40 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-19 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине
ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа _____

Преподаватель: Петров Петр Петрович

Екатеринбург
2019

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

1. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к практическим занятиям физической культурой и спортом 3
1.1. Планирование, формы и организация самостоятельных занятий 3
1.1.1. Утренняя физическая гимнастика 3
1.1.2. Упражнения в течение учебного дня 4
1.1.3. Самостоятельные тренировочные занятия 4
1.1.4. Методика самостоятельных тренировочных занятий 5
1.1.5. Особенности самостоятельных занятий для женщин 6
1.2 Самоконтроль занимающихся за состоянием своего организма 7
1.2.1 Оценка физического развития 9
1.2.2. Оценка функционального состояния (подготовленности) 10
2. Другие виды самостоятельной работы
2.1 Самостоятельная подготовка к сдаче обязательных тестов оценки общей физической подготовленности 12
2.1.1 Тест на скоростно-силовую подготовленность (бег на 100 м) 12
2.1.2 Техника выполнения упражнения 12
2.1.3 Методы самостоятельной тренировки 13
2.1.4. Средства тренировки быстроты 13
2.1.5. Подготовка и сдача контрольного норматива 14
2.2. Тест на силовую подготовленность для женщин 15
2.2.1. Техника выполнения упражнения 15
2.3. Тест на силовую подготовленность для мужчин 15
2.3.1. Техника выполнения упражнения 15
2.3.2. Методы развития силы 16
2.4. Тест на общую выносливость (бег 2000 и 3000 м) 17
2.4.1. Техника бега на длинные дистанции 17
2.4.3. Возможные ошибки и осложнения в ходе проведения Самостоятельных тренировок 18
3.Актуальность задачи повышения уровня готовности обучающихся к зачетным занятиям, на основе управляемой адаптации к смене видов учебно-познавательной деятельности 21

1. Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к практическим занятиям физической культурой и спортом

1.1. Планирование, формы и организация самостоятельных занятий

Планирование самостоятельных занятий осуществляется студентами при консультации преподавателей и должно быть направлено на достижение единой цели – сохранение хорошего здоровья, поддержание высокого уровня физической и умственной работоспособности, достижение поставленной задачи.

Существуют три формы самостоятельных занятий:

1. Утренняя физическая гимнастика (УФГ).

2. Упражнения в течение учебного (рабочего) дня.

3. Самостоятельные тренировочные занятия.

1.1.1. Утренняя физическая гимнастика

Выполняется ежедневно. В комплекс УФГ следует включать упражнения для всех групп мышц, упражнения на гибкость и дыхание, бег, бег (прыжковые упражнения).

Не рекомендуется выполнять:

- упражнения статического характера;

- со значительными отягощениями;

- упражнения на выносливость.

При выполнении УФГ рекомендуется придерживаться определенной последовательности выполнения упражнений:

- медленный бег, ходьба (2-3 мин.);

- потягивающие упражнения в сочетании с глубоким дыханием;

- упражнение на гибкость и подвижность для мышц рук, шеи, туловища и ног;

- силовые упражнения без отягощений или с небольшими отягощениями для рук, туловища, ног (сгибание-разгибание рук в упоре лежа, упражнения с легкими гантелями, с эспандерами);

- различные наклоны в положении стоя, сидя, лежа, приседания на од-ной и двух ногах и др.;

- легкие прыжки или подскоки (например, со скалкой) – 20-30 с.;

- упражнения на расслабление с глубоким дыханием.

При составлении комплексов УФГ рекомендуется физиологическую нагрузку на организм повышать постепенно, с максимумом во второй половине комплекса. К концу выполнения комплекса нагрузка снижается и организм приводится в спокойное состояние.

Между сериями из 2-3 упражнений (а при силовых – после каждого) выполняется упражнение на расслабление или медленный бег (20-30с.).

УФГ должна сочетаться с самомассажем и закаливанием организма. Сразу же после выполнения комплекса УФГ рекомендуется сделать самомассаж основных мышечных групп ног, туловища, рук (5-7 мин.) и выполнить водные процедуры с учетом правил и принципов закаливания.

1.1.2. Упражнения в течение учебного дня

Выполняются в перерывах между учебными и самостоятельными занятиями.

Они обеспечивают предупреждение наступающего утомления, способствуют поддержанию высокой работоспособности на длительное время без перенапряжения.

При выполнении этих упражнений следует придерживаться следующих правил:

1. Проводить в хорошо проветренных помещениях или на открытом воздухе.

2. Растягивать и расслаблять мышцы, испытывающие статическую нагрузку.

3. Нагружать неработающие мышцы.

1.1.3. Самостоятельные тренировочные занятия

Можно проводить индивидуально или в группе из 3-5 человек и более. Групповая тренировка более эффективна, чем индивидуальная. Заниматься рекомендуется 3-4 раза в неделю по 1,5 -2 часа. Заниматься менее двух раз в неделю нецелесообразно, т.к. это не способствует повышению уровня тренированности организма. Тренировочные занятия должны носить комплексный характер, т.е. способствовать развитию всего комплекса физических качеств, а также укреплению здоровья и повышению общей работоспособности организма.

Каждое самостоятельное тренировочное занятие состоит из трех частей:

1. Подготовительная часть (разминка) (15-20 мин. для одночасового занятия): ходьба (2-3 мин.), медленный бег (8-10 мин.), общеразвивающие упражнения на все группы мышц, соблюдая последовательность «сверху вниз», затем выполняются специально-подготовительные упражнения, выбор которых зависит от содержания основной части.

2. В основной части (30-40 мин.) изучаются спортивная техника и тактика, осуществляется тренировка развития физических, волевых качеств. При выполнении упражнений в основной части занятия необходимо придерживаться следующей последовательности:

После разминки выполняются упражнения, направленные на изучение и совершенствование техники, и упражнения на быстроту, затем упражнения для развития силы и в конце основной части занятия – для развития выносливости.

3. В заключительной части (5-10 мин.) выполняются медленный бег (3-8 мин.), переходящий в ходьбу (2-6 мин.), упражнения на расслабление в сочетании с глубоким дыханием, которые обеспечивают постепенное снижение тренировочной нагрузки и приведение организма в сравнительно спокойное состояние.

1.1.4. Методика самостоятельных тренировочных занятий

Методические принципы, которыми необходимо руководствоваться при проведении самостоятельных тренировочных занятий, следующие:

- принцип сознательности и активности предполагает углубленное изучение занимающимися теории и методики спортивной тренировки, осознанное отношение к тренировочному процессу, понимание целей и задач занятий, рациональное применение средств и методов тренировки в каждом занятии, учет объема и интенсивности выполняемых упражнений и физических нагрузок, умение анализировать и оценивать итоги тренировочных занятий;

- принцип систематичности требует непрерывности тренировочного процесса, рационального чередования физических нагрузок и отдыха, преемственности и последовательности тренировочных нагрузок от занятия к занятию. Эпизодические занятия или занятия с большими перерывами (более 4-5 дней) неэффективны и приводят к снижению достигнутого уровня тренированности;

- принцип доступности и индивидуализации обязывает планировать и включать в каждое тренировочное занятие физические упражнения, по своей сложности и интенсивности доступные для выполнения занимающимися. При определении содержания тренировочных занятий необходимо соблюдать правила: от простого – к сложному, от легкого – к трудному, от известного – к неизвестному, а также осуществлять учет индивидуальных особенностей занимающихся: пол, возраст, физическую подготовленность, уровень здоровья, волевые качества, трудолюбие, тип высшей нервной деятельности и т.п. Подбор упражнений, объем и интенсивность тренировочных нагрузок нужно осуществлять в соответствии с силами и возможностями организма занимающихся;

- принцип динамичности и постепенности определяет необходимость повышения требований к занимающимся, применение новых, более сложных физических упражнений, увеличение тренировочных нагрузок по объему и интенсивности. Переход к более высоким тренировочным нагрузкам должен проходить постепенно с учетом функциональных возможностей и индивидуальных особенностей занимающихся.

Если в тренировочных занятиях был перерыв по причине болезни, то начинать занятия следует после разрешения врача при строгом соблюдении принципа постепенности. Вначале тренировочные нагрузки значительно снижаются и постепенно доводятся до занимающегося в тренировочном плане уровня.

Все выше перечисленные принципы находятся в тесной взаимосвязи. Это различные стороны единого, целостного повышения функциональных возможностей занимающихся.

1.1.5. Особенности самостоятельных занятий для женщин

Организм женщины имеет анатомо-физиологические особенности, которые необходимо учитывать при проведении самостоятельных занятий физическими упражнениями или спортивной тренировки. В отличие от мужского, у женского организма менее прочное строение костей, ниже общее развитие мускулатуры тела, более широкий тазовый пояс и мощнее мускулатура тазового дна. Для здоровья женщины большое значение имеет развитие мышц брюшного пресса, спины и тазового дна. От их развития зависит нормальное положение внутренних органов. Особенно важно развитие мышц тазового дна.

Одной из причин недостаточного развития этих мышц у студенток и работниц умственного труда является малоподвижный образ жизни. При положении сидя мышцы тазового дна не противодействуют внутрибрюшному давлению и растягиваются от тяжести лежащих над ними органов. В связи с этим мышцы теряют свою эластичность и прочность, что может привести к нежелательным изменениям положения внутренних органов и к ухудшению их функциональной деятельности.

Ряд характерных для организма женщины особенностей имеется и в деятельности сердечно-сосудистой, дыхательной, нервной и других систем. Все это выражается более продолжительным периодом восстановления организма после физической нагрузки, а также более быстрой потерей состояния тренированности при прекращении тренировок.

Особенности женского организма должны строго учитываться в организации, содержании, методике проведения самостоятельных занятий. Подбор физических упражнений, их характер и интенсивность должны соответствовать физической подготовленности, возрасту, индивидуальным возможностям студенток. Необходимо исключать случаи форсирования тренировок для того, чтобы быстро достичь высоких результатов. Разминку следует проводить более тщательно и более продолжительно, чем при занятиях мужчин. Рекомендуется остерегаться резких сотрясений, мгновенных напряжений и усилий, например, при занятиях прыжками и в упражнениях с отягощением. Полезны упражнения, в положении сидя, и лежа на спине с подниманием, отведением, приведением и круговыми движениями ног, с подниманием ног и таза до положения «березка», различного рода приседания.

Даже для хорошо физически подготовленных студенток рекомендуется исключить упражнения, вызывающие повышение внутрибрюшного давления и затрудняющие деятельность органов брюшной полости и малого таза. К таким упражнениям относятся прыжки в глубину, поднимание больших тяжестей и другие, сопровождающиеся задержкой дыхания и натуживанием.

При выполнении упражнений на силу и быстроту движений следует более постепенно увеличивать тренировочную нагрузку, более плавно доводить ее до оптимальных пределов, чем при занятиях мужчин.

Упражнения с отягощениями применяются с небольшими весами, сериями по 8-12 движений с вовлечением в работу различных мышечных групп. В интервалах между сериями выполняются упражнения на расслабление с глубоким дыханием и другие упражнения, обеспечивающие активный отдых.

Функциональные возможности аппарата кровообращения и дыхания у девушек и женщин значительно ниже, чем у юношей и мужчин, поэтому нагрузка на выносливость для девушек и женщин должна быть меньше по объему и повышаться на более продолжительном отрезке времени.

Женщинам при занятиях физическими упражнениями и спортом следует особенно внимательно осуществлять самоконтроль. Необходимо наблюдать за влиянием занятий на течение овариально-менструального цикла и характер его изменения. Во всех случаях неблагоприятных отклонений необходимо обращаться к врачу.

Женщинам противопоказаны физические нагрузки, спортивная тренировка и участие в спортивных соревнованиях в период беременности. После родов к занятиям физическими упражнениями и спортом рекомендуется приступать не ранее чем через 8-10 месяцев.

1.2. Самоконтроль занимающихся за состоянием своего организма

Данные самоконтроля записываются в дневник, они помогают контролировать и регулировать правильность подбора средств, методику проведения учебно-тренировочных занятий. У отдельных занимающихся количество показателей самоконтроля в дневнике и порядок записи могут быть различными, но одинаково важно для всех правильно оценивать отдельные показатели, лаконично фиксировать их в дневнике.

В дневнике самоконтроля рекомендуется регулярно регистрировать:

- субъективные данные (самочувствие, сон, аппетит, болевые ощущения);

- объективные данные (частота сердечных сокращений (ЧСС), масса тела, тренировочные нагрузки, нарушения режима, спортивные результаты).

Субъективные данные:

Самочувствие - отмечается как хорошее, удовлетворительное или плохое. При плохом самочувствии фиксируется характер необычных ощущений.

Сон - отмечается продолжительность и глубина сна, его нарушения (трудное засыпание, беспокойный сон, бессонница, недосыпание и др.).

Аппетит - Отмечается как хороший, удовлетворительный, пониженный и плохой. Различные отклонения состояния здоровья быстро отражаются, поэтому его ухудшение, как правило, является результатом переутомления или заболевания.

Болевые ощущения - фиксируются по месту их локализации, характеру (острые, тупые, режущие и т.п.) и силе проявления.

Объективные данные:

ЧСС – важный показатель состояния организма. Его рекомендуется подсчитывать регулярно, в одно и то же время суток, в покое. Лучше всего утром, лежа, после пробуждения, а также до тренировки (за 3-5 мин) и сразу после спортивной тренировки.

Нормальными считаются следующие показатели ЧСС в покое:

- мужчины (тренированные/не тренированные) 50-60/70-80;

- женщины (тренированные/не тренированные) 60-70/75-85.

С увеличением тренированности ЧСС понижается.

Интенсивность физической нагрузки также определяться по ЧСС, которая измеряется сразу после выполнения упражнений.

При занятиях физическими упражнениями рекомендуется придерживаться следующей градации интенсивности:

- малая интенсивность – ЧСС до 130 уд/мин. При этой интенсивности эффективного воспитания выносливости не происходит, однако создаются предпосылки для этого, расширяется сеть кровеносных сосудов в скелетных мышцах и в сердечной мышце (целесообразно применять при выполнении разминки);

- средняя интенсивность от 130 до 150 уд/мин.;

- большая интенсивность – ЧСС от 150 до 180 уд/мин. В этой тренировочной зоне интенсивности к аэробным механизмам подключаются анаэробные механизмы энергообеспечения, когда энергия образуется при распаде энергетических веществ в условиях недостатка кислорода;

- предельная интенсивность – ЧСС 180 уд/мин. и больше. В этой зоне интенсивности совершенствуются анаэробные механизмы энергообеспечения.

Существенным моментом при использовании ЧСС для дозирования нагрузки является ее зависимость от возраста.

Известно, что по мере старения уменьшается возможность усиления сердечной деятельности за счет учащения сокращения сердца во время мышечной работы. Оптимальную ЧСС с учетом возраста при продолжительных упражнениях можно определить по формулам:

- для начинающих: ЧСС (оптимальная) = 170 – возраст (в годах)

- для занимающихся регулярно в течении 1-2 лет:

- ЧСС (оптимальная) = 180 – возраст (в годах)

Зависимость максимальной величины ЧСС от возраста при тренировке на выносливость можно определить по формуле:

- ЧСС (максимальная) = 220 – возраст (в годах)

Например, для занимающихся в возрасте 18 лет максимальная ЧСС будет равна 220-18=202 уд/мин.

Важным показателем приспособленности организма к нагрузкам является скорость восстановления ЧСС сразу после окончания нагрузки. Для этого определяется ЧСС в первые 10 секунд после окончания нагрузки, пересчитывается на 1 мин. и принимается за 100%. Хорошей реакцией восстановления считается:

- снижение через 1 мин. на 20%;

- через 3 мин. – на 30%;

- через 5 мин. – на 50%,

- через 10 мин. – на 70 – 75%. (отдых в виде медленной ходьбы).

Масса тела должна определяться периодически (1-2 раза в месяц) утром натощак, на одних и тех же весах. В первом периоде тренировки масса обычно снижается, а затем стабилизируется и в дальнейшем за счет прироста мышечной массы несколько увеличивается. При резком снижении массы тела следует обратиться к врачу.

Тренировочные нагрузки в дневник самоконтроля записываются коротко, вместе с другими показателями самоконтроля они дают возможность объяснить различные отклонения в состоянии организма.

Спортивные результаты показывают, правильно ли применяются средства и методы тренировочных занятий. Их анализ может выявить дополнительные резервы для роста физической подготовленности и спортивного мастерства.

В процессе занятий физическими упражнениями рекомендуется периодически оценивать уровень своего физического развития и физической (функциональной) подготовленности.

1.2.1. Оценка физического развития

Проводится с помощью антропометрических измерений: рост стоя и сидя, масса тела, окружность грудной клетки, жизненная емкость легких (ЖЁЛ) и сила кисти сильнейшей руки, которые дают возможность определить:

- уровень и особенности физического развития;

- степень его соответствия полу и возрасту;

- имеющиеся отклонения;

- улучшение физического развития под воздействием занятий физическими упражнениями.

Применяются следующие антропометрические индексы:

- Весо-ростовой показатель

- ВРП= масса тела (грамм.)/длина тела (см.)

Хорошая оценка:

- для женщин 360-405 г/см.;

- для мужчин 380-415 г/см.

Индекс Брока

Оптимальная масса тела для людей ростом от 155 до 165 см. равна длине тела в сантиметрах минус 100. При росте 165-175 см. вычитают 105, при росте более 175 см. – 110.

Силовой показатель (СП)

Показывает соотношение между массой тела и мышечной силой. Обычно, чем больше мышечная масса, тем больше сила. Силовой показатель определяется по формуле и выражается в процентах:

$$\frac{\text{сила (кг)}}{\text{общая масса тела (кг)}} \times 100$$

Для сильнейшей руки:

- для мужчин - 65-80%

- для женщин - 48-50%.

1.2.2. Оценка функционального состояния (подготовленности)

Определение резервных возможностей организма

Осуществляется с помощью физиологических проб сердечно-сосудистой (ССС) и дыхательной (ДС) систем.

Общее требования:

1. Проводить в одно и то же время суток.

2. Не ранее чем через 2 часа после приема пищи.

3. При температуре 18-20 градусов, влажности менее 60%.

Функциональная проба с приседанием

Проверяемый отдыхает стоя 3 мин., на 4-й мин. подсчитывается ЧСС за 15 с. с пересчетом на 1 мин. (исходная частота). Далее выполняется 20 приседаний за 40 с., поднимая руки вперед. Сразу после приседаний подсчитывается ЧСС в течение первых 15 с. с пересчетом на 1 мин. Определяется увеличение ЧСС после приседаний сравнительно с исходной в процентах.

Оценка:

- отлично – до 20%;

- хорошо – 20-40%;

- удовлетворительно – 40-65%;

- плохо – 66-75%;

- более 75%.

Ортостатическая проба

Применяется для оценки сосудистого тонуса.

Отдых 5 минут в положении лежа, подсчитывают ЧСС в положении лежа за 1 мин. (исходная ЧСС), после чего занимающийся встает, и снова подсчитывает пульс за 1 мин.

Оценка:

- «хорошо» - не более 11 ударов (чем меньше разница, тем лучше);

- «удовлетворительно» - от 12 до 18 ударов (потливость);

- «неудовлетворительно» - более 19 ударов (потливость, шум в ушах).

Проба Штанге (задержка дыхания на вдохе),

проба Генча (задержка дыхания на вдохе)

Оценивается устойчивость организма к недостатку кислорода, а также общий уровень тренированности.

После 5 мин. отдыха сидя, сделать 2-3 глубоких вдоха и выдоха, затем сделать полный вдох (выдох) и задержать дыхание. Отмечается время от момента задержания дыхания до ее прекращения.

Оценка	Юноши	Девушки
Отлично	90 сек	80 сек
Хорошо	80-89 сек	70-79 сек
Удовлетворительно	50-79 сек	40-69 сек
Неудовлетворительно	50 и ниже	40 и ниже

Проба Генча

Оценка	Юноши	Девушки
Отлично	45 сек	35 сек
Хорошо	40-44 сек	30-34 сек
Удовлетворительно	30-39 сек	20-29 сек
Неудовлетворительно	30 и ниже	20 и ниже

С нарастанием тренированности время задержания дыхания возрастает, при снижении или отсутствии тренированности – снижается.

Самоконтроль прививает занимающимся грамотное и осмысленное отношение к своему здоровью и к знаниям физической культурой и спортом, имеет большое воспитательное значение.

2. Другие виды самостоятельной работы

2.1. Самостоятельная подготовка к сдаче обязательных тестов оценки общей физической подготовленности

2.1.1 Тест на скоростно-силовую подготовленность (бег на 100 метров)

Нормативы:

- у студенток нормативы в беге на 100 метров следующие: 15.7 сек - 5 очков; 16,0 - 4; 17,0 -3; 17,9 - 2; 18,7 - 1.

- студенты должны показать результаты в следующих пределах: 13,2 сек - 5 очков; 13,8 - 4; 14,0 - 3; 14,3 - 2; 14,6 - 1.

2.1.2. Техника выполнения упражнения

При анализе бега на 100 м. принято выделять следующие основные фазы:

- старт и стартовый разгон;

- бег по дистанции;

- финиширование.

Старт и стартовый разгон

Существует два вида старта: низкий и высокий. Экспериментальные данные показывают, что новичкам и спортсменам 2-го разряда лучше применять высокий старт. Такая закономерность наблюдается до результата 11,4-11,6 с. и объясняется технической сложностью низкого старта. Поэтому следует ограничиться только овладением техникой высокого старта.

По команде «На старт» занимающийся подходит к стартовой линии, ставит сильнейшую (толчковую ногу) вплотную к линии, маховая нога располагается на 1,5-2 стопы назад на носок, расстояние между ними 15-20 см. Туловище выпрямлено, руки опущены, вес тела распределяется равномерно на обе ноги.

По команде «Внимание» вес тела переносится на впереди согнутую стоящую ногу, разноименная рука вперед. Проекция плеч находится за стартовой линией на расстоянии 5-8 см. Взгляд направлен вперед - вниз.

По команде «Марш» бегун мощно разгибает толчковую ногу и стремится максимально быстро вынести маховую ногу вперед с постановкой ее сверху вниз на дорожку. Руки работают максимально активно, плечевой пояс не закрепощен, кисти расслаблены. Стартовый разгон характеризуется постепенным увеличением длины шагов, уменьшением наклона туловища и приближением стоп к средней линии.

Бег по дистанции

Перед бегущим стоит задача удержать развитую горизонтальную скорость до финиша. Этому будет способствовать сохранение длины и частоты шагов.

Во время бега маховая нога ставится с носка спереди проекции общего центра тяжести тела (ОЦТТ) сверху вниз. Взаимодействие маховой ноги с грунтом называется передним толчком. Задний толчок выполняется мощным разгибанием бедра и сгибанием стопы. Голова держится прямо. Руки согнуты (угол сгибания в локтевых суставах примерно 90 град.).

При движении руки вперед кисть поднимается до уровня плеч. Назад рука отводится до «отказа» и угол сгибания в локтевом суставе увеличивается. Пальцы рук слегка согнуты.

Финиширование

Наклон туловища увеличивается. На последних метрах дистанции необходимо стремиться не потерять свободы движений и пробегать финиш без снижения скорости.

2.1.3. Методы самостоятельной тренировки

- Повторный метод - повторное выполнение упражнений с около-предельной и предельной скоростью. Отдых продолжается до восстановления. Упражнения повторяются до тех пор, пока скорость не начнет снижаться.

- Переменный метод - когда пробегаются дистанции, например, с варьированием скорости и ускорения. Цель - исключить стабилизацию скорости («скоростной барьер»).

- Соревновательный метод - предполагает выполнение упражнений на быстроту в условиях соревнований. Эмоциональный подъем на соревнованиях способствует мобилизации на максимальные проявления быстроты, позволяет выйти на новый рубеж скорости.

2.1.4. Средства тренировки быстроты

Частоту движений, а вместе с ней и быстроту циклических движений развивают с помощью упражнений, которые можно выполнять с максимальной скоростью, а также с помощью скоростно-силовых упражнений для ациклических движений. При этом упражнения должны отвечать следующим требованиям:

- техника упражнений должна обеспечивать выполнение движений на предельных скоростях;

- упражнения должны быть хорошо освоены, чтобы не требовалось волевого усилия для их выполнения;

- продолжительность упражнений должна быть такой, чтобы скорость не снижалась вследствие утомления - 20-22 с.

Основным средством отработки бега по дистанции является бег с максимальной скоростью. Такой бег выполняется 5-6 раз по 30-40 метров. В тренировке можно чередовать бег в обычных, облегченных (с горки, угол 4-5 град.) и затрудненных (в горку или с сопротивлением) условиях.

Для развития скоростной выносливости рекомендуется пробегать большую дистанцию (120-150 м), когда очередная пробежка начинается при пульсе 120 уд/мин.

Для тренировки в беге на 100 метров следует использовать кроссы (6 км, 30 мин), повторный бег на отрезках 200 м в 3/4 силы. Спортивные игры (баскетбол, футбол) также приносят пользу в развитии быстроты.

Можно рекомендовать и упрощенную методику, обеспечивающую минимально необходимый уровень подготовленности:

- повторный метод - в одном занятии 3-4 пробегания по 20-30 метров с максимальной скоростью и интервалами отдыха для восстановления пульса до 110-120 уд/мин;

- переменный метод - пробегание 2-х отрезков по 30 метров с максимальной скоростью и последующим переходом на спокойный бег 150--200 метров. Выполняется 3-4 подхода.

Для ощутимого сдвига в подготовленности такие тренировки рекомендуется проводить 3-4 раза в неделю.

2.1.5. Подготовка и сдача контрольного норматива

При подготовке к сдаче бега на 100 метров следует учитывать общие требования по питанию при занятиях физическими упражнениями:

1. По времени - прием пищи не менее чем за 2-3 часа.

2. По составу - не есть тяжелой пищи (мясо, яйца, масло, молочные продукты, жирную, долго перевариваемую пищу).

Не рекомендуется выходить на старт с переполненным желудком.

Непосредственно перед сдачей норматива необходимо провести разминку с использованием специальных упражнений:

1. Бег с высоким подниманием бедра.

2. Бег с «захлестыванием» голеней назад.

3. Семенящий бег.

4. Прыжки с ноги на ногу (шаги).

5. Бег в упоре стоя у гимнастической стенки.

6. Бег с ускорением с высокого старта с подачей стартовых команд (2-3 ускорения по 10-15 метров).

Разминка заканчивается за 10 минут до старта.

Непосредственно перед стартом нельзя отдыхать лежа, сидя, необходимо постоянно находиться в движении (прохаживаться, выполнять упражнения на растяжку). Частота сердечных сокращений непосредственно перед стартом должна быть 110 – 120 уд/мин.

Психологическая подготовка заключается в мысленном «прокручивании» в голове этапов преодоления дистанции: старта, стартового разбега, бега по дистанции, финиширования с концентрацией внимания на технике выполнения каждого этапа.

При выполнении теста не разрешается:

- наступать на линию старта (стартовая линия входит в дистанцию);

- перебегать на соседние дорожки.

2.2. Тест на силовую подготовленность для женщин

(поднимание (сед) и опускание туловища из положения лежа, ноги закреплены, руки за головой)

Нормативы: 60 раз - 5 очков, 50 - 4, 40 - 3, 30 - 2, 20 - 1.

Это упражнение используется для оценки развития мышц живота (брюшного пресса).

О мышцах брюшного пресса следует сказать особо. Эта группа мышц участвует в большинстве движений. Она создает хороший «мышечный корсет», охватывающий брюшную полость и способствующий нормальному функционированию внутренних органов, что положительно влияет на состояние здоровья.

2.2.1. Техника выполнения упражнения

И.п. (исходное положение) – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, стопы прижаты к полу, руки в замок за головой, локти разведены.

Это силовое упражнение состоит из 4-х фаз:

- поднимание туловища;

- фиксация его в вертикальном положении;

- опускание;

- пауза в горизонтальном положении.

Голова держится прямо, локти в стороны, дыхание ритмично.

2.3. Тест на силовую подготовленность для мужчин (подтягивание на перекладине)

Учебной программой по физической культуре предусмотрено тестирование студентов для определения уровня их силового развития. Нормативы следующие: 15 раз - 5 очков, 12 - 4, 9 - 3, 7 - 2, 5 - 1;

2.3.1. Техника выполнения упражнения

Каждый цикл подтягивания в висе на перекладине включает:

- исходное положение - вис на вытянутых руках хватом сверху (большими пальцами внутрь);

- подъем до пересечения подбородком линии перекладины;

- опускание в исходное положение.

При выполнении теста разрешается сгибание, разведение ног, запрещаются рывковые движения туловищем и руками, хлестовые движения ногами. Выполнение засчитывается только при полном выпрямлении рук в локтевых суставах.

Наиболее экономично подтягивание при хвате рук на ширине плеч. Если кисти рук расположены ближе друг к другу, то положение тела становится менее устойчивым и отклонения

придется компенсировать за счет дополнительных мышечных усилий, что будет увеличивать энерготраты и снижать результат. Возрастают энерготраты и при широком хвате (шире плеч). Это связано с тем, что для фиксации лопаток при широком хвате требуется большая, чем при хвате на ширине плеч, сила мышц, приближающих лопатки к позвоночному столбу.

Опускание в вис (в исходное положение) после подтягивания должно выполняться спокойно. Дыхание не задерживается.

2.3.2. Методы развития силы

На практике распространены следующие методы силовой подготовки:

- метод максимальных усилий;

- метод повторных усилий;

- метод динамических усилий.

Согласно методу максимальных усилий выполнение упражнений организуется таким образом, чтобы занимающийся смог подтянуться 1-3 раза в одном подходе (при условии, что он способен самостоятельно подтянуться как минимум 2-3 раза). Такое достигается за счет применения дополнительного внешнего отягощения. Делается 5-6 подходов с перерывами 2-4 минуты.

По методу повторных усилий подтягивания в одном подходе выполняются до «отказа». Если занимающийся имеет максимальный индивидуальный показатель 10-15 подтягиваний и более, то следует применять отягощение весом 30-70% от максимального. Например, занимающийся может подтянуться 1 раз с максимальным отягощением 10 кг. Значит, для тренировки по методу повторных усилий следует подобрать вес отягощения 3-7 кг. Выполняется 3-6 подходов с отдыхом между ними 2-4 мин.

Разнообразить упражнения можно, применяя метод динамических усилий. Если занимающийся легко выполняет 10-15 подтягиваний, то следует применять отягощения до 30% от максимального. В одном подходе 10-15 повторений. Темп - максимально быстрый. Всего 3-6 подходов. Во время отдыха следует добиваться наиболее полного восстановления, чтобы в следующем подходе выполнить упражнение без существенной потери скорости.

Сравнивая динамический и статический методы развития силы, необходимо отметить следующее:

- При динамическом режиме работы мышц происходит достаточное кровоснабжение. Мышца функционирует как насос - при расслаблении наполняется кровью и получает кислород и питательные вещества.

- Во время статического усилия мышца постоянно напряжена и непрерывно давит на кровеносные сосуды. В результате она не получает кислород и питательные вещества. Это ограничивает продолжительность работы мышц.

2.4. Тест на общую выносливость - бег 2000 и 3000 метров

Нормативы:

- студентки - бег 2000 метров - 10 мин.15 сек. - 5 очков; 10.50 - 4; 11.15 - 3; 11.50 - 2; 12.15 - 1;

- студенты - бег 3000 метров - 12.00 - 5; 12.35 - 4; 13.10 - 3; 13.50 - 2; 14.00 - 1.

2.4.1. Техника бега на длинные дистанции

Бег на средние и длинные дистанции начинается с высокого старта. По команде «На старт!» бегун ставит у линии более сильную ногу, а другую отставляет назад на носок (на 30 – 50 см), немного сгибает ноги, туловище наклоняет вперед и тяжесть тела переносит на впереди стоящую ногу. По команде «Марш!» бегун начинает бег, делая первые шаги в большом наклоне, который постепенно уменьшается. Длина шагов увеличивается, бег ускоряется, бегун набирает скорость и в короткое время переходит к свободному бегу на дистанции. Бег на дистанции. Во время бега на дистанции туловище вертикально или слегка наклонено вперед (5-7°). Небольшой наклон туловища вперед позволяет лучше использовать силы отталкивания и быстрее продвигаться вперед. Слишком большой наклон приводит к «падающему» бегу, при котором труднее выносить вперед согнутую ногу, в связи с чем уменьшается длина шага, а следовательно, и скорость бега. Кроме того, при большом наклоне постоянно напряжены мышцы, удерживающие туловище от увеличивающегося наклона. Отсутствие наклона ухудшает условия отталкивания, однако улучшает возможность выноса вперед согнутой в коленном суставе свободной ноги. При правильном положении туловища создаются благоприятные условия для работы мышц и внутренних органов. Наклон туловища у бегунов изменяется в пределах 2-3°: увеличивается к моменту отталкивания и уменьшается в полетной фазе. Положение головы существенно влияет на положение туловища. Надо держать голову прямо и смотреть вперед. В фазе отталкивания таз подается вперед, что является важной особенностью техники бега на длинные дистанции и позволяет полнее использовать силу реакции опоры. В технике бега на длинные дистанции важнее всего движения ног. Нога, немного согнутая, ставится на грунт упруго и эластично с передней части стопы, а затем касается его всей стопой. Постановка ноги на переднюю часть стопы позволяет эффективнее использовать эластические свойства мышц голени, активно участвующие в отталкивании. Следы стоп на дорожке у бегунов находятся на одной линии, носки почти не разворачиваются в стороны. Эффективное отталкивание характеризуется выпрямлением ноги во всех суставах. Угол отталкивания в беге на средние дистанции примерно равен 50-55°. При правильном отталкивании таз подан вперед, голень маховой согнутой ноги параллельна бедру толчковой ноги. Быстрый вынос маховой ноги вперед облегчает отталкивание. Бегуны на длинные дистанции меньше поднимают бедро маховой ноги вверх, чем бегуны на средние и короткие дистанции. Длина шага на длинные дистанции не

постоянна даже у одних и тех же бегунов. Колебания зависят от наступившего утомления, неравномерности пробегания отдельных участков дистанции, качества беговой дорожки, ветра и состояния бегуна. Обычно шаг с сильнейшей ноги на несколько сантиметров больше, чем шаг со слабейшей ноги. Длина шага равна 160 – 215 см. Повышение скорости бега за счет увеличения длины шага ограничено, так как слишком длинный шаг требует очень больших затрат сил. Кроме того, длина шага в основном зависит от индивидуальных данных бегуна. Поэтому скорость бега повышают за счет увеличения частоты шагов, которая зависит от тренированности бегуна. Движения плечевого пояса и рук связаны с движениями ног. Выполнять их надо легко, не напряженно. Это во многом зависит от умения расслаблять мышцы плечевого пояса. Движения рук помогают бегуну сохранять равновесие тела во время бега. Амплитуда движения рук зависит от скорости бега. Кисти при движении вперед не пересекают средней линии тела и поднимаются примерно до уровня ключицы. При движении рук назад кисти доходят до задней линии туловища (если смотреть на бегуна сбоку). Руки двигаются маятникообразно, пальцы рук свободно сложены, предплечья не напряжены, плечи не поднимаются вверх. При финишировании, длина которого зависит от дистанции и оставшихся сил бегуна, движения руками делаются быстрее, наклон тела увеличивается, а угол отталкивания уменьшается. Спортсмен переходит на скоростной бег, при котором скорость повышается главным образом за счет увеличения частоты шагов. К концу дистанции вследствие утомления некоторые бегуны наклоняют туловище назад. Такое положение туловища не способствует эффективности бега, так как усилия отталкивания направляются больше вверх. Техника бега на вираже имеет некоторые особенности: туловище немного наклонено влево, к бровке, правая рука движется несколько размашистей левой, причем правый локоть дальше отводится в сторону, а правая стопа ставится с некоторым поворотом внутрь. Ритм дыхания зависит от индивидуальных особенностей и скорости бега (с увеличением скорости бега увеличивается и частота дыхания). Бегун не должен задерживать дыхание. Дышать следует одновременно через нос и полуоткрытый рот, при этом важно следить за полным выдохом.

2.4.3. Возможные ошибки и осложнения в ходе проведения самостоятельных тренировок

В некоторых случаях тренировка может стать причиной различных осложнений, включая травмы опорно-двигательного аппарата.

Основная причина травматизма опорно-двигательного аппарата - перенапряжение. Слишком быстрое увеличение тренировочных нагрузок является чрезмерным для детренированных мышц, связок и суставов. К дополнительным факторам, способствующим повреждению опорно-двигательного аппарата, можно отнести:

- бег по твердому грунту;
- избыточную массу тела;

- обувь, не пригодную для бега;

-грубые ошибки в технике.

Следовательно, меры по профилактике травм должны быть направлены на устранение или ослабление воздействия этих факторов:

- Во время кроссового бега часто болит в правом боку (печень), либо в левом боку (селезенка). Печень важный орган в жизнедеятельности нашего организма (синтез жиров и углеводов, обмен белков и витаминов) является кровяным депо. Так вот в результате переполнения кровью печени возникают колики. Глубокое дыхание снижает приток крови к правому предсердию, уменьшает болевые ощущения. Бег не надо прекращать, необходимо снизить скорость передвижения и стараться дышать глубже.

- В процессе тренировок после значительного перерыва (отдыха) или при резком увеличении нагрузок могут появляться боли в мышцах, как правило, на другой день. Во время физической работы в организме образуются продукты распада, часть которых выводится из организма через мочевыделительную систему, а другая часть, в том числе, молочная кислота задерживается в мышечных тканях. Чтобы избавиться от нее, необходимо мышцу непосредственно после физической нагрузки заставить растянуться (с помощью упражнений на растяжение), а на следующий день выполнять какую-либо физическую работу, т.е. сокращаться. Эти меры помогут ускорить вывод молочной кислоты из мышц. Боли могут длиться несколько дней и если не предпринимать никаких мер, мышца теряет эластичность, становиться твердой. В этом случае могут помочь: массаж, банные процедуры, применение согревающих мазей и гелей.

- При выполнении напряженной физической работы длительное время, например, кроссовый бег, возникают такие состояния, которые получили название «мертвая точка» и «второе дыхание». Уже через некоторое время бега в организме начинаются изменения, которые заставляют нас прекратить мышечную деятельность. Такое временное снижение работоспособности получило название «мертвая точка». Механизм возникновения такого состояния недостаточно изучен. Предполагают, что он обусловлен временным нарушением деятельности скелетных мышц и органов, обеспечивающих доставку кислорода в организм. Эти нарушения приводят к изменениям в работе нервных центров, что, в свою очередь, приводит к нарушениям в работе отдельных физиологических систем. Время возникновения и продолжительность этого состояния зависит от многих факторов, в частности от длительности и интенсивности физической нагрузки (например, при беге на 5-10 км и более возникает через 5-6 мин бега), от тренированности. Чем лучше тренирован человек, тем позже возникает это состояние и протекает менее тяжело (почти незаметно). Преодоление этого состояния требует значительного волевого усилия. В процессе проведения учебных и тренировочных занятий необходимо приучать себя преодолевать это неприятное ощущение, возникающее при

кислородной недостаточности и накоплении продуктов кислотно-щелочного распада при обмене веществ. Наступлению «второго дыхания» способствуют усиленные дыхательные упражнения, глубокие выдохи, освобождающие организм от накопившейся углекислоты, что способствует наступлению кислотно-щелочного баланса в организме. Преодолеть состояние «мертвой точки» можно, если снизить интенсивность физической нагрузки, но это нежелательно, т.к. не будет адаптации организма к такого рода деятельности.

- При занятиях физическими упражнениями могут возникнуть отклонения в деятельности сердца - учащенное сердцебиение. Оно может быть следствием стенокардии, ссоры, неурядицы в быту, семье, боязни, страха, дистрофий миокарда. Возникновение болей - сигнал опасности, в этих случаях необходимо прекратить занятия и обратиться к врачу.

- Существует состояние, называемое гравитационным шоком. Часто возникает при внезапной остановки после относительно интенсивного бега (чаще после финиша) в связи с прекращением действия «мышечного насоса». Большая масса крови застаивается в раскрытых капиллярах и венах мышц нижних конечностей, на периферии. Возникает анемия (обескровливание) мозга, недостаточное снабжение его кислородом. Появляется резкое побледнение, слабость, головокружение, тошнота, потеря сознания, исчезновение пульса. Пострадавшего необходимо уложить на спину, поднять вверх ноги (выше головы), обеспечив отток венозной крови к сердцу, улучшив снабжение головного мозга кислородом, поднести к носу ватку смоченную нашатырным спиртом. Основная профилактика гравитационного шока - исключение внезапной остановки, постепенное замедление бега.

- Гипогликемическое состояние - следствие недостаточного количества в организме сахара, нарушение углеводного обмена в результате длительной физической нагрузки. Ощущается сильный голод, головокружение, иногда потеря сознания. Профилактика – легко усваиваемые углеводы до начала длительной физической нагрузки (немного сахара, меда и т.п.) или специальные питательные смеси.

- Солнечный и тепловой удары - возникают при длительной работе под действием солнечных лучей на обнаженную голову или тело. Тепловой удар - остро развивающееся болезненное состояние, обусловленное перегреванием организма. Его признаками являются: усталость, головная боль, слабость, боли в ногах, спине, тошнота, шум в ушах, повышение температуры, потемнение в глазах, ухудшение дыхания (прерывистое), потеря сознания.

Первая помощь: пострадавшего поместить в прохладное место, снять одежду, приподнять голову, охладить область сердца (холодный компресс), напоить. Дать понюхать нашатырный спирт, сердечные средства. При нарушении дыхания сделать искусственное дыхание.

При обморожениях на охлажденном участке вначале чувствуется легкое пощипывание, затем чувствительность теряется. Особенно поддаются ему пальцы рук, ног, нос, уши. Если

произошло обморожение нельзя растирать пораженные места снегом, это только повредит кожу. Необходимо поместить обмороженный участок в тепло не растирать, а согревать при комнатной температуре. Обмороженные места смазать жиром (вазелином).

3. Актуальность задачи повышения уровня готовности обучающихся к зачетным занятиям, на основе управляемой адаптации к смене видов учебно-познавательной деятельности

Выполнение контрольных нормативов требует от студента мобилизации всех своих сил и здесь следует принимать во внимание и учитывать все что может повлиять на конечный результат, в том числе характер учебно-познавательной деятельности предшествующий зачетному занятию.

В течение учебного дня, занимаясь то одним видом учебно-познавательной деятельности, то другим, обучающиеся должны переключаться с выполнения одного вида задач на другой, и каждый раз проходит какое-то время, пока будет достигнуто оптимальное соответствие состояния личности и организма обучающегося к условиям проведения определенного вида учебно-познавательной деятельности – период адаптации.

Можно говорить о том, что к каждому учебному занятию кроме практической и теоретической подготовленности, определенного уровня умений и навыков по предмету, от студентов требуется некоторая психофизиологическая и физическая готовность. В этом случае под ней подразумевается готовность психических, физиологических и обеспечивающих двигательные действия систем человека к выполнению определенного рода учебно-познавательной деятельности.

Многообразие видов учебно-познавательной деятельности определяет многообразие психофизиологических и физических состояний обучающихся. Под психофизиологическим и физическим состоянием предлагается понимать целостные психофизиологические и физические реакции обучаемого на внешние и внутренние факторы, направленные на достижение полезного результата.

Параметром психофизиологического и физического состояния является величина, характеризующая какую-либо из реакций организма обучаемого на внешние или внутренние факторы.

Уровень психофизиологической и физической готовности к предстоящему занятию, зависит от индивидуальных особенностей личности обучаемого и определенных внешних факторов, воздействующих на него на предыдущем занятии. Эти факторы можно разделить на три вида:

- санитарно-гигиенические условия;
- временные условия;

- организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности.

К санитарно-гигиеническим условиям относятся температура и влажность воздуха, освещенность, содержание кислорода в воздухе, эргономичность учебных мест, запыленность, загазованность места проведения занятия. К временным условиям относятся: время дня, день недели, месяц семестра, время года, а также время, прошедшее после последнего приема пищи.

Вышеперечисленные факторы оказывают существенное влияние на психофизиологическую и физическую готовность. Второй фактор заставляет учитывать объективные закономерности колебания уровня работоспособности студентов в течение учебного дня, учебной недели, семестра. Как известно, в течение учебного дня объективно наблюдается два периода подъема работоспособности: один в первой половине дня, второй – в послеобеденное время. Каждому периоду характерны три фазы: врабатывание, повышенная работоспособность, снижение работоспособности. В течение недели те же фазы распределяются следующим образом: понедельник, вторник – врабатывание; среда, четверг – повышенная работоспособность; пятница, суббота – снижение работоспособности. Исследования показали, что и семестровый цикл разделяется на те же фазы.

Влияние фактора «организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности» в данном случае рассматривается, как влияние особенностей психофизиологической и физической деятельности обучаемых на предыдущем занятии на их психофизиологическую и физическую готовность к последующему виду учебно-познавательной деятельности, в нашем случае к зачету. Психофизиологическая деятельность характеризуется напряженностью и характером мыслительной деятельности, а также нервно-эмоциональной напряженностью учебной деятельности.

Физическая деятельность характеризуется интенсивностью, видом мышечных действий и работой обеспечивающих эту деятельность физиологических систем. Мышечные действия могут носить статический и динамический характер: поддержание рабочей позы «сидя», «стоя», выполнение чертежной, письменной работы, настройка и обслуживание аппаратуры, выполнение гимнастических упражнений и т.п. При этом используются, в той или иной степени, основные физические качества: сила, быстрота, выносливость, ловкость.

Влияние всех вышеперечисленных факторов преломляется через индивидуальные особенности личности, такие как типологические свойства нервной системы и темперамента, возрастные, морфологические, биохимические особенности организма, уровень физической подготовленности, состояние здоровья и другие, выливаясь, в итоге, в психофизиологическую и физическую готовность студента к предстоящему виду учебно-познавательной деятельности.

Следует отметить, что особенно явно эти проблемы проявляются при чередовании занятий по общенаучным, общеинженерным и специальным дисциплинам с практическими

занятиями по физической культуре. В этом случае происходит смена видов деятельности, в одном из которых доминирующую роль играет умственная работа с пониженной двигательной активностью и сохранением определенной рабочей позы, в другом – разнообразная активная двигательная деятельность с сопровождающей ее мыслительной работой.

Методика проведения занятий предусматривает проведение вводной (подготовительной) части для организации обучающихся, приведения их в состояние готовности к решению задач основной части, в нашем случае к сдаче контрольного норматива, и заключительной – для подведения итогов, приведения организма в относительно спокойное состояние (для занятий по физической культуре), но при проведении этих частей занятий, как правило, не учитывается характер предыдущей и последующей деятельности студентов. Неучтение этого факта отрицательно влияет на скорость адаптации к виду учебно-познавательной деятельности, что особенно наглядно проявляется при чередовании практических занятий по физической культуре с занятиями по общеинженерным и специальным дисциплинам.

Складывается противоречие между имеющим место в практике обучения несоответствием уровня психофизиологической и физической готовности обучающихся, объективно складывающейся в ходе проведения предшествующего занятия, видом учебно-познавательной деятельности последующего занятия и неучтением этого факта в общепринятых методиках проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий, в том числе, по дисциплине «физическая культура»

Это противоречие можно устранить, обеспечив управление процессом адаптации студентов к смене видов учебно-познавательной деятельности в ходе проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий.

Для каждой темы занятия по физической культуре в зависимости от педагогической ситуации, складывающейся из контекстной пары - вид предшествующего и вид последующего занятия, можно установить наиболее предпочтительные адаптирующие, предметно-ориентированные варианты проведения подготовительной и заключительной частей, оперативно поддерживающие достаточно высокий уровень психофизиологической и физической готовности при чередовании этих занятий с занятиями по другим дисциплинам.

Видится актуальной задача управления процессом адаптации обучаемых к смене видов учебно-познавательной деятельности с целью сокращения времени врабатывания и повышения эффективности как занятий, так и сдачи контрольных нормативов. Для решения этой задачи представляется наиболее целесообразным использовать проведение подготовительной (разминки) и заключительной частей занятий с адаптирующим, предметно-ориентированным содержанием.

В этом случае под управлением адаптацией следует понимать процесс педагогического воздействия с целью установления оптимального соответствия личности обучаемого и условий осуществления учебной деятельности в ходе осуществления им познавательной деятельности, которое позволяет индивидууму более эффективно удовлетворять актуальные познавательные потребности, и реализовывать связанные с ними значимые цели.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Б1.Б.1.06 ЭКОНОМИКА И МЕНЕДЖМЕНТ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Специальность
21.05.04 Горное дело

Специализация №3
Открытые горные работы
Квалификация выпускника: **специалист**

формы обучения: **очная, заочная**

Авторы: Дроздова И.В., доцент; Перегон И.В., ст. преподаватель

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов специалитета по направлению подготовки *21.05.04 Горное дело* по дисциплине «Экономика и менеджмент горного производства» специализации №3 *Открытые горные работы* в рамках подготовки и защиты курсовой работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки курсовой работы, требования к её оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

1. ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1.1. Цели и задачи курсовой работы

Целью данной работы является развитие навыков разработки экономического обоснования проектных решений для открытых горных работ.

Экономические расчёты в дипломном проекте должны обеспечить решение следующих вопросов разработки месторождения полезных ископаемых в конкретных горно-геологических условиях:

1. Выбор и сравнительную оценку экономической эффективности лучшего технического варианта по специальной части дипломного проекта.

2. Определение объёма инвестиций, потребных для строительства, модернизации или реконструкции проектируемого карьера (или его участка), включая потребные инвестиции в объекты непроизводственной сферы.

3. Расчёт текущих издержек (себестоимости) добычи полезного ископаемого на период достижения проектной мощности предприятия.

4. Определение прибыли и рентабельности проектируемого предприятия.

5. Анализ основных технико-экономических показателей проекта и оценку экономической эффективности инвестиций.

Для получения реальных результатов экономические расчёты должны производиться на основе действующих технически обоснованных норм расхода материально-энергетических ресурсов, норм выработок (времени), цен, тарифных ставок и должностных окладов, стоимости машин и оборудования.

Для выполнения курсовой работы по дисциплине «Экономика и менеджмент горного производства» необходимо по индивидуальным данным задания выполнить расчет инвестиционных и текущих (эксплуатационных) затрат, связанных с открытой разработкой месторождения полезных ископаемых,

а также произвести оценку экономической эффективности произведенных затрат. Курсовой проект также выполняется по предлагаемой ниже методике, но без учета сравнения вариантов проектных решений.

Подготовка курсовой работы по дисциплине «Экономика и менеджмент горного производства» студентами специальности *21.05.04 Горное дело* является важным этапом образовательного процесса, в ходе которого закладываются компетенции, позволяющие студенту оценивать реальный инвестиционный проект. Курсовая работа по дисциплине «Экономика и менеджмент горного производства» должна быть выполнена в форме самостоятельно проведенного исследования и демонстрировать способность студента грамотно пользоваться литературой, умение обобщать и анализировать собранную информацию, критически оценивать существующие идеи, теории и концепции, излагать свои мысли, грамотно структурировать материал.

Задачами выполнения курсовой работы по дисциплине «Экономика и менеджмент горного производства:

- расширение и закрепление теоретических знаний, полученных студентами в процессе лекционных и практических занятий по дисциплине;
- углубленное изучение отдельных разделов дисциплины;
- овладение навыками работы со специальной экономической литературой (монографии, брошюры, журналы, газеты и др.);
- формирование умения применить на практике методику оценки эффективности инвестиционного проекта.

1.2. Типовая тема и структура курсовой работой

Типовая тема курсовой работы: «Оценка эффективности инвестиционного проекта».

Структура курсовой работы:

ВВЕДЕНИЕ……..
1. КОНЪЮНКТУРА СЫРЬЯ И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ…….
1. ВВЕДЕНИЕ
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЁМА ИНВЕСТИЦИЙ ПО ВАРИАНТАМ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ…….
3. ОСНОВНОЙ И ОБОРОТНЫЙ КАПИТАЛ (ИМУЩЕСТВО) ПРЕДПРИЯТИЯ……..
3.1. Основной капитал горного предприятия……..
3.2. Оборотный капитал горного предприятия ……..
4. ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ ПРОЕКТА……..
5. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ И ОРГАНИЗАЦИОННАЯ СТРУКТУРЫ ПРЕДПРИЯТИЯ……..
5.1. Производственная структура и структура управления предприятием (карьером)……
6. РАСЧЁТ ТЕКУЩИХ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК……..
6.1. Определение эксплуатационных затрат по основным и вспомогательным производственным процессам по видам затрат (по вскрыше и полезному ископаемому)……
6.2. Определение себестоимости вскрыши и полезного ископаемого……
6.3. Расчет себестоимости по видам товарной продукции……
6.4. Расчет себестоимости по рассматриваемым вариантам проектных решений и годам расчетного периода……...
6.5. Расчет себестоимости товарной продукции…….
7. ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ……...
7.1. Отчёт о прибыли…….
7.2. Отчёт о движении денежных потоков……..
7.3. Оценка экономической эффективности инвестиций……..
8. АНАЛИЗ, ВЫБОР И ОБОСНОВАНИЕ ВАРИАНТОВ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ……
ЗАКЛЮЧЕНИЕ
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ПРИМЕРЫ РАЗДЕЛОВ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1. КОНЪЮНКТУРА СЫРЬЯ И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Целью выполнения этого раздела является описание рынка минерального сырья того или иного вида, анализ основных тенденций его изменения, а также дается общая характеристика действующего или проектируемого предприятия.

1.1. Потребность в готовой продукции и мощность проектируемого предприятия

1.1.1. Конъюнктура сырья.

1.1.2. Характеристика рассматриваемых вариантов производственной мощности (по сырой руде, горной массе, концентрату, попутным компонентам), размещения производственных объектов предприятия (отвалов, транспортных коммуникаций и т. д.), других проектных решений и их обоснование по экономическим, экологическим факторам и горно-геологическим условиям эксплуатации месторождения.

1.1.3. Вопросы, связанные с дальнейшей переработкой добываемого сырья, достижением проектной мощности.

1.1.4. Потребность и объёмы производства продукции, комплексная переработка сырья и пустых пород. Перспективы комплексного использования сырья и пустых пород.

1.2. Общая характеристика действующего или проектируемого предприятия

1.2.1. Технологическая схема и её характеристика.

1.2.2. Взаимосвязь проектируемого основного производства со вспомогательными и обслуживающими процессами и производствами.

Вопросы, рассматриваемые в разделах 1.1 и 1.2, включаются в экономическую часть дипломного проекта, если они не рассматривались до этого в технологической и специальной частях.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЁМА ИНВЕСТИЦИЙ ПО ВАРИАНТАМ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Целью данной части является определение объемов инвестиций, необходимых для реализации рассматриваемых проектных решений. Рассчитываются сметы в соответствии с рассматриваемыми вариантами.

Расчёт размера инвестиций имеет следующую структуру:

2.1. Подготовка территории строительства:

2.1.1. Оформление горного отвода, к которому относится приобретение:

- получение лицензии: права на пользование землёй, права на пользование недрами;
- лицензии на определенные виды деятельности.

2.1.2. Организационные расходы, включая регистрацию предприятия.

2.1.3. Затраты по компенсации потерь от изъятия сельскохозяйственных земель в размере, установленном законодательством для конкретной территории. из расчёта на 1 га.

2.1.4. Затраты на возмещение убытков землепользователей – вырубка лесных угодий, плодово-ягодных и защитных насаждений, незавершённого производства и т. д.

2.1.5. Затраты, связанные со сносом зданий и сооружений (компенсациями), числящихся в основных фондах муниципальных, частных и акционерных предприятий и организаций, – в размере стоимости работ по разборке и балансовой стоимости объекта с учётом износа.

2.1.6. Затраты на выполнение работ по инженерной подготовке территории строительства (очистка территории, снятие почвенно-растительного слоя, его транспортировка и складирование и т. д.).

2.2. Объекты основного производственного назначения включают в себя:

1) *карьер*: горно-капитальные работы (капитальные траншеи и т. д.), горное оборудование (буровые станки, экскаваторы и т. д.), дренажные работы, осушение (шахты, скважины и т. д.), производственные сооружения (автомобильные дороги в карьере, ж. д. пути в карьере);

2) *технологический транспорт*: ж. д. подвижной состав, ж. д. депо; автомобильный подвижной состав, гараж;

3) *дробильно-конвейерный комплекс:* дробилки, конвейерный транспорт, перегрузочные пункты и т. д.

Расчёты должны выполняться в следующем порядке:

2.2.1. Определение объёмов горно-капитальных работ (проходки дренажных траншей, вскрывающих и капитальных выработок и т. д.).

2.2.2. Определение количества оборудования, необходимого для проведения горно-капитальных работ.

2.2.3. Расчёт сметы на приобретение и монтаж технологического оборудования.

2.2.4. Определение стоимости производства работ (себестоимости) по процессам или принимается по предприятиям-аналогам.

2.2.5. Определение общих затрат.

Затраты на строительство предприятия (карьера) рассчитываются по объектам и видам работ на основе укрупненных технико-экономических показателей, принимаемых по данным практики на конкретном горном предприятии.

Потребный парк оборудования определяется в технологической части дипломного проекта. Затраты на приобретение и монтаж определяются в расчёте на принятый парк.

Затраты на проходку траншей, снятие почвенного слоя и т. д. рассчитываются на основе стоимости производства единицы работ (руб./ куб. м) или стоимости 1 машино/смены оборудования соответствующей марки и его сменной производительности или нормы выработки.

Результаты расчётов сводятся в следующие таблицы:

1) локальная смета по виду работ (табл. 1);

2) локальная смета на приобретение и монтаж оборудования (табл. 2);

3) объектная смета (табл. 3);

4) сводная смета (табл. 4).

Таблица 1

Локальная смета по … (вид работ)

Наименование работ и их краткая характеристика (механизация)	Единица измерения	Объём работ	Стоимость единицы, руб.	Общая стоимость производства работ, тыс. руб.
1	2	3	4	5
Всего по виду работ:				

Пояснения к таблице 1

1. Локальная смета составляется по каждому виду работ.

2. Единицы измерения принимаются по каждому виду работ в зависимости от принятой системы учёта затрат и нормирования работ (куб. м, маш.-см. и др.).

3. Объём работ определяется расчётным путём на основе исходных данных, полученных в технологической части проекта.

4. Стоимость единицы работ принимается по существующим расценкам, действующим на предприятиях-аналогах, по данным практики.

5. Общая стоимость производства работ определяется как произведение гр. 3 · гр. 4.

Таблица 2

Локальная смета на приобретение и монтаж технологического оборудования

Тип (марка) оборудования	Кол-во оборудования, ед.	Отпускная цена единицы оборудования, тыс. руб.	Общая стоимость оборудования, тыс. руб.	Монтаж, тыс. руб.	Всего, тыс. руб.
1	2	3	4	5	6
Итого по подразделениям:					
Транспортно-заготовительные расходы:					
Итого:					

Пояснения к таблице 2

В форму, приведенную в табл. 2, можно включить все приобретаемое оборудование, выделив при этом процессы, на которых оно применяется.

1. Типы (марки) оборудования и их количество принимаются по данным технологической части проекта (действующего предприятия).

2. Отпускные цены на оборудование принимаются по данным практики, по справочным ценам, или прайс-листам. Все данные должны соответствовать моменту выполнения проекта и корректируются коэффициентами, учитывающими уровень инфляции.

3. Общая стоимость определяется как произведение (гр. 2 · гр. 3).

4. Затраты на монтаж оборудования принимаются в размере 10 % от гр. 4.

5. Транспортно-заготовительные расходы принимаются в размере 7 - 10 % от итого по подразделениям.

Таблица 3

Сводная смета на строительство предприятия

Наименование разделов	Общая сметная стоимость, тыс. руб	В % к итогу
1	2	3
Раздел 1: Подготовка территории строительства		
Раздел 2: Объекты производственного назначения *Карьер*: (горно-капитальные работы, горное оборудование, осушение, автомобильные пути в карьере, ж д пути в карьере и т. д.) *Технологический транспорт*: - железнодорожный (подвижной состав, депо) - автомобильный (подвижной состав, гараж) - дробильно-конвейерный комплекс (крупное дробление, конвейерный транспорт, перегрузочные пункты и т. д.) Итого по разделу 2:		
Раздел 3: Объекты подсобного и обслуживающего назначения (базы, АБК, мастерские, др)		
Раздел 4 Объекты энергетического хозяйства (ЛЭП, подстанции и т. д.)		
Раздел 5 Объекты транспортного хозяйства (автодороги и т. д.)		
Раздел 6: Канализация		
Раздел 7: Озеленение и благоустройство территории Итого по разделам 1 – 7		
Раздел 8: Временные здания и сооружения Итого по разделам 1 – 8:		
Раздел 9: Внеобъемные затраты (зимнее удорожание работ, проектно-изыскательские работы, содержание дирекции, подготовка и набор кадров) Итого по разделу 9: **Резерв на непредвиденные работы и затраты** Итого 1 – 9 с учётом резерва: **Возвратные суммы**: (стоимость временных зданий, стоимость ПИ, добытого при производстве ГКР, стоимость демонтируемого и реализуемого оборудования) Итого возвратных сумм:		
Всего инвестиций на строительство:		

Пояснения к таблице 3

1. Показатели по разделам 1 – 2 сводятся в таблицу по данным локальных смет.

2. Разделы 3 – 7 рассчитываются в случае, если есть соответствующие требования в задании на проектирование. Сметная стоимость по этим разделам принимается по данным практики или по предприятиям-аналогам, исходя из стоимости единицы работ и объёмов работ.

3. Стоимость временных зданий и сооружений принимается в размере 2 % от итого по разделам 1 - 7.

4. Внеобъёмные затраты принимаются в размере 20 % от итого по разделам 1 – 8.

5. Резерв на непредвиденные работы и затраты принимается в размере 5 - 10 % от итого по разделам 1 – 9.

6. Стоимость полезного ископаемого, попутно добытого при производстве горно-капитальных работ, определяется по ценам на товарную продукцию, действующим на момент выполнения проекта.

Таблица 4

Распределение инвестиций по годам строительства предприятия

Направление вложения инвестиций	Год строительства				Всего
	…	…	…	…	
Подготовка территории строительства Объекты производственного назначения Технологический транспорт *Итого:* Возвратные суммы, в т. ч. стоимость полезного ископаемого при производстве горно-капитальных работ					
Всего:					

Далее производится анализ инвестиций по рассматриваемым вариантам проектных решений. Он производится на основе удельных значений инвестиций, т. е. инвестиций, приходящихся на 1 т полезного ископаемого, 1 т (куб. м) горной массы или на 1 руб. товарной продукции. Данные сводятся в табл. 5.

Таблица 5

Удельные инвестиции по вариантам проектных решений

Наименование показателей	Единицы измерения	Варианты	
		I	II
Удельные инвестиции: - на тонну полезного ископаемого (руды) - на тонну (куб. м) горной массы - на 1 рубль товарной продукции	 руб./ т руб./ т, руб./ куб. м руб./ руб.		

3. ОСНОВНОЙ И ОБОРОТНЫЙ КАПИТАЛ (ИМУЩЕСТВО) ПРЕДПРИЯТИЯ

Под имуществом предприятия понимаются все активы, находящиеся в его собственности (на балансе): основные производственные (непроизводственные) фонды, нематериальные активы, краткосрочные вложения и оборотные средства.

3.1. Основной капитал горного предприятия

Для определения стоимости основных фондов и долгосрочных вложений из общей стоимости капитального строительства предприятия исключаются возвратные суммы (стоимость временных зданий и сооружений, попутная добыча и т. д.). Затраты на подготовку эксплуатационных кадров, на непромышленные объекты, стоимость объектов смежных фирм и организаций, построенных за счёт инвестиций, приведённых в сводной смете, стоимость ГПР и горных выработок, которые проходятся за счёт инвестиций только для освоения пусковой мощности при новом строительстве, а в последующий период будут полностью самортизированы.

Стоимость основных производственных фондов предприятия приводится в табл. 6 - 7 с учётом погашения их стоимости, по группам (здания, сооружения, рабочие машины и оборудование).

Таблица 6

Промышленные здания и сооружения (инвестиционные затраты)

Наименование объектов (зданий и сооружений)	Краткая характеристика объектов	Един. измерения	Кол-во единиц	Сметная стоимость единицы, тыс. руб.	Общая стоимость, тыс. руб.	Норма амортизационных отчислений, %	Сумма амортизационных отчислений, тыс. руб.
1	2	3	4	5	6	7	8
А. Здания и сооружения, погашаемые за период существования предприятия							
1. Подготовка территории строительства (объекты строительства, относящиеся к этому этапу работ)							
2. Горно-капитальные работы: (сооружения горно-капитальная траншея, нагорная траншея и т. д.)							

Окончание табл. 6

1	2	3	4	5	6	7	8
3. Здания и сооружения общекарьерного назначения: (здание диспетчерского пункта, склады ВМ, насосная станция, тяговая подстанция, дренажная шахта и скважина, транспортные коммуникации (ж. д. пути и автодороги) в карьере, на промплощадке и на отвалы и т. д.							
Итого по А							
Б. Здания и сооружения, погашаемые по нормам амортизации							
1 Здание АБК 2 Здание электроподстанции 3 И т. д							
Итого по Б:							
Всего по (А+Б)							

Таблица 7

Инвестиционные затраты на приобретение и монтаж оборудования

Наименование процесса и перечень оборудования	Кол-во единиц оборудования, шт	Общая сметная стоимость, тыс. руб	Норма амортизации, %	Сумма амортизационных отчислений, тыс. руб.
I. *Осушение и дренаж.*				
1. Насосы				
2. .				
II. *Подготовка горной массы к выемке*				
1. Буровые станки				
2 Зарядные машины				
3				
III. Выемочно-погрузочные работы				
1. Экскаваторы				
2. Бульдозеры				
3. .				
IV. Транспортирование				
1. Автосамосвалы				
2. Электровозы и т. д.				
3. .				
V. Отвальные работы				
1. Экскаваторы				
2. Бульдозеры				
VI. Электроснабжение карьера				
1. Трансформаторы и т. д.				
2. …				
Итого с I – VI.				
Прочие процессы и оборудование				
Всего по I – VII:				

Пояснение к таблице 7

1. Данные для табл. 7 принимаются согласно расчётам, приведённым в локальных сметах на приобретение и монтаж оборудования (см. табл. 2, 4).

2. Данные по технологическому транспорту приводятся в таблице, если транспортный цех (участок) входит в структуру карьера, а не является самостоятельным подразделением предприятия или сторонней организацией, услуги которых будут относиться на себестоимость производства.

3. Общая сметная стоимость на оборудование прочих процессов принимается в размере 10 % от итого по I - VI.

Данные для представления в табл. 7 принимаются согласно сводной смете на строительство предприятия (см. табл. 4) и группируются с учётом погашения их стоимости.

Общая стоимость основных производственных фондов (основного капитала) должна соответствовать размеру инвестиций на строительство горного предприятия за вычетом возвратных сумм.

3.2. Оборотный капитал горного предприятия

Общий размер оборотного капитала определяется по формуле

$$О = О_1 + О_2,$$

где О – оборотные средства предприятия; $О_1$ – расходы будущих периодов; $О_2$ – прочие оборотные средства.

С целью упрощения расчётов в проектах можно принимать величину расходов будущих периодов, равную стоимости непогашенной вскрыши. Расчёт объёмов погашаемой вскрыши должен быть увязан с расчётом поэтапного коэффициента погашения затрат на ГПР, относимых на себестоимость полезного ископаемого.

Коэффициент погашения вскрыши (затрат на ГПР) определяется по формуле

$$К_{пог.} = V_{гпр} / (Q_{п.и.} \cdot T_{р.п.}),$$

где $К_{пог.}$ – коэффициент погашения вскрыши (ГПР); $V_{гпр}$ – общий объём вскрыши за расчётный период; $Q_{п.и.}$ – годовая производительность карьера по руде в течение расчётного периода, тыс. т; $T_{р.п.}$ – расчётный период, лет.

Стоимость погашения ГПР может быть определена по формуле

$$С_{гпр.} = С_{вскр.} \cdot К_{пог.} \cdot Q_{п.и.},$$

где $С_{гпр.}$ - стоимость погашения ГПР, относимая на себестоимость полезного ископаемого, тыс. руб.; $С_{вскр.}$ - себестоимость вскрышных работ, руб./т.

Для карьеров строительных материалов, карьеров малой мощности (до 100 - 500 куб. м), а также при небольших объёмах вскрышных работ может быть принято решение об отнесении всех затрат, связанных с производством вскрышных работ, на текущую себестоимость полезного ископаемого.

Размер прочих оборотных средств принимается равным 25 % от годовых эксплуатационных расходов предприятия при применении БВР и 20 % в случае их отсутствия.

4. ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ ПРОЕКТА

Источники финансирования принято подразделять на собственные и заёмные (привлечённые). К *собственным* источникам относится уставный фонд предприятия (собственные средства, вклады учредителей), к *заёмным* – банковский кредит, ссуды других предприятий и коммерческих структур, финансирование за счёт средств бюджета (местного, федерального) и др. В случае использования заёмных средств необходимо указать условия предоставления кредитов (ссуд) – срок и процентную ставку.

Распределение инвестиций по источникам финансирования для данного проекта представляется в табл. 8.

Таблица 8

Источники финансирования проекта

Источники финансирования	Сумма, тыс. руб.	Структура, %
1. **Собственные средства** (акционерный капитал, вклады учредителей и т. д.) 2. **Заёмные средства** (банковский кредит, ссуды других предприятий или коммерческих организаций)		
Итого:		

5. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ И ОРГАНИЗАЦИОННАЯ СТРУКТУРЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

Целью выполнения этого раздела является разработка производственной, организационной структуры предприятия.

5.1. Производственная структура и структура управления предприятием (карьером)

При определении структуры управления предприятия необходимо пользоваться предприятиями-аналогами соответствующей отрасли. Могут быть приняты в качестве аналогов структуры управления зарубежных горнодобывающих предприятий. В данном разделе определяется годовой (календарный), месячный, суточный, сменный режим работы предприятия, его отдельных структурных подразделений.

Вспомогательные и обслуживающие подразделения (например, ремонтно-механический цех, энергоцех и т. д.) могут в производственную структуру цеха не включаться, являясь самостоятельными производственными подразделениями или предприятиями. Производственная и организационная структуры горного предприятия представляются в виде соответствующих схем.

6. РАСЧЁТ ТЕКУЩИХ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК

Целью выполнения этого раздела является детальный расчет эксплуатационных издержек предприятия по элементам и видам затрат, определяющих себестоимость производства и товарной продукции.

Расчет себестоимости полезного ископаемого (продукции горного предприятия) производится по производственным процессам в следующем порядке:

1. Определение эксплуатационных затрат по основным и вспомогательным производственным процессам по видам затрат (по вскрыше и полезному ископаемому).

2. Расчёт себестоимости полезного ископаемого и вскрыши.

3. Расчёт себестоимости по видам товарной продукции (в случае комплексного использования сырья).

4. Расчёт эксплуатационных затрат по вариантам проектных решений (в экономической части дипломного проекта).

5. Расчёт себестоимости товарной продукции.

6.1. Определение эксплуатационных затрат по основным и вспомогательным производственным процессам по видам затрат (по вскрыше и полезному ископаемому)

6.1.1. Расчёт штата и фонда заработной платы рабочих

Штат рабочих и расходы предприятия на оплату труда рабочих рассчитываются на год работы карьера (с проектной производственной мощностью) по основным и вспомогательным подразделениям. Расчеты выполняются по профессиям рабочих основных и вспомогательных специальностей, с учётом их квалификации, по действующим на момент проведения расчётов тарифным ставкам.

Расчет численности рабочих начинается с разработки проектного баланса рабочего времени на одного рабочего, приведенного в табл. 9.

Таблица 9

Баланс рабочего времени

Статьи баланса	Непрерывное производство	Периодическое производство
1. Календарное число дней в году		
2. Выходные дни		
3. Праздничные дни		
4. Номинальный фонд рабочего времени (гр. 1 - гр. 2 - гр. 3)		
5. Невыходов, всего в том числе по причинам: - отпуск - дни нетрудоспособности - выполнение обществ. и государ. обязанностей - прочие неявки с разрешения администрации		
6. Полезный фонд рабочего времени: - дни (гр. 4 - гр. 5) - часы		
7. Коэффициент списочного состава		

Размер заработной платы может определяться исходя из уровня оплаты труда на предприятии-аналоге на момент сбора исходных данных (на отчетный год).

Результаты расчетов штата и фонда заработной платы рабочих основных и вспомогательных профессий по каждому производственному процессу представляются в табл. 10.

Расчет штата служащих, специалистов и руководителей производится на основе принятой организационной структуры и штатного расписания (для действующих предприятий). Должностные оклады ИТР и специалистов принимаются по данным практики.

Расчеты могут выполняться двумя способами: раздельно по производственным процессам (подразделениям предприятия) либо параллельно по видам затрат.

Результаты расчета штата и фонда заработной платы руководителей, специалистов и ИТР представляются в виде таблицы (табл. 11).

Таблица 10

Расчет штата и фонда заработной платы основного персонала

Профессия рабочих	Годовой объем работ	Расчет штата рабочих						Расчет фонда зарплаты						
		количество рабочего оборудования	норма обслуживания	количество рабочих смен в сутки	явочный штат	коэффициент списочного состав	списочный штат	тарифная ставка	сдельная расценка	тарифный заработок	сдельный заработок	доплаты		фонд основной зарплаты
												премии	прочие доплаты	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Итого основной заработной платы Дополнительная заработная плата (15 – 18 % от основной) Итого основной и дополнительной заработной платы Всего с учетом районного коэффициента														

Пояснения к таблице 10

1. Явочный штат определяется для рабочих основных профессий по нормам обслуживания, а вспомогательных рабочих – расстановкой по рабочим местам и определяет численность рабочих, которые должны ежедневно выходить на работу

2. Списочный штат определяется путем умножения явочного штата на коэффициент списочного состава.

3. Тарифный заработок повременщиков определяется путем умножения явочного штата на планируемое число дней работы и на тарифную ставку.

4. Сдельный заработок определяется умножением сдельной расценки на годовой объем работ.

5. Размер планируемых премиальных доплат принимается в соответствии с применяемыми на предприятии положениями о премировании или в размере 10 – 15 % от сдельного или тарифного заработка

6. Прочие доплаты принимаются в размере 10 % от суммы сдельного или тарифного заработка с учетом премиальных доплат

Таблица 11

Расчет штата и заработной платы НТР

Занимаемая должность	Количество персонала	Оклад в месяц, тыс. руб.	Фонд основной заработной платы, тыс. руб.						Фонд дополнительной заработной платы	Всего годовой фонд заработной платы
			сумма окладов работников за месяц, тыс. руб.	доплаты				фонд зарплаты с учетом район. коэффициента		
				за работу в вечерние и ночные смены	за работу в праздничные дни	премии	за вредность	итого		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Всего:										

Пояснение к таблице 11

1 Сумма годовой заработной платы по окладам определяется из расчета 11 рабочих месяцев для руководителей и специалистов, для служащих – 11.3 месяца.

2 Доплаты за работу в вечерние и ночные смены, в праздничные дни рассчитываются для цехового персонала.

3. За вредность доплата определяется в размере 10 - 20 % к окладу.

4 Фонд дополнительной заработной платы определятся как 10 % от фонда основной заработной платы с учетом районного хоэффициента

5 Премии берутся по данным предприятия

6.1.2. Расчёт стоимости вспомогательных материалов

К ним относятся материалы:

1) участвующие в производственном процессе в течение одного технологического цикла (взрывчатые вещества, средства взрывания, ГСМ и т. д.);

2) специальные приспособления, инструменты, малоценные и быстроизнашивающиеся предметы (долота, зубья ковша, инструменты, спецодежда и т. д.);

3) материалы, погашаемые в сметно-нормативном порядке (кабели, канаты, лента конвейерная, буровые штанги, рукояти и т. д.).

Расчет стоимости годового расхода материалов производится по каждому подразделению карьера (технологическому процессу) прямым счетом на основе

норм расходов, взятых по проектируемому предприятию (аналогу) или укрупненно на основе общей потребности в тех или видах материалов.

Цены на материалы принимаются по данным практики или по действующим прейскурантам.

Расчёт расхода и стоимости материалов ведётся по форме табл. 12.

Таблица 12

Расчёт расхода и стоимости материалов

Наименование процессов, подразделений карьера, материалов	Расход на принятую единицу объёма	Годовой объём работ, ед. изм.	Общий расход на весь объём, ед.	Цена за единицу, руб.	Общая стоимость, руб.
1	2	3	4	5	6
1. *Взрывные работы* (взрывной цех): 1.1. Взрывчатые вещества 1.2. Средства взрывания (10 % от ВВ) и т. д. Итого:					
2. *Буровые работы* (участок бурения): 2.1 Долота 2.2 Штанги 2.3. Канат стальной 2.4. ГСМ и т. д. Итого:					
3. *Экскавация горной массы* (участок экскавации): 3.1. Ковш 3.2 Рукоять 3.3 Зубья 3.4. Канат стальной 3.5. ГСМ и т. д. Итого:					
4. *Подготовка горной массы к транспортированию:* 4.1. *Передвижная дробильная установка в карьере:* 4 1 1 Сталь листовая 4 1 2. Сталь футеровочная 4 1 3. Сетка для грохотов 4.2. *Склады и перегрузочные пункты:* 4 2 1 Сталь листовая 4 2 2. Сталь футеровочная 4 2 3. Питатели и т. д. Итого					

Окончание таблицы 12

1	2	3	4	5	6
5. *Транспортирование полезного ископаемого и вскрыши* 5.1. *Конвейерный транспорт*: 5.1.1. Лента конвейерная и т.д. 5.2. *Автомобильный транспорт.* 5 2 1. Топливо 5 2 2. ГСМ 5 2 3 Авторезина 5.3 *Железнодорожный транспорт* 5 3 1. Топливо 5 3 2. Смазочные материалы Итого:					
6. *Отвальный участок (цех):* При экскаваторном отвалообразовании: 6.1. Ковш 6.2. Рукоять 6.3. Зубья 6.4. Канат стальной 6.5 Смазочные материалы и т д Итого:					
Всего по процессам:					
Неучтённые материалы					
Услуги снабженческих и обытовых организаций					
Всего:					
Транспортные расходы					
Итого франко-приобъектная площадка					
Заготовительно-складские расходы					
Общая стоимость материалов, тыс. руб.					

Пояснения к таблице 12

1 В качестве расчётной единицы, на которую определяются нормативы, принимаются 1 т, 1 п. м., 1000 т и т. д. Расход материалов на принятую единицу принимается по нормативам, используемым на горных предприятиях, по данным практики. Цены за единицу принимаются по данным практики.

2 Общий расход на заданный объём определяется как произведение гр. 2 на гр. 3.

3 Общая стоимость (гр. 5) определяется как произведение гр. 4 на гр. 5.

4 Неучтённые материалы принимаются в размере 3,5 % от предыдущей суммы учтённых материалов.

5 Оплата услуг снабженческих и сбытовых организаций 3 % от стоимости учтенных материалов.

6 Транспортные расходы определяются в % от «Всего», включающего неучтённые

материалы, снабженческо-сбытовые расходы при транспортировке на расстояния

- свыше 5 тыс км – 15 %;
- от 3 до 5 тыс км – 12 %;
- от 2 до 3 тыс. км – 10 %,
- от 1 до 2 тыс км – 8 %,
- менее 1 тыс. км – 5 %.

7. Заготовительно-складские расходы начисляются на сметную стоимость материалов, полуфабрикатов и изделий франко-приобъектная площадка в следующих размерах:

1) от стоимости вспомогательных, строительных, санитарно-технических и электромеханических материалов – 2,1 %;

2) от стоимости стальных конструкций – 0,9 %.

6.1.3. Расчёт затрат на транспорт

В случае, если транспортный цех (участок) не входит в структуру карьера, эксплуатационные расходы на материалы не рассчитываются отдельно, а учитываются в составе стоимости услуг сторонних организаций по данным предприятий-аналогов.

К транспортным расходам относится стоимость перевозки полезных ископаемых и вскрыши (технологический транспорт), а также работы хозяйственного транспорта. Технологический транспорт обеспечивает перевозку полезного ископаемого и вскрыши внутри предприятия. Транспортировка руды и вскрыши может производиться транспортными средствами, принадлежащими карьеру, другим подразделениям горного предприятия и другим предприятиям.

Расчет затрат на технологический транспорт производится по видам грузопотоков, в том числе: вскрыши, полезного ископаемого, а также с использованием усреднительных складов и перегрузочных пунктов (табл. 13).

Таблица 13

Расчет затрат на технологический и общекарьерный транспорт

Наименование, характеристика грузопотоков и транспорта по процессам	Ед. изм.	Годовые объёмы	Дальность транспортировки, км	Стоимость транспортировки, руб. за т · км	Сумма, тыс. руб.
1	2	3	4	5	6
Вскрыша: 1. Автотранспорт: карьер – автоотвал 2. Ж/д транспорт: карьер – ж/д отвал Итого на вскрыше:					

Окончание табл. 13

1	2	3	4	5	6
Полезное ископаемое (руда). 1. Автотранспорт - гор. №… - перегрузочный пункт - гор № - перегрузочный пункт 2. Ж/д транспорт - гор № - ДОФ - гор № - усреднительный склад Итого по руде:					
Экскавация - Т-330 (зачистка подошвы уступа, забоя) - К-700 - Т-100 - БелАЗ-540 (орошение забоев)					
Бурение: - Т-330 - К-700					
Отвалообразование: - Т-330					
Общекарьерные нужды: - дежурная машина (ЗИЛ-130) - а/м Volvo и т д					
Всего расходы на транспорт:					

Пояснения к таблице 13

1. Расчеты могут производиться (при необходимости) по горизонтам, бортам карьера или отдельным участкам залежи (например, в случае расконсервации борта или реконструкции карьера)

2 Стоимость транспортировки 1 т · км принимается по предприятию-аналогу Сумма находится как произведение гр.3 · гр.4 · гр.5.

6.1.4. Расчёт затрат на электроэнергию

При выполнении расчетов по действующему предприятию (реконструкция или поддержание мощности, модернизация технологического процесса или выбор основного технологического оборудования) определение стоимости электроэнергии может производиться за ее расход (т. е. без учета платы за максимум натрузки).

При выполнении проекта нового карьера расчет стоимости расхода элек-

троэнергии производится по двухставочному тарифу: за заявленную мощность в часы максимума нагрузки и за потребление активной электроэнергии.

Расчет затрат на электроэнергию производится по каждому технологическому процессу (по каждому подразделению или группе энергопотребителей) карьера.

Расчеты выполняются на основе данных раздела "Электроснабжение карьера".

1. *Плата за заявленную мощность в часы максимума нагрузки* находится в целом по карьеру по формуле

$$P_{\text{мах}} = c \cdot \text{К}_{\text{см}} \cdot P_{\text{т}},$$

где $\text{К}_{\text{см}}$ - коэффициент совмещения максимума активной нагрузки всех потребителей (0,8 - 1,0) по группе или подразделению; при количестве потребителей от 1 до 10 $\text{К}_{\text{см}}$ = 1,0 - 0,85, при количестве 11 - 20 - $\text{К}_{\text{см}}$ = 0,84 - 0,75; $P_{\text{т}}$ - суммарный максимум активной нагрузки в целом по карьеру (кВт), находится в разделе "Электроснабжение карьера". Он может приниматься для экскаваторов равным номинальной мощности сетевого двигателя, для буровых станков - мощности двигателя вращателя и компрессора; c - тариф платы за электроэнергию – руб./ кВт · ч максимальной нагрузки.

2. *Плата за заявленную мощность* относится на общецеховые расходы (на карьер в целом).

Определение платы за расход электроэнергии производится по группам электропотребителей (по подразделениям или технологическим процессам) карьера *двумя способами определения расхода электроэнергии:*

I способ - на основе данных предприятия-аналога по формуле:

$$P = a \cdot V,$$

где a - удельный расход электроэнергии на одну тонну по основным технологическим процессам (экскавации горной массы, на бурение 1 п. м. скважины, 1 куб. м отвалообразования на предприятии-аналоге; V - годовой объем работ соответственно по экскавации, бурению и отвалообразованию).

Аналогично может находиться расход электроэнергии по другим технологическим процессам (транспортировке горной массы, осушении карьерного поля и т. д.).

Расход электроэнергии на освещение карьера и прочих потребителей (ремонтных мастерских, АБК и т. д.) может приниматься на уровне 3 - 5 % от об-

щего расхода. Результаты расчетов заносятся в табл. 14.

Таблица 14

Расчет платы за электроэнергию по группам электропотребителей карьера

Группы электропотребителей, наименование технологических процессов	Объем работ по технологическим процессам	Удельный расход электроэнергии (по данным предприятия – аналога), кВт/ед. работ	Годовой расход электроэнергии, кВт · ч	Плата за электроэнергию, тыс. руб.
1. Бурение (участок буровых работ)				
2. Экскавация (участок экскавации)				
3. Транспортирование полезного ископаемого[1]				
4. Циклично-поточная система* (в т ч самоходная дробильная установка, конвейерный подъемник)				
5. Транспортирование вскрыши*				
6. Отвалообразование				
7. Освещение и прочие потребители электроэнергии				
Итого по карьеру*				
Плата за заявленную мощность				
Всего:				

II способ

$$P = P_{\text{ном}} \cdot K_{\text{и}} \cdot K_{\text{о}} \cdot T / \text{КПД},$$

где $K_{\text{и}}$ - коэффициент использования мощности двигателя, принимается на уровне 0,4 - 1,0 (для экскаваторов может быть принят равным 0,4 - 0,5, для бурстанков - 0,9 - 1,0); $P_{\text{ном}}$ - суммарная номинальная мощность по группе электропотребителей; $K_{\text{о}}$ - коэффициент одновременности работы потребителей электроэнергии (0,5 – 0,8); T - число часов работы потребителей в год; КПД = 0,8.

После расчёта расхода электроэнергии (I или II способом) определяется плата за электроэнергию как произведение расхода электроэнергии по группам электропотребителей на установленный тариф платы за один кВт · час. Стоимость 1 кВт · ч принимается по данным предприятия-аналога или установленная по данному району:

$$C_{\text{э}} = P \cdot b,$$

[1] Присутствует только в случае, если эти подразделения входят в состав карьера.

где b – тариф платы за 1 кВт · ч.

Результаты расчётов приводятся по табл. 15.

Таблица 15

Расчёт платы за электроэнергию по группам электропотребителей карьера

Группы электропотребителей и их наименование	Номинальная мощность 1-го потребителя, кВт	Число потребителей	Суммарная номинальная мощность, кВт · ч	Годовой расход электроэнергии, кВт · ч	Плата за электроэнергию, тыс руб
1	2	3	4	5	6
Буровые работы (участок бурения): 1. СБШ-250МН-32 2. Итого:					
Экскавация (участок экскавации) 1. ЭКГ-8И 2. . Итого:					
Транспортирование полезного ископаемого*: 1. Самоходная дробильная установка СДА-1000 2. Конвейерный подъёмник 3. . Итого:					
Транспортирование вскрыши 1. Ж. д. цех 2. . Итого:					
Отвалообразование (участок отвальных работ) 1. Экскаватор ЭКГ-8И 2. . Итого:					
Освещение карьера 1. Осветительные установки 2. . Итого:					
Всего по карьеру:					
Плата за заявленную мощность					
Итого по карьеру					

* Присутствует только в случае, если эти подразделения входят в состав карьера.

6.1.5. Амортизационные отчисления

Рассчитываются в разделе "Основные и оборотные средства".

6.1.6. Прочие затраты включают в себя:

Страховые взносы на обязательное пенсионное страхование, состоящие из отчислений от ФОТ: в ПФ - 26 %, в фонд ОМС - 5,1 %, в фонд ФСС – 2,9 %. Общий размер отчислений – 34,0 %; отчислений по страхованию от несчастных случаев и травматизма (размер отчислений устанавливается в зависимости от класса риска и отраслевой принадлежности предприятия).

Отчислений в ремонтный фонд (затраты на все виды ремонтов). К ним относятся расходы на работы, связанные:

1) с ремонтом технологического оборудования;
2) ремонтом зданий и сооружений карьера;
3) ремонтом транспортных коммуникаций: автомобильных и железных дорог.

Расчет производится на основе норм, принятых на предприятиях (по данным практики).

В случае отсутствия норм расхода материалов на ремонтные работы *годовые затраты на ремонт основных фондов* могут приниматься из расчета 50 % от годовой суммы амортизационных отчислений.

Охрана труда. Отчисления составляют 5 % от ФОТ.

Износ по нематериальным активам

К нематериальным активам относятся затраты горного предприятия в нематериальные объекты, используемые в течение долгосрочного периода в хозяйственной деятельности и приносящие доход (см. п. п. 1.1.1 - 1.1.5 Строительство горного предприятия).

Износ нематериальных активов относится на общекарьерные расходы ежемесячно по нормам, рассчитанным предприятием исходя из первоначальной стоимости ($С_{н.а.}$) и срока их полезного использования (но не более срока деятельности предприятия и 20 лет), $Т_{п.и.}$

$$И_{н.а.} = С_{н.а}/Т_{п.и} ,$$

где $И_{н.а}$ - годовая сумма износа нематериальных активов.

Локальная смета затрат по процессам (на годовой объем) составляется на основе рассчитанных эксплуатационных затрат по основным и вспомогатель-

ным процессам (подразделения карьера): бурению. Взрыванию, экскавации, транспортировке полезного ископаемого и вскрыши, осушению, дроблению в карьере и т. д. (табл. 16).

Таблица 16

Смета затрат по процессу… (наименование процесса, годовой объем)

Наименование видов затрат (статей калькуляции)	Годовая сумма затрат, тыс. руб. (по горной массе)	Затраты на единицу работ, руб.	Затраты на полезное ископаемое, тыс. руб.	Затраты на вскрышу, тыс. руб.
1. Затраты на оплату труда				
2. Материалы				
3. Энергетические затраты				
4. Амортизация				
5. Прочие затраты				
Итого:				

В случае, если одно подразделение выполняет работы и по руде и вскрыше (например при отсутствии раздельного учета затрат по руде и вскрыше на экскавации и бурении), его годовые затраты подразделяются пропорционально их объемам.

Распределение затрат на полезное ископаемое и вскрышу производится пропорционально их удельному весу в соответствующем объеме работ и для основных процессов (экскавации, бурения и взрывания) определяется по формуле

$$З_{пи} = З_о \cdot V_{пи}/V_о,$$

где $З_{пи}$ – сумма затрат, относимая на себестоимость полезного ископаемого; $З_о$ - общая сумма затрат; $V_{пи}$ - объем добычи, взрывания или обуривания полезного ископаемого; $V_о$ - общий объем по горной массе (как сумма полезного ископаемого и вскрыши).

Аналогично, или как остаток после вычета затрат на полезное ископаемого, находится сумма затрат, относимая на вскрышу. При этом затраты на транспортировку и складирование пустых пород в отвалах полностью относятся на вскрышу. Затраты, связанные с дроблением руды в карьере, ее транспортировкой, содержанием внутрикарьерных путей и их переукладкой, а также с содержанием ремонтного участка, и общецеховые расходы, относятся на себестои-

мость полезного ископаемого.

Таблица 17

Себестоимость полезного ископаемого и вскрыши по производственным процессам

Объем по полезному ископаемому . . тыс. т.
Объем по вскрыше .. тыс. куб. м

Производственные процессы	Ед. изм.	Годовые объёмы работ, тыс. ед.	Годовая сумма затрат, тыс. руб.	Затраты на добычу ПИ, тыс. руб.	Затраты на вскрышу, тыс. руб.
1	2	3	4	5	6
1. Бурение					
2. Взрывание					
3 Экскавация					
4 Транспортирование					
5. Отвалообразование					
6 Вспомогательные процессы					
7 Общецеховые расходы					
Итого.					
8. Себестоимость 1 куб. м вскрыши					
9 Себестоимость 1 т ПИ					

Пояснения к таблице 17

1. Затраты из табл. 16 по каждому процессу сводятся в п. 1 - п. 7;

2 Общецеховые расходы включают в себя элемент «Прочие затраты» по всем процессам, включая заработную плату управленческого (участкового, цехового) персонала (см. табл 11)

Таблица 18

Себестоимость полезного ископаемого, годовой объем по полезному ископаемому, тыс. т

Наименование статей затрат	Годовая сумма затрат, тыс. руб.	Затраты на единицу, руб./т	Структура затрат, %
1	2	3	4
1 Заработная плата (основная и дополнительная) 1.1. СВ на ОПС			
2. Материальные затраты (вспомогательные материалы)			
3 Энергия на технологические нужды			
4 Амортизационные отчисления			
5. Транспортировка ПИ			
6 Погашение ГПР			
7. Общекарьерные (общецеховые) расходы			
8 Карьерная (цеховая) себестоимость			

(1−2+3+4+5+6+7)			
9 Прочие производственные затраты 9.1. Налог на добычу 9.2. Отчисления на рекультивацию 9.3 Плата за воду			

Окончание табл. 18

1	2	3	4
9.4. Платежи за предельно допустимые выбросы, сбросы, размещение отходов 9.5. Земельный налог 9.6. Платежи по обязат страхованию имущества 9.7. Плата за краткосрочный кредит			
10. Производственная себестоимость (8+9)			
11. Общепроизводственные расходы			
12 Внепроизводственные расходы			
13 Полная себестоимость п п. (11+12)			100 %

Пояснения к таблице 18

1. *Погашение ГПР.* Расчет стоимости погашаемых горно-подготовительных работ (вскрыши) производится через коэффициент вскрыши, рассчитанный в разделе "Основные и оборотные средства (см. табл 10) по формуле

$$П_{гпр} = Q_{вн.} \cdot К_{пог} \cdot С_{гпр}.$$

2. *Общецеховые расходы* включают в себя расходы, приведенные в табл. 18.1.

Таблица 18.1

Смета цеховых расходов

Наименование затрат	Сумма затрат, тыс руб
1 Основная и дополнительная заработная плата цехового персонала	
2 СВ на ОПС	
3. Амортизация зданий и сооружений цехового назначения	
4. Содержание зданий и сооружений	
5. Расходы на все виды ремонтов	
6. Расходы на охрану труда	
7. Прочие расходы цеха	
Итого цеховых расходов:	

Пояснения к таблице 18.1

1 Расчёт гр. 1 принимается по табл 11, приведённой ранее

Гр. 2 включает страховые взносы на обязательное пенсионное страхование, состоящие из отчислений от ФОТ: в ПФ - 26 %, в фонд ОМС - 5,1 %, в фонд ФСС – 2,9 % (СВ на ОПС, общая сумма 34,0 % от гр. 1) и страховой тариф на страхование от несчастных случаев и травматизма.

2. Гр. 3 определяется на базе стоимости объектов цехового назначения (зданий, сооружений) и действующих норм амортизации на эти объекты.

3. Гр. 4 принимается в размере 2 - 3 % от сметной (балансовой стоимости) зданий и сооружений.

5. Ремонт зданий и сооружений – 20 % от гр. 3.

6. Гр. 6 принимается в размере 5 % от ФОТ персонала или по нормам расхода в денежном выражении на одного трудящегося в год, принятым по данным практики.

7. Прочие цеховые расходы принимаются в размере 5 % от сумм расходов с гр. 1 по гр. 6.

3. *Налог на добычу* рассчитывается исходя из стоимости реализованной товарной продукции по установленной Правительством РФ ставке. Сумма отчислений определяется по формуле

$$O_i = V_i \cdot S_i ,$$

где O_i – сумма отчислений, тыс. руб.; V_i - годовой объем работ по i-му виду полезного ископаемого; S_i - ставка отчислений на воспроизводство минерально-сырьевой базы.

4. *Отчисления на рекультивацию.* Рекультивация горного отвода является обязательным условием получения разрешения на производство горных работ. В работе необходимо оценивать объемы рекультивационных работ связанных:

а) непосредственно с производством горных работ (карьером);

б) с размещением пустых пород в отвалах (временных и постоянных);

в) с нарушением почвенно-растительного слоя при проходке прочих горных выработок, сооружений и т. д. (например, системы осушения карьерного поля).

Технология и объемы производства работ по рекультивации этих объектов рассматриваются в разделе "Охрана окружающей среды". Экономическая оценка производится на основе данных, полученных в этом разделе. Затраты на ее производство, в зависимости от способа рекультивации (горнотехнической, биологической), рассчитываются укрупнённо на весь период эксплуатации месторождения и приводятся по объектам в табл. 18.2.

Удельные затраты на 1 га принимаются по предприятиям-аналогам или расчетным путем.

Таблица 18.2

Расчет стоимости работ по рекультивации

Наименование объектов	Способ рекультивации	Площадь земель, га	Затраты на 1 га, руб.	Общая стоимость, тыс. руб.
1. Территория карьера				
2. Отвал				
Итого:				

Весь комплекс работ производится специальным подразделением предприятия или специализированной сторонней организацией. Вопросы, связанные с технологией проведения рекультивации и организацией этих работ, решаются в разделе «Охрана окружающей среды» дипломного проекта, если это предусмотрено заданием.

Учитывая неравномерный характер проведения этих работ во времени, для устранения связанного с этим удорожания продукции (когда эти рекультивационные работы достигнут максимальных объемов), целесообразно формирование соответствующего резерва на предприятии, формирующегося путем постоянных равномерных отчислений на себестоимость продукции. Сумма отчислений за весь срок отработки месторождения должна составить общую сумму затрат на рекультивацию. Таким образом, текущие отчисления на рекультивацию могут быть определены по формуле

$$О_{рек} = У_{пи} \cdot Н_{рек}, \quad \text{причем} \quad Н_{рек} = Z_{рек}/З_{пи},$$

где $Н_{рек}$ - норматив отчислений на рекультивацию; $З_{пи}$ - запасы полезного ископаемого; $Z_{рек}$ - общая сумма затрат на рекультивацию; $У_{пи}$ - годовые погашаемые запасы полезного ископаемого (т. е. годовые объемы добычи полезного ископаемого с учетом потерь и разубоживания); $О_{рек}$ - сумма годовых отчислений на рекультивацию. Рекультивация горного и промышленного отводов производится как в период эксплуатации месторождения, так и после его доработки.

5. *Плата за воду* рассчитывается на основе данных о количестве потребляемой чистой воды на производственные нужды из открытых водных источников или подземных вод. Если проектом не предусматривается забор воды на технологические нужды из открытых водных источников или подземных вод, расчет платы может не производиться.

Объем потребляемой воды зависит от объемов производства предприятия и находится в разделе "Охрана окружающей среды".

Плата за воду ($Р_в$) рассчитывается как произведение количества потребляемой воды (W) на норматив платы за воду ($Н_в$), устанавливаемый местными органами власти исходя из эколого-экономических особенностей района и гидрогеологии конкретного водного источника

$$P_в = W \quad Н_в .$$

6. *Платежи за предельно допустимые выбросы (сбросы) загрязняющих веществ* различаются трех видов:

- за выбросы в атмосферу загрязняющих веществ;
- за сброс загрязняющих веществ в поверхностные и подземные водные объекты;
- за размещение отходов;
- другие виды вредного воздействия.

Расчеты выполняются на основе данных раздела "Охрана окружающей среды" в порядке, принятом местными органами власти. Результаты заносятся в табл. 18.3.

Размеры ставок платежей принимаются согласно Положению о порядке и условиях взимания платежей за право пользование недрами.

Таблица 18.3

Расчет платы за экологические выбросы, сбросы и размещение отходов производства

Виды воздействия на окружающую среду	Утверждённый норматив платы	Размер платы на расчетный год	
		объем загрязнений	размер платы (гр. 2 · гр. 3)
1. Выбросы в атмосферу Итого:			
2. Сброс в водные объекты: Итого:			
3. Размещение отходов Итого: Прочие			
Всего			

Сумма платежей ($П_н$) определяется как произведение стоимости товарной продукции ($ТП_i$) i-го вида на норматив ($Н_i$)

$$П_н = ТП_i \cdot Н_i .$$

7. *Налог на землю осуществляется* в форме разового, а также последующих регулярных платежей с момента начала ее использования и до момента возвращения используемой территории (участков земли) местным органам власти, являющихся ее собственником. Причем, если первые включаются в объем инвестиций на строительство карьера (см. «Строительство»), то регулярные платежи относятся на себестоимость продукции горного предприятия.

Сумма платы зависит от размера изымаемых земель (площади), качества земель (например, сельскохозяйственного назначения), характера их использования.

Сумма платежей ($П_з$) определяется как произведение площади изымаемых земель $S_з$, коэффициента ($К_{сп}$), зависящего от способа их использования, коэффициента

характеризующего качество земель ($К_к$) и ставки платы за землю $Н_з$

$$П_з = S_з \cdot К_{сп} \quad К_к \cdot Н_з$$

Плата за землю рассчитывается по видам земель и способам их использования. Результаты расчетов представляются в табл. 18.4.

Таблица 18.4

Расчёт земельного налога

Наименование объектов	Характеристика площадей	Площадь земель, га	Норматив платы за 1 га, руб.	Общий размер платы, тыс. руб.
1	2	3	4	5
Территория карьера				
Отвал (автомобильный)				
Отвал (ж. д.) и т. д.				
Итого:				

8. *Платежи по обязательному страхованию имущества* составляют 0,15 % от среднегодовой стоимости основных фондов.

9. *Размер платы за краткосрочный кредит* определяется ставками банковского кредита и финансовыми возможностями горного предприятия в конкретный год отработки месторождения. Плата за кредит по годам принимается самостоятельно исходя из принципа общей минимизации издержек предприятия.

Задолженность предприятия по заемным средствам (долгосрочный кредит) на любой расчетный год $З_п(t)$ рассчитывается по формуле сложных процентов:

$$З_п(t) = К_о(1 + r)^t,$$

где $К_о$ - размер кредитных средств, тыс. руб.; r – ставка за кредит; t – расчётный год.

10. *К общепроизводственным расходам* относят административно-управленческие расходы по предприятию в целом (2 – 3 % от производственной себестоимости).

11. *К внепроизводственным расходам* относят затраты, связанные с погрузкой продукции в ж. д. вагоны и доставкой ее по путям предприятия от эстакады или бункера фабрики до станции примыкания или линии МПС, с реализацией продукции, маркетинговой деятельностью предприятия и т. д. Внепроизводственные расходы могут приниматься на уровне 3 - 5 % от производственной себестоимости.

12. *Полная себестоимость* определяется как сумма производственной себестоимости и внепроизводственных расходов.

6.2. Определение себестоимости вскрыши и полезного ископаемого

6.2.1. Определение себестоимости вскрыши

Себестоимость вскрыши включает частично затраты на экскавацию горной массы, взрывание, бурение, а также полностью на транспортировку вскрыши и отвалообразование. При этом годовая сумма затрат на вскрышу берется из табл. 16 (строка "Итого"). Расчеты представляются в табл. 19.

Таблица 19

Себестоимость товарной продукции

Виды продукции предприятия, их характеристика	Ед. изм.	Объём производства, тыс. ед.	Сумма годовых эксплуатационных затрат, тыс. руб.	Себестоимость единицы продукции, руб./ед.
Основная: … Итого:				
Попутная: … Итого:				
Всего:				

Затраты на транспортировку полезного ископаемого и вскрыши показываются отдельно.

6.2.2. Определение себестоимости полезного ископаемого

Рассчитывается карьерная, производственная и полная себестоимость полезного ископаемого и представляется по процессам (табл. 20).

Таблица 20

Товарная продукция горного предприятия

Виды продукции и их качественные характеристики	Ед. изм	Объемы производства, т. м. куб.	Цена за единицу, руб.	Объем товарной продукции (объем продаж), тыс. руб
Основная: … Итого:				
Попутная. … Итого:				
Всего:				

6.3. Расчет себестоимости по видам товарной продукции

В случае производства предприятием нескольких видов продукции сумма текущих издержек (себестоимость) может распределяться следующими способами:

1) прямой счет издержек, относимых на тот или иной вид продукции (если имеется непосредственная связь между производственными процессами (расходами) и конкретной продукцией);

2) распределение издержек, исходя из обеспечения одинаковой рентабельности (к затратам)

$$C_i = (C_{т.п.} / ТП)ТП_1,$$

где C_i - себестоимость i-го вида товарной продукции, руб.; $C_{т.п.}$ - общая себестоимость товарной продукции, руб.; ТП - стоимость всей выпускаемой предприятием товарной продукции, руб.,

$$ТП = \sum_{i=1}^{n} ТП_i ,$$

где $ТП_i$ - стоимость товарной продукции i-го вида, определенной как произведение объема ее производства (в натуральном измерении) на отпускную цену, руб.; n – количество видов выпускаемой продукции.

$$ТП_i = Q_i \cdot Ц_i,$$

где Q_i - объем производства по товарной продукции 1-го вида; $Ц_i$ - цена 1-го вида товарной продукции.

Тогда себестоимость 1 т (куб. м) товарной продукции i-го вида (C_i) может быть рассчитана как:

$$C_i = C_i / Q_i .$$

3) распределение издержек пропорционально объемам продукции:

$$C_i = (C_{т.п.}/O_{т.п.})Q_i,$$

где $Q_{т.п.}$ - общий объем товарной продукции.

Результаты расчетов заносятся в табл. 19.

6.4. Расчет себестоимости по рассматриваемым вариантам проектных решений и годам расчетного периода

Себестоимость добычи полезного ископаемого рассчитывается по рассматриваемым проектным вариантам или годам расчетного периода. Результаты

расчетов заносятся в таблицу в разрезе элементов затрат (зарплата, материалы, амортизация и т. д.) или производственных процессов (осушение, буровзрывные работы, экскавация, транспортировка и т. д.). Представление затрат должно в наибольшей степени отражать происходящие в течение расчетного периода изменения структуры издержек. Обязательным является вынесение налогов, входящих в себестоимость добычи (платы за загрязнение, за воду и т. д.).

Расчет изменения себестоимости добычи по вариантам и годам производится на основе *факторного анализа* и выполняется в следующем порядке:

1. Выявляется группа горно-геологических факторов, изменение которых будет приводить к изменению издержек по вариантам (годам) эксплуатации месторождения. Например, дальность транспортировки вскрыши или полезного ископаемого, изменение притока грунтовых вод, изменение объемов по руде и вскрыше и многие другие.

2. Определяется форма их влияния на себестоимость и удельный вес в общих издержках. Например, увеличение дальности транспортирования, вероятно, приведет к увеличению расхода топлива, парка подвижного состава и т. д.; увеличение притока грунтовых вод, связанное с изменение глубины карьера, может привести к увеличению издержек на осушение карьерного поля и т. д. Оцениваются абсолютные значения в стоимостном выражении изменения выявленных факторов. Изменение себестоимости определится как произведение себестоимости за предшествующий период, удельного веса затрат, представляющих тот или иной фактор и величины относительного его изменения. Значение себестоимости находится как сумма издержек в предшествующий изменению период и величины ее изменения:

$$C_{t+1} = C_t + \Delta C_{t+1},$$

где C_{t+1} - себестоимости в последующий период; C_t - себестоимости в предшествующий период; ΔC_{t+1} - изменение себестоимости в последующий период.

6.5. Расчет себестоимости товарной продукции

6.5.1. В этом разделе определяются *виды и объемы товарной продукции*, производимой в расчетном периоде (в случае их варьирования они могут представляться по годам или периодам стабильных объемов), и их потенциальные потребители.

6.5.2. Цены на продукцию, их обоснование и расчет

Цены на продукцию могут приниматься: по аналогии с действующими предприятиями данного или других районов РФ; исходя из обеспечения необходимого уровня рентабельности производства (к затратам) или нормы прибыли. Во втором случае они рассчитываются следующим образом:

$$Ц_i = C_i(1 + 0{,}01Н_р),$$

где $Н_р$ - норматив рентабельности к затратам в %, условно может быть принят на уровне 30 - 50 %.

Результаты расчетов сводятся в табл. 20.

7. ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ

Целью выполнения этого раздела является финансово-экономический анализ вариантов инвестиционных (проектных) решений и выбор наилучшего из них с учетом влияния факторов, предполагаемых в задании.

Финансово-экономическая оценка эффективности инвестиций включает в себя:

1. Отчёт о прибыли.
2. Отчёт о движении денежных потоков.
3. Расчёт чистого дисконтированного дохода.

7.1. Отчёт о прибыли

Отчёт о прибыли необходим для оценки эффективности текущей хозяйственной деятельности. Он представляет собой анализ соотношения доходов предприятия с расходами, понесёнными за один и тот же период. Результаты расчётов представляются в виде табл. 21.

Таблица 21

Отчёт о прибыли

Наименование показателей	Интервал планирования		
	1	2	3
1. Выручка от реализации (объём продаж)			
2. Прямые (переменные) издержки			
3. Маржинальная прибыль			
4. Операционные издержки			
5. Прибыль от операций			
6. Выплаты по кредиту			
7. Торгово-административные издержки			
8. Внереализационные доходы (расходы)			
9. Балансовая прибыль			
10. Налог на имущество предприятия			
11. Налогооблагаемая прибыль			
12. Налог на прибыль			
13. Чистая прибыль			
14. То же, нарастающим итогом			

Пояснения к таблице 21

1. Все издержки показываются в таблице со знаком «-», доходы – со знаком «+».
2. Выручка от реализации в стоимостном выражении определяется:

$$В_р = Ц_{ед} \cdot Q_г,$$

где $Ц_{ед}$ – цена единицы товарной продукции, руб./т; $Q_г$ – годовой объём производства товарной продукции, т.

3. К прямым (переменным) затратам относятся те затраты, стоимость которых изменяется в зависимости от изменения (роста или снижения) объёма производства. К ним относятся: материальные затраты (стоимость вспомогательных материалов, энергии на технологические нужды, топлива), сдельная заработная плата производственного персонала, отчисления на социальные нужды от ФОТ сдельщиков, погашение затрат на ГПР (см. табл. 18).

4. Маржинальная прибыль – разность между выручкой от реализации и прямыми (переменными) затратами.

5. Операционные издержки включают в себя: заработную плату рабочих-повременщиков, цеховые расходы, прочие производственные, общепроизводственные расходы (см. табл. 18).

6. Прибыль от операций – разность маржинальной прибыли и операционных издержек.

7. Торгово-административные издержки включают в себя внепроизводственные расходы (табл. 18).

8. Балансовая прибыль – разность между прибылью от операций и торгово-административными издержками и выплатами по кредиту.

9. Налог на имущество определяется в размере 2 % от среднегодовой стоимости основного капитала.

10. Налогооблагаемая прибыль - разность балансовой прибыли и суммы налогов (на имущество и местных).

11. Налог на прибыль принимается в размере 20 % от налогооблагаемой прибыли.

12. Чистая прибыль – разность налогооблагаемой прибыли и налога на прибыль.

Далее рекомендуется определить ***точку безубыточности,*** характеризующую минимальный объём продаж, при котором выручка от реализации продукции будет равна издержкам производства. Этот объём может быть определён аналитическим или графическим способом.

Аналитически точка безубыточности определяется по формуле

$$Т_б = С_{пост} / (Ц_{ед} - С_{пер}),$$

где $Т_б$ – точка безубыточности, ед. продукции; $Ц_{ед}$ - цена единицы товарной продукции, руб.; $С_{пост}$ - постоянные издержки на весь объём производства, руб.;

$C_{пер.}$ - переменные издержки на единицу продукции, руб.

Для расчёта точки безубыточности можно принять за постоянные издержки сумму операционных и торгово-административных издержек, остальные (прямые) - к переменным.

Графическое определение точки безубыточности представлено на рис. 1.

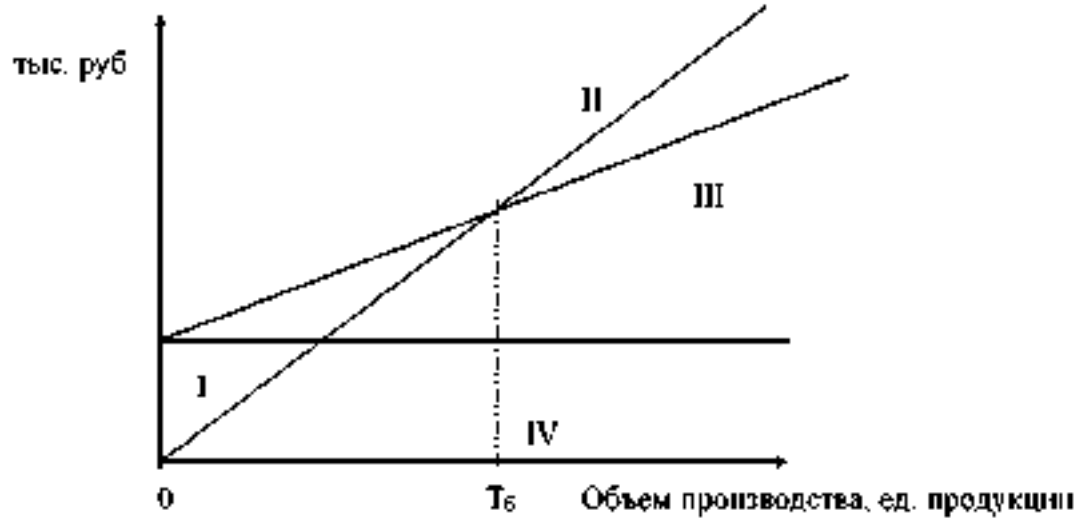


Рис. 1. Графическое определение точки безубыточности:
I - область убытков; II - область прибыли. III - область переменных затрат.
IV - область фиксированных (постоянных) затрат

На основе полученного значения точки безубыточности определяется *запас финансовой прочности* проекта ($З_{фп}$)

$$З_{фп} = (В_р - Т_б)/В_р,$$

где $В_р$- выручка от реализации.

7.2. Отчёт о движении денежных потоков

Отчёт о движении денежных потоков представляет информацию, характеризующую операции, связанные, во-первых, с образованием источников финансовых ресурсов, а во-вторых, с использованием этих ресурсов в течение расчетного периода. На каждом шаге (t) расчетного периода значение ***денежного потока ф(t)*** характеризуется:

- ***притоком*** – равным размеру денежных поступлений (или результатов в стоимостном выражении) на этом шаге;

- ***оттоком*** – равным платежам на этом шаге;

- ***сальдо*** (активным балансом, эффектом, кэш-фло) - равным разности между притоком и оттоком.

Денежный поток *ф(t)* обычно состоит из потоков от отдельных видов деятельности:

- денежного потока от инвестиционной деятельности $ф^{и}(t)$;
- денежного потока от операционной деятельности $ф^{о}(t)$;
- денежного потока от финансовой деятельности $ф^{ф}(t)$.

Отчёт о формировании денежных потоков представляется в виде табл. 22.

Таблица 22

Отчёт о формировании денежных потоков

Наименование показателей	Интервалы планирования		
	1	2	3
1	2	3	4
Операционная деятельность			
1 Выручка (объём продаж) без НДС			
2 Амортизационные отчисления			
3. Итого *приток от операционной деятельности*			
4 Прямые (переменные) издержки			
5 Операционные (постоянные) издержки без амортизации и торгово-административные издержки			
6. Налоги, относимые на финансовые результаты (на имущество, прибыль)			
7. **Итого** *отток от операционной деятельности*			
8. Сальдо потока от операционной деятельности («Кэш-фло») $ф^{о}(t)$ (гр. 8 = гр. 3 - гр. 7)			
Инвестиционная деятельность			
9. Ликвидационная стоимость			
10. **Итого** приток от инвестиционной деятельности			
11 Инвестиции в основные и оборотные активы			
12 **Итого** *отток от инвестиционной деятельности*			
13. *Сальдо потока от инвестиционной деятельности («Кэш-фло»)* $ф^{и}(t)$ (гр. 13 = гр. 10 - гр. 12)			
Финансовая деятельность			
14 Собственный капитал (акционерный)			
15 Заёмный капитал (кредит)			
16. **Итого** *приток от финансовой деятельности*			
17 Выплаты по кредиту			
18 **Итого** *отток от финансовой деятельности*			
19. *Сальдо потока от финансовой деятельности («Кэш-фло»)* $ф^{ф}(t)$ (гр. 19 = гр. 16 - 18)			

20.Суммарное сальдо («Кэш-фло») от 3-х потоков: $\phi^o(t) + \phi^u(t) + \phi^\phi(t)$ - гр. 20 = гр. 8 + гр. 13 + гр. 19			

Примечание к табл. 22

Показатели, относящиеся к притокам, приводятся со знаком «+», к оттокам – со знаком «-».

7.3. Оценка экономической эффективности инвестиций

Экономическая эффективность инвестиционного проекта оценивается в течение расчётного периода (от начала осуществления до его прекращения).

Оценка экономической эффективности может производиться двумя методами: *простым* методом (без учёта фактора времени) и с помощью метода *дисконтирования.*

Простой метод оценки эффективности инвестиций включает в себя определение следующих показателей:

- простую норму прибыли (ПНП);
- срок окупаемости без учета фактора времени ($Т_{ок}$).

Если ежегодная величина дохода (в виде прибыли и амортизации) равномерно распределена по годам, то расчёт производится следующим образом:

1. ***Простая норма прибыли*** рассчитывается как отношение чистой прибыли (ЧП) и амортизационных отчислений (А) за год к общему объёму инвестиций (ИЗ):

$$ПНП = (ЧП + А)/ИЗ.$$

Простая норма прибыли заключается в оценке того, какая часть инвестиционных затрат возмещается в виде прибыли в течение одного интервала планирования (% / в год).

2. ***Срок окупаемости*** - продолжительность периода, в течение которого сумма инвестиций будет возмещена за счет ежегодно формируемого дохода. Весь объём генерируемых проектом денежных средств, к которым относится сумма прибыли и амортизация, засчитывается как возврат на первоначально инвестированный капитал. Он определяется по формуле

$$Т_{ок} = ИЗ/(ЧП + А).$$

Метод дисконтирования (метод приведения чистых доходов к настоящему моменту времени) основан на определении следующих показателей:

- нормы дисконта (E),%

- коэффициентов дисконтирования $Kt(E)$;
- чистого дохода (ЧД);
- чистого дисконтированного дохода (ЧДД);
- внутренней нормы доходности (ВНД);
- индекса доходности дисконтированных инвестиций (ИДД).
- срок окупаемости с учётом фактора времени (дисконтированный).

3. *Норма* дисконта (*E*), выражаемая в процентах (долях единиц) в год, является основным экономическим нормативом, используемым при оценке инвестиционных проектов, показывает минимальную норму доходности. В условиях рынка критерием эффективности инвестиционного проекта является уровень прибыли, полученной на вложенный капитал. При этом под прибыльностью, рентабельностью или доходностью следует понимать не просто прирост капитала, а такой темп увеличения последнего, который:

- полностью компенсирует общее инфляционное изменение покупательной способности денег в течение рассматриваемого периода;
- обеспечит минимальный гарантированный уровень доходности;
- покроет риск инвестора, связанный с осуществлением проекта.

На практике E приближённо может быть принята на уровне процентной ставки по долгосрочным банковским кредитам и быть определена по формуле:

$$E = N - I,$$

где N - номинальная ставка банковского процента (в случае финансирования за счет заемных средств); или ставка по депозитным вкладам (в случае финансирования за счет собственных средств); I - темп инфляции (все значения за один и тот же период времени, %).

4. *Коэффициент дисконтирования (приведения) Kt(E)* определяется по формуле

$$Kt(E) = 1/(1 + E)^{t-1}.$$

5. *Чистый доход* (ЧД, Net Value, NV) – накопленный эффект (накопленное сальдо денежного потока) за расчётный период

$$\text{ЧД} = \Sigma\phi(t).$$

6. Чистый дисконтированный доход (ЧДД, интегральный эффект, Net Present Value, NPV) – накопленный дисконтированный эффект за расчётный период, определяется по формуле

$$ЧДД = \Sigma\phi(t) \cdot Kt(E).$$

ЧД и ЧДД характеризуют превышение суммарных денежных поступлений над суммарными затратами для данного проекта соответственно без учёта и с учётом фактора времени. Для признания проекта эффективным с точки зрения инвестора необходимо, чтобы:

1) ЧДД проекта был положительным;

2) при сравнении альтернативных проектов предпочтение отдаётся проекту с большим значением ЧДД.

7. *Внутренняя норма доходности* (ВНД, Intenal Rate of Retum, IRR) – такое положительное число Ев, что при норме дисконта $E = E_в$ ЧДД проекта обращается в «0», при всех больших значения $E_в$ – ЧДД отрицателен, при всех меньших – ЧДД положителен: $ЧДД = \Sigma\phi(t) \cdot Kt(E_в) = 0$. Определяется методом подбора.

8. *Индекс доходности дисконтированных инвестиций* (ИДД) – характеризует "отдачу проекта "на вложенные средства. Определяется по формуле

$$ИДД = 1 + ЧДД/К,$$

где К – суммарные дисконтированные инвестиционные издержки.

9. *Срок окупаемости с учётом фактора времени* - продолжительность периода от начального момента до "момента окупаемости" с учётом дисконтирования. *Моментом окупаемости* с учётом дисконтирования называется наиболее ранний момент времени в расчётном периоде, после которого текущий ЧДД становится и в дальнейшем остаётся неотрицательным.

Порядок расчёта показателей эффективности инвестиционного проекта приведён в табл. 23.

Таблица 23

2.1.1.1 Расчёт показателей оценки экономической эффективности

Наименование показателя	Интервал планирования		
	1	2	3
1	2	3	4
1 Сальдо потока от операционной деятельности $\phi^o(t)$			
2 Сальдо потока от инвестиционной деятельности $\phi^u(t)$			
3. Выплаты по кредиту			
4 Сальдо суммарного потока $(\phi^o(t) + \phi^u(t) +$ гр. 3)			
5 Сальдо накопленного потока (гр 4 нарастающим итогом, последнее значение будет соответствовать ЧД)			
6 Коэффициент дисконтирования $Kt(E)$, при $E =$ %			
7. Дисконтированное сальдо суммарного потока (гр. 4 · гр. 6)			
8. Сальдо накопленного дисконтированного потока (показатели гр. 7 нарастающим итогом, последнее значение будет соответствовать ЧДД (NPV))			
9. Инвестиционные издержки (табл. 11, гр. 7)			
10. Дисконтированные инвестиционные издержки (гр. 9 · гр. 6)			

Пояснения к табл. 23

1. Положительное значение ЧДД (NPV)>0 будет являться подтверждением целесообразности инвестирования.

2. Если ЧДД (NPV) = 0, то это будет соответствовать тому, что вложенные средства (инвестиции) равны доходу, полученному от их использования.

3. Если ЧДД (NPV) <0, то это будет соответствовать тому, что инвестиции нецелесообразны, так как общая сумма издержек (включая инвестиции) будет превышать доход от вложенных средств.

4. Срок окупаемости с учётом фактора времени определяется по данным гр. 8 и на основании этих показателей рекомендуется построить финансовый профиль инвестиционного проекта (см. рис. 7.1).

5. Для расчёта ИДД необходимо определить абсолютное значение суммы дисконтированных инвестиционных издержек (сумма показателей гр.10 по абсолютному значению).

6. По результатам расчетов строится финансовый профиль инвестиционного проекта.

На основании произведённых расчётов даётся анализ полученных показателей и делается вывод о целесообразности инвестиций.

Основные технико-экономические показатели по вариантам проектных решений. Технико-экономические показатели приводятся в табл. 24.

Таблица 24

Сводные технико-экономические показатели проектных решений

Наименование показателей	Ед. изм.	Варианты проектных решений	
		I	II
I	2	3	4
1. Характеристика проекта (новое строительство, реконструкция, расширение, поддержание мощности)			
2. Запасы полезного ископаемого: - геологические - балансовые (А+В+С1+С2) - забалансовые эксплуатационные (в контуре карьера)			
3. Характеристика полезного ископаемого			
4. Размеры карьера по поверхности на расчетный год: - длина - ширина			
5. Глубина карьера: - на расчетный год - на конец отработки месторождения			
6. Объем горно-капитальных работ			
7. Продолжительность строительства до достижения проектной мощности			
8. Годовая продолжительность карьера в расчетном году: - по руде - по вскрыше - по горной массе			
9. Общий срок эксплуатации карьера с учетом развития и затухания работ			
10. Режим работы карьера: - количество дней работы в году - число смен в сутки - продолжительность смены			
11. Буровзрывные работы: - буровые работы по типам (инвентарный парк) - годовая производительность бурстанка - выход горной массы с 1 п. м скважины - удельный расход ВВ - себестоимость бурения 1п. м - себестоимость взрывания			
12. Экскавация: - типы и количество экскаваторов - годовая производительность экскаватора на погрузке - количество перегрузочных пунктов - оборудование перегрузочных пунктов - себестоимость экскавации			

13. Отвалообразование: - типы и количество оборудования - годовая производительность - себестоимость отвалообразования			

Окончание табл. 24

1	2	3	4
14. Рудничный транспорт: - вид транспорта - тип и количество оборудования (подвижного состава) - годовые объемы транспортировки - себестоимость транспортировки по видам транспорта			
15. Показатели генплана Отводимая площадь, в т. ч. занято: - карьером - отвалом - промплощадкой - прочими объектами			
16. Стоимость 1 га отводимых земель Общая сумма затрат, связанных с отводом земель			
17. Среднесписочная численность работников			
18. Годовая производительность труда на 1 работающего: - по горной массе - товарной продукции Среднегодовая зарплата одного работающего			
19. Инвестиции (капитальные вложения) всего Удельные капитальные вложения: - на 1 т горной массы - 1 руб. товарной продукции			
20. Основные производственные фонды Нормируемые оборотные средства			
21. Себестоимость в расчетном периоде: - 1 куб. м вскрыши - 1 т. руды - цена товарной продукции			
22. Годовая стоимость товарной продукции Балансовая прибыль предприятия Прибыль, остающаяся в распоряжении предприятия			
23. Срок окупаемости капитальных вложений			

8. АНАЛИЗ, ВЫБОР И ОБОСНОВАНИЕ ВАРИАНТОВ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

В этом разделе производится окончательный выбор и обоснование наиболее предпочтительного варианта проектного решения. Выбор производится при сравнении значений основных принятых критериев и ограничений по рассматриваемым вариантам (табл. 25).

Таблица 25

Сравнение вариантов проектных решений

Критерии сравнения и ограничения	Варианты проектных решений	
	I	II
1. Технологические показатели, характеризующие варианты (глубина карьера, производственная мощность, направление горных работ и др.)		
2. Требования охраны окружающей среды		
3. Размеры пылевых и газовых выбросов: - площадь размещения пустых пород - объемы сброса сточных и дренажных вод		
4. Экономические и социальные ограничения и требования (согласно техническому заданию)		
5. Размер инвестиций - ограничения по сроку кредитования		
6. Экономические критерии. - размер приведенной прибыли. - сумма прибыли на капитал (рентабельность инвестиций) - срок окупаемости инвестиций		
7.Чистая дисконтированная стоимость инвестиций (NPV)		

Пояснение к таблице 25

1. Размер приведённой прибыли определяется на конец расчётного периода по формуле

$$П_{пр} = \sum_{1}^{t=T_р} П_t (1+r)^t ,$$

где $П_{пр}$ - приведённая прибыль на конец расчётного периода; $П_t$ - прибыль, полученная предприятием в t-м году эксплуатации месторождения; r - норма прибыли на вложенный капитал, принимаемая на уровне 10 - 20 %; $T_р$ - год окончания расчётного периода.

2. Сумма прибыли, на вложенный капитал (инвестиции) за расчётный пе-

риод (рентабельность инвестиций) определяется по формуле

$$Р = П_t/И,$$

где $П_t$ – чистая прибыль на расчётный год; И - размер инвестиций в строительство (реконструкцию, на поддержание мощности и др.).

Все остальные показатели для сравнительного анализа принимаются из расчётов, выполненных в предыдущих разделах.

Анализ рассматриваемых вариантов производится с точки зрения удовлетворения условиям охраны окружающей среды, требований заказчика (технического задания или задания на выполнение дипломного проекта), экономической целесообразности. Анализируется вероятное изменение приоритетности вариантов в случае изменения тех или иных экономических, экологических или иных условий (непредвиденное обострение экологической ситуации, изменения цен на сырье, материалы, товарную продукцию, расширение рынка сбыта продукции и увеличение производительности карьера и т. д.). Выявляются благоприятные и неблагоприятные факторы, влияющие на предпочтительность рассматриваемых проектных решений.

В заключении приводятся основные выводы по выполненной работе, содержащие заключение о целесообразности принятия решения относительно строительства, реконструкции, поддержания производственной мощности горного предприятия. Выводы должны отражать как технологическую оценку рассмотренных вариантов (в плане использования той или иной технологии ведения горных работ) и оценку экономической целесообразности, так и экологические, а в отдельных случаях и социальные аспекты разработки месторождения.

9. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

9.1 Основная литература

п/п	Наименование	Кол-во экз.
1	Коршунов В.В. Экономика организации: Учебник и практикум / Коршунов В.В. – М.- Юрайт, 2016. - 408с.	10
2	Экономика горного предприятия: учебник / под ред. В. Е. Стровского, С.В. Макаровой, В.Г. Жукова. Ек-г: Изд-во УГГУ, 2018. - 340 с.	90
3	Бухалков М. И. Производственный менеджмент. Организация производства: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 "Менеджмент" / М. И. Бухалков. - 2-е изд. - Москва: ИНФРА-М, 2018. - 395 с.	20
4	Астахов А. С. Экономика и менеджмент горного производства: учебное пособие для вузов : в 2 книгах / А. С. Астахов, Г. Л. Краснянский. - Москва : Издательство Академии горных наук. Книга 1. - 2002. - 367 с.	25
5	Девлет-Гельды Г.К. Расчет, анализ и оценка затрат предприятия [Электронный ресурс]: методические указания к выполнению домашнего задания по дисциплине «Финансы субъектов экономической деятельности»/ Девлет-Гельды Г.К.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2014.— 20 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/31627.— ЭБС «IPRbooks», по паролю;	Эл. ресурс
6	Экономика предприятия [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Е.М. Белый [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Русайнс, 2015.— 172 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49005.— ЭБС «IPRbooks», по паролю;	Эл. ресурс

9.2 Дополнительная литература

п/п	Наименование	Кол-во экз.
1	Экономические, экологические и социальные проблемы горной промышленности Урала: сборник научных статей / Уральский государственный горный университет; под ред. Н. В. Гревцева, И. А. Коха. - Екатеринбург: УГГУ, 2017. - 155 с.	2
2	Ганицкий В. И. Менеджмент горного производства : учеб. пособие для вузов / Всеволод Иванович Ганицкий В. И., Владимир Иванович Велесевич В. И. - Москва : Изд-во МГГУ, 2004. - 357 с.	61
3	Макроэкономическое планирование и прогнозирование : учебно-методическое пособие / В. К. Крутиков [и др.] ; Институт управления, бизнеса и технологий, Среднерусский научный центр Санкт-Петербургского отделения Международной академии наук высшей школы. - Калуга : Эйдос, 2014. - 113 с.	20
4	Модернизация учета управления затрат при комплексном использовании минерального сырья/ под ред. Ф.Д.Лиричкина, А.Г.Воробьева, : Ин-т экон. проблем им.Г.П.Лузина КНЦ РАН, Геотехмин – 2-е из.испр. и доп. – Москва: Руда и металлы, 2013 -180 с.	2
5	Чайников В.В. Экономика предприятия (организации) [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.В. Чайников, Д.Г. Лапин. — Электрон.	Эл. ресурс

	текстовые данные. — М.: Российский новый университет, 2010. — 480 с. — 978-5-89789-051-4. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/21343.html	
6	Ефимов О.Н. Экономика предприятия [Электронный ресурс]: учебное пособие / О.Н. Ефимов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Вузовское образование, 2014. — 732 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23085.html	Эл. ресурс

9.3 Нормативные правовые акты

1. Гражданский кодекс Российской Федерации (часть первая) от 30.11.1994 N 51-ФЗ (ред. от 03.08.2018) (с изм. и доп., вступ. в силу с 01.09.2018);
2. Налоговый кодекс Российской Федерации (часть первая) от 31.07.1998 N 146-ФЗ (ред. от 03.08.2018) (с изм. и доп., вступ. в силу с 03.09.2018);
3. Федеральный закон "О несостоятельности (банкротстве)" от 26.10.2002 N 127-ФЗ (последняя редакция).

10 ПЕРЕЧЕНЬ ЛИЦЕНЗИОННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

1. Альт-Прогноз 3 Отдельные организации
2. Альт-Инвест 6 Отдельные организации
3. Microsoft Windows 8 Professional
4. Microsoft Office Standard 2013
5. Microsoft Windows 8 Professional
6. Microsoft Office Professional 2013

11 ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Информационно-правовой портал «Консультант плюс» http://www/consultant.ru
Официальный сайт Министерства экономического развития РФ http://economy.gov.ru/minec/main
Горнопромышленный портал России: информационно-аналитический http://www.miningexpo.ru/news

12. ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИТЫ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

12.1.Подготовка к защите и порядок защиты курсовой работы

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект).

Порядок защиты курсовой работы.

1. Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.
2. Ответы студента на вопросы преподавателя.
3. Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы студенту:

•Готовясь к защите курсовой работы, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе вы сможете проговорить все 15-20 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.

•Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).

•Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.

•Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этого раздела, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.

•Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.

•Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.

•Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.

•Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!

•Не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь вам или сэкономить время. Если вас прервали, а при оценке ставят в вину пропуск важной части материала, не возмущайтесь, а покажите план своего ответа, где эта часть стоит несколько позже того, на чем вы были прерваны.

•Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что вы можете сказать.

•Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

12.2. Критерии оценки курсовой работы

Подготовленная и оформленная в соответствии с требованиями курсовая работа оценивается преподавателем по следующим критериям:

теоретический уровень работы;

аналитический уровень работы;

правильность выполненных расчетов;

самостоятельность выполнения работы;

культура письменного изложения материала (логичность подачи ма-

териала, грамотность автора);

культура оформления материалов работы (соответствие работы всем стандартным требованиям);

использование литературных источников (достаточное количество, наличие в списке учебников и научных публикаций по теме, современность источников);

умение ориентироваться в материале и отвечать на вопросы по работе;

умение подготовить презентацию к работе (содержательность, логичность и правильное оформление презентации).

Объективность оценки работы преподавателем заключается в определении ее положительных и отрицательных сторон, по совокупности которых он окончательно оценивает представленную работу. При положительном заключении работа допускается к защите, о чем делается запись на титульном листе работы. При отрицательной оценке работа возвращается на доработку с последующим представлением на повторную проверку с приложением замечаний, сделанных преподавателем.

Внимание

1. Не допускается сдача скачанных из сети Internet курсовых работ, поскольку, во-первых, это будет рассматриваться как попытка обмана преподавателя, во-вторых, это приводит к формализации получения знаний, в-третьих, в мировой практике ведется борьба с плагиатом при сдаче работ вплоть до отчисления студентов от обучения. В подобном случае курсовая работа не принимается к защите и вместо него выдается новая тема.

2. Студент, не подготовивший и не защитивший курсовую работу, не может быть допущен к экзамену по дисциплине «Оценка реальных и финансовых активов».

Приложение

Образец оформления титульного листа курсовой работы

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра экономики и менеджмента

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине
«Экономика и менеджмент горного производства»
на тему:
«Оценка эффективности инвестиционного проекта»

Преподаватель:
доц., к. э. н. Дроздова И.В.
Студент гр. ОГР-16
Иванов И. И.

Екатеринбург – 2019

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ЭКОНОМИКА И МЕНЕДЖМЕНТ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Специальность
21.05.04 Горное дело

Специализация №3
Открытые горные работы
Квалификация выпускника: **специалист**

формы обучения: **очная, заочная**

Авторы: Дроздова И.В., доцент; Перегон И.В., ст. преподаватель

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……3

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ……6

ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ ДИСЦИПЛИНЫ……8

САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ……9

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ..13

ПОДГОТОВКА К ДИСКУССИИ……15

ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ……18

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении – это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знаний должна соответствовать уровню развития студентов;
- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;

- объем задания должен соответствовать уровню студента;
- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны – это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа – практические занятия;

2. внеаудиторная самостоятельная работа – подготовка к практическим занятиям, подготовка к устному опросу, участию в дискуссиях, решению практико-ориентированных заданий и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине «Экономика и менеджмент горного производства» обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к сдаче *экзамена.*

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «*Экономики и менеджмент горного*» являются:

- самостоятельное изучение тем курса (в т.ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);
- подготовка к практическим и лабораторным занятиям (в т.ч. ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля));
- выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (практико-ориентированного задания);
- подготовка к экзамену.

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Тема 1. Специфика действия рыночного механизма в горной промышленности

- Назовите субъекты и объекты хозяйствования в условиях рынка.
- Каковы основные проблемы и задачи экономики организации?
- Что собой представляет предприятие как субъект хозяйственной деятельности?
- Назовите признаки коммерческих и некоммерческих организаций.
- Какие организационно-правовые формы предприятий предусмотрены законодательством.
- Перечислите признаки предприятия в условиях рынка.
- Дайте определение предпринимательской деятельности
- Назовите виды предпринимательской деятельности и их признаки.
- Каковы особенности и условия эффективности производственного, коммерческого и финансового предпринимательства?
- Назовите закономерности и принципы размещения предприятий.
- В чем заключается отраслевая специализация предприятий?
- Что собой представляет организация как система?

Тема 2. Ресурсы горных предприятий

- Дайте определение внеоборотным активам предприятия.
- Каковы экономическая сущность, состав и принципы классификации основных производственных фондов предприятия?
- Что понимается под амортизацией основных фондов?
- В чем отличие и каков порядок начисления амортизации при линейном и нелинейном методах?
- Назовите основные показатели оценки эффективности использования основных фондов и приведите порядок их расчета.
- Что собой представляет лизинг и в чем его отличие от традиционной аренды?
- Какова экономическая сущность нематериальных активов?
- Приведите принципы классификации нематериальных активов.
- Как отражается использование нематериальных активов в хозяйственной деятельности предприятий?
- Какова экономическая сущность оборотного капитала?
- В чем выражается производственная и расчетная функция оборотных активов?
- Что собой представляет процесс нормирования оборотных активов?
- Назовите основные показатели оборачиваемости оборотного капитала и приведите порядок их расчета.
- Какова экономическая сущность ускорения оборачиваемости?
- Назовите основные источники финансирования оборотных средств.

- Каковы основные принципы классификации персонала предприятия?
- Как определяется явочный и списочный штат персонала?
- Назовите методы расчета и анализа производительности труда.
- Перечислите состав средств предприятия, направленных на потребление.

Тема 3. Формирование основных результатов финансово-хозяйственной деятельности горных предприятий

- В чем сущность понятий «стоимость», «издержки»?
- Что такое себестоимость продукции, какова ее экономическая сущность, и в чем выражаются проблемы ее формирования и снижения?
- Назовите основные принципы классификации затрат на производство и реализацию продукции.
- Что понимается под калькуляцией себестоимости, какие модели и методы калькулирования применяются в хозяйственной практике?
- Чем характеризуются и как определяются виды продукции предприятия: валовая, товарная, реализованная.
- Что включает в себя смета затрат, каковы ее элементы?
- Назовите пути снижения себестоимости и методы расчета экономии и резервов.
- Как определяются точка безубыточности и запас финансовой прочности для обоснования выбора оптимальных показателей производства и реализации продукции?
- Дайте определение цены как экономической категории.
- Перечислите принципы классификации цен по видам.
- Что относится к внутренним и внешним ценообразующим факторам?
- Какова сущность прибыль как основного результата финансовой деятельности предприятия?
- Назовите основные виды прибыли.
- Каковы особенности налогообложения прибыли?
- Приведите порядок расчета чистой прибыли.
- Какие направления распределения прибыли возможны?
- Как определяются показатели рентабельности производства, продукции, активов и продаж и каковы пути их повышения?

Тема 4. Экономическое обоснование инженерных решений

- Какова экономическая сущность инвестиций?
- Назовите виды инвестиций и приведите принципы их классификация.
- Какова сущность понятия и содержание инвестиционного проекта?
- Что понимается под технико-экономическим обоснованием проекта, каково его назначение?
- Назовите основные разделы ТЭО проекта, их структуру и содержание.
- Каковы принципы оценки коммерческой эффективности инвестиционных проектов?
- Приветите порядок расчета основных показателей оценки эффективности инвестиционных проектов.

Тема 5. Основы менеджмента на горных предприятиях

- Каковы особенности организации и управления на горных предприятиях: сущность системного подхода к управлению?
- Назовите элементы организации процесса управления горным производством.
- Каковы основные принципы и методы менеджмента на горных предприятиях?
- Дайте сравнительную характеристику подходов, методов и технологий управления.
- Что собой представляет организационная структура управления и каковы принципы ее построения?
- Что представляет собой система управления персоналом на предприятии?
- В чем состоит сущность, каковы принципы и методы планирования на горном предприятии?
- Каковы место, роль и содержание стратегического, перспективного, текущего, оперативного, бизнес – планирования, программ инновационного и инвестиционного развития в организации планирования деятельности горного предприятия?
- Назовите основные пути совершенствовании управления горным предприятием.

ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Специфика действия рыночного механизма в горной промышленности

- субъекты и объекты хозяйствования
- признаки коммерческих организаций
- организационно-правовые формы предприятий
- предпринимательская деятельность
- особенности и условия эффективности предпринимательства
- закономерности и принципы размещения предприятий
- отраслевая специализация предприятий
- организация как система

Тема 2. Ресурсы горных предприятий

- внеоборотные активы приятия
- экономическая сущность, состав основных производственных фондов предприятия
- амортизация основных фондов
- показатели оценки эффективности использования основных фондов
- лизинг
- экономическая сущность нематериальных активов
- экономическая сущность оборотного капитала
- процесс нормирования оборотных активов
- показатели оборачиваемости оборотного капитала
- источники финансирования оборотных средств
- основные принципы классификации персонала предприятия
- явочный и списочный штат персонала
- состав средств предприятия, направленных на потребление

Тема 3. Формирование основных результатов финансово-хозяйственной деятельности горных предприятий

- понятия «стоимость», «издержки»
- себестоимость продукции
- принципы классификации затрат на производство и реализацию продукции
- калькуляция себестоимости
- виды продукции предприятия: валовая, товарная, реализованная
- смета затрат и ее элементы
- пути снижения себестоимости
- точка безубыточности и запас финансовой прочности

- цена как экономической категория
- прибыль как основной результат финансовой деятельности предприятия
- виды прибыли
- показатели рентабельности производства, продукции, активов и продаж

Тема 4. Экономическое обоснование инженерных решений

- экономическая сущность инвестиций
- виды инвестиций и их классификация
- содержание инвестиционного проекта
- технико-экономическим обоснование проекта,
- принципы оценки коммерческой эффективности инвестиционных проектов
- порядок расчета основных показателей оценки эффективности инвестиционных проектов

Тема 5. Основы менеджмента на горных предприятиях

- особенности организации и управления на горных предприятиях
- сущность системного подхода к управлению
- элементы организации процесса управления горным производством
- основные принципы и методы менеджмента на горных предприятиях
- организационная структура управления
- система управления персоналом на предприятии
- сущность, принципы и методы планирования на горном предприятии
- основные пути совершенствовании управления горным предприятием.

САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики – это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

• составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;

• перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и выпускных квалификационных работ (ВКР), а что выходит за рамками официальной учебной деятельности, и расширяет общую культуру);

• обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и выпускных квалификационных работ это позволит экономить время);

• определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;

• при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и руководителями ВКР, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;

• все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);

• если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;

• следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьёзный, кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При

повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
- просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис - это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта - основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь

выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Практико-ориентированные задания выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций. Это могут быть ситуации, требующие применения умений и навыков, специфичных для соответствующего профиля обучения (знания содержания предмета), ситуации, требующие организации деятельности, выбора её оптимальной структуры личностно-ориентированных ситуаций (нахождение нестандартного способа решения).

Кроме этого, они выступают средством формирования у студентов умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач. Они строятся на основе ситуаций, возникающих на различных уровнях осуществления практики и формулируются в виде производственных поручений (заданий).

Под практико-ориентированными задания понимают задачи из окружающей действительности, связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием элементов производственных процессов.

Цель практико-ориентированных заданий – приобретение умений и навыков практической деятельности по изучаемой дисциплине.

Задачи практико-ориентированных заданий:

- закрепление, углубление, расширение и детализация знаний студентов при решении конкретных задач;
- развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности;
- овладение новыми методами и методиками изучения конкретной учебной дисциплины;
- обучение приемам решения практических задач;
- выработка способности логического осмысления полученных знаний для выполнения заданий;
- обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Важными отличительными особенностями практико-ориентированных задания от стандартных задач (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

- значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию обучающегося;
- условие задания сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов основного предмета, из другого предмета или из жизни, на которые нет явного указания в тексте задания;

- информация и данные в задании могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т.д.), что потребует распознавания объектов;

- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задания.

Кроме выделенных четырех характеристик, практико-ориентированные задания имеют следующие:

1. по структуре эти задания – нестандартные, т.е. в структуре задания не все его компоненты полностью определены;

2. наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задания, что приводит к объемной формулировке условия;

3. наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причем данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

При выполнении практико-ориентированных заданий следует руководствоваться следующими общими рекомендациями:

- для выполнения практико-ориентированного задания необходимо внимательно прочитать задание, повторить лекционный материал по соответствующей теме, изучить рекомендуемую литературу, в т.ч. дополнительную;

- выполнение практико-ориентированного задания включает постановку задачи, выбор способа решения задания, разработку алгоритма практических действий, программы, рекомендаций, сценария и т. п.;

- если практико-ориентированное задание выдается по вариантам, то получить номер варианта исходных данных у преподавателя; если нет вариантов, то нужно подобрать исходные данные самостоятельно, используя различные источники информации;

- для выполнения практико-ориентированного задания может использоваться метод малых групп. Работа в малых группах предполагает решение определенных образовательных задач в рамках небольших групп с последующим обсуждением полученных результатов. Этот метод развивает навыки сотрудничества, достижения компромиссного решения, аналитические способности.

ПОДГОТОВКА К ДИСКУССИИ

Дискуссия - практическое занятие, в основе его заложены несколько различных точек зрения на один и тот же вопрос, в результате обсуждения которых участники приходят к приемлемым для каждого из них позициям и решениям. Современный образовательный метод по сути своей является «проблемно-ориентированным подходом к обучению и позволяет сфокусировать внимание студентов на анализе и разрешении какой-либо конкретной проблемной ситуации.

Цель дискуссии - раскрыть широкий спектр мнений по выбранной для обсуждения проблеме с разных точек зрения, обсудить неясные и спорные моменты, связанные с данной проблемой, и достичь консенсуса, то есть всестороннее глубокое рассмотрение актуальной проблемы путем ее свободного группового обсуждения.

Неотъемлемые составляющие дискуссии - это:

1. неразрешённый вопрос;

2. равноправное участие представителей всех заинтересованных сторон;

3. выработка приемлемых для всех участников решений по обсуждаемому вопросу.

При проведении дискуссии для достижения положительного результата и создания деловой атмосферы необходимо:

- предусмотреть оптимальное количество участников;
- обеспечить работу технических средств для аудио- и видеозаписи;
- установить регламент выступлений;
- обеспечить соответствующее оформление аудитории.

Методика организации и проведения дискуссии

Обычно выделяют три этапа в организации и проведении «круглого стола»: подготовительный, дискуссионный и завершающий. Для каждого этапа студент должен быть соответствующим образом подготовлен:

1. *Подготовительный этап:*

- выбор проблемы (проблема должна быть острой, актуальной, имеющей различные пути решения). Выбранная для обсуждения проблема может носить междисциплинарный характер, она должна представлять практический интерес для аудитории с точки зрения развития профессиональных компетенций. Тема заранее студенту известна. Тему задает преподаватель;

- подбор модератора (модератор руководит дискуссией, поэтому должен на высоком уровне владеть искусством создания доверительной атмосферы и поддержания дискуссии, а также методом наращивания информации). Студент может быть модератором при должной подготовке и помощи со стороны преподавателя;

- подбор дискутантов;

- подготовка сценария (проведение дискуссиии по заранее спланированному сценарию позволяет избежать спонтанности и хаотичности

в дискуссии). Сценарий также заранее студенту известен, так как его выполнение на занятии предполагает дополнительную самостоятельную подготовку вне аудитории.

Сценарий предполагает:

- определение понятийного аппарата (тезауруса);
- краткую содержательную вступительную речь модератора, в которой объявляется тема и спектр затрагиваемых в ее рамках проблем, контекст желаемого обсуждения;
- перечень вопросов дискуссионного характера (до 15 формулировок);
- разработку «домашних заготовок» ответов, подчас противоречивых и неординарных с использованием репрезентативной выборки информации;
- заключительную речь модератора;

• оснащение помещения стандартным оборудованием (аудио - видеотехникой), а также мультимедийными средствами с целью поддержания деловой и творческой атмосферы;

• консультирование участников (позволяет выработать у большинства участников определенные убеждения, которые в дальнейшем будут ими отстаиваться);

• подготовка необходимых материалов (на бумажном или электронном носителях): это могут быть статистические данные, материалы экспресс-опроса, проведенного анализа имеющейся информации с целью обеспечения участников дискуссии.

2. Дискуссионный этап:

• выступление модератора, в котором дается определение проблем и понятийного аппарата (тезауруса), устанавливается регламент, правила общей технологии занятия в форме дискуссии и информирование об общих правилах коммуникации.

К общим правилам коммуникации относятся рекомендации:

- избегай общих фраз;
- ориентируйся на цель (задачу);
- умей слушать;
- будь активен в беседе;
- будь краток;
- осуществляй конструктивную критику;
- не допускай оскорбительных замечаний в адрес собеседника;

• проведение «информационной атаки»: участники высказываются в определенном порядке, оперируя убедительными фактами, иллюстрирующими современное состояние проблемы;

• выступление дискутантов и выявления существующих мнений на поставленные вопросы, акцентирования внимания на оригинальные идеи. С целью поддержания остроты дискуссии рекомендуется формулировать дополнительные вопросы;

• ответы на дискуссионные вопросы;

• подведение модератором мини-итогов по выступлениям и дискуссии: формулирование основных выводов о причинах и характере разногласий по исследуемой проблеме, способах их преодоления, о системе мер решения данной проблемы.

3. Завершающий этап:

- подведение заключительных итогов ведущим;
- выработка рекомендаций или решений;
- установление общих результатов дискуссии.

ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к экзамену по дисциплине «Экономика и менеджмент горного производства» обучающемуся рекомендуется:

1. повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «Экономика и менеджмент горного производства».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса;

2. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *экзамене* особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса;

3. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *экзамене* (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во-первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию);

4. следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к *экзамену* на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

РУССКИЙ ЯЗЫК И КУЛЬТУРА РЕЧИ

Специальность
21.05.04. Горное дело

Специализация *№ 3*
Открытые горные работы

квалификация выпускника: специалист

формы обучения: очная, заочная

Автор: Меленскова Е. С., канд. филол. наук, доц.

Екатеринбург

Контрольная работа по дисциплине «Русский язык и культура речи» является оценочным средством по Разделу 2. «Современный русский язык. Типология языковых норм».

Её задания направлены на оценку уровня умений и навыков, формирующих компетенцию ОПК-2 *(готовность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач профессиональной деятельности).*

уметь	– узнавать диалектизмы, жаргонизмы, профессионализмы, просторечные слова и давать им верную для конкретной речевой ситуации оценку; – фиксировать в устной речи нарушения акцентологических, орфоэпических норм и исправлять допущенные ошибки; – находить речевые и грамматические ошибки в устной и письменной речи, устранять их; – соблюдать орфографические и пунктуационные нормы в своей письменной речи.
владеть	– навыками работы с ортологическими словарями; – навыками эффективного общения с соблюдением всех языковых и этических норм.

Для выполнения студентам может быть предложена 1) контрольная работа по орфографическим и пунктуационным нормам и 2) контрольная работа на разные типы языковых норм. Можно их рассматривать как две части одной большой контрольной работы по языковым нормам.

Контрольная работа по орфографическим и пунктуационным нормам

В данной контрольной работе студентам предлагается списать текст научного стиля, вставив пропущенные буквы, раскрыв скобки и расставив знаки препинания.

Пример варианта данной контрольной работы:

Контрольная работа по орфографическим и пунктуационным нормам
Вариант 1

<u>Задание</u>: пишите текст, вставив пропущенные буквы, раскрыв скобки и расставив знаки препинания.

Горные п…роды сл…гают поверхность (З, з)емли и уходят (в)глубь на десятки кил…ометров. Их изучением занимает…ся геология. (З, с)десь нужно ут…чнить пр…дмет этой одной из др…внейших естествен…ых наук. Геология в широком смысле слова наука о (З, з)емле. Но это определение слишком общее так как (З, з)емля являет…ся пр…дметом изучения ряда других наук астрономии геодезии (поч…во)ведения географии и т. д. (По)этому прав…льнее сказать что геология изучает верхнюю ч…сть нашей планеты называ…мую з…мной корой и…следуя ее состав стр…ение и процес…ы прот…кающие на ней с момента обр…зования до наш…х дней.

З…мная кора состоит из камней или горных п…род. Од…наковое ли зн…чение имеют эти н…звания? Камень это бытовое или т…хническое понятие и в геологии оно не

прим…няет…ся. Геологи пользуют…ся понятием «горная п…рода». Что(же) представляют собой горные п…роды? Это твердые мя…кие рыхлые и сыпучие мас…ивы из которых с…стоит верхняя об…лоч…ка (З, з)емли т…лщиной до 40-60 кил…ометров. Таким образом горная п…рода (в)отличи… от ж…тейского понимания слова «камень» вовсе (не)об…зательно твердая. (По)этому к горным п…родам относят…ся (не)только гранит извес…няк и другие крепкие п…роды но и пл…стич…ная глина и рыхлый п…сок. От горных п…род нужно отл…чать м…нералы природные химические соед…нения и (само)родные химические эл…менты. Они своего рода «кирпичи» из которых построен…о «(з, с)дание» горной п…роды.

О со…тношении между горными п…родами и м…нералами очень хорошо писал выд…ющийся (петро)граф Ф. Ю. Левинсон-Лессинг *если(бы) можно было сравнивать з…мную кору по сложности ее стр…ения и с…става с (не)которым сложным организмом можно было(бы) ск…зать что горные п…роды это ткани из которых построе(н, нн) наш организм а м…нералы сл…гающие его клетки.*

Перед контрольной работой рекомендуется в качестве тренировки выполнить упражнения с целью повторения основных правил орфографии и пунктуации:

Меленскова Е. С. КУЛЬТУРА РЕЧИ И СТИЛИСТИКА РУССКОГО ЯЗЫКА: учебное пособие для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 – «Технология геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело». – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 88 с.

Зад. 5-12 стр. 10-19

В случае возникновения трудностей при выполнении упражнений можно обратиться к следующим учебным пособиям:

Культура устной и письменной речи делового человека: Справочник. Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания). Раздел «Трудные случаи орфографии и пунктуации» стр. 135-148.

Миняева В. И. Репетитор по русскому языку. Орфография. Пунктуация. Культура речи. Екатеринбург: УГГУ, 2007. 239 с. (и другие издания)

Контрольная работа на разные типы языковых норм

В данную контрольную работу включены задания, нацеленные на проверку владения акцентологическими, орфоэпическими, лексическими и грамматическими (словообразовательными, морфологическими, синтаксическими) нормами.

Пример варианта данной контрольной работы:

Контрольная работа по акцентологическим, орфоэпическим, лексическим и грамматическим нормам
Вариант 1

1. Расставьте ударения в следующих словах:

Асимметрия, важно, диспансер, звонит, ирис, обеспечение, откупорить, пуловер, склады, по средам.

2. Укажите произношение выделенного сочетания:

*Ал**чн**ый, ар**те**рия, двое**чн**ик, **де**дукция, **де**када, кое-**что**, Вера Кузьмини**чн**а, **те**мп,*

***те**рап**е**вт, шапо**чн**ое знакомство.*

3. Найдите в следующих предложениях нарушения лексических норм. Запишите исправленный вариант:

1. В коллективе бригадир пользовался особым приоритетом. 2. Все герои романа Булгакова имеют свои индивидуальные черты. 3. Студенты долго не могли сдать «хвосты» за первую сессию. 4. Первая премьера этого фильма состоялась на «Четвертом канале». 5. В последнем письме к родителям сын выразил свои мысли более понятливо. 6. В последний раз на экзамене Стасу подфартило как никогда. 7. В моей жизни поступление в университет стало самым памятливым событием. 8. Религия вновь возродилась в нашей стране после распада СССР. 9. Чистота улиц Екатеринбурга в целом не прогрессировала от предпринимаемых администрацией города мер. 10. К четвергу нам задали написать эссе по отечественной истории и две письменные работы по химии и геодезии.

4. Найдите существительные, у которых неправильно определен род. Запишите словосочетания в исправленном виде.

Очередное НЛО, хрустальная бра, симпатичное колли, неудавшийся НЭП, далекое Мехико, упрямая недоросль, современный ТВ, сильный цунами, молодой коллега, серьезная завкафедрой, ответственные жюри, страшная зануда, индийский раджа, освещенное авеню, известная адвокат.

5. Образуйте форму родительного падежа множественного числа от следующих существительных:

Беляши, джинсы, гетры, кочерги, мечты, носки, татары, полотенца, чулки, яблоки, болгары, граммы, цыгане, сани, вафли.

6. Запишите прописью числительные в следующих предложениях:

1. В ходе проверки нарушения техники безопасности были выявлены на 3 545 предприятиях. 2. К августу мы гарантируем доставку товара на сумму 6 247 900 рублей. 3. В этом месяце прививки от гриппа были сделаны 283 сотрудникам и 534 студентам.

7. Найдите и исправьте нарушения грамматических норм в следующих предложениях:

1. Деревья росли по обоим сторонам улицы. 2. Руководство комбината потребовало доложить годовые итоги работы. 3. Выросло целое поколение, для которых Советский Союз является историей. 4. Окончив школу, мне захотелось пойти работать, а не продолжать учебу. 5. ООН принял к рассмотрению предложенный Россией документ. 6. Им руководила жажда к деятельности. 7. Говорят, что много лет потребуются на восстановление заповедника после пожара. 8. К концу соревнований в более лучшем положении оказалась команда «Москва». 9. Алёна не ответила ему, задумчиво следя за игрой волн, колыхая тяжелый баркас. 10. Перед нами новая интересная игрушка для детей из пластмассы.

Комментарии по заданиям.

1. В задании № 1 необходимо расставить ударения в предложенных словах или найти слова, в которых ударение поставлено неверно, и исправить.
2. В задании № 2 необходимо указать произношение выделенных сочетаний или найти слова, в которых неверно указано произношение, и исправить.
3. В задании № 3 проверяется владение лексическими нормами и умение исправлять речевые ошибки.

4. В задании № 4 проверяется умение студента определять род у существительных и аббревиатур: необходимо либо определить род у предложенных слов, либо найти словосочетания, в которых род определен неправильно, и исправить.
5. В задании № 5 проверяется умение студента образовывать две формы существительных: либо форму именительного падежа множественного числа, либо родительного падежа множественного числа. От студента требуется образовать необходимую форму или справить допущенные при образовании определенной формы ошибки.
6. В задании № 6 проверяются различные умения студентов в плане морфологических или синтаксических норм (образование той или иной части речи, склонение числительных, построение словосочетаний по типу управление, построение предложения с деепричастным оборотом и др.).
7. В задании № 7 необходимо найти в предложении допущенную синтаксическую или грамматическую ошибку и записать исправленный вариант.

Перед контрольной работой рекомендуется в качестве тренировки выполнить упражнения, на основе которых данная работа составлена:

Меленскова Е. С. КУЛЬТУРА РЕЧИ И СТИЛИСТИКА РУССКОГО ЯЗЫКА: учебное пособие для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 – «Технология геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело». – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 88 с.

Зад. 13-15 стр. 19-20 (акцентологические нормы)

Зад. 16-20 стр. 20-23 (орфоэпические нормы)

Зад. 21 стр. 23 (словообразовательные нормы)

Зад. 22-29 стр. 23-26 (лексические нормы)

Зад. 30-40 стр. 27-31 (морфологические нормы)

Зад. 41-44 стр. 31-34 (синтаксические нормы)

При выполнении заданий рекомендуется обращаться к словарям и справочникам. В указанном учебном пособии есть отсылки к необходимой литературе.

Обе контрольных работы выполняются на отдельных листах и сдаются на проверку ведущему преподавателю. Критерии оценивания указаны в КОМ дисциплины «Русский язык и культура речи» для данной специальности и специализации.

Автор-составитель: Меленскова Е. С., кандидат филологических наук, доцент

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

РУССКИЙ ЯЗЫК И КУЛЬТУРА РЕЧИ

Специальность
21.05.04. Горное дело

Специализация *№ 3*
Открытые горные работы

квалификация выпускника: специалист

формы обучения: очная, заочная

Автор: Меленскова Е. С., канд. филол. наук, доц.

Екатеринбург

Методические рекомендации к практическим занятиям

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе лекций, ознакомления с учебной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют более качественному усвоению знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы.

Приступая к подготовке к практическому занятию необходимо изучить соответствующие конспекты лекций по заданной теме, главы учебников или учебных пособий, разобрать примеры, ознакомиться с дополнительной литературой (например, словарями). Конспектирование дополнительных источников также способствует более плодотворному усвоению учебного материала. Следует обращать внимание на основные понятия и классификации, актуальные для темы практического занятия.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студента. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения и проследить их логику. Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Все это находит свое отражение в процессе выполнения итогового зачетного теста.

Очевидны три структурные части практического занятия: предваряющая (подготовка к занятию), непосредственно само практического занятия (обсуждение вопросов темы в группе, выполнение упражнений по теме) и завершающая часть (последующая работа студентов по устранению обнаружившихся пробелов). Не только само практическое занятие, но и предваряющая, и заключающая части его являются необходимыми звеньями целостной системы усвоения вынесенной на обсуждение темы.

Перед очередным практическим занятием целесообразно выполнить все задания, предназначенные для самостоятельного рассмотрения, изучить лекцию, соответствующую теме практического занятия. В процессе подготовки к практическому занятию закрепляются и уточняются уже известные и осваиваются новые знания. Столкнувшись в ходе подготовки с недостаточно понятными моментами темы, необходимо найти ответы самостоятельно или зафиксировать свои вопросы для постановки и уяснения их на самом практическом занятии.

В начале занятия следует задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, поскольку всегда сначала студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

В ходе практического занятия каждый должен опираться на свои конспекты, сделанные на лекции или по учебникам и учебным пособиям, на самостоятельно выполненные упражнения по данной теме.

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь/

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе прослушивания и запоминания лекционного материала, ознакомления с учебной и научной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют получению наиболее качественных знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы. Планы практических занятий состоят из отдельных тем, расположенных в соответствии с рабочей программой изучаемой дисциплины. Каждая тема включает следующие элементы:

- цель проведения занятия;
- теоретические вопросы, необходимые для усвоения темы;
- задания;
- список литературы по теме для подготовки к практическому занятию.

Работа на практических занятиях направлена на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемой дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений (например, аналитических).

В ходе занятий у студентов формируются практические умения и навыки, отраженный в РУП.

Методические материалы к практическим занятиям

ТЕМА 1. СЛОВАРИ И СПРАВОЧНИКИ ПО КУЛЬТУРЕ РЕЧИ. СИСТЕМА СЛОВАРНЫХ ПОМЕТ

Цель – вспомнить классификацию словарей и проверить у студентов умение работать с ними (лексикографическая грамотность).

Основные понятия темы:

Лексикография – раздел науки о языке, занимающийся теорией и практикой составления словарей.
Энциклопедический словарь – книга, содержащая описание научных понятий и терминов, исторических событий, характеристику персоналий из разных областей или определенной области знания.
Лингвистический словарь – книга, содержащая собрание слов (морфем, фразеологизмов и т. д.), расположенных по определённому принципу (как правило, по алфавиту), и дающая сведения об их значениях, употреблении, происхождении, переводе на другой язык и т. п.
Словарная статья – отдельный текст, посвященный языковой единице (слову, морфеме и т. п.) или их группе (лексической группе, гнезду слов и т. п.).
Помета – применяемое в словарях сокращенное указание на какие-либо характерные признаки слова или его употребления.

Задание 1. *Прочитайте и сравните словарные статьи, взятые из разных словарей. Найдите общую и различающую их дополнительную информацию. Объясните, чем вызвано различие.*

ФАЗА – **1.** В геохимии: совокупность однородных частей системы, одинаковых по термодинамическим свойствам (тем, которые не зависят от количества вещества) и отграниченных от других частей поверхностью раздела. В природных процессах минералообразования могут принимать участие газовая Ф., жидкие Ф. и твердые Ф. – металлы. Системы, состоящие из одной Ф., называются однофазными, или гомогенными (напр., раствор различных солей в воде; кристалл кварца без включений; мономинеральная горная порода); состоящие из нескольких Ф. – многофазными, или гетерогенными (напр., раствор вместе с твердым осадком; кристалл кварца с газово-жидким включением; полиминеральная порода). **2.** В исторической геологии: термин, иногда употребляющийся для обозначения времени, соответствующего длительности накопления отложений, составляющих зону как часть яруса. Термин был условно принят в этом значении VIII сессией МГК в Париже в 1900 г., но не стал общепринятым. При изучении четвертичного периода иногда фазой называют время каждого отдельного оледенения и промежутков между ними (*Геологический толковый словарь*[1]).

ФА́ЗА, -ы, *ж.* [нем. Phase < греч. phasis появление (о небесных светилах)]. **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н., а также само положение, форма чего-н. в данный момент; то же, что фазис. *Новая ф. в развитии общества. Луна в первой фазе.* **2.**

[1] Геологический толковый словарь [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.edudic.ru/geo/

физ. Величина, характеризующая состояние какого-н процесса в каждый момент времени *Ф. колебания маятника. Газообразная ф. вещества.* **Фа́зовый** – относящийся к фазе (в 1-м и 2-м знач.), фазам. 3. *ср.* Отдельная группа обмоток генератора. **Фа́зный** – относящийся к фазе, фазам. (Крысин Л. П. Толковый словарь иноязычных слов. М., 2001. С. 810)

ФА́ЗА, -ы, *ж* 1. Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н. (напр положения планеты, формы или состояния вещества, периодического явления, общественного процесса), а также само положение, форма в этот момент (книжн.) *Первая ф. Луны. Жидкая ф. Газообразная ф. Ф. колебания маятника. Вступить в новую ф. развития.* 2. Отдельная группа обмоток генератора (спец.). | *прил.* **фа́зовый**, -ая, -ое (к 1 знач.) и **фа́зный**, -ая, -ое (ко 2 знач.) ♦ **Фазовые глаголы** – в лингвистике глаголы со значением начала, продолжения или окончания действия. (Ожегов С. И. и Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка М., 2005. С. 847).

Задание 2. *Познакомьтесь с типами помет, используемых в толковых словарях. Объясните значение всех помет, приведенных в качестве примера.*

ТИПЫ ПОМЕТ ТОЛКОВОГО СЛОВАРЯ

Типы помет	Примеры помет	Значение отсутствия помет
1. Помета, указывающая на принадлежность к функциональному стилю	*науч., газет., публиц., оф.-дел., разг., книжн.* и др.	Слово межстилевое
2. Помета, указывающая на сферу употребления слова	*обл., прост., жарг., спец.* и др.	Слово общеупотребительное
3. Помета, указывающая на принадлежность к активному / пассивному запасу	*устар., ист., арх., нов.* и др.	Слово принадлежит к активному запасу
4. Помета, указывающая на эмоционально-экспрессивную окраску слова	*ласк., ирон., шутл., умнич., бран., пренебр., высок., неодобр.* и др.	Слово нейтральное

Задание 3. *Прочитайте словарные статьи, извлеченные из толкового словаря современного русского языка. Укажите пометы и объясните, что они означают.*

Аборигéн, -а, *м.* (книжн.) – коренной житель страны, местности. || *ж.* **аборигéнка** (разг.)

Грамотéй, -я, *м.* (устар. и ирон.) – грамотный человек.

Деяние, -я, *ср.* (высок. и спец.) – действие, поступок, свершение.

Женáтик, -а, *м.* (прост. шутл.) – женатый человек (обычно о молодожене)

Иждивéнчество, -а, *ср.* (неодобр.) – стремление во всем рассчитывать не на свои силы, а на помощь других, вообще жить за чужой счет

Карапýз, -а, *м.* (разг. шутл.) – толстый, пухлый малыш.

Кляча, -и, *ж.* (разг. пренебр.) – плохая (обычно старая) лошадь

Лéнчик, -а, *м.* (спец.) – деревянная основа седла

Матéршина, -ы, *ж.*, *собират.* (прост. груб.) – неприличная брань.

Мúшка, -и, *м.* (разг. ласк.) – то же, что медведь

Небезызвéстный, -ая, -ое, <-ен, -нна (обычно ирон.) – достаточно, хорошо известный.

Неулыба, -ы, *м.* и *ж.* (обл. и прост.) – человек, который редко улыбается, неулыбчив

Новоде́л, -а, *м.* (разг.) – здание, сооружение, построенное на месте уничтоженного, исчезнувшего и воспроизводящее его прежний внешний вид.

Нувори́ш, -а, *м.* (книжн. презр.) – богач, наживший свое состояние на социальных переменах или бедствиях, на разорении других.

Общепи́т, -а, *м.* (офиц.) – сокращение: общественное питание – отрасль народного хозяйства, занимающаяся производством и продажей готовой пищи и полуфабрикатов. || *прил.* **общепи́товский**, -ая, -ое (разг.).

Остоло́п, -а, *м.* (прост. бран.) – глупец, болван.

Отчи́зна, -ы, *ж.* (высок.) – отечество, родина.

Побо́ры, -ов. **1.** Чрезмерные, непосильные налоги или сборы (устар.). **2.** *перен.* Неофициальные сборы средств на что-нибудь (разг. неодобр.).

Предуве́домить, -млю, -мишь; -мленный; *сов.*, *кого-что* (устар. и офиц.) – заранее уведомить.

Риста́лище, -а, *ср.* (стар.) – площадь для гимнастических, конных и других состязаний, а также само такое состязание.

Сва́ра, -ы, *ж.* (прост.) – шумная перебранка, ссора.

Торга́ш, -а, *м.* **1.** То же, что торговец (устар. неодобр.). **2.** *перен.* Человек, который выше всего ставит свою выгоду, корысть, личный интерес (презр.).

Умка, -и, *м.* (обл.) – белый медведь.

Упова́ние, -а, *ср.* (книжн., часто ирон.) – то же, что надежда.

Ха́м, -а, *м.* (презр. и бран.) – грубый, наглый человек.

Задание 4. *Познакомьтесь с пометами, используемыми в орфоэпических словарях, словарях грамматических трудностей и т. п. Какие пометы указывают на императивную норму, а какие на диспозитивную? Запишите их в предложенную ниже таблицу.*

НОРМАТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОВ[2]

Словарь является не просто нормативным, а ставит своей задачей показать литературную норму во всем многообразии ее проявлений. В отличие от большинства нормативных словарей, словарь отражает и такие факты речи, которые считаются неверными с точки зрения литературной нормы. Все запретительные пометы, которые характеризуют неверные варианты, снабжаются значком «восклицательный знак» (!). В Словаре используются ясные и общедоступные способы нормативной оценки вариантов.

1. Равноправные варианты соединяются союзом *и*:

ба́рхатка *и* бархо́тка;

ведёрцев *и* ведёрец.

При этом на первом месте помещается обычно традиционный вариант, более частотный в употреблении.

2. Помета «допустимо» (*и доп.*) свидетельствует о том, что оба варианта соответствуют нормам литературного языка. Естественно, что предпочтителен вариант, помещённый на первом месте. Такая помета используется, как правило, применительно к

[2] Орфоэпический словарь русского языка для школьников / Сост. О. А. Михайлова. Екатеринбург: У-Фактория, 2002. С. 6-8.

новым, входящим в норму вариантам ударения, произношения и грамматическим формам. Например:

бредо́вый *и доп.* бредово́й;

белёсый *и доп.* беле́сый;

ма́шет *и доп.* маха́ет.

3. Помета «допустимо устаревшее» (*доп. устар.*) означает, что второй вариант, хотя и находится в пределах литературной нормы, всё реже встречается в речевой практике, постепенно утрачивается, переходя в пассивный языковой фонд. Например:

ворва́лся *и доп. устар.* ворвался́

вспе́ненный, -ая, -ое, *кратк. ф.* вспе́нен, вспе́нена *и доп. устар.* вспенённый, вспенён, вспенена́

бу́до[чн]ик *и доп. устар.* бу́до[шн]ик.

4. Помета «не рекомендуется» (*не рек.*) применяется в тех случаях, когда отмеченный ею вариант в данное время не признаётся нормативным. Однако его широкое употребление в современной речи и соответствие общим тенденциям языкового развития не исключают возможности признания этого варианта литературной нормой в будущем. Например:

бало́ванный ! *не рек.* ба́лованный;

вручу́т ! *не рек.* вру́чит;

гру́фели, -ей ! *не рек.* грифеля́, -е́й.

5. Помета «не рекомендуется устаревшее» (*не рек. устар.*) означает, что снабжённый ею вариант, ныне находящийся за пределами нормы, представляет собой бывшую норму. Например:

горшо́чек, горшо́чка ! *не рек. устар.* горше́чек;

да́рит ! *не рек. устар.* дарю́т.

6. Помета «неправильно» (*неправ.*) служит для предупреждения распространённых речевых ошибок. Например:

вы́боры, вы́боров ! неправ. выбора́, выборо́в;

компромету́ровать, -рую, -рует ! неправ. компроме[н]ту́ровать

Рекомендательные пометы	Запретительные пометы

ТЕМА 2. ОРФОГРАФИЧЕСКИЕ И ПУНКТУАЦИОННЫЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила орфографии и пунктуации русского языка.

Основные понятия темы:

Орфографические нормы – это правила написания слов.
Пунктуационные нормы – это правила расстановки знаков препинания.

Задание 1. *Повторите правописание гласных (безударных и чередующихся) и согласных в корне слова. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы. Расставьте знаки препинания. Объясните свой выбор.*

Я р…шил в…рнуться д…мой. Быстрыми шагами я прошел зар…сли кустов. У моих ног т…нулась р…внина а дальше ст…ной возвышался мрачный лес. Я осм…трел окрес…ность и спустился с х…лма. Высокая тр…ва на дне д…лины б…лела р…вной скат…ртью. Я вышел на опушку и пошел полем. Трудно было проб…раться по у…кой тр…пинке. Кругом р…сла высокая ро…ь. Н…чная птица промчалась и к…снулась меня св…им крылом. В т…шине глухо разд…вались мои шаги. Но вот на в…чернем небе стали заж…гаться звезды. Забл…стел серп м…л…дого мес…ца. Теперь я узнал д…рогу и предпол…гал что через час буду дома.

Задание 2. *Повторите правописание приставок. Перепишите предложения, вставив пропущенные буквы. Расставьте недостающие знаки препинания при однородных членах предложения.*

Перед самым селом п…р…езжаем речку вброд. На спуске перед церковью ра…ливается море сарафанов мужицких голосов. Народ все пр…бывает мужики в пиджаках ребятишки со свистульками, на ра…пряженных телегах сидят пр…старелые пр…езжие. Над колокольнями белеют верхи палаток, а над ними – облака, и падают вьются стрелами свищут в воздухе стрижи.

Медленно пр…бираясь в ра(с, сс)тупившейся толпе, по…ъезжаем к ограде пр…вязываем лошадей. На дощатом пр…лавке ра…ложены картинки и книги, и мещанин-пр…давец по…совывает календари и книги с з…манчивыми названиями. Всё смех и ржанье лошадей крик бабы, ругающей мужика, (с, з)ливается в один ярмарочный гул. За время работы ярмарки хочется успеть (с, з)делать многое пр…смотреть липового меда п…дешевле п…торговаться в свое удовольствие пр…купить гостинцев родным.

В обед негаданно с…бирается туча, и дождь, по…нимая пыль, барабанит по усыпанной по…солнечной шелухой дороге. Но летний дождь быстро пр…ходит, и яркая радуга, упершись в реку, широким полотенцем ра…кидывается над ярмаркой. С ярмарки народ ра…ъезжается только после обеда. (По И. Соколову-Микитову)

Задание 3. *Повторите правописание Ъ и Ь (учтите разные функции Ь). Перепишите, вставив, где необходимо, пропущенные буквы.*

Пред…юбилейное мероприятие, обжеч…ся огнем, решил удалит…ся проч…, кофе был горяч…, достан…те багаж…, чувствовать гореч… неудач…, выть по-волч…и, любител…ская кинос…емка, должность камен…щика, выйти замуж… осен…ю, береч… здоров…е, сроч…ный заказ, лечить кон…юнктивит, уловить фал…ш… в голосе, трех…этажный павил…он, заменить мед…ю, назнач…те время трех встреч…, с…еш… во время лан…ча, следить за своей реч…ю, купает…ся в реке, оформиш… пен…сию, остав…те антиквару старинную брош…, четырех…ядерный процессор, волосы до плеч…, сер…езный компан…он, умнож…те полученный резул…тат, он хорош… собой, выявить из…ян, декабр…ские морозы, с…агитировать на выборы, коротко стрич…ся, сверх…естественный об…ект, боиш…ся ос…минога, неб…ющаяся вещ…, об…емный текст п…есы, не забуд…те плащ…, невтерпеж… ждать, раз…яренный бык, разрабатывать кар…ер.

Задание 4. *Повторите правописание Н и НН в причастиях, прилагательных и образованных от них формах. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и расставив недостающие знаки препинания при причастных оборотах. Причастные обороты подчеркните.*

Было нестерпимо холодн…о, и даже не верилось, что днем придется жариться в раскален…ом пекле. Среди потрескавшихся от зноя пород обнаруживаются словно бы отполирован…ые плиты гранита. В этом заброшен…ом неповторимом уголке необозримой пустыни существование человека – никогда не прекращающееся сражение с природой. Палатки кочевников соседствуют с домами сложен…ыми из обожжен…ого кирпича.

Снаружи жилище покрывает сетка сплетен…ая из жесткой травы. Узор наносится и на пленку, которой палатка скрепляется изнутри.

Все палатки украшен…ы под цвет камен…ых глыб. Комнаты соединен…ы переходами из плетен…ых циновок. Все разложен…о аккуратн…о, повсюду чистота. Сбоку вышел мужчина в незаменимом традицион…ом облачении. На нем накидка казавшаяся накрахмален…ой. Бросался в глаза и меч повеш…н…ый к поясу.

Геолог подходит к карте разукрашен…ой цветными пометками. Все, что нанесен…о на нее, – плод трудн…ых поисков в горах прокален…ых солнцем. Новые месторождения открывают разведчики недр. (По Б. Фетисову)

Задание 5. *Повторите правописание НЕ и НИ с разными частями речи. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки.*

Нет (н…)чего лучше Невского проспекта, по крайней мере в Петербурге. Чем (н…)блестит эта улица – красавица нашей столицы! Я знаю, что (н…)один из бедных чиновных ее жителей (н…)променяет на все блага Невского проспекта. Да и кому же он (н…)приятнен? Здесь единствен…ое место, где показываются люди (н…)по(н…)обходимости, куда загнала их надобность и меркантильный интерес, об…емлющий весь Петербург. Здесь житель Петербургской или Выборгской части, (н…)сколько лет (н…)бывавший у своего приятеля в Песках или у Московской заставы, может быть уверен, что встретится с ним (н…)пр…мен…о.

Можно сказать решительно, что в это время, то есть до двенадцати часов, Невский проспект (н…)составляет (н…)(для)кого цели, он служит только средством: он постепен…о заполняется лицами, имеющими свои занятия, свои заботы, свои досады, но вовсе (н…)думающими о нем. В это время, что бы вы на себя (н…)надели, хотя бы даже вместо шляпы был картуз у вас на голове, хотя воротнички слишком высунулись из вашего галстука, – (н…)кто этого (н…)заметит. (по Н. В. Гоголю)

Задание 6. *Повторите правописание наречий и частиц. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки. Вставьте недостающие знаки при деепричастных оборотах. Деепричастия подпишите.*

Лето выдалось знойное и сокрушило все. Земля иссохла, прокалилась до того, что ящерицы (не)боясь (ни)кого прибегали на порог с отчаянно колотящимися глотками, лиш…(бы) куда(нибудь) спрятаться. А коршуны забирались (в)высь и (на)долго умолкали в горящем мареве.

И ребят непоседливых сморила (не)померная жара. Они прятались от нее под стенами домов выглядывая (из)редк… (от)туда на проходящие мимо них пассажирские и товарные поезда. Когда у разъезда составы сбавляли ход, детям казалось, что уж… этот(то) поезд

притормозит и остановится. Они бежали за ним (в)догонку заслоняясь ручонками от солнца и (по)детски наивно надеясь укатить из пекла.

Тяжко было смотреть, с какой завистью и печалью малыши глядели (в)след уходящим в неизвестность, (на)стеж… раскрытым вагонам. Пассажиры выглядывали из открытых окон, то(же) сходили с ума от духоты и мечтали о том, что(бы) (на)утро очутиться там, где прохладные реки и зеленые леса. Вряд(ли) они задумывались о том, что жара может задержаться… (По Ч. Айтматову)

Задание 7. *Повторите правила постановки знаков препинания в сложных предложениях. Перепишите предложения, расставив знаки препинания. Обратите особое внимание на пунктуацию при однородных и обособленных членах предложения. Подчеркните грамматические основы.*

1. Сначала соседи смеялись между собою над высокомерием Троекурова и каждый день ожидали чтоб незваные гости посетили Покровское где было им чем поживиться но наконец принуждены были с ним согласиться и сознаться что и разбойники оказывали ему непонятное уважение. (А. С. Пушкин)
2. Раза три в год Финский залив и покрывающее его серое небо нарядятся в голубой цвет и млеют любуясь друг другом и северный человек едучи из Петербурга в Петергоф не насмотрится на редкое чудо млеет в непривычном зное и все заликует дерево цветок и животное. (И. А. Гончаров)
3. Я писал вам как мы гонимые бурным ветром дрожа от холода пробежали мимо берегов Европы как в первый раз пал на нас у подошвы гор Мадейры ласковый луч солнца и заплескали голубые волны засияли синие небеса как мы жадно бросились к берегу погреться горячим дыханием земли. (И. А. Гончаров)
4. Иногда бывает что облака в беспорядке толпятся на горизонте а солнце прячась за них красит их и небо во всевозможные цвета в багряный оранжевый золотой лиловый грязно-розовый. (А. П. Чехов)
5. Направо темнели холмы налево все небо было запито багровым заревом и трудно было понять был ли то пожар или же собиралась всходить луна. (А. П. Чехов)
6. Живя здесь я реже попадался на глаза отцу и его гостям и мне казалось что если я живу не в настоящей комнате и не каждый день хожу в дом то слова отца что я сижу у него на шее звучат уже как будто не так обидно. (А. П. Чехов)
7. Он пел и от каждого звука его голоса веяло чем-то родным и необозримо широким словно знакомая степь раскрывалась перед нами уходя в бесконечную даль. (И. С. Тургенев)
8. Большая низкая лампа с непрозрачным абажуром стоящая на письменном столе горела ясно но освещала только поверхность стола да часть потолка образуя на нем дрожащее круглое пятно света в остальной комнате все было в полумраке в нем можно было разглядеть только шкаф с книгами большой диван еще кое-какую мебель. (В. Гаршин)
9. Куда ни обращаешь взор всюду как будто встречаешь быстро удаляющийся образ лета которое время от времени оборачивается назад и бросает прощальную меланхолически-задумчивую улыбку. (Д. Григорович)
10. А на него посмотришь и кажется что вся эта земная деятельность для него только лишь забава и ею занят он пока а настоящие его заботы где-то впереди куда порою устремлялись его бойкие но как бы неживые оловянного блеска глаза. (Ф. Сологуб)

11. На седом фоне тумана ближайшие сосны однотонно плоско и неясно вырисовываются своими прямыми и голыми стволами и в их неподвижности среди этой голубой тишины и среди этого холодного тумана чувствуется что-то суровое печальное и покорное. (А. И. Куприн)

ТЕМА 3. АКЦЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить характеристику русского языка, составить собственный акцентологический словарь при выполнении упражнений[3].

Основные понятия темы:

Акцентологические нормы – это правила постановки ударения в слове.
Омонимы – слова, у которых от постановки ударения зависит значение.

Задание 1. *Расставьте ударения в следующих словах. Укажите варианты постановки ударения (например, ста́ртер и стартёр):*

1) Асимметрия, блага, кулинария, столяр, добыча, плато, диоптрия, творог, средства, шофер, туфля, эксперт, кремень, страховщик, нефтепровод, маркетинг, шасси, христианин, рассредоточение, досуг, жалюзи, танцовщица, шарфы, торты, искра, бармен, вероисповедание, квартал, симметрия, диспансер, обеспечение, склады, таможня, щебень, баржа, алкоголь, индустрия, приговор, генезис, договор, свекла, бижутерия, каталог, ходатайство, километр, пережитое, хвоя, полиграфия, ортопедия, пиццерия, стюард, овен, упрочение (*имена существительные*).

2) Асбестовый, совестливый, мизерный, оптовый, мастерски, украинский, втридорога, важно, тотчас, просмотровый, завидно, правы, давнишний, стары, одновременный, красивее, красивейший, равны, семестровый, счастливо, досыта, иначе, поутру, начерно, зубчатый (*имена прилагательные и наречия*).

3) Аранжировать, заржаветь, нормировать, убыстрить, заплесневеть, новорожденный, опошлить, баловать, балованный, расклешенный, дарит, включишь, включенный, копировать, повторишь, понял, звонит, закупорить, начался, начатый, положить, положил, вручит, врученный, доложишь, облегчить, осведомиться, премировать, черпать, ободрить, пломбировать, вогнутый, вскружит, буксировать, скрещенный, разрыхлить, плодоносить, наклоненный, окислить (*глагольные формы*).

Задание 2. *Поясните, как зависит значение от постановки ударения в следующих словах (омонимах):*

Глазки, замок, рожки, выкупать, ирис, характерный, полки, хлопок, мука, вычитать, орган, видение, острота, трусить, свойство, гвоздики, бронировать, кредит, угольный, правило, провидение, полнить, лавровый, электрик.

Например: пла́чу (1 лицо ед. число от глагола «плакать») – плачу́ (1 лицо ед. число от глагола «платить»).

---

[3] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей при постановке ударения.

Задание 3. *Прочитайте предложения, обращая внимание на постановку ударения в подчёркнутых словах. Составьте по аналогии свои предложения, использовав любые слова из* ***задания 1*** *и / или* ***2****.*

1. В последнем квартале этого года эксперты одной из фирм заключили выгодный договор на прокладку газопровода, за что были премированы. 2. Для обеспечения здорового образа жизни исключите из своего рациона арахис, торты и алкоголь, а включите в него творог, свеклу и щавель. 3. В мебельном отделе нашего торгового центра вы можете приобрести красивейшие кухонные гарнитуры по оптовым ценам.

ТЕМА 4. ОРФОЭПИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить правила транскрибирования слов, выявить основные трудности в плане произношения, составить собственный орфоэпический словарь при выполнении упражнений[4].

Основные понятия темы:

Орфоэпические нормы – это правила произношения слов.
Транскрипция – графическая запись того, как произносится слово (всегда в квадратных скобках).

Задание 1. *Отметьте правильное произношение сочетания ЧН в следующих словах. Распределите слова на три группы:*

[шн]	[шн] и [чн]	[чн]

1) Шуточный, копеечный, отличник, девичник, будничный, булочная, очечник, полуночник, нарочно, прачечная, скучно, скворечник, горчичник, Фоминична, яичница, достаточно, порядочный, горничная, Никитична, двоечник, пустячный, Ильинична, конечно, спичечный, подсвечник, Кузьминична.

2) Шапочный мастер – шапочное знакомство, сердечные капли – друг сердечный, подаренная перечница – чертова перечница.

Задание 2. *Отметьте правильное произношение согласного перед Е в следующих словах. Распределите слова на три группы:*

Твёрдое произношение	Варианты	Мягкое произношение

Автосервис, дефис, агрессия, дендрарий, бухгалтер, депрессия, гарем, термин, шинель, термос, патент, сессия, тенденция, рейд, газель, дезодорант, фанера, Одесса, академия, бизнесмен, деградация, менеджер, музей, деканат, темперамент, тезис, аксессуары, протекция, бандероль, гипотеза, детектив, кредо, бассейн, экспресс, дедукция, декада, темп, терапевт, дефицит, интервал, дебаты, рельсы, ниппель, компетентный, дезинформация, пресса, цистерна, стратегия, тренинг, сенсорный, сейф, портмоне.

---

[4] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей произношения.

Задание 3. *Прочитайте слова, обращая внимание на произношение ударного звука, обозначенного буквой Е:*

1) Острие, поблекший, афера, хребет, оседлый, одноименный, маневренный, опека, жернов, желчь, блеклый, желоб, безнадежный, бытие, повлекший, жердочка, никчемный, гладкошерстный, гашеный, недоуменный.

2) Именительный падеж – падеж скота;

Истекший срок – истекший кровью;

Кричит как оглашенный – оглашенный приговор;

Совершенные пропорции – совершенные поступки;

Крестный ход – крестный отец.

Задание 4. *Прочитайте слова, обращая внимание на произношение выделенных согласных:*

1) Ма**сс**а, су**рр**огат, гру**пп**а, гри**пп**, те**рр**аса, а**тт**естат, ко**лл**ега, мета**лл**, су**мм**а, а**нн**отация, криста**лл**, оди**нн**адцать, и**лл**юзия, ва**нн**а, апе**лл**яция, ка**сс**а, га**лл**юцинация, не**тт**о.

2) Дро**жж**и, бу**хг**алтер, по**зж**е, во**жж**и, и**зж**арить, вы**жж**енный, пе**сч**аный, и**зж**ить, ра**зж**ать, же**стч**е, ни**зш**ий, до**жд**и, ре**зч**е, ви**зж**ать, и**зж**ога, ма**сш**таб, мо**жж**евельник, бе**зж**изненный, ра**сч**ет, съе**зж**у, прие**зж**ай.

Задание 5*. *Прочитайте следующий текст, обращая внимание на правильное произношение и постановку ударения в подчёркнутых словах:*

Примером успешного ведения бизнеса в различных отраслях экономики является деятельность фирмы «Mihail-tur». За 11 лет ее существования удалось сформировать коллектив профессионалов из высококвалифицированных менеджеров, компетентных экспертов, торговых агентов. Компании принадлежат две трети долей уставного фонда АО «Лейбл-мастер», владельца одного из крупнейших торговых центров города. Занимаясь оптовым поставкам подростковой одежды, фирма поддерживает связи с модельными агентствами, что позволяет обновлять коллекции на 15 процентов каждый квартал. С ассортиментом одежды можно познакомиться по объемному каталогу, размещенному на корпоративном интернет-сайте. Руководство фирмы заявило о намерении углубить это направление, для чего налаживаются связи с другими поставщиками, проводятся маркетинговые исследования с целью изучения конъюнктуры рынка в трех крупнейших областях региона. В планы компании входит также сосредоточение средств в области дорожного строительства. Начата подготовка к тендерным торгам, намеченным на первую декаду ноября, к участию в которых приглашаются компании, заинтересованные в строительстве современного путепровода.

ТЕМА 5. СЛОВООБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить состав слова, научиться находить в предложениях ошибки, связанные с неверным образованием слова.

Основные понятия темы:

Словообразовательные нормы – это правила образования новых слов.

Задание 1. *Найдите в предложениях слова, в которых нарушена словообразовательная норма, запишите их. Выделите неправильно выбранную часть слова (приставку, суффикс). Исправьте допущенные ошибки.*

1. Завесьте, пожалуйста, килограмм помидоров с витрины. **2.** Студенты в очередной раз немного запоздали на лекцию. **3.** Уважаемые пассажиры, проходите по-быстрому в середину вагона или садитесь взади. **4.** Он был коренным курчанином и после учебы в Москве вернулся в родной Курск. **5.** Чтобы сдать зачет, важно завсегда посещать занятия. **6.** Одна из самых актуальных проблем современной России – это взятничество в государственных учреждениях. **7.** После концерта микрофоны со сцены надо будет перенести взад. **8.** Многие кавказские народы отличает их гостеприимчивость. **9.** Моя жизнь в этом году была наполнена заботами о заканчивании школы и поступлении в университет. **10.** Сегодня у первого курса была лекция по химии заместо высшей математики.

ТЕМА 6. ЛЕКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить основные типы речевых ошибок, связанных со значением слова.

Основные понятия темы:

Лексические нормы – это правила употребления слова в точном значении, которое закрепилось в литературном языке и зафиксировано в толковых словарях.

Паронимы – это слова однокоренные, близкие по форме, но абсолютно разные по значению.

Речевая избыточность – это употребление лишних слов (тавтология, плеоназм).

Лексическая сочетаемость – это способность слова соединяться с другими словами по значению.

Жаргонизм – слово, свойственные для речи той или иной социальной, профессиональной группы людей.

Фразеологизм – устойчивое словосочетание, смысл которого не определяется значением отдельно взятых слов

Задание 1. *Объясните разницу в значении приведенных ниже паронимов. Составьте с каждым из них словосочетание, подобрав подходящее по смыслу слово.*

Осудить – обсудить, удачливый – удачный, соседний – соседский, жилой – жилищный, поступок – проступок, опечатки – отпечатки, командированный – командировочный, усвоить – освоить, эффектность – эффективность, невежа – невежда, представить – предоставить, цельный – целый, искусный – искусственный, практический – практичный; гуманный – гуманистический – гуманитарный; плодовитый – плодовый – плодотворный, экономический – экономичный – экономный.

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях избыточные словосочетания, выпишите их. Объясните причину избыточности, указав на лишнее слово (или лишние слова).*

1. При входе в «Копирус» висит прейскурант цен на предлагаемые услуги. **2.** Уезжая из Москвы, мы купили памятные сувениры в киоске у вокзала. **3.** Для преподавателя важно то, какие взаимоотношения друг с другом сложились между студентами в группе. **4.**

Неприятно резал слух голос, доносившийся из конференц-зала. **5.** Депутату приходится встречаться со всеми социальными слоями общества.

Задание 3. *Найдите в следующих предложениях иноязычные по происхождению слова, которые употреблены в неточном значении. Запишите свой вариант исправления.*

1. Рабочий станка допустил целый ряд дефектов при изготовлении деталей. **2.** Пейзаж Екатеринбурга за последние десять лет обогатился современными постройками, хотя многие памятники архитектуры и были реконструированы до основания. **3.** В целях профилактики основное внимание уделяется ранним проявлениям, т. е. дебюту гриппа. **4.** Для окон актового зала мы долго искали гардины длиной 4 метра, а уже потом подбирали шторы в тон стен. **5.** В январе состоялся бенефис талантливого исполнителя: он впервые выступал на профессиональной сцене.

Задание 4. *Найдите в следующих предложениях нарушения правил лексической сочетаемости слов. Запишите свой вариант исправления.*

1. Грамотный руководитель должен показывать образец своим подчиненным. **2.** Нововведения сыграли важное значение в развитии горного комбината. **3.** Красочное оформление детских книг издательства «Эгмонт» должно вызвать внимание и заинтересовать покупателей. **4.** Новогодний спектакль в Театре кукол оказал на детей большое впечатление. **5.** Первую лекцию по геологии в этом году провел молодой преподаватель.

Задание 5. *Найдите в предложениях жаргонные, просторечные, разговорные слова, замените их литературным вариантом и запишите исправленный вариант.*

1. Несколько студентов до сих пор не отнесло хвостовки в деканат. **2.** В центре Екатеринбурга забабахали очередную свечку. **3.** Я считаю, что необходимо избавляться от любой нецензурщины в нашей речи. **4.** После окончания вуза мы решили замутить свой бизнес, решив, что в этом деле нам по-любому повезет. **5.** Работяги привыкли вкалывать на заводе от зари до зари.

Задание 6. *Исправьте в следующих предложениях речевые ошибки, вызванные неправильным употреблением фразеологизма.*

1. Михаил на публике говорит очень убедительно, язык у него хорошо подвязан. **2.** Туристам кинулась в глаза красота уральской природы. **3.** Его обещания рубля ломаного не стоят. **4.** Об умельцах у нас говорят: «Они в своем деле коня подковали». **5.** К сожалению, студенты редко сейчас грызут камень науки по-настоящему.

Задание 7*. *Найдите и исправьте в следующих предложениях речевые ошибки. Запишите правильный вариант.*

1. Норвежские спортсмены по-прежнему остаются нашими самыми серьезными оппонентами в биатлоне. **2.** В своей работе руководители горных предприятий руководствуются новейшей научной и методической литературой. **3.** Многодетным семьям, чтобы жить достойно, приходится искать несколько истоков доходов. **4.** Обычно мы общаемся, не придавая важности невербальным средствам коммуникации. **5.** Екатеринбургская Епархия активно распространяет душевную литературу. **6.** Продукты Черкашинского мясокомбината пользуются авторитетом у покупателей. **7.** Исправьте

ошибки в контрольной работе так, чтобы было правильно. **8.** Все места на парковке были заняты, и поэтому много машин толпилось на обочине. **9.** К маю ветераны ВОВ получили очередную добавку к пенсии. **10.** После собеседования она сказала, что на должность промоутера брали только смазливых молодых людей. **11.** В прошлом году выдался неурожайный год в плане картошки. **12.** Ребенок с рождения имитирует поведение родителей. **13.** На Неделе первокурсника нам сразу выдали студики и зачётки. **14.** Команда нашего факультета заняла первенство в смотре художественной самодеятельности. **15.** После первых же дней изнурительной работы на Севере очень хотелось вернуться назад домой.

ТЕМА 7. МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить правила определения рода у существительных и аббревиатур, особенности несклоняемых существительных, образования некоторых грамматических форм разных частей речи и научиться исправлять ошибки, связанные с их неверным образованием (все это с опорой на учебную литературу и словари[5]).

Основные понятия темы:

Морфологические нормы – это правила образования грамматических форм слова.

Задание 1. *Определите род у следующих существительных и аббревиатур. Подберите к ним подходящие по смыслу прилагательные (или причастия), учитывая правила синтаксического согласования.*

1) Атташе, авеню, адвокат, амплуа, ассорти, аэрозоль, белоручка, бра, безе, боа, боди, бродяга, видео, визави, врач, выскочка, гну, гуру, денди, доцент, евро, жалюзи, жюри, зануда, иваси, какаду, кантри, каре, кашне, кенгуру, киви, кимоно, колибри, коллега, колли, кольраби, кофе, крупье, кутюрье, лама, левша, манго, мартини, маэстро, меню, миледи, монпансье, недоросль, непоседа, ниндзя, пани, пари, педагог, пенальти, пенсне, пони, преподаватель, протеже, профессор, растяпа, резюме, рефери, сабо, салями, сирокко, спагетти, табу, такси, тамада, танго, толь, торнадо, турне, тюль, фламинго, фрау, хачапури, хиппи, цеце, цунами, шасси (*склоняемые и несклоняемые существительные*).

2) Айдахо, Бали, Борнео, Гоби, Дели, Калахари, Капри, Килиманджаро, Колорадо, Лимпопо, Мехико, Миссисипи, Онтарио, Сорренто, Тбилиси, Толедо, Чили (*имена собственные*).

3) АО, АТС, БАМ, бомж, ВТО, вуз, ГАЗ, ГОК, ГУМ, ДК, дот, ДСП, ДТП, жэк, колхоз, КПП, ЛДПР, МВД, МИД, НИИ, НХЛ, НЭП, общепит, ООН, ПК, полпред, СЕ, СМУ, СНГ, СССР, ТАУ, ТВ, ТРЦ, УЗТМ, ФГБОУ, ФМС, ФСБ, ЦУМ (*аббревиатуры*).

Задание 2. *Определите род у следующих сложносоставных существительных. Составьте с ними словосочетания* ***прил. + сущ.***

Диван-кровать, музей-квартира, генерал-губернатор, плащ-палатка, идея-фикс, конференц-зал, жар-птица, кафе-столовая, чудо-человек, матч-реванш, салон-парикмахерская, программа-максимум, женщина-космонавт, альфа-излучение, ракета-носитель, премьер-министр, кофе-пауза.

---

[5] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем грамматических трудностей.

Задание 3. *Определите, какие фамилии при заполнении бланка письма или заявления будут склоняться, а какие нет. Обращайте внимание на пол человека. Запишите эти имена и фамилии в нужном падеже.*

Кому:

Сергей Левченко, Александр Живаго, Елена Сверчук, Анна Шевченко, Константин Ярош, Татьяна Чубинец, Вероника Лежава, Андрей Горенко, Борис Станкевич, Виталий Воробей, Ирина Шевчук, Иван Миклухо-Маклай, Виктор Доброво, Владислав Карамыш, Анна Диоп, Андрей Кожемяк, Мария Мицкевич, Петр Галаган, Маргарита Венда, Вадим Черных.

От кого:

Николай Черныш, Наталья Седых, Светлана Карась, Семен Фоменко, Лев Щерба, Сергей Соловьев-Седой, Александр Максимаджи, Екатерина Франюк, Леонид Березняк, Юлия Родных, Максим Жук, Алёна Ремесло, Николай Стрижак, Наталия Черных, Марат Ардзинба, Вера Ноздреватых, Виктория Приходько, Евгений Столпнер, Кирилл Шапиро, Станислав Горбачевич.

Задание 33. *Заполните таблицу следующими существительными, в зависимости от того, как у них образуется форма именительного падежа множественного числа.*

Окончание **–а/ –я**	Окончание **–ы/ –и**	Варианты **–а/ –я и –ы/ –и**

Отдельно укажите существительные, у которых от выбора окончания в этой форме зависит значение (например, ордера – «документы» и ордеры – «элементы в архитектуре»).

1) Брелок, бухгалтер, ветер, вексель, возраст, герб, год, директор, договор, жемчуг, инженер, инспектор, клин, колос, купол, лектор, медвежонок, небо, окорок, офицер, отпуск, пандус, паспорт, плинтус, почерк, прииск, прожектор, профессор, ребенок, редактор, сектор, семя, слесарь, столяр, сторож, табель, токарь, тополь, трактор, хозяин, цех, чудо, шило, шофёр, штемпель.

2) Корпус, лагерь, образ, повод, полоз, полутон, провод, пропуск, прут, тормоз, хлеб.

Задание 4. *Образуйте форму родительного падежа множественного числа от следующих существительных. Отметьте наличие вариантов (например, ла́сты – ла́стов и ла́ст□).*

Армяне, апельсины, басни, блюдца, болгары, ботинки, брызги, буряты, валенки, гардемарины, гектары, граммы, грузины, дела, деньги, джинсы, заморозки, казахи, калории, кастрюли, килограммы, клавиши, комментарии, макароны, мандарины, мечты, микроны, мокасины, носки, осетины, партизаны, перила, перипетии, петли, плечи, полотенца, поместья, помидоры, просьбы, развилки, рельсы, русла, сани, сапоги, сбои, свадьбы, сваи, свечи, серьги, солдаты, тапочки, тиски, турки, туфли, цыгане, чукчи, чулки, южане, юнги, яблоки, ясли.

Задание 5. *Раскройте скобки, заменяя цифровые обозначения словами, правильно определяя падеж числительных и существительных.*

1. Выборы в Государственную Думу состоялись в (358 округов). **2.** Появилась серия вспомогательных пособий с (5 735 чертежей). **3.** Теплоход с (657 отдыхающих) плыл вниз по Волге. **4.** За время последней экспедиции мы прошли свыше (2 580 километров). **5.** Нарушения техники безопасности были выявлены на (4 893 предприятия).

Задание 6. *Исправьте неверное употребление числительных в следующих предложениях:*

1. Лекция по философии будет прочитана для обоих студенческих групп. **2.** Мать-героиня воспитала семерых сыновей и четверых дочерей. **3.** Забор тянулся по обоим сторонам улицы и ограничивал движение. **4.** Двоих подруг она уже встретила по приезде в родной город. **5.** Главные достопримечательности Санкт-Петербурга расположены по обеим берегам Невы.

Задание 7. *Выпишите из предложений неправильно образованные грамматические формы. Запишите исправленный вариант.*

1. Всем стало понятно, что ейное предложение по реконструкции здания не будет одобрено. **2.** После второго матча наша команда оказалась в более лучшем положении. **3.** Староста пожаловалась преподавателю, что наша группа не влазиет в аудиторию 3519. **4.** Съездя в другой город, она поняла, как хорошо на родине. **5.** Ремонтники уже второй месяц не могли сменить треснутое стекло в окне. **6.** Он схватился за канат двумями руками. **7.** Хозяйка встретила гостей в бигудях и халате. **8.** Наши альпинисты покорили самые высочайшие вершины мира. **9.** Я надеялся, что к началу сессии выздоровлю. **10.** В этот раз студенты справились с заданием еще более хуже.

Задание 8. *Найдите нарушения морфологических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

1. Новый преподаватель кажется более образованнее. **2.** Студенческое общежитие находится в полтора километрах от здания университета. **3.** ФНС был создан как федеральный орган исполнительной власти. **4.** В магазине «Лео-строй» разнообразные варианты цветных жалюзей. **5.** Куратор совсем не интересовался ихними проблемами в учебе. **6.** МВФ выделило очередной транш в 1,5 миллиарда долларов. **7.** В столовой нельзя пользоваться лопнутыми стаканами. **8.** Эту сумму мы добавим к тысяче двести сорокам рублям. **9.** На конференцию молодых ученых пригласили самых умнейших студентов старших курсов. **10.** Вскоре Сергей Исаев стал популярной тамадой на свадьбах и других торжествах. **11.** На вновь открытое предприятие требуются бухгалтера, сторожи и инженера АСУП. **12.** Южнее Сочи находится солнечное Сухуми. **13.** На дипломную практику горный комбинат принял троих девушек с нашего курса. **14.** Мама традиционно купила пять килограмм мандарин и апельсин для праздничного новогоднего стола. **15.** Увидя раздраженное состояние преподавателя, студентка решила с ним не спорить.

ТЕМА 8. СИНТАКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила построения словосочетаний и предложений

Основные понятия темы:

Синтаксические нормы – это правила, регулирующие порядок и связь слов в

словосочетании и предложении.

Задание 1. *Раскройте скобки, правильно определив падеж зависимого слова. При необходимости используйте предлоги. Запишите получившиеся словосочетания.*

Согласно (устав университета), точка зрения (события), благодаря (поддержка друга), анонс (предстоящие гастроли), вопреки (мнение большинства), наперекор (судьба), вклад (развитие науки), жажда (слава), заведующий (кафедра), по (возвращение) из отпуска, отзыв (курсовая работа), рецензия (новый фильм), оплачивать (проезд), свидетельствовать (необходимость перемен), доказывать (новая теория), поделиться (результаты исследования), апеллировать (здравый смысл), по (прибытие) поезда; предостеречь (опасность) – предупредить (опасность), обращать внимание (недостатки) – уделять внимание (подготовка к экзаменам), уверенность (свои силы) – вера (победа).

Задание 2. *Найдите предложения, в которых неверно употреблен деепричастный оборот. Предложите свой вариант исправления.*

*Образец: Подводя итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации (**действие, названное деепричастием, не относится к подлежащему**).*

Варианты исправления: 1) Подводя итог проделанной работы, я выдвинул ряд предложений по модернизации. 2) Когда я подвел итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации. 3) После подведения ряда итогов проделанной работы мною был вдвинут ряд предложений по модернизации.

1. Будучи ребенком, Дмитрия всегда интересовали вопросы, связанные с техникой. **2.** Читая произведения русской классики, меня охватывает чувство гордости за отечественную литературу. **3.** Не чувствуя ни усталости, ни голода, наш путь к вершине продолжался. **4.** Узнав эту прекрасную новость, радости студентов не было предела. **5.** Первым, слегка хромая, из автобуса вышел седой старик. **6.** Записываясь на практику, у студентов были очень ограничены возможности выбора места ее прохождения. **7.** Вспоминая родные места, мне видится наш маленький кирпичный домик в тени тополей. **8.** Глядя на ярко освещенные стены Зимнего дворца, у меня возникло желание приехать сюда еще раз. **9.** Позвонив в третий раз, он с грустью понял, что никого нет дома. **10.** Произведя ряд расчетов, задача была решена студентами в течение 15 минут.

Задание 3. *Найдите предложения, в которых неправильно согласовано подлежащее со сказуемым. Запишите исправленный вариант.*

1. Много знаменитых людей закончили наш университет. **2.** Немало средств были потрачены на восстановление полуразрушенного памятника архитектуры. **3.** Несколько важных дат будут отмечены в календаре помимо официальных государственных праздников. **4.** На собрание по поводу летней практики явились лишь 31 студент. **5.** Часть студентов не справились с итоговой контрольной работой. **6.** Множество горожан приняли участие в шествии «Бессмертного полка». **7.** Ряд важных вопросов не были решены во время последнего заседания Ученого совета. **8.** Половина участников соревнований были размещены в студенческом общежитии. **9.** Тысяча периодических изданий имеются в открытом доступе в электронной библиотеке. **10.** Газета «Екатеринбургские новости» опубликовали интересную статью о творчестве молодых поэтов и писателей Урала.

Задание 4. *Найдите нарушения синтаксических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

1. Согласно распоряжения ректора всем студентам и сотрудникам необходимо пройти флюорографический осмотр. **2.** Открыв дверь в аудиторию, перед моими глазами предстала странная картина. **3.** Важно изучать условия жизни человека и как они связаны с процессами, происходящими сегодня в нашем обществе. **4.** Молодежь всегда принимали участие в студенческой самодеятельности и спортивных мероприятиях. **5.** В своей новой статье автор исследует и размышляет о возможностях искусственного интеллекта. **6.** Приказ был подписан ректором университета, устанавливающий обязательное посещение занятий, и доведен до сведения сотрудников вуза, преподавателей и студентов. **7.** Несколько членов Ученого совета не присутствовали на очередном заседании. **8.** В район приехал инструктор для подготовки специалистов по борьбе с сельскохозяйственными вредителями из местных жителей. **9.** Ученики горного лицея поступают в престижные учебные заведения, родители которых гордятся их успехами в учебе. **10.** Можно было согласиться лишь с теми положениями доклада, где приводились статистические данные для подтверждения гипотезы. **11.** Сдав нормативы ГТО, большинству из нас был вручен золотой значок. **12.** Учебное пособие не только предназначено для преподавателей, а также и для студентов и аспирантов. **13.** Скоро будет заселен многоквартирный дом, выросший на глазах за несколько месяцев и который уже приняла комиссия. **14.** Нам предложили поселиться в номере-люкс новой гостиницы для туристов с видом на море. **15.** Преподаватель попросил студентов, чтобы они ему напомнили на следующем занятии, чтобы он им распечатал раздаточный материал к семинарскому занятию.

ТЕМА 9. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СТИЛЕЙ

Цель – повторить систему функциональных стильных стилей русского языка, научиться определять стиль текста и доказывать свою точку зрения в этом вопросе.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Функциональный стиль – это исторически сложившаяся и социально осознанная разновидность языка, функционирующая в определенной сфере человеческой деятельности и общения, создаваемая особенностями употребления в этой сфере языковых средств и их специфической организацией.

В основе классификации стилей лежат экстралингвистические факторы: сфера применения языка, обусловленная ею тематика и цели общения. Сферы применения языка соотносятся с видами деятельности человека, соответствующими формам общественного сознания: наука, идеология, право, искусство, религия. Выделяются стили официальной речи (книжные): **научный**, **официально-деловой**, **публицистический**, **литературно-художественный**, **церковно-религиозный**. Им противопоставлен стиль неофициальной речи – **разговорный**, экстралингвистической основой которого является сфера бытовых отношений и общения (быт как область отношений людей вне их непосредственной производственной и общественно-политической деятельности).

Сферы применения языка в значительной мере влияют на тематику и содержание высказывания. Каждая из них имеет свои актуальные темы. Например, в научной сфере обсуждаются проблемы научного познания мира, в сфере бытовых отношений – бытовые

вопросы. Однако в разных сферах может обсуждаться одна и та же тема, но цели преследуются неодинаковые, вследствие чего высказывания различаются и по содержанию, и по форме (см. **Задание 1**).

Каждый стиль обладает определёнными языковыми особенностями (прежде всего лексическими и грамматическими). Можно говорить лишь об относительной замкнутости функциональных стилей: большинство языковых средств в каждом стиле нейтральные, межстилевые. Однако ядро каждого стиля образуют присущие именно ему языковые средства с соответствующей стилистической окраской и едиными нормами употребления.

Следует отбирать слова и конструкции в соответствии с выбранным стилем, особенно в письменной речи. Употребление разностилевых языковых средств в рамках одного текста ведет к появлению стилистических ошибок. Часто встречаются ошибки, связанные с неуместным употреблением канцеляризмов, а также злоупотреблением специальными терминами в ненаучном тексте и использованием разговорной и просторечной лексики в книжных текстах (см. **Задание 2**).

Можно сделать вывод, что **стилистические нормы** – это 1) правила употребления языковых средств в соответствии с выбранным стилем и 2) правила выбора стиля, соответствующего условиям общения.

Таким образом, специфические черты каждого функционального стиля можно описать, ориентируясь на целый ряд признаков, которые обознаются как **стилеобразующие факторы**, а также на его стилевые и языковые особенности. Кроме того, каждый стиль включает в себя тексты разных жанров (см. **Задание 3**).

Функциональный стиль	Стилеобразующий фактор						Жанры
	Доминирующая языковая функция	Форма общественного сознания	Основная форма речи	Типичный вид речи	Тон речи	Тип адресата	
Научный	Сообщение	Научное сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный	Массовый (подготовленный к восприятию научной информации)	Учебник, монография, лекция, научная статья, аннотация, реферат, конспект, тезисы, курсовая работа, выпускная работа, диссертация, доклад
Официально-деловой	Сообщение / воздействие	Правовое сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный / императивный	Массовый	Конституция, закон, приказ, указ, распоряжение, положение, регламент, заявление, автобиография, резюме, характеристика
Публицистический	Сообщение + воздействие	Идеологическое сознание	Письменная и устная	Монолог и диалог	Обусловленный содержательно	Массовый	Репортаж, интервью, очерк, дискуссионное выступление, статья, информационная заметка
Литературно-художественный	Воздействие	Эстетическое сознание	Письменная	Обусловленный родом и жанром литературы	Обусловленный эстетической задачей	Массовый (подготовленный к восприятию классических произведений)	Роман, повесть, рассказ, новелла, стихотворение, поэма, баллада
Церковно-религиозный	Воздействие	Религиозное сознание	Письменная и устная	Монолог	Обусловленный ситуативно	Массовый	Исповедь, проповедь, житие, молитва
Разговорный	Общение	Обыденное сознание	Устная	Диалог и полилог	Обусловленный ситуативно	Личный (конкретный собеседник)	Дружеская беседа, семейная беседа, бытовой спор, байка

Задание 1. *Прочитайте тексты, посвященные одной теме. Определите функционально-стилевую принадлежность текстов, опираясь на стилеобразующие факторы и языковые особенности каждого из них.*

Текст 1

Гроза – атмосферное явление, заключающееся в электрических разрядах между так называемыми кучево-дождевыми (грозовыми) облаками или между облаками и земной поверхностью, а также находящимися над ней предметами. Эти разряды – молнии – сопровождаются осадками в виде ливня, иногда с градом и сильным ветром (иногда до шквала). Гроза наблюдается в жаркую погоду при бурной конденсации водяного пара над перегретой сушей, а также в холодных воздушных массах, движущихся на более теплую подстилающую поверхность.

Текст 2

Как передает наш корреспондент, вчера над центральными районами Пензенской области прошла небывалой силы гроза. В ряде мест были повалены телеграфные столбы, порваны провода, с корнем вырваны столетние деревья. В двух деревнях возникли пожары в результате удара молнии. К этому прибавилось еще одно стихийное бедствие: ливневый дождь вызвал сильное наводнение. Нанесен значительный ущерб сельскому хозяйству. Временно было прервано железнодорожное и автомобильное сообщение между соседними районами.

Текст 3

Доводим до Вашего сведения, что вчера после полуночи над районным центром – городом Нижний Ломов и прилегающей к нему сельской местностью – пронеслась сильная гроза, продолжавшаяся около получаса. Скорость ветра достигала 30-35 метров в секунду. Причинен значительный материальный ущерб жителям деревень Ивановка, Щепилово и Вязники, исчисляемый, по предварительным данным, сотнями тысяч рублей. Имели место пожары, возникшие вследствие удара молнии. Сильно пострадало здание школы в деревне Курково, для его восстановления понадобится капитальный ремонт. Вышедшая из берегов в результате проливного дождя река Вад затопила значительную площадь. Человеческих жертв нет. Образована специальная комиссия для выяснения размеров причиненного стихийным бедствием ущерба и оказания помощи пострадавшему местному населению. О принятых мерах будет незамедлительно доложено.

Текст 4

Ты не поверишь, какая гроза прошла вчера над нами! Я человек не робкого десятка, и то испугался насмерть.

Сначала все было тихо, нормально, я уже собирался было лечь, да вдруг как сверкнет молния, бабахнет гром! И с такой силищей, что весь наш домишко задрожал. Я уже подумал, не разломалось ли небо над нами на куски, которые вот-вот обрушатся на мою несчастную голову. А потом разверзлись хляби небесные... В придачу ко всему наша безобидная речушка вздулась, распухла и ну заливать своей мутной водицей все вокруг. А совсем рядом, что называется – рукой подать, загорелась школа. И стар и млад – все повысыпали из изб, толкутся, орут, скотина ревет – вот страсти какие! Здорово я перепугался в тот час, да, слава Богу, все скоро кончилось.

Текст 5

При Крещении священник крестообразно помазывает лоб христианина святым миром, говоря: «Печать дара Духа Святаго». Впоследствии всякий раз, когда христианин осеняет себя крестным знамением, он поклоняется спасительной Страсти Господней и призывает

крестную силу, иже есть сила крестной смерти нашего Христа. Говоря: «Кресте Христов, спаси нас силою твоею», мы призываем силу крестной жертвы Господа. Поэтому крест обладает великой силой. Например, началась гроза. Сверкают молнии, и в большой железный крест на колокольне тоже может ударить молния. Однако, если стоящий под этим железным крестом христианин имеет на себе вот такой маленький крестик и говорит: «Кресте Христов, спаси мя силою твоею», то молния ему не повредит. В первом случае действуют природные законы: молния попадает в крест и сбивает его на землю. Во втором случае такой вот малюсенький крестик хранит верующего человека, призвавшего на помощь силу Креста.

Текст 6

Между далью и правым горизонтом мигнула молния, и так ярко, что осветила часть степи и место, где ясное небо граничило с чернотой. Страшная туча надвигалась не спеша, сплошной массой; на ее краю висели большие, черные лохмотья; точно такие же лохмотья, давя друг друга, громоздились на правом и на левом горизонте. Этот оборванный, разлохмаченный вид тучи придавал ей какое-то пьяное, озорническое выражение. Явственно и не глухо проворчал гром. Егорушка перекрестился и стал быстро надевать пальто.

Вдруг рванул ветер и со свистом понесся по степи, беспорядочно закружился и поднял с травою такой шум, что из-за него не было слышно ни грома, ни скрипа колес. Он дул с черной тучи, неся с собой облака пыли и запах дождя и мокрой земли. Лунный свет затуманился, стал как будто грязнее, звезды еще больше нахмурились, и видно было, как по краю дороги спешили куда-то назад облака пыли и их тени.

Чернота на небе раскрыла рот и дыхнула белым огнем; тотчас же опять загремел гром.

Дождь почему-то долго не начинался... Было страшно темно. А молнии в потемках казались белее и ослепительнее, так что глазам было больно.

Вдруг над самой головой его [Егорушки] со страшным, оглушительным треском разломалось небо; он нагнулся и притаил дыхание, ожидая, когда на его затылок и спину посыпятся обломки... Раздался новый удар, такой же сильный и ужасный. Небо уже не гремело, не грохотало, а издавало сухие, трескучие, похожие на треск сухого дерева звуки. (*А. П. Чехов. Степь*)

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях стилистические ошибки и запишите исправленный вариант.*

1. Некоторым министрам необходимо включить мозги, чтобы до них дошло, что на прожиточный минимум люди в России могут только существовать. **2.** В статье сообщается, что левые лекарства отследят по аптекам и конфискуют. **3.** Мэр города рассказал, что в настоящее время ведется возведение двух бюджетных высоток в Пионерском поселке. **4.** Новый сотрудник редакции сумел нарыть некий компромат на верхушку министерства, но опубликовать материалы ему не дали. **5.** Директор гимназии был в ауте, когда ему сообщили, что гимназия получила-таки грант в размере 1 млн. рублей. **6.** Бытие в хрущевках и интенсивные трудовые затраты скрашивала душевная атмосфера, царившая в те годы в коллективе. **7.** Благополучие родных деревень отстаивает наш председатель, который по восемнадцать часов в сутки мотается по полям, фермам, частит по делам в Екатеринбург. **8.** Трудно понять, почему ученый допустил такую промашку в расчетах. **9.** Семь школ, которые дислоцируются в нашем районе, переполнены, поэтому некоторым детям приходится ездить за тридевять земель. **10.** Избранников народа одолевает такое количество проблем, что у некоторых уже крыша поехала.

Задание 3. *Определите, к какому стилю принадлежит каждый из предложенных текстов*[6]*. Попытайтесь обосновать свою точку зрения.*

Текст 1

В психологии и этике делового общения речь пойдет не столько об абстрактных общепсихологических категориях и принципах, сколько о профессиональных психологических и в то же время практически ориентированных знаниях, которые могут обеспечить успех той или иной деятельности. Под **деловым** понимается общение, обеспечивающее успех какого-то общего дела, создающее условия для сотрудничества людей, чтобы осуществить значимые для них цели. Деловое общение содействует установлению и развитию отношений сотрудничества и партнерства между коллегами по работе, руководителями и подчиненными, партнерами, соперниками и конкурентами. Оно предполагает такие способы достижения общих целей, которые не только не исключают, но, наоборот, предполагают также и достижение лично значимых целей, удовлетворение личных интересов.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 2

Веруем в Единого Бога Отца Всемогущего, Творца неба и земли.

Веруем также в Иисуса Христа, Его Единородного Сына и Господа нашего, Который был зачат Духом Святым, рожден девой Марией, Который страдал во времена Понтия Пилата, был распят, умер и был погребен, сошел в царство смерти, на третий день воскрес из мертвых, вознесся на Небо и воссел одесную Всемогущего Бога Отца, откуда вернется судить живых и мертвых.

Веруем также во Святого Духа, Святую Соборную Церковь, собрание святых, в прощение грехов, воскресение мертвых и жизнь вечную.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 3

В Горном университете прошел День открытых дверей. На площадке перед Большим актовым залом – Залом УГМК развернулся настоящий наукоград: кроме презентации различных направлений подготовки, школьников ждали специализированные мастер-классы.

Об основах робототехники будущим абитуриентам рассказывали сотрудники кафедры горных машин и комплексов и робот Герман. О далеких экспедициях и романтике походов – студенты-геологоразведчики. У стенда **Уральского геологического музея** ребята рассматривали минералы под микроскопом, а вместе с инструкторами **студенческого патриотического центра «Святогор»** учились основам безопасного обращения с оружием.

---

[6] Задание может быть выполнено как тестовое.

Всего на **День открытых дверей в Горный университет** пришли около тысячи школьников. Многие из них уже серьезно задумались о том, чтобы стать частью дружной семьи горняков.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 4

В соответствии с Федеральным законом от 18.06.2001 N 77-ФЗ «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», Постановлением Правительства РФ от 25.12.2001 N 892 «О реализации Федерального закона «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», санитарно-эпидемиологическими правилами СП 3.1.2.3114-13 «Профилактика туберкулеза» и в целях раннего выявления заболеваний органов грудной клетки среди студентов и сотрудников университета

ПРИКАЗЫВАЮ:

Организовать с 10 апреля по 12 мая 2017 года флюорографический профилактический осмотр студентов и сотрудников университета в передвижном цифровом флюорографическом кабинете, установленном во дворе I учебного здания, с предъявлением каждым студентом и сотрудником копии полиса обязательного медицинского страхования.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 5

Страны, которые являются участниками процесса торговли минеральным сырьем, решают разные задачи, что отражается на структуре их экономики, влияет на характер воспроизводственных процессов, порождает специфические для каждой страны проблемы. Взаимодействие экспортеров и импортеров сырья накладывает отпечаток на международные отношения, являясь причиной возникновения конфликтов, создания экономических и военно-политических союзов. Стремление к поддержанию и расширению экспорта вызывает дополнительные потребности в производстве сырья внутри страны, в развитии минерально-сырьевой базы. Импорт сырья следует рассматривать как источник удовлетворения потребностей и стимулирование развития несырьевых отраслей.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 6

Отец наш шибко тада заболел // У него было очень больное сердце // А что такое больное сердце в те годы / это же неизлечимая болячка! Он работал у нас мастером в заводе / в формовочном цехе / где делались изделия для сталелитейного завода / для нижнетагильского // Ковшовые кирпичи / розетки / воронки всякие / сифоны / вообщем / всякая всячина // Всё было для фронта / всё для победы // Щас этого никто не понимает / особенно нынешняя молодёжь // Какие же тяжёлые дни пережило наше поколение! И не дай

вам Бог узнать / что такое война! Да даже твои родители ещё воспитывались в этом послевоенном духе // Ну да ладно / всё равно меня трудно понять…

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 7

Реклама работает на подсознательном уровне, обращается к иррациональному в природе человека. Ее влияние и глубже и сильнее, чем мы думаем, потешаясь над каким-нибудь слабоумным персонажем вроде пропагандиста бытовой техники. Кого и в чем может убедить этот шут гороховый? Оказалось – нас. Но не в том, что его товары дешевле и лучше, а совсем в другом – в преимуществе нового образа жизни.

От рекламы не требуется реализма. Задавая высокие нравственные стандарты, она порождает особое позитивное мышление. Задача рекламы состоит в том, чтобы потребитель подсознательно стремился отождествить себя с героем «коммершелз». Тогда он купит сковородку не для того, чтобы жарить яичницу, а для того, чтобы стать участником идеальной экранной жизни.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 8

Наутро поднявшееся яркое солнце быстро съело тонкий ледок, подернувший воды, и весь теплый воздух задрожал от наполнивших его испарений отжившей земли. Зазеленела старая и вылезающая иглами молодая трава, надулись почки калины, смородины и липкой спиртовой березы, и на обсыпанной золотым светом лозине загудела выставленная облетавшаяся пчела. Залились невидимые жаворонки над бархатом зеленей и обледеневшим жнивьем, заплакали чибисы над налившимися бурою неубравшеюся водой низами и болотами, и высоко пролетели с весенним гоготаньем журавли и гуси. Заревела на выгонах облезшая, только местами еще не перелинявшая скотина, заиграли кривоногие ягнята вокруг теряющих волну блеющих матерей, побежали быстроногие ребята по просыхающим, с отпечатками босых ног тропинкам, затрещали на пруду веселые голоса баб с холстами, и застучали по дворам топоры мужиков, налаживающих сохи и бороны. Пришла настоящая весна.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 9

К нашему большому сожалению, мы должны сообщить Вам, что партия лакокрасочных материалов, отгруженных Вами на судне «Ленинград» по контракту 27-005/40289, не соответствует по качеству нашим спецификациям, на основании которых был заключен контракт.

Согласно параграфу № 03 в договоре, мы имеем право отказаться от приемки этой партии товара. Однако, принимая во внимание наши длительные деловые отношения и то

обстоятельство, что предыдущие поставки лакокрасочных материалов в счет данного контракта были произведены в соответствии с условиями договора и надлежащего качества, мы согласны принять эту партию товара, если Вы предоставите нам скидку в 10 %.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 10

Человек должен быть широк. Из универсализма вытекает креативность, а ЕГЭ не обеспечивает ни того, ни другого. Даже те ребята, которые прекрасно сдали тесты по выбранным предметам, далеко не всегда в состоянии объяснить, откуда взялись все эти ответы, вывести их самостоятельно. А предложение «докрутить» чуть дальше и глубже вообще ставит в тупик: «Почему вы у нас спрашиваете то, что вы нам не рассказали?» Но креативность как раз и состоит в умении давать такие ответы. Учащийся – это же не шляпа, в которую положили кролика, чтобы его же и достать. Это неинтересно.

Убрать ЕГЭ нельзя. Но если оставить все как есть, мы обречены на дальнейшее отставание в науке, в любых творческих профессиях. Поэтому необходимо уточнить функционал ЕГЭ. А для этого надо все же назвать кошку кошкой и понять, что такое образование.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 11

На религию после революции 1917 года было наложено так называемое табу. Христианское вероисповедание и все реалии, связанные с ним, воспринимались только как культурное наследие и пережиток царского режима. Соборы и церкви были лишь памятниками архитектуры, жития святых – памятниками литературы, иконы и фрески – памятниками художественного творчества. Очень многие храмы были разрушены или применялись не по своему прямому назначению; они становились складами, конторами, монастыри превращались в тюрьмы и колонии. Люди, особенно священнослужители, преследовались за свою веру. Как следствие, лексика религиозного характера со временем стала постепенно переходить в пассивный состав языка, используясь в основном в составе фразеологизмов и афоризмов (как Бог на душу положит; как у Христа за пазухой; человек предполагает, а Бог располагает). Некоторые слова изменили свою семантику (воскресение, братия), многие приобрели в современном русском языке отрицательную окраску (вертеп).

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

ТЕМА 10. НАУЧНЫЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой научного стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности научных текстов.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Научный стиль – один из важнейших функциональных стилей литературного языка, относящийся к письменно-книжному типу речи и обслуживающий сферу науки и производства. Цель текста научного стиля может заключаться в передаче объективной информации о природе, человеке и обществе, доказательстве ее новизны, истинности или ценности.

Основные стилевые черты научного стиля:

– **объективность**, которая проявляется в изложении разных точек зрения на рассматриваемую проблемы, в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения, в сосредоточенности на предмете высказывания;

– **логичность**, которая проявляется в последовательности и непротиворечивости изложения научной теории и создается с помощью особых синтаксических конструкций (сложные предложения с придаточными причины, условия, следствия; предложения с вводными словами *во-первых*, *во-вторых*, *наконец*, *итак*, *следовательно* и др.);

– **доказательность**, которая проявляется в цепочке рассуждений, аргументации определенных положений и гипотез;

– **точность**, которая достигается благодаря использованию терминов (т. е. слов и словосочетаний, обозначающих понятия особой области знания или деятельности), однозначных слов, четким оформлением синтаксических связей;

– **обобщенность** и **отвлеченность**, которые проявляются в отборе слов (преобладание имен существительных над глаголом, общенаучные слова, имена существительные с абстрактным значением, конкретные существительные в обобщенном значении), в употреблении грамматических форм (глаголы настоящего времени во «вневременном» значении, возвратные и безличные глаголы, преобладание форм 3-го лица, форм несовершенного вида), в использовании синтаксических конструкций (неопределенно-личные предложения, страдательные обороты), в существовании авторского «мы», характерного только для научного стиля;

– насыщенность фактической информацией;

– **отсутствие выражения эмоций** (отсутствуют разговорные элементы, эмоционально-экспрессивная лексика, неполные конструкции и т. п.).

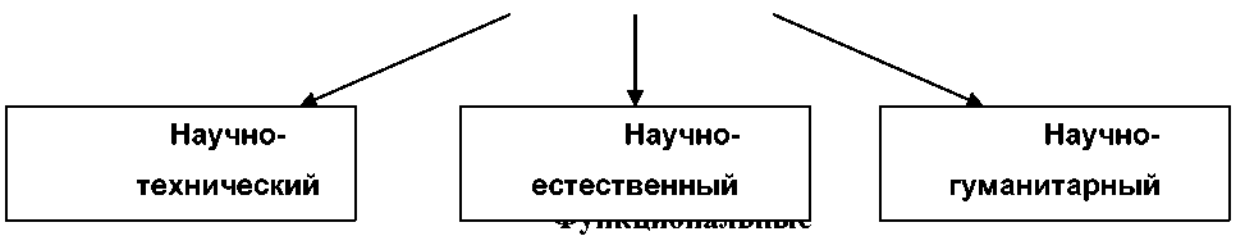
Основные языковые особенности научного стиля:

Языковые особенности	**Примеры**
Лексические	
1) термины	*обогащение полезных ископаемых, месторождение, осадочные породы, смешанослойный минерал, рудное тело* и др.
2) общенаучная лексика	*закон, теория, аспект, носитель, конструкция* и др.
3) книжная лексика абстрактного значения	*применение, явление, замедление, обязательство, подготовка* и др.
Морфологические	
1) частотность существительных	(Примерно 40 % существительных на единицу текста)
2) частотность форм родительного	*попадание в водоемы масло-*

падежа существительных	*смазывающих продуктов* (род. п.) *отдельных узлов* (род. п.) *механического оборудования* (род. п.) *гидротехнических сооружений* (род. п.) и т. п.
3) широкое использование существительных среднего рода	*отношение, употребление, дело, доказательство, заполнение* и др.
4) преобладание глаголов несовершенного вида настоящего времени	*равняется, оказывается, возрастает, наблюдается, составляет* и др.
5) полузнаменательные глаголы-связки	*есть, быть, являться*
6) употребление причастий и деепричастий	*подчеркнутый, обрабатываемый, соответствующий; замечая, решая, сменив* и др.
Синтаксические	
1) вводные слова и конструкции	*вероятно, возможно, таким образом; по словам ученых, по мнению большинства исследователей* и др.
2) бессубъектные конструкции	*карьер был разработан; оборудование было закуплено; проект был одобрен* и др.
3) безличные предложения	*необходимо отметить; следует подчеркнуть; можно сделать ряд выводов* и др.
4) обобщенно-личные предложения	*подчеркнем следующие положения; выделим важные особенности; отметим ряд недостатков* и др.
5) цепочки однородных членов	*Хорошие каталоги Интернета обеспечивают разнообразный дополнительный сервис: поиск по ключевым словам в базе данных, списки последних поступлений, списки наиболее интересных из них, выдачу случайной ссылки, автоматическое оповещение по электронной почте о свежих поступлениях.*
6) многокомпонентные сложные предложения с союзной связью	*Если эксперимент оправдывает надежды, то гипотеза детализируется и конкретизируется, а затем ставится новый эксперимент.*

Подстили научной речи:

Тематические



Функциональные

(с соответствующим жанром)

Задание 1. *Проанализируйте текст по следующей схеме:*

1. Охарактеризуйте текст по стилеобразующим факторам научного стиля.

2. Докажите принадлежность текста к научному стилю с опорой на основные стилевые черты.

3. Определите отнесенность текста к тематическому и функциональному подстилю научного стиля.

4. Составьте план текста и сформулируйте главную мысль.

5. Выделите в тексте языковые особенности научного стиля.

Вариант 1: ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ[7]

В геологии существует более ста различных специальностей и специализаций. Одни из них тесно связаны с химией (геохимическое направление), другие – с физикой (геофизическое направление), третьи – с биологией (палеонтологическое и палеобиологическое направления), четвертые – с математикой и кибернетикой (компьютерное моделирование геологических процессов), пятые – с астрономией и астрофизикой (космическая геология) и т. д.

В недрах Земли находятся залежи полезных ископаемых, вопросами поиска и разведки которых занимается геология. На земной поверхности протекают разнообразные геологические процессы, люди возводят здания и различные инженерные сооружения, строят транспортные магистрали. Задачей геологов является обеспечение их устойчивости и безопасного функционирования. Правильное решение этих двух основных практических задач немыслимо без глубокого знания общих закономерностей строения и развития отдельных геосфер. Раскрытие данных закономерностей и познание лежащих в их основе причин невозможны без изучения всей Земли, так как наша планета представляет собой единую природную среду и развивается так же, как и все планеты Солнечной системы.

Знание происхождения и эволюции Земли, условий образования и развития земной коры, ее строения и состава во взаимодействии с внешними оболочками – водной (гидросферой) и воздушной (атмосферой), а также с внутренними оболочками – земным ядром и мантией – составляет необходимое звено мировоззрения. Оно позволяет понять, как осуществляется постепенный переход от неживого неорганического мира к органическому, как эволюционируют живые существа и вместе с ними изменяются геологические процессы.

Велико и познавательно значение геологии как науки о Земле, ее строении, происхождении и развитии. Она затрагивает проблемы происхождения и эволюции жизни и природных условий. Геология всегда стояла в центре ожесточенной борьбы научных воззрений и научных школ против религиозных предрассудков.

---

[7] Геология: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Н. В. Короновский, Н. А. Ясаманов. – 7-е изд., перераб. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 6-7.

Практическое значение геологии огромно и разнообразно. Весь арсенал современной науки и техники основан на использовании продуктов земных недр – нефти, угля, различных металлов, строительных материалов, подземных вод и др. Воды минеральных источников используют в лечебных и бальнеологических целях. Для поисков, разведки и извлечения разнообразного минерального сырья из земных недр требуется прежде всего разработка методов обнаружения залежей полезных ископаемых, которые необходимы для промышленности, сельского хозяйства и строительства.

Среди полезных ископаемых различают рудные, или металлические, из которых добывают различные металлы, и нерудные, или неметаллические. Из последних добывают удобрения, каменную соль, серу, строительные материалы, драгоценные (алмаз, рубин, сапфир, изумруд), полудрагоценные (аметист, циркон, топаз, цитрин, нефрит, малахит и др.) и поделочные камни (яшма, кварциты и др.), а также горючие полезные ископаемые (нефть, каменный и бурый уголь, горючие сланцы, газ). Подземные воды (пресные и минеральные) также являются полезными ископаемыми. Поисками залежей подземных вод и практическим их использованием занимается специальная отрасль геологии – гидрогеология. В особые научные дисциплины выделились геология рудных и геология нерудных месторождений, геология горючих полезных ископаемых. Без знания геологического строения территории не обходится ни одно строительство промышленных и гражданских зданий, транспортных магистралей, трубопроводов и средств связи. Эта особая отрасль геологии именуется инженерной геологией. Работами, проводимыми в районах развития многолетней мерзлоты, занимается такая наука, как мерзлотоведение.

Все перечисленные специальные научные дисциплины образуют самостоятельный раздел геологии, который называется *практической*, или *прикладной*, геологией.

ВАРИАНТ 2: ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ[8]

Современная мировая экономика характеризуется неуклонным ростом потребления минерального сырья, расширением круга используемых в промышленности элементов, вовлечением в производство новых типов месторождений полезных ископаемых. Укрепление и совершенствование минерально-сырьевой базы России – основная задача геологической службы.

Обеспечение ресурсами и запасами не только действующих отраслей горнодобывающей промышленности, но и ее перспективных направлений требует оперативного решения проблемы освоения новых видов полезных ископаемых. Успешное осуществление геолого-разведочных работ возможно лишь при условии постоянного совершенствования теории и методов поисков и разведок месторождений полезных ископаемых. Результативность геолого-разведочной отрасли определяется уровнем научных и методических разработок, степенью использования современных поисково-разведочных средств.

Научные основы поисков и разведок месторождений полезных ископаемых созданы трудами нескольких поколений отечественных геологов, среди которых в первую очередь необходимо назвать Г. Д. Ажгирея, Я. Н. Белевцева, А. Г. Бетехтина, Ю. А. Билибина,

---

[8] Геология и разведка месторождений полезных ископаемых: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / [В. В. Авдонин, В. В. Мосейкин, Г. В. Ручкин и др.]; под ред. В. В. Авдонина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 5-6.

П. П. Бурова, А. Б. Каждана, В. М. Крейтера, В. А. Обручева, А. П. Прокофьева, В. И. Смирнова, С. С. Смирнова, А. А. Якжина и др.

Многими ведущими учеными были написаны замечательные учебники и методические руководства по поискам и разведкам месторождений, не утратившие своего значения до настоящего времени. Тем не менее в последние годы произошли существенные изменения в самой структуре минерально-сырьевой базы, оценке перспектив использования природных ресурсов и методов их вовлечения в промышленное использование.

В геолого-разведочной отрасли можно отметить несколько областей, в которых наблюдаются наиболее значимые изменения.

Во-первых, это касается совершенствования теории и методики поисковых работ. Во-вторых, широкое внедрение компьютерных технологий во все направления геолого-разведочного процесса качественно изменило методику подсчета запасов и оценки месторождений на всех стадиях их освоения.

Существенные изменения происходят и в методике добычных работ, в особенности в связи с требованиями экологической безопасности.

Наконец, необходимо учитывать еще одно важное обстоятельство. Наряду с неуклонно возрастающей потребностью в различных видах минерального сырья отчетливо проявляется тенденция истощения минерально-сырьевой базы, снижения открываемости новых месторождений, вовлечения в промышленное производство неблагоприятных по геологической позиции месторождений и руд более низкого качества. Эти причины стимулируют повышенный интерес к минерально-сырьевому потенциалу Мирового океана. Вследствие интенсификации научно-исследовательских и поисково-разведочных работ в океане в последние годы сложилась качественно новая ситуация – возникла необходимость решения проблем освоения минерально-сырьевых ресурсов океана в практической плоскости, что ознаменовалось интенсивными усилиями по разработке теоретических основ, методики и технических средств морских геолого-разведочных работ.

Авторский коллектив настоящего учебника постарался отразить в нем все важнейшие достижения, касающиеся поисков, разведки и эксплуатации месторождений и характеризующие современное состояние геолого-разведочной отрасли.

Вариант 3: ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА[9]

Полезные ископаемые, располагающиеся в земной коре в пределах территории страны, образуют ее минерально-сырьевую базу. Эти природные ресурсы называют богатством недр государства.

Добычу полезных ископаемых обеспечивают горно-добывающие отрасли промышленности, перспективы развития которых зависят прежде всего от состояния природных ресурсов. Их освоение играет важнейшую роль в развитии экономики России.

В нашей стране выявлены в промышленных концентрациях все виды минерального сырья, используемого в мировой практике.

Оценка прогнозных ресурсов, которую сегодня осуществляют в основном до глубины освоенных промышленностью недр, составляющей для твердых полезных ископаемых около 1 км, свидетельствует о том, что в России в обозримом будущем исчерпания минеральных

---

[9] Городниченко В. И., Дмитриев А. П. Основы горного дела: учебник для вузов. М.: Издательство «Горная Книга», Издательство московского государственного горного университета, 2008. С. 7-8.

ресурсов не предвидится, тем более что результаты исследований сверхглубоких скважин подтверждают наличие промышленных концентраций полезных компонентов на глубинах до 10 км.

По данным Министерства природных ресурсов России, в нашей стране 60–70 % запасов важнейших видов полезных ископаемых сосредоточено в ограниченном числе крупных месторождений. В настоящее время сохраняют свое значение освоенные крупные месторождения полезных ископаемых и имеют большие перспективы развития месторождения в регионах Сибири, Дальнего Востока и Севера.

В Сибири находится около 84 % разведанных запасов угля России (категории А, В, С1), из них бурых и каменных углей примерно поровну. В этих запасах сосредоточено до 90 % коксующихся углей России и около 85 % особо ценных для коксования углей марок ГЖ, Ж, КЖ, К, ОС.

В настоящее время в Сибири, включая республику Саха, добывается около 70 % углей России. Как считают эксперты, этот показатель будет возрастать в связи с сокращением добычи угля в европейской части страны, а также на Урале и Дальнем Востоке. Можно предположить, что основная роль в обеспечении потребностей страны в углях в будущем будет принадлежать Кузбассу.

Повышение эффективности производства имеет особое значение для горно-добывающих отраслей промышленности, которые обеспечивают топливом, минеральным сырьем и материалами многие отрасли экономики страны: черную и цветную металлургию, энергетику, химическую, строительных материалов, сельское хозяйство и др.

Результаты работы горных предприятий в значительной степени определяют уровень эффективности производства во всех других отраслях, потребляющих их продукцию.

Так, в общих затратах на производство цветных металлов затраты на добычу руды составляют более 50 %. В затратах на производство электроэнергии 60–70 % составляют затраты на топливо.

Повышение эффективности горного производства должно осуществляться путем его технического перевооружения, обеспечивающего снижение затрат на производство продукции, повышение качества продукции, экономное и рациональное использование трудовых и материальных ресурсов, комплексное освоение богатства земных недр.

Задание 2. *Отредактируйте предложения таким образом, чтобы они соответствовали научному стилю, запишите исправленный вариант. Определите, с чем связаны допущенные ошибки.*

1. В своей курсовой работе я хотел бы ответить на очень актуальные в наше нелегкое время вопросы. **2.** Авторы этих статей абсолютно неправильно думают, что только их точка зрения имеет право на существование. **3.** Выводы оказались неожиданными, на первый взгляд просто сумасшедшими. **4.** Однако вначале необходимо разобраться, есть ли угроза энергетического голода. **5.** Мне кажется, что первый способ решения проблемы более целесообразный. **6.** Стоит представить, а какой будет польза от этого изобретения. **7.** Компьютерный вирус – это сильный паразит! **8.** Современное состояние экономики, энергетики и экологии выдвигает необходимость проведения интердисциплинарных исследований. **9.** Это приводит к необходимости изыскания и выделения огромных усилий общества, чтобы противостоять результатам экологически опасных действий. **10.** В настоящее время сетевые технологии претерпевают бурное развитие. **11.** Свобода в современной России – это не столько свобода сотрудничества и доброжелательного диалога,

как своевольное навязывание своего понимания свободы ради сокрушения чужой. **12.** Математическая модель включала в себя систему уравнений, описывающая течение газа около криволинейной поверхности. **13.** Земля должна рассматриваться как некая квазизамкнутая система, ресурс жизнеобеспечения которой большой, но ограничен. **14.** Изучение новых материалов дает свои плоды. **15.** Используя метод аналогий, на кафедре систем управления разработан комплекс программных средств для изучения систем путем их моделирования.

ТЕМА 11. ОФИЦИАЛЬНО-ДЕЛОВОЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой официально-делового стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности документов, их жанр, видеть реквизиты.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Официально-деловой стиль – это стиль, который обслуживает правовую и административно-общественную сферы деятельности. Он используется при написании документов, деловых бумаг и писем в государственных учреждениях, суде, а также в разных видах делового устного общения.

Среди книжных стилей официально-деловой стиль выделяется относительной устойчивостью и замкнутостью. С течением времени он, естественно, подвергается некоторым изменениям, но многие его черты: исторически сложившиеся жанры, специфическая лексика, морфология, синтаксические обороты – придают ему в целом консервативный характер.

Основные стилевые черты официально-делового стиля:

– **объективный, абстрагированный (неличный) характер изложения**, который проявляется в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения (отсутствуют местоименные и глагольные формы 2-го лица, ограничены – 1-го лица);

– **точность и детальность изложения**, которые не допускают каких-либо разночтений; быстрота понимания не является важной, так как заинтересованный человек в случае необходимости прочитает документ несколько раз, стремясь к полному пониманию;

– **стандартизированность, стереотипность изложения**, которая проявляется в том, что разнородные явления жизни в официально-деловом стиле укладываются в ограниченное количество стандартных форм (*анкета, справка, инструкция, заявление, деловое письмо* и т. д.);

– **долженствующе-предписующий характер изложения**, т. е. **волюнтативность** (выражение воли), которая в текстах выражается семантически (подбором слов) и грамматически (формы первого лица глагола – *предлагаю, приказываю, поздравляю*; формами долженствования – *надлежит, необходимо, следует, предлагается*);

– **отсутствие выражения эмоций и оценок** (не употребляются эмоционально-экспрессивные средства).

Эти черты находят свое выражение 1) в отборе языковых средств (лексических, морфологических и синтаксических); 2) в оформлении деловых документов.

Основные языковые особенности официально-делового стиля:

Языковые особенности	Примеры
Лексические	
1) языковые штампы (канцеляризмы, клише)	*ставить вопрос, на основании решения, по собственному желанию, по семейным обстоятельствам, входящие-исходящие документы, контроль за исполнением возложить, по истечении срока* и др.
2) профессиональная терминология	*недоимка, алиби, черный нал, теневой бизнес, жилищный найм, прокурорский надзор, единовременное пособие* и др.
3) архаизмы	*оным удостоверяю, сей документ, в надлежащем виде, во избежание* и др.
4) тяготение к использованию родовых понятий с широкой и бедной семантикой	*прибыть* (вместо *приехать, прилететь, прийти* и т. д.), *транспортное средство* (вместо *автобус, самолет, «Волга»* и т. д.), *населенный пункт* (вместо *деревня, город, село* и т. д.), *помещение (вместо: квартира, цех, ангар, вестибюль, кров, обитель, апартаменты и т. д.)*
Морфологические	
1) существительные-названия людей по признаку, обусловленному действием	*налогоплательщик, ответчик, арендатор, свидетель* и др.
2) существительные, обозначающие должности и звания в форме мужского рода	*сержант полиции Ушакова, инспектор Неверова, ответчик Прошина* и др.
3) отглагольные существительные с частицей *не-*	*нелишение, неявка, несоблюдение, непризнание* и др.
4) производные предлоги	*в связи, в течение, за счет, в силу, по мере, в отношении, на основании* и др.
5) инфинитивные конструкции	*провести осмотр, оказать помощь, доказать невиновность* и др.
6) глаголы настоящего времени в значении обычно производимого действия	*обвиняемому обеспечивается право на защиту, за неуплату взимается штраф* и др.
7) сложные слова, образованные от двух и более основ	*бракосочетание, правонарушение, налогообложение, землепользование, пассажироперевозки, дачевладелец, нетрудоспособность, работодатель, квартиросъемщик, материально-технический, осенне-зимний, ремонтно-эксплуатационный, вышеуказанный, нижеподименованный* и др.

8) нанизывание существительных с суффиксом *-ние*	*Приготовлением к преступлению признается приискание и приспособление средств или орудий или умышленное создание условий для совершения преступлений...*
9) гигантский пласт официальных наименований номенклатуре учреждений, профессий, должностей и т. п.	*Российское акционерное общество «Единая энергетическая система России», Открытое акционерное общество «Нефтяная компания «Лукойл», Всероссийский научно-исследовательский институт документоведения и архивного дела, главный научный сотрудник, заместитель командира полка по инженерной службе, главный специалист сектора делопроизводства компании, председатель Военной коллегии Верховного Суда Российской Федерации, депутат Государственной Думы РФ и др.*
10) широкое использование аббревиатур	*РФ, МИД, МЧС, ФСБ, РЖД, Сбербанк, МОК, СМИ, РПЦ, УГГУ, ЕГЭ, ОСАГО, ТРЦ, ТК, УФМС, МОУ, ФГБОУ, ГТО, ГОСТ, ФГОС, КамАЗ, Роспечать и др.*
11) употребление цепочки имен существительных в родительном падеже	*Для применения (род. п.) мер (род. п.) общественного воздействия (род. п.); в целях широкой гласности (род. п.) работы (род. п.) Министерства (род. п.) высшего образования (род. п.); результаты деятельности (род. п.) органов (род. п.) налоговой полиции (род. п.)* и др.
Синтаксические	
1) употребление простых предложений с однородными членами, причем ряды этих однородных членов могут быть весьма распространенными (до 8–10)	*Объектами общей собственности крестьянского хозяйства является имущество: земельный участок, насаждения, хозяйственные или иные постройки, мелиоративные и другие сооружения, продуктивный и рабочий скот, птица, сельскохозяйственная и иная техника, оборудование, транспортные средства, инвентарь и другое имущество* и др.
2) наличие пассивных конструкций	*платежи вносятся в указанное время, сроки выплат установлены на год* и др.
3) преобладание сложных предложений, в особенности сложноподчиненных, с придаточными	*При наличии спора о размерах причитающихся уволенному работнику сумм администрация обязана уплатить указанное*

условия	*в настоящей статье возмещение в том случае, если спор решен в пользу работника.*

Документ – зафиксированная на материальном носителе информация с реквизитами, позволяющими её идентифицировать.

Форма документа (схема, отражающая семантико-информативную структуру текста) предоставляет в распоряжение его составителя определенный набор **реквизитов** (необходимые элементы оформления документа) и определенную их **композицию** (последовательность и порядок их размещения в тексте). Состав реквизитов, требования к реквизитам и бланкам документов устанавливаются ГОСТом. В настоящее время это ГОСТ Р 6.30-2003 «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов».

	Состав реквизитов документа
1.	Государственный герб Российской Федерации
2.	Герб субъекта Российской Федерации
3.	Эмблема организации или товарный знак
4.	Код организации
5.	Основной государственный регистрационный номер юридического лица (ОГРН)
6.	Идентификационный номер налогоплательщика / код причины постановки на учет (ИНН / КПП)
7.	Код формы документа
8.	Наименование организации
9.	Справочные данные об организации
10.	Наименование вида документа (жанр документа)
11.	Дата составления документа
12.	Регистрационный номер документа
13.	Ссылка на регистрационный номер или дату документа
14.	Место составления или издания документа
15.	Адресат
16.	Гриф утверждения документа
17.	Резолюция
18.	Заголовок к тексту
19.	Отметка о контроле
20.	Текст документа
21.	Отметка о наличии приложения
22.	Подпись
23.	Гриф согласования документа
24.	Визы согласования документа
25.	Оттиск печати
26.	Отметка о заверении копии
27.	Отметка об исполнителе
28.	Отметка об исполнении документа и направлении его в дело
29.	Отметка о поступлении документа в организацию

30.	Идентификатор электронной копии документа

Состав реквизитов конкретного документа определяется его видом и назначением. К наиболее частотным реквизитам можно отнести: **адресата**, **адресанта**, **название жанра документа**, **основной текст документа**, **список приложений**, **дату** и **подпись**. Логическому делению текста способствует его рубрикация, деление на части с помощью внутренних заголовков, подзаголовков, нумерация или графически единообразное выделение всех однотипных частей.

Способы классификации документов:

1. ***По месту составления***: *внутренние* и *внешние* документы. **Внутренний** документ создаётся в рамках одной организации, где работают и составитель, и адресат текста (*приказы администрации предприятия, служебные записки, должностные инструкции* и др). **Внешние** документы предназначаются адресатам, работающим на других предприятиях (*все виды деловых писем, приказы и распоряжения вышестоящих организаций* и др.).

2. ***По содержанию***: *простые* и *сложные*. **Простые** документы посвящены решению одного вопроса (*заявление*, *объяснительная записка* и другие виды личной документации), **сложные** – двух и более (*приказы*, *письма*, *инструкции*).

3. ***По форме***: *индивидуальные* и *типовые*. **Индивидуальные** документы предполагают некоторую самостоятельность текста и элементы творческого подхода, что не исключает их стандартизованности (*отдельные виды писем, служебных и докладных записок*). **Типовые** документы строятся на базе заранее заданного текста путём видоизменения его отдельных элементов; чаще всего эти документы одинаковы для групп однородных предприятий (*штатное расписание, положение о персонале* и др.). Если в типовом документе постоянные элементы отпечатаны типографским способом, а для переменных предусмотрены пробелы, которые заполняются при его составлении, то такой документ называют **трафаретным** (*анкеты, некоторые виды справок, трудовые договоры*).

4. ***По срокам исполнения***: *срочные* и *бессрочные*. В **срочных** документах содержится указание на выполнение некоторых действий в ограниченный временной период (*распоряжения, указания* и др.). Действие **бессрочных** документов не ограничено временными рамками (*указы, законы, некоторые виды инструкций*).

5. ***По происхождению***: *служебные* и *личные*. **Служебные** документы направлены на реализацию интересов организации (*приказы, деловые письма, контракты*). **Личные** документы, как правило, отражают взаимодействие отдельного физического лица с официальными органами или другими лицами (*заявление, доверенность, расписка, объяснительная записка* и др.).

6. ***По виду оформления***: *подлинник* (подписанный и надлежащим образом оформленный экземпляр документа, составленный в первый раз), *копия* (абсолютно точно воспроизводит подлинник, но имеет ограниченную юридическую силу, за исключением нотариально заверенных.), *дубликат* (копия, имеющая одинаковую силу с подлинником, выдающаяся в случае его утери) и *выписки* (воспроизведение только одной из частей подлинника).

7. ***По функции***: **организационные** документы, направленные на регламентацию деятельности организации или предприятия (*устав, положение, штатное расписание, положение о персонале, должностную инструкцию*), **распорядительные** документы,

содержащие конкретные распоряжения (*приказы, распоряжения, указания, решения*)., **информационно-справочные** документы, документы **по персоналу предприятия** (*трудовой договор, личные карточки, учётные карточки, анкеты*), **письма**, **договоры**.

Задание 1. *Проанализируйте текст официально-делового стиля:*

1. *Укажите характеристику данного текста с точки зрения классификации документов.*

2. *Обозначьте реквизиты и композиционные элементы государственного документа.*

3. *Опишите стилевые и языковые особенности текста*[10].

Федеральный закон от 1 июня 2005 г. N 53-ФЗ
«О государственном языке Российской Федерации»
С изменениями и дополнениями от: 2 июля 2013 г., 5 мая 2014 г.
Принят Государственной Думой 20 мая 2005 года
Одобрен Советом Федерации 25 мая 2005 года

Настоящий Федеральный закон направлен на обеспечение использования государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации, обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации, защиту и развитие языковой культуры.

Статья 1. Русский язык как государственный язык Российской Федерации

1. В соответствии с Конституцией Российской Федерации государственным языком Российской Федерации на всей ее территории является русский язык.

2. Статус русского языка как государственного языка Российской Федерации предусматривает обязательность использования русского языка в сферах, определенных настоящим Федеральным законом, другими федеральными законами, Законом Российской Федерации от 25 октября 1991 года N 1807-I «О языках народов Российской Федерации» и иными нормативными правовыми актами Российской Федерации, его защиту и поддержку, а также обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации.

3. Порядок утверждения норм современного русского литературного языка при его использовании в качестве государственного языка Российской Федерации, правил русской орфографии и пунктуации определяется Правительством Российской Федерации.

4. Государственный язык Российской Федерации является языком, способствующим взаимопониманию, укреплению межнациональных связей народов Российской Федерации в едином многонациональном государстве.

5. Защита и поддержка русского языка как государственного языка Российской Федерации способствуют приумножению и взаимообогащению духовной культуры народов Российской Федерации.

6. При использовании русского языка как государственного языка Российской Федерации не допускается использование слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка (в том числе нецензурной брани), за

[10] Возможна работа по вариантам: 1 вариант – анализ Статьи 1; 2 вариант – анализ Статьи 3; 3 вариант – анализ статьи 4.

исключением иностранных слов, не имеющих общеупотребительных аналогов в русском языке.

7. Обязательность использования государственного языка Российской Федерации не должна толковаться как отрицание или умаление права на пользование государственными языками республик, находящихся в составе Российской Федерации, и языками народов Российской Федерации.

<...>

Статья 3. Сферы использования государственного языка Российской Федерации

1. Государственный язык Российской Федерации подлежит обязательному использованию:

1) в деятельности федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности, в том числе в деятельности по ведению делопроизводства;

2) в наименованиях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности;

3) при подготовке и проведении выборов и референдумов;

4) в конституционном, гражданском, уголовном, административном судопроизводстве, судопроизводстве в арбитражных судах, делопроизводстве в федеральных судах, судопроизводстве и делопроизводстве у мировых судей и в других судах субъектов Российской Федерации;

5) при официальном опубликовании международных договоров Российской Федерации, а также законов и иных нормативных правовых актов;

6) во взаимоотношениях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности и граждан Российской Федерации, иностранных граждан, лиц без гражданства, общественных объединений;

7) при написании наименований географических объектов, нанесении надписей на дорожные знаки;

8) при оформлении документов, удостоверяющих личность гражданина Российской Федерации, за исключением случаев, предусмотренных законодательством Российской Федерации, изготовлении бланков свидетельств о государственной регистрации актов гражданского состояния, оформлении документов об образовании и (или) о квалификации установленного в соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2012 года N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» образца, а также других документов, оформление которых в соответствии с законодательством Российской Федерации осуществляется на государственном языке Российской Федерации, при оформлении адресов отправителей и получателей телеграмм и почтовых отправлений, пересылаемых в пределах Российской Федерации, почтовых переводов денежных средств;

9) в продукции средств массовой информации;

9.1) при показах фильмов в кинозалах;

9.2) при публичных исполнениях произведений литературы, искусства, народного творчества посредством проведения театрально-зрелищных, культурно-просветительных, зрелищно-развлекательных мероприятий;

10) в рекламе;

11) в иных определенных федеральными законами сферах.

1.1. В сферах, указанных в пунктах 9, 9.1, 9.2 и 10 части 1 настоящей статьи, и в иных предусмотренных федеральными законами случаях наряду с государственным языком Российской Федерации могут использоваться государственные языки республик, находящихся в составе Российской Федерации, другие языки народов Российской Федерации, а в случаях, предусмотренных законодательством Российской Федерации, также иностранные языки.

<...>

Статья 4. Защита и поддержка государственного языка Российской Федерации

В целях защиты и поддержки государственного языка Российской Федерации федеральные органы государственной власти в пределах своей компетенции:

1) обеспечивают функционирование государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации;

2) разрабатывают и принимают федеральные законы и иные нормативные правовые акты Российской Федерации, разрабатывают и реализуют направленные на защиту и поддержку государственного языка Российской Федерации соответствующие федеральные целевые программы;

3) принимают меры, направленные на обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации;

4) принимают меры по совершенствованию системы образования и системы подготовки специалистов в области русского языка и преподавателей русского языка как иностранного языка, а также осуществляют подготовку научно-педагогических кадров для образовательных организаций с обучением на русском языке за пределами Российской Федерации;

5) содействуют изучению русского языка за пределами Российской Федерации;

6) осуществляют государственную поддержку издания словарей и грамматик русского языка;

7) осуществляют контроль за соблюдением законодательства Российской Федерации о государственном языке Российской Федерации, в том числе за использованием слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка, путем организации проведения независимой экспертизы;

8) принимают иные меры по защите и поддержке государственного языка Российской Федерации.

<...>

Президент Российской Федерации В. Путин

Задание 2. *Проанализируйте следующий текст*[11]*:*

1. *Обозначьте реквизиты и структурно-содержательные элементы документа.*

2. *Опишите стилевые и языковые особенности.*

3. *Имеются ли в тексте документа средства, не соответствующие требованиям официально-делового стиля? Докажите свою точку зрения.*

---

[11] Текст Регламента приводится без изменений и исправлений.

УТВЕРЖДАЮ
Ректор УГГУ, профессор
_____ Н.П. Косарев

РЕГЛАМЕНТ
ношения форменной одежды преподавателями,
сотрудниками и студентами УГГУ

1. Общие положения

Форменная одежда УГГУ – важнейший наряду с флагом и гербом символ корпоративной чести и достоинства, принадлежности преподавателей, сотрудников и студентов к высшему учебному заведению – Уральскому государственному горному университету.

Ношение форменной одежды в установленных случаях является почетным правом и обязанностью (моральным долгом) всех преподавателей, сотрудников и студентов УГГУ, облегченных этим доверием. По решению ректора почетное право ношения форменной одежды предоставляется заслуженным выпускникам.

Отказ от форменной одежды рассматривается как пренебрежение горняцким единством и неуважение к корпоративной символике Уральского государственного горного университета.

2. Руководящий состав университета: члены Ученого совета, включая ректорат, деканов, заведующих кафедрами, представителей студенческого, ветеранского и профсоюзного актива, а также руководителя управления отделов и служб, не входящие в Ученый совет, обязаны носить форму в следующих случаях:

- на всех рабочих совещаниях, проводимых ректором, первым проректором и проректором по научной работе;
- на заседаниях Ученого совета и Президиума Ученого совета университета, ученых советах факультетов;
- на торжественных собраниях сотрудников и студентов, митингах, конференциях, проводимых по планам ректората и деканатов;
- при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и других официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также политическими, общественными и научными организациями.

3. Преподаватели университета, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

- во время лекционных занятий;
- при участии в собраниях студентов, преподавателей, конференциях и митингах;
- при посещениях ректората и деканатов.

4. Сотрудники из числа административно-управленческого персонала (помощники ректора, проректоров, референты, секретари) обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

- при нахождении на рабочем месте в дни проведения крупных общеуниверситетских мероприятий, при приеме делегаций, гостей и в иных случаях по распоряжению ректора;
- при участии, в том числе при орг. техническом обеспечении заседании Ученого совета и ректорских совещаний;

– при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

5. Студенты – представители студенческого актива, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде:

– при посещении ректората, деканатов;
– на всех официальных мероприятиях, проводимых в университете;
– при участии в официальных мероприятиях, проводимых вне стен университета органами власти, политическими, общественными, научными и образовательными учреждениями.

6. По собственной инициативе студенты, сотрудники и преподаватели университета могут находиться в форменной одежде во всех случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и ее функциональному назначению.

Ученый секретарь совета, профессор О. В. Ошкордин
28.09.2005 г.

Задание 3. *Проанализируйте текст[12] с точки зрения использованных языковых средств, характерных для официально-делового стиля. Опишите средства, с помощью которых в тексте реализуется такая стилевая черта, как волюнтативность.*

Есть ли в Правилах отступления от требований официально-делового стиля? Подтвердите свою точку зрения, опираясь на текст документа.

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор ФГБОУ ВПО "УГГУ"
_____ Н.П.Косарев
_____ 2014 г.

Правила внутреннего распорядка обучающихся
в ФГБОУ ВПО «Уральский государственный горный университет»
Дата введения 01 сентября 2014 года

<...>

5. Основные права и обязанности обучающихся

5.1 Права обучающихся

Обучающиеся в университете имеют право:

– получать образование в соответствии с ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) обучаться в пределах этих стандартов по индивидуальным учебным планам, ускоренным курсам обучения;

– бесплатно пользоваться библиотечно-информационными ресурсами, получать дополнительные (в том числе платные) образовательные услуги;

– участвовать в управлении университетом;

– свободно выражать собственные мнения и убеждения;

[12] Текст Правил внутреннего распорядка приводится без изменений и исправлений.

– выбирать факультативные (необязательные для данного направления подготовки (специальности) и элективные (избираемые в обязательном порядке) курсы, предлагаемые факультетом и кафедрой;

– участвовать в формировании содержания своего образования при условии соблюдения требований ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) среднего профессионального и высшего образования; указанное право может быть ограничено условиями договора, заключенного между студентом и физическим или юридическим лицом, оказывающим ему содействие в получении образования и последующем трудоустройстве;

– осваивать помимо учебных дисциплин по избранным направлениям подготовки (специальностям) любые другие учебные дисциплины, преподаваемые в университете, в порядке, предусмотренном Уставом, а также преподаваемые в других высших учебных заведениях (по согласованию между их руководителями);

– определять по согласованию с деканатом и кафедрами набор дисциплин по специальности в пределах, установленных учебным планом, а также посещать дополнительно любые виды учебных занятий, проводимых в университете;

– ставить перед деканом и ректором, руководителем территориально обособленного учебного подразделения вопрос о замене преподавателей, не обеспечивающих должное качество учебного материала, нарушающих расписание занятий, иные правила организации учебно-воспитательного процесса;

– участвовать в обсуждении и решении важнейших вопросов деятельности университета и его обособленных структурных подразделений, в том числе через общественные организации и органы управления;

– бесплатно пользоваться услугами учебных, научных, лечебных и других подразделений университета в порядке, установленном Уставом;

– принимать участие во всех видах научно-исследовательских работ, конференциях, симпозиумах;

– совмещать учебу с профессиональной деятельностью и иной работой;

– представлять свои работы для публикации, в том числе в изданиях университета;

– обжаловать приказы и распоряжения администрации высшего учебного заведения в установленном законодательством РФ порядке;

– переходить с платного договорного обучения на бесплатное обучение в порядке, предусмотренном Уставом университета;

– получать от университета информацию о положении дел в сфере занятости населения и возможностях трудоустройства по специальности в соответствии с заключенными договорами и законодательством о занятости выпускников образовательных учреждений.

Обучающиеся в университете по заочной форме, выполняющие учебный план, имеют право на дополнительный оплачиваемый и не оплачиваемый отпуск по месту работы, на сокращенную рабочую неделю и на другие льготы, которые предоставляются в порядке, устанавливаемом законодательством РФ (ст. 173-176 ТК РФ).

Обучающиеся в университете имеют право на свободное посещение мероприятий, не предусмотренных учебным планом.

Обучающиеся в университете имеют право на перевод в другое образовательное учреждение, реализующее образовательную программу соответствующего уровня, при согласии этого образовательного учреждения и успешном прохождении ими аттестации.

Обучающиеся в университете по очной форме обучения имеют право на получение отсрочки от призыва на военную службу в соответствии с Федеральным законом «О воинской обязанности и военной службе».

5.2 Обязанности обучающихся

Обучающиеся в университете обязаны:

– добросовестно посещать учебные занятия, глубоко овладевать теоретическими знаниями, практическими навыками и современными методами для работы по избранной специальности;

– выполнять в установленные сроки все виды заданий, предусмотренных соответствующими учебными планами и программами обучения;

– постоянно повышать общую культуру, нравственность и физическое совершенство;

– нетерпимо относиться к недостаткам в учебно-воспитательном процессе и быту;

– бережно и аккуратно относиться к учебным и иным помещениям, оборудованию, учебным пособиям, литературе, приборам, другому имуществу университета; без соответствующего разрешения студентам запрещается выносить предметы и оборудование из лабораторий, кабинетов, аудиторий, учебных, бытовых корпусов и других помещений;

– нести материальную ответственность за ущерб, причиненный имуществу университета в соответствии с нормами действующего законодательства;

– незамедлительно сообщать в администрацию университета о возникновении ситуации, представляющей угрозу жизни и здоровью людей, сохранности имущества университета;

– соблюдать требования Устава университета, настоящие Правила и Правила проживания в общежитиях;

– поддерживать деловую репутацию, честь и престиж университета.

Обучающиеся в территориально обособленном учебном подразделении университета (филиале) помимо указанных выше правомочий пользуются правами и исполняют обязанности, предусмотренные Положением о соответствующем структурном подразделении или договорами о профессиональной подготовке, включая договоры на индивидуальную подготовку специалиста.

При неявке на занятия по уважительным причинам обучающийся ставит об этом в известность декана факультета, руководителя (уполномоченного работника) иного учебного структурного подразделения и в первый день явки на учебу представляет данные о причине неявки и документы установленного образца (справки, письма, телеграммы и т. п.), содержащие сведения оправдательного характера.

5.3 Требования к ношению формы

Обучающиеся в университете должны быть дисциплинированными и опрятными, вести себя достойно в университете, на улице, в общественном месте и в быту. В соответствии с решением Ученого совета университета от 25.06.2004 года, обучающиеся обязаны носить форменную одежду в ниже перечисленных случаях:

– на всех совещаниях, проводимых ректором, проректорами и деканами факультетов;

– на торжественных собраниях коллектива, митингах и конференциях;

– при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и иных официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также общественными и

научными организациями, на которых обучающиеся университета являются его представителями;

– при участии, в т. ч. организационно-техническом обеспечении заседаний Ученого совета университета и ректорских совещаний; при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

– в иных случаях по распоряжению ректора.

По собственной инициативе обучающиеся университета могут находиться в форменной одежде в иных случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и её функциональному назначению.

Запрещается ношение предметов формы одежды измененных или неустановленных образцов, а также знаков различия, не предусмотренных Положением о форменной одежде.

<…>

ТЕМА 12. ОФОРМЛЕНИЕ ДЕЛОВЫХ БУМАГ

Цель – научиться оформлять основные жанры деловых бумаг.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (требуется записать определение, основные реквизиты и образец):

Заявление – это документ, содержащий просьбу, предложение или жалобу какого-либо лица.

Заявление, как и большинство деловых бумаг, составляется в произвольной форме от руки или печатается на листе бумаги формата А4.

Основные реквизиты заявления:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Сведения об адресате (должность, ФИО полностью, в некоторых случаях адрес или другая контактная информация).

3. Наименование жанра документа.

4. Основной текст заявления с точным изложением просьбы, предложения или жалобы.

5. Опись приложений к документу, если они имеются.

6. Дата.

7. Подпись.

Образец оформления заявления

Декану ФГиГ
проф. Талалаю А. Г.
от студента группы МПГ-16
Волкова Михаила Владимировича

Заявление

Прошу отпустить меня с занятий на 3 дня с 25 по 27 октября 2018 года в связи с участием в областных соревнованиях по футболу.

Копию справки-вызова прилагаю.

01.10.2018 г.

Доверенность – это документ, выдаваемый одним лицом (доверителем) другому лицу (доверенному) для представительства перед третьими лицами и дающий право доверенному лицу действовать от имени доверителя.

Доверенность предоставляет полномочия доверенному лицу предпринимать за доверителя какое-либо действие. В зависимости от вида полномочий различают три вида доверенности: 1) **разовая** (дает право на совершение одного конкретного действия), 2) **специальная** (дает право на совершение однородных действий), 3) **генеральная** (дает право на общее управление имуществом доверителя).

Основные реквизиты разовой доверенности:

1. Наименование жанра документа.

2. Наименование доверителя (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

3. Наименование доверенного лица (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

4. Формулировка доверяемой функции.

5. Дата.

6. Подпись.

Образец оформления разовой доверенности

Доверенность

Я, Зорянова Евгения Михайловна, студентка группы ВД-16 (паспорт: серия 3209 № 345177, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Чкаловском районе гор. Екатеринбурга 09.06.2009 г., проживающая по адресу: г. Екатеринбург, ул. 8 марта, д. 104, кв. 190), доверяю Соловчуку Сергею Станиславовичу, студенту группы ГМО-17 (паспорт: серия 5404 № 654321, выдан Железнодорожным РУВД г. Ульяновска 13.09. 2008 г., проживающему по адресу: г. Екатеринбург, ул. Сулимова, д. 63, кв. 77), получить в кассе УГГУ мою стипендию за март 2017 года.

25.02.2017 г.

Расписка – это документ, подтверждающий произведенное кем-либо определенное действие (получение ценных предметов).

Расписка всегда составляется от руки. Если она имеет особо важное значение, ее необходимо заверить.

Основные реквизиты расписки:

1. Наименование жанра документа.

2. Наименование лица, получившего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

3. Наименование лица, выдавшего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

4. Точное наименование полученных ценностей с указанием количества (цифрами и прописью).

5. Дата, до которой необходимо вернуть полученные ценности.

6. Дата.

7. Подпись.

Образец оформления расписки

Расписка

Я, Воробьева Наталия Александровна, студентка группы УП-17 (паспорт: серия 5009 № 2435672, выдан отделом УФМС Ленинского района г. Новосибирска 25.09.2005 г., проживающая по адресу: Свердловская область, г. Первоуральск, ул. Горького, д. 7, кв. 5), получила от Штиппеля Артемия Павловича, инженера кафедры ГД (паспорт: серия 6507 № 575849, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Кировском районе г. Екатеринбурга 05.10.2004 г., проживающего по адресу: г. Екатеринбург, пер. Красный, д. 34, кв. 33), 10 000 (десять тысяч) рублей.

Обязуюсь вернуть указанную сумму до 31 декабря 2017 г.

07 ноября 2017 г.

Докладная записка – это документ, информирующий адресата о сложившейся ситуации, а также содержащий выводы и предложения составителя.

Основной текст докладной записки делится на две части:

- в первой излагаются причины, послужившие поводом для ее написания;
- во второй анализируется сложившаяся ситуация, содержатся выводы и предложения о действиях, которые необходимо предпринять.

Основные реквизиты докладной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Наименование жанра документа.

3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.

4. Опись приложений к документу, если они имеются.

5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).

6. Дата.

Образец оформления докладной записки

Ректору УГТУ
проф. Душину А. В.

Докладная записка

24 декабря 2018 г. примерно в 12.30 я сдал свой пуховик в гардероб 4 учебного корпуса. Через два часа (после окончания праздничных мероприятий) я попытался получить пуховик по бирке, но его не оказалось на вешалке. Студенты, дежурившие в гардеробе в тот день, отказались объяснять, что произошло и куда пропала моя одежда.

Прошу разобраться в сложившейся ситуации и помочь с поисками пуховика.

Описание прилагается.

Студент группы ТБ-17 *Вутенко Б. Н.*
25 декабря 2018 г.

Объяснительная записка – это документ, объясняющий причины какого-либо события, факта, поступка (нарушения трудовой или учебной дисциплины, невыполнение задания, поручения и т. д.).

Основной текст объяснительной записки делится на две части:

- в первой излагаются, констатируются факты нарушения;
- во второй объясняются причины нарушения.

Основные реквизиты объяснительной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Наименование жанра документа.

3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.

4. Опись приложений к документу, если они имеются.

5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).

6. Дата.

Образец оформления объяснительной записки

Зав. кафедрой ИЯДК
доц. Юсуповой Л. Г.

Объяснительная записка

05.03.2018 г. я опоздала на практическое занятие по иностранному языку по причине транспортной аварии на перекрестке улиц Малышева и Гагарина.

Выданную транспортным предприятием справку прилагаю.

Студентка группы МЭ-15 *Вайслер Ю. М.*

07.03.2018 г.

Задание 1. *Напишите от своего имени следующие жанры деловых бумаг:*

а) заявление с просьбой продлить Вам сессию на неделю;

б) заявление с просьбой принять Вас на работу;

в) доверенность на получение Вашей стипендии в этом месяце;

г) расписку в получении Вами образцов минералов для выполнения лабораторной работы;

д) докладную записку о пропаже Ваших личных вещей из аудитории;

е) объяснительную записку о пропуске Вами занятий в течение недели;

ж) объяснительную записку о неявке на экзамен.

Задание 2. *Исправьте допущенные ошибки в оформлении и содержании следующих документов. Обратите внимание на нарушение разного типа языковых норм (орфографических, пунктуационных, лексических и грамматических). Запишите исправленный вариант.*

Текст 1

Декану УГГУ
От студента III курса очной формы обучения факультета гражданской защиты
Волк Василия Васильевича

заявление

В связи с отъездом на лидерские сборы очень прошу разрешить не посещать мне занятия на следующей неделе.

09.09.18 г.

Текст 2

Ректору УГГУ

Н. П. Косареву

доверенность.

Я, Задорин Виктор, студент УГГУ, даю право на получение получаемой мной стипендии студенту Гудину Александру Геннадьевичу (паспорт 6509 номер 124338, ул. Мира, 90-1).

1.5.18 г. /*Задорин В. З.*/

Текст 3

Кафедре ИЯДК

расписка

Я – Пустник Валентин Тимурович, прошу выдать мне учебные пособия для практических занятий. Автор – Мясникова Юлия Марковна в размере одной штуки. Паспортные данные – серия 6102, номер 879521, УФМС России, дата рождения – 19.02.2000 года, проживаю в городе Лангепас на улице Парковая, 7.

Обязуюсь вернуть в срок.

25 сентября

Текст 4

Декану ГМФ
Козину Владимиру
Зиновьевичу

Докладная

Уважаемый Владимир Зиновьевич!

Сегодня я, Курпатова Вера, студентка ГМФ, оставила без присмотра свои вещи в учебной аудитории 2240. При возвращении моих вещей в аудитории не было. Я очень расстроилась.

Пропали: куртка черная кожаная, красная сумка в цветочек, белый платок.

1 октября 2018 года

Текст 5

Зав. кафедры УПД Волкову М. Н.
От студента Хлебникова Семена.

Объяснительная о прогуле

Я, Семен Хлебников, отсутствовал на занятиях два месяца всвязи болезни. Справку из 6 городской больницы прилогаю.

01.11.18 *Хлебников С.*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. *Голуб И. Б.* Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. Б. Голуб. – Электрон. текстовые данные. – М.: Логос, 2014. – 432 c. – 978-5-98704-534-3. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/39711.html
2. *Культура устной и письменной речи делового человека*: Справочник. Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания).
3. *Меленскова Е. С.* Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 78 с.
4. *Федосюк М. Ю., Ладыженская Т. А., Михайлова О. А., Николина Н. А.* Русский язык для студентов-нефилологов: учебное пособие. М.: Флинта: Наука, 2014 (и другие стереотипные издания).

Дополнительная литература

1. *Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи: учебное пособие для вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 544 с. (и другие стереотипные издания)
2. *Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи для инженеров: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Феникс, 2003. 384 с.
3. *Веселкова Т. В.* Культура устной и письменной коммуникации [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т. В. Веселкова, И. С. Выходцева, Н. В. Любезнова. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 268 c. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/54473.html
4. *Гавриленко Р. И., Меленскова Е. С., Шалина И. В.* Русский язык и культура речи: учебное пособие. 4-е изд., стереотип. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 84 с.
5. *Голуб И. Б.* Русский язык и культура речи: учебное пособие. М.: Логос, 2005. 432 с. (и другие стереотипные издания)
6. *Данцев А. А., Нефёдова Н. В.* Русский язык и культура речи для технических вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2001. 320 с. (и другие стереотипные издания)
7. Дускаева Л. Р., Протопопова. О. В. Стилистика официально-деловой речи: учебное пособие. М.: Академия, 2012. 272 с.
8. *Карякина М. В.* Русский язык и культура речи. Подготовка к контрольному тестированию. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 71 с.
9. *Кореньков Е. В., Пушкарева Н. В.* Русский язык и культура речи: учебник. М.: Проспект, 2013. 376 с.
10. *Котюрова М. П.* Стилистика научной речи: учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования. М.: Академия, 2012. 240 с.
11. *Лапынина Н. Н.* Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: курс лекций / Н. Н. Лапынина. — Электрон. текстовые данные. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 161 c. – 978-5-89040-431-2. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/22667.html
12. *Лыткина О. И.* Теоретический курс культуры речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. И. Лыткина. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2009. – 105 c. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/46332.html

13. *Меленскова Е. С.* Русский язык делового общения: учебное пособие для студентов всех специальностей и направлений подготовки. Екатеринбург: УГГУ, 2018. 80 с.

14. *Меленскова Е. С.* Русский язык и культура речи: учебное пособие с упражнениями и контрольными работами для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 80 с.

15. *Меленскова Е. С.* Стилистика русского языка: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 86 с.

16. *Миняева В. И.* Репетитор по русскому языку. Орфография. Пунктуация. Культура речи: учебное пособие. 5-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: УГГУ, 2007. 239 с.

17. *Петрова Ю. А.* Культура и стиль делового общения [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю. А. Петрова. – Электрон. текстовые данные. – М.: ГроссМедиа, 2007. – 190 с. – 5-476-003-476. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/1129.html

18. *Скворцов Л. И.* Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Скворцов Л. И. – Электрон. текстовые данные. – М.: Мир и Образование, Оникс, 2009. – 1104 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/14555.html

19. *Словарь-справочник по культуре речи*: для школьников и студентов / Отв. ред. А. А. Евтюгина. - Екатеринбург: У-Фактория, 2004. 334 с.

20. *Усанова О. Г.* Культура профессионального речевого общения [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / О. Г. Усанова. – Электрон. текстовые данные. – Челябинск: Челябинский государственный институт культуры, 2008. – 93 с. – 5-94839-062-4. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/56426.html

ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. *ГОСТ 6.30-2003.* «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов» (электронная публикация http://docs.cntd.ru/document/1200031361).
2. *Грамота (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramota.ru.
3. *Колтунова М. В.* Язык и деловое общение. Нормы. Риторика. Этикет. М.: Экономика, 2000. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://bibliotekar.ru/delovoe-obschenie/index.htm
4. *Культура письменной речи (сайт)* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramma.ru.
5. *Русский язык и культура речи/* под ред. Максимова В. И. М., 2001 [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.bibliotekar.ru/russkiy-yazyk/
6. *Русский язык: энциклопедия русского языка (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://russkiyyazik.ru.
7. *Стилистический энциклопедический словарь русского языка (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://stylistics.academic.ru.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

РУССКИЙ ЯЗЫК И КУЛЬТУРА РЕЧИ

Специальность
21.05.04. Горное дело

Специализация *№ 3*
Открытые горные работы

квалификация выпускника: специалист

формы обучения: очная, заочная

Автор: Меленскова Е. С., канд. филол. наук, доц

Екатеринбург

Самостоятельная работа обучающегося в образовательном процессе рассматривается как форма организации обучения, которая способна обеспечивать самостоятельный поиск необходимой информации, творческое восприятие и осмысление учебного материала в ходе аудиторных занятий, разнообразные формы познавательной деятельности студентов на занятиях и во внеаудиторное время, развитие аналитических способностей, навыков контроля и планирования учебного времени, выработку умений и навыков рациональной организации учебного труда.

Самостоятельная работа – форма организации образовательного процесса, стимулирующая активность, самостоятельность, познавательный интерес студентов.

Основные виды аудиторных занятий по дисциплине «Русский язык и культура речи» – лекция и практическое занятие.

Формы контроля самостоятельной работы студентов – опрос, дискуссия, проверка на практическом занятии, контрольная работа, разноуровневые задания, зачет

Обоснование затрат времени на самостоятельную работу обучающихся (СРО)

Суммарный объем часов на СРО очной формы обучения составляет 112 часов

№ п/п	*Виды самостоятельной работы*	*Единица измерения*	*Норма времени, час*	*Расчетная трудоемкость СРО по нормам, час*	*Принятая трудоемкость СРО, час.*
Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям					76
1	Повторение материала лекций (подготовка к опросу)	1 час	0,1-4,0	1,0 х 16	16
2	Самостоятельное изучение тем курса (подготовка к опросу по Разделу 3)	1 тема	1,0-8,0	5,0 х 3	15
3	Подготовка к практическим занятиям (к выполнению разноуровневых заданий в аудитории, к опросу)	1 занятие	0,3-2,0	2,0 х 8	16
4	Подготовка к дискуссии	1 занятие	1,0-4,0	4,0 х 1	4
5	Подготовка к контрольной работе и ее выполнение	1 работа	1,0-25,0	25,0 х 1	25
Другие виды самостоятельной работы					36
6	Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (разноуровневые задания)	1 задание	1,0-25,0	2,0 х 6	12
7	Подготовка к тесту (зачету)	1 тест	1,0-25,0	25 х 1	24
	Итого:				112

Суммарный объем часов на СРО *заочной формы* обучения составляет 128 часов и 4 часа на зачет. Итого – 132 часа.

№ п/п	*Виды самостоятельной работы*	*Единица измерения*	*Норма времени, час*	*Расчетная трудоемкость СРО по нормам, час*	*Принятая трудоемкость СРО, час.*
Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям					114
1	Повторение материала лекций (подготовка к опросу)	1 час	0,1-4,0	1,0 х 8	8
2	Самостоятельное изучение тем курса (1 тема из Раздела 1; 3 темы из Раздела 2, 7 тем из Раздела 3)	1 тема	1,0-8,0	7,0 х 11	77

3	Подготовка к практическим занятиям (к выполнению разноуровневых заданий в аудитории)	1 занятие	0,3-2,0	2,0 х 2	4
4	Подготовка к контрольной работе и ее выполнение	1 работа	1,0-25,0	1,0 х 25	25
Другие виды самостоятельной работы					18
5	Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (разноуровневые задания)	1 задание	1,0-25,0	2,0 х 7	14
6	Подготовка к зачету	1 зачет	1,0-25,0	4,0 х 1	4
	Итого:				**132**

Подготовка к лекции и опросу

Необходимость самостоятельной работы по подготовке к лекции или опросу определяется тем, что изучение любой дисциплины строится по определенной логике освоения ее разделов, представленных в РУП данной дисциплины.

Перечень основных вопросов для самоконтроля.

Раздел 1. Культура речи и деловое общение

1. Каковы основные отличия общения в официальной и неофициальной обстановке?
2. Какие функции общения реализуются в ситуации занятия? Каких функций необходимо избегать?
3. Какие выделяются стили общения? Назовите плюсы и минусы каждого из них.
4. Какие основные требования предъявляются к деловому общению?
5. Какую роль играют невербальные средства в официальной ситуации общения?
6. По каким аспектам мы оцениваем культуру речи каждого человека?
7. Почему наши тексты должны соответствовать коммуникативным качествам речи?

Раздел 2. Современный русский язык. Типология языковых норм

1. Что такое естественные и искусственные языки? Каковы их отличительные особенности?
2. Как соотносятся понятия «язык» и «речь»?
3. Как можно охарактеризовать современный русский язык?
4. Какие разновидности выделяются в национальном русском языке?
5. Что такое литературный язык? Как это понятие соотносится с литературно-художественным стилем?
6. Перечислите основные особенности русского литературного языка.
7. Перечислите типы языковых норм. Что такое императивная и диспозитивная норма?

Раздел 3. Стилистика русского языка. Официально-деловой стиль

1. Что такое функциональный стиль?
2. По каким критериям происходит разделение функциональных стилей? Есть ли что-то объединяющее для всех стилей?
3. Перечислите функциональные стили, которые выделяются в современном русском языке. Почему не всеми учеными признается выделение литературно-художественного стиля?

4. По каким признакам можно классифицировать документы?
5. Каковы основные стилевые особенности официально-делового стиля?
6. Какие требования предъявляются к оформлению документов?
7. Какие нормы необходимо соблюдать в документах?

Часть тем дается на самостоятельное изучение с опорой на список предложенной литературы. Перечень и тем их количество определяется формой обучения.

Очная форма

1. Общая характеристика функциональных стилей
2. Научный стиль русского языка
3. Стилевая, языковая и жанровая специфика научного стиля

Заочная форма

1. Общая характеристика общения и делового общения
2. Язык как знаковая система
3. Разновидности национального русского языка и их характеристика
4. Литературный язык и его признаки
5. Система функциональных стилей русского языка
6. Общая характеристика функциональных стилей
7. Научный стиль русского языка
8. Стилевая, языковая и жанровая специфика научного стиля
9. Официально-деловой стиль русского языка
10. Стилевые и языковые особенности официально-делового стиля
11. Классификация документов и правила их оформления

Подготовка к практическому занятию

Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, с которым предстоит работа на занятии, или отработку навыков, проверка которых состоится непосредственно в аудитории (например, выполнение аналогичных, однотипных заданий). Здесь же можно отметить еще один вид СРО – это **выполнение самостоятельного письменного домашнего задания.**

К практическим занятиям студенты самостоятельно готовят задания, посвященные лексикографии:

Меленскова Е. С. Культура речи и стилистика русского языка: учебное пособие для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 –«Технология геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело». – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – С. 4-10.

Особое внимание при подготовке уделяется заданию 4, которое выполняется письменно.

К Разделу 3 по указанному пособию необходимо сделать следующую работу самостоятельно:

Стр. 35-37 – конспект

Зад. 45 стр. 38-40, зад. 47 стр. 41-47 (в качестве подготовки к тестированию)

Стр. 47-50 – конспект

Зад. 48 стр. 50-56 (по вариантам в сильных группах)

Стр. 77-82 – конспект

Зад. 53 стр. 82-83, зад. 54 стр. 83-84 (в качестве подготовки к разноуровневым заданиям)

Подготовка к дискуссии

Дискуссия – это целенаправленное обсуждение конкретного вопроса, сопровождающееся обменом мнениями, идеями между двумя и более лицами. Задача дискуссии – обнаружить различия в понимании вопроса и в споре попытаться установить истину. Обсуждение проблемы (нравственной, политической, научной, профессиональной и другой, которая не имеет общепринятого, однозначного решения) происходит в аудитории коллективно. Дискуссия позволяет включить обучающихся в процесс обсуждения спорного вопроса в рамках актуальной проблематики, оценить их умение формулировать и аргументировать собственную точку зрения.

При подготовке к дискуссии необходимо выбрать актуальную тему, разбиться на три группы 1) те, кто будет отстаивать точку зрения «ЗА», 2) те, кто будет приводить контраргументы и отстаивать позицию «ПРОТИВ», и 3) сторонние наблюдатели, которые будут оценивать происходящее и объяснять, почему они склоняются в итоге к мнению первой или второй команды. Первые две группы готовят тексты своих выступлений заранее. Также заранее можно сформулировать вопросы, которые будут корректироваться по ходу дискуссии.

Подготовка к контрольной работе

Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя:

- изучение конспектов лекций, посвященных темам Раздела 2;
- повторение учебного материала, полученного при подготовке к практическим занятиям и во время их проведения;
- изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых умений и навыков;
- выполнение упражнений, по аналогии с которыми составлены задания в контрольной работе.

Перед контрольной работой по орфографии и пунктуации рекомендуется в качестве тренировки выполнить упражнения по пособию:

Меленскова Е. С. Культура речи и стилистика русского языка: учебное пособие для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 –«Технология геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело». – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 88 с.

Зад. 5-12 стр. 10-19

В случае возникновения трудностей при выполнении упражнений можно обратиться к следующим учебным пособиям:

Культура устной и письменной речи делового человека: Справочник. Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания). Раздел «Трудные случаи орфографии и пунктуации» стр. 135-148.

Миняева В. И. Репетитор по русскому языку. Орфография. Пунктуация. Культура речи. Екатеринбург: УГГУ, 2007. 239 с. (и другие издания)

Перед контрольной работой на разные типы языковых норм рекомендуется в качестве тренировки выполнить упражнения, на основе которых данная работа составлена:

Меленскова Е. С. Культура речи и стилистика русского языка: учебное пособие для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 –«Технология

геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело». – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 88 с.

Зад. 13-15 стр. 19-20 (акцентологические нормы)

Зад. 16-20 стр. 20-23 (орфоэпические нормы)

Зад. 21 стр. 23 (словообразовательные нормы)

Зад. 22-29 стр. 23-26 (лексические нормы)

Зад. 30-40 стр. 27-31 (морфологические нормы)

Зад. 41-44 стр. 31-34 (синтаксические нормы)

При выполнении заданий рекомендуется обращаться к словарям и справочникам. В указанном учебном пособии есть отсылки к необходимой литературе.

Часть этих упражнений преподаватель на свое усмотрение может предложить в качестве самостоятельного письменного домашнего задания.

Подготовка к зачету

Зачет является традиционной формой проверки знаний, умений и навыков, сформированных у студентов в процессе освоения всего содержания изучаемой дисциплины.

Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: прежде всего нужно перечитать все лекции, конспекты, а также просмотреть материалы, которые самостоятельно готовились к лекциям или практическим занятиям. Поскольку зачет проходит в форме теста, можно предварительно потренироваться выполнять тестовые задания по дисциплине «Русский язык и культура речи».

Для подготовки к тесту рекомендуется использовать учебное пособие:

Меленскова Е. С. Культура речи и деловое общение: Тестовые задания для студентов всех специальностей очной и заочной формы обучения. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011.

Тестовые задания позволяют обобщить полученные теоретические знания (часть заданий нацелена на проверку знания теории курса) и практические навыки (часть тестовых заданий составлена с опорой на упражнения, которые студенты выполняют при подготовке к занятиям).

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Основная литература

№ п-п	Наименование	Кол-во экз.
1	*Голуб И. Б.* Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. Б. Голуб. Электрон. текстовые данные. М.: Логос, 2014. 432 c. 978-5-98704-534-3. – Режим доступа. http://www.iprbookshop.ru/39711.html	Электронный ресурс
2	*Культура устной и письменной речи делового человека*: Справочник Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания)	166
3	*Мелемскова Е. С.* Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург. Изд-во УГГУ. 2013. 78 с.	98
4	*Мелемскова Е. С.* Русский язык делового общения: учебное пособие для студентов всех специальностей и направлений подготовки Екатеринбург: УГГУ, 2018. 80 с	101

2. Дополнительная литература

№ п-п	Наименование	Кол-во экз.
1.	*Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи: учебное пособие для вузов Ростов-на-Дону Феникс, 2004. – 544 с. (и другие стереотипные издания)	216
2.	*Введенская Л. А. Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи для инженеров: учебное пособие. Ростов-на-Дону. Феникс, 2003. 384 с.	19
3.	*Веселкова Т. В.* Культура устной и письменной коммуникации [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т. В. Веселкова, И. С. Выходцева, Н. В. Любезнова. Электрон. текстовые данные. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 268 c. – 2227-8397. – Режим доступа. http://www.iprbookshop.ru/54473.html	Электронный ресурс
4.	*Карякина М. В.* Русский язык и культура речи. Подготовка к контрольному тестированию Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 71 с	40
5.	*Лапынина Н. Н.* Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: курс лекций / Н. Н. Лапынина. — Электрон. текстовые данные. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 161 c. – 978-5-89040-431-2. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/22667.html	Электронный ресурс
6.	*Лыткина О. Н.* Теоретический курс культуры речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. Н. Лыткина. Электрон. текстовые данные. М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2009. – 105 c. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/46332.html	Электронный ресурс
7.	*Мелемскова Е. С.* Русский язык и культура речи. учебное пособие с упражнениями и контрольными работами для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 80 с	38
8.	*Мелемскова Е. С.* Стилистика русского языка: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 86 с	27
9.	*Мизяева В. Н.* Репетитор по русскому языку. Орфография. Пунктуация. Культура речи: учебное пособие. 5-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: УГГУ, 2007. 239 с.	20
10.	*Петрова Ю. А.* Культура и стиль делового общения [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю. А. Петрова. – Электрон. текстовые данные. – М.: ГроссМедиа, 2007. – 190 c. – 5-476-003-476. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/1129.html	Электронный ресурс
11.	*Скворцов Л. И.* Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Скворцов Л. И. – Электрон. текстовые данные. – М.: Мир и Образование, Оникс, 2009. – 1104 c. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/14555.html. – ЭБС «IPRbooks»	Электронный ресурс
12.	*Усанова О. Г.* Культура профессионального речевого общения [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / О. Г. Усанова. – Электрон. текстовые	Электронный ресурс

	данные – Челябинск: Челябинский государственный институт культуры, 2008. – 93 с. – 5-94839-062-4. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/56426.html	
13.	*Федосюк М. Ю., Ладыженская Т. А., Михайлова О. А., Николина Н. А.* Русский язык для студентов-нефилологов: учебное пособие. М.:Флинта: Наука, 2014 (и другие стереотипные издания)	169

ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. *ГОСТ 6.30-2003.* «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов» (электронная публикация http://docs.cntd.ru/document/1200031361).
2. *Грамота (сайт)* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramota.ru
3. *Культура письменной речи (сайт)* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramma.ru
4. *Русский язык: энциклопедия русского языка (сайт).* [Электронный ресурс] Режим доступа: http://russkyyazik.ru.
5. *Стилистический энциклопедический словарь русского языка (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://stylistics.academic.ru.

Автор-составитель: Меленскова Е. С., кандидат филологических наук, доцент

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

ПСИХОЛОГИЯ ДЕЛОВОГО ОБЩЕНИЯ

Специальность
21.05.04 Горное дело

специализация
Открытые горные работы

Автор: Чащегорова Н.А., доцент, к.ф.н.

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	5
2	Методические рекомендации к опросу	9
3	Методические рекомендации по подготовке деловых и ролевых игр	11
4	Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	13
5	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	15
6	Заключение	18
	Список использованных источников	19

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);
- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[1]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированном заданием.

---

[1] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

Дискуссия занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

Метод «мозговой атаки» или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

Презентация, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [2].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

---

[2] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[3].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

[3]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

3.Методические рекомендации по подготовке деловых и ролевых игр

Основной целью проведения студенческих деловых игр во внеаудиторное время является привитие студентам навыков решения конкретных управленческих вопросов и накопление ими практического опыта в решении процедурных вопросов на основе создания конкретных деловых ситуаций, максимально приближенных к реальным жизненным условиям.

Деловая игра – это воспроизведение деятельности хозяйственных руководителей и кадров управления, игровое моделирование систем управления.

Деловые игры в отличие от других методов обучения позволяют наиболее полно воспроизводить деятельность руководителей и специалистов, выявить проблемы и причины появления, разрабатывать и оценивать варианты решения проблем, принимать решение и определять механизм его реализации. Это дает возможность рассматривать проблему не вообще, а как конкретную, вытекающую из хозяйственной деятельности конкретного предприятия (организации).

Одним из видов деловой игры является ролевые игры.

Ролевая игра – это метод, при котором участники игры с помощью проигрывания определенных ролей в свободной от риска ситуации обнаруживают свои значимые черты поведения в профессиональной ситуации, а также самостоятельно критически анализируют их, формируют и развивают. Роли, могут быть: директор, руководитель проекта, отдела, специалист и т.д.

Типичными техниками ролевых игр являются:

- самостоятельное (в пределах темы) конструирование ситуации;
- определение участниками общего количества ратей и их персональное распределение;
- обмен ролями в ходе игры;
- использование дублирования при отработке ролей;

Методические рекомендации

На первом этапе следует ознакомиться с целью игры и необходимой исходной информацией. Студенты самостоятельно выбирают определенную проблему или конкретную ситуацию и по желанию формируют команды таким образом, чтобы это была творческая группа.

Второй этап – самостоятельная работа студентов в командах. Здесь активно используется практический опыт каждого участника, уточняются позиции и вырабатываются обобщающие выводы или решения. При коллективном обсуждении в командах необходимо, чтобы свою точку зрения имел возможность высказать каждый участник. Коллективное обсуждение проблемы позволяет выявить разные подходы к решению одной и той же проблемы или задачи. Очень важно использование принципа консенсуса, т.е. единогласное принятие общих решений, но не путем голосования, а на основе предварительного согласия. Однако это не означает, что кто-либо из участников и в этом случае не может выйти на коллективное обсуждение в общей группе со своей точкой зрения.

Третий этап – дискуссия в группе. Каждая команда докладывает свой вариант разрешения рассматриваемой проблемы. Участники других команд выступают в качестве оппонентов, задают вопросы, выступают с критическими замечаниями или в поддержку предоставленного проекта.

Возможны случаи, когда участники не формируются в команды, а распределяются по определенным ролям. В этих играх для решения проблемы прежде всего определяется состав действующих лиц и устанавливаются их задачи. Дискуссия идет с учетом определенных ролей.

Для преодоления скованности участников, облегчения их вживания в роль и естественности их поведения желательна минимизация вмешательства руководителя в процесс игры. Функции руководителя сводятся главным образом к ознакомлению участников с условиями, целями и техниками игры, обеспечению ее нормального протекания, общему контролю за ее процессом и оказанию в случае необходимости методической помощи в достижении игровых целей, а также к общему подведению итогов, включающему, если это целесообразно, индивидуальные советы и рекомендации ее участникам.

Ходе проведения ролевых и деловых игр практически не отличается от рассмотренных ранее. Разница в том, что в первом случае выступают представитель команды, а во втором участник деловой игры действует в рамках ролевой должности.

На практических занятиях, проходящих в форме деловой игры, ее участники должны приобрести необходимые знания и практические навыки:

– по постановке стратегических и оперативных целей работы организации;

– выработке экономических решений и оценки влияния факторов внешней и внутренней среды на реализацию этих решений;

– освоению и отработки навыков коллективного генерирования идей, делового общения при выработке групповых решений;

– выявление различных точек зрения на экономическую проблему

На предприятиях ролевые игры наиболее часто используются для обучения руководителей правильному ведению собеседования, распределению заданий, обеспечению поддержки сотрудниками коллективного задания, руководству командой и т.д. С их помощью сотрудники повышают свои знания и умения в области принятия самостоятельных решений, своевременного просчитывания их последствий, развития делового общения и т.п. Ролевые игры особенно эффективны при карьерном обучении, когда сотрудник проигрывает комплекс функций, вытекающих из его будущих должностных обязанностей.

Базирование ролевых игр на повседневных, личностно значимых ситуациях обеспечивает высокую ангажированность, вовлеченность их участников. Это в свою очередь облегчает личностное принятие вырабатываемых образцов поведения, идентификацию решений и рекомендаций, перенос отработанных в игре образцов поведения в повседневные практические отношения.

4.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что

необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

5.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на

то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М. КДУ, 2008. – 368 с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально-ориентированного обучения [Электронный ресурс] Режим доступа //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

**Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова,
О. Е. Турова**

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
**по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения**

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……4
1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ……5
1. 1. Первообразная для функции ……5
1. 2. Неопределенный интеграл и его свойства ……5
1. 3. Таблица основных интегралов ……6
2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ……7
2. 1. Непосредственное интегрирование ……7
2. 2. Подведение под знак дифференциала ……10
2. 3. Замена переменной ……12
2. 4. Интегрирование по частям ……14
2. 5. Интегрирование рациональных дробей ……19
2. 6. Интегрирование тригонометрических функций ……28
3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ……34
3.1. Непосредственное интегрирование ……34
3. 2. Подведение под знак дифференциала ……37
3. 3. Замена переменной ……41
3. 4. Интегрирование по частям ……44
3. 5. Интегрирование рациональных дробей ……46
3. 6. Интегрирование тригонометрических функций ……51
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ……53

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии представлены основные теоретические сведения по теме "Неопределенный интеграл", рассмотрены основные методы интегрирования, разобраны примеры решения задач.

Работа содержит 30 вариантов наборов задач для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы для контрольных работ.

Рекомендуется для всех специальностей УГГУ.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная для функции

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x)=f(x)$

Примеры

1. Функции $F(x)=-\cos x$, $F_1(x)=-\cos x+1$, $F_2(x)=-\cos x-3$ являются первообразными для функции $f(x)=\sin x$

2. Функции $F(x)=\ln x$, $F(x)=\ln x+\ln a$ являются первообразными для функции $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$

3. Функции $F(x)=\arcsin x$, $F_1(x)=\arcsin x-0,5$ являются первообразными для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Теорема

Если $F(x)$ и $F_1(x)$ - первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $F_1(x)=F(x)+C$, где $C=\text{const}$.

Таким образом, множество всех первообразных для функции $f(x)$ имеет вид $\{F(x)+C\}$.

1.2. Неопределенный интеграл и его свойства

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ на (a,b) называется множество всех её первообразных и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где $F(x)$ - одна из первообразных для функции $f(x)$.

Примеры

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1.$

Свойства неопределённого интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3. $\int df(x) = f(x) + C.$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ где $k = \text{const}.$

5. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = u(x)$ - дифференцируемая на (a,b) функция, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

1.3. Таблица основных интегралов

1. $\int 0dx = C \quad (C = \text{const}).$

2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0, \ \alpha \neq -1.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \ a \neq 1.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad \cos x \neq 0.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C, \quad k \neq 0.$

2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Непосредственное интегрирование

Выполняется с использованием тождественных преобразований подынтегральных функций, свойств и таблицы неопределённых интегралов.

Примеры

1. $\int 2\sqrt{x^3}dx = 2\int x^{\frac{3}{2}}dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C.$

2. $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(1 + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$

$= x + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x + 4\sqrt{x} + C.$

3. $\int (7x-1)\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(7x\cdot x^3 - x^3 + 7x\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(7x^4 - x^3 - \frac{1}{x} + 7\right)dx =$

$= 7\int x^4dx - \int x^3dx - \int\frac{1}{x}dx + 7\int dx = \frac{7x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \ln|x| + 7x + C.$

4. $\int \frac{x^2-5}{x^4-25}dx = \int \frac{x^2-5}{(x^2)^2 - 5^2}dx = \int \frac{x^2-5}{(x^2-5)(x^2+5)}dx = \int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{5})^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

5. $\int \frac{x^2-2x-3}{x+1}dx = \begin{bmatrix} x^2-2x-3=0 \\ x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \\ x_1 = 3, \quad x_2 = -1 \end{bmatrix} = \int \frac{(x-3)(x+1)}{x+1}dx = \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + C.$

6. $\int \frac{(3x-1)^2}{x}dx = \int \frac{9x^2-6x+1}{x}dx = \int\left(9x - 6 + \frac{1}{x}\right)dx = 9\cdot\int xdx - 6\cdot\int dx + \int\frac{dx}{x} =$

$= \frac{9x^2}{2} - 6x + \ln|x| + C.$

$$7.\int e^x\cdot\left(\frac{3e^{-x}}{2}+\frac{4}{5}\right)dx=\int\left(\frac{3e^x\cdot e^{-x}}{2}+\frac{4}{5}e^x\right)dx=\int\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{5}e^x\right)dx=\frac{3}{2}\cdot\int dx-\frac{4}{5}\cdot\int e^x dx=$$

$$=\frac{3}{2}x+\frac{4}{5}e^x+C.$$

$$8.\int x^2\cdot\left(\frac{3\sin x}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)dx=\int\left(3\sin x+\frac{5}{x}\right)dx=3\cdot\int\sin x dx+5\cdot\int\frac{1}{x}dx=-3\cos x+5\ln|x|+C.$$

$$9.\int 4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx=\int 2\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx=2\cdot\int\sin x dx=-2\cos x+C.$$

$$10.\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C.$$

$$11.\int\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=$$

$$=\int\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\int x^{\frac{7}{6}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx=\frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13}-\frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7}+C=\frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13}-\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}+C.$$

$$12.\int\frac{2e^{5x}-e^{4x}}{e^{4x}}dx=\int\left(2e^x-1\right)dx=2\cdot\int e^x dx-\int dx=2e^x-x+C.$$

2.2. Подведение под знак дифференциала

В этом методе используют таблицу интегралов и свойство неопределённого интеграл: если $\int f(x)dx=F(x)+C$ и $u=u(x)$ - дифференцируемая на (a,b)

функция, то $\int f(u)du = F(u)+C$, а также определение дифференциала функции $f(x)$: $df(x) = f'(x)dx$.

Например:

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$ так как $\frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}(ax)'dx = \frac{1}{a}\cdot adx = dx$.
2. $dx = d(x+b)$.
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$.
4. $\sin x dx = -d(\cos x)$.
5. $\cos x dx = d(\sin x)$.
6. $e^x dx = d(e^x)$.
7. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.
8. $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2+b\right)$.
9. $x^2dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}d\left(x^3+b\right)$.
10. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$.
11. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$.
12. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$.
13. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$.
14. $\cos(ax) = \frac{1}{a}d(\sin(ax))$.

Примеры

1. $\int \sin 3x dx = \left[dx = \frac{1}{3} d(3x) \right] = \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C.$

2. $\int \cos \frac{x}{5} dx = \left[dx = 5d\left(\frac{x}{5}\right) \right] = 5 \int \cos \frac{x}{5} d\left(\frac{x}{5}\right) = 5 \sin \frac{x}{5} + C.$

3. $\int \frac{dx}{7x-2} = \left[dx = \frac{1}{7} d(7x-2) \right] = \frac{1}{7} \int \frac{d(7x-2)}{7x-2} = \frac{1}{7} \ln |7x-2 + C.$

4. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left[\sin x dx = -d(\cos x) \right] = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$

5. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln x) \right] = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$

6. $\int \frac{x dx}{x^2+9} = \left[x dx = \frac{1}{2} d(x^2+9) \right] = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{1}{2} \ln \left| x^2+9 \right| + C.$

7. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4} = \left[e^x dx = d\left(e^x\right) \right] = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C.$

8. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x} = \left[\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x) \right] = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C.$

9. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \left[\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x) \right] = \int \frac{d(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} = \ln |\operatorname{arctg} x| + C.$

$$10.\int\sqrt{4x^3-8}\cdot x^2dx=\left[x^2dx=\frac{1}{3}d\left(x^3\right)=\frac{1}{12}d\left(4x^3-8\right)\right]=\frac{1}{12}\int\left(4x^3-8\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4x^3-8\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\frac{\left(4x^3-8\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(4x^3-8)^3}+C=\frac{1}{18}\sqrt{(4x^3-8)^3}+C.$$

2.3. Замена переменной

Этот метод является продолжением метода подведения под знак дифференциала в более сложных случаях.

Пусть $x=x(t)$ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале изменения t, а $f(x)$ – непрерывная функция на соответствующем интервале изменения x.

Тогда

$$\int f(x)\,dx=\int f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

Примеры

1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2}=\begin{bmatrix}\text{Замена:}\\ x=t^2\\ dx=\left(t^2\right)dt=2tdt\end{bmatrix}=\int\frac{2tdt}{t+2}=2\int\frac{(t+2)-2}{t+2}dt=$$

$$=2\int\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt=2\int dt-4\int\frac{dt}{t+2}=$$

$$=2t-4\int\frac{d(t+2)}{t+2}=2t-4\ln|t+2|=\begin{bmatrix}\text{обратная}\\ \text{замена: } t=\sqrt{x}\end{bmatrix}=2\sqrt{x}-4\ln\left|\sqrt{x}+2\right|+C.$$

2.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x+20} = \left[\begin{array}{l} \text{Выделим в знаменателе полный квадрат.} \\ x^2+4x+20 = (x^2+4x+4)+16 = (x+2)^2+16. \\ \text{Замена: } x+2=t;\, x=t-2;\, dx=dt; \\ x+1=t-2+1=t-1 \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{(t-1)dt}{t^2+16} = \int \frac{tdt}{t^2+16} - \int \frac{dt}{t^2+16} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+16)}{t^2+16} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+16\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{обратная замена: } t=x+2; \\ t^2+16 = x^2+4x+20 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+20\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.$$

3.

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \left[\begin{array}{l} \text{Замена: } x=3\sin t,\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \\ = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t;\quad dx = 3\cos t dt \end{array}\right] =$$

$$= \int 3\cos t \cdot 3\cos t dt = 9\int \cos^2 t dt = 9\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2}\int dt + \frac{9}{2}\int \cos 2t dt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\int \cos 2t d(2t) = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C = \left[\text{Обратная замена: } t = \arcsin\frac{x}{3}\right] =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right) + C.$$

4.

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Замена:} & \\ e^x = t & e^{2x} = t^2 \\ x = \ln t & dx = \frac{1}{t}dt \end{array}\right] = \int \frac{t^2 \frac{1}{t}dt}{t+1} = \int \frac{tdt}{t+1} = \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{t+1} = t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = t - \ln|t+1| + C = e^x - \ln\left|e^x+1\right| + C.$$

2.4. Интегрирование по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\,dx$$

или в укороченном виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Формула применяется для нахождения, например, интегралов вида

а) $\int x^n \cos x dx$, $\int x^n \sin x dx$, $\int x^n e^x dx$ с выбором функции $u = x^n$;

б) $\int x^n \ln x dx$ с выбором функции $u = \ln x$;

в) $\int x^n \arcsin x dx$, $\int x^n \arccos x dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$, с выбором функции

$u = \arcsin x$ и т.п.

После выбора функции $u = u(x)$ и дифференциала $dv = v'(x)dx$ находим дифференциал $du = u'(x)dx$ и функцию $v = \int v'(x)dx = \int dv\ (C = 0)$ Подставив $u(x), v(x)$ и $du(x)$ в правую часть формулы, находим $\int v(x)du$.

Применение формулы интегрирования по частям не ограничивается интегралами приведённых типов.

Примеры

$$1.\ \int x\cos\frac{x}{3}dx=\left[\begin{array}{l}\text{Выбираем}\quad u=x,\ dv=\cos\frac{x}{3}dx\\ \text{и находим}\quad du=x'dx=dx,\\ v=\int\cos\frac{x}{3}dx=3\int\cos\frac{x}{3}d\frac{x}{3}=3\sin\frac{x}{3}\end{array}\right]=$$

$$=x\cdot 3\sin\frac{x}{3}-\int 3\sin\frac{x}{3}dx=3x\sin\frac{x}{3}-3\cdot 3\int\sin\frac{x}{3}d\frac{x}{3}=3x\cdot\sin\frac{x}{3}+9\cos\frac{x}{3}+C.$$

$$2.\ \int(2x-5)\cdot e^{-7x}dx=\left[\begin{array}{l}\text{Выбираем}\quad u=2x-5,\ dv=e^{-7x}dx\\ \text{и находим}\quad du=(2x-5)'dx=2dx,\\ v=\int e^{-7x}dx=-\frac{1}{7}\int e^{-7x}d(-7x)=-\frac{1}{7}e^{-7x}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x}+\int\frac{1}{7}e^{-7x}\cdot 2dx=-\frac{2x-5}{7}e^{-7x}+\frac{2}{7}\int e^{-7x}dx=$$

$$=-\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x}+\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)e^{-7x}+C==-\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x}-\frac{2}{49}e^{-7x}+C.$$

$$3.\ \int\frac{\ln 9x}{x^3}dx=\int\frac{1}{x^3}\cdot\ln 9xdx=\int x^{-3}\cdot\ln 9xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}u=\ln 9x,\ dv=x^{-3}dx,\ \text{тогда}\\ du=(\ln 9x)'dx=\frac{9}{9x}dx=\frac{dx}{x},v=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2x^2}\end{array}\right]=-\frac{\ln 9x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=-\frac{\ln 9x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int x^{-3}dx=-\frac{\ln 9x}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}+C=-\frac{2\ln 9x+1}{4x^2}+C.$$

$$4.\int x\operatorname{arctg} x\,dx=\int \operatorname{arctg} x\cdot x\,dx=\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg} x,\ dv=xdx,\ \text{тогда} \\ du=(\operatorname{arctg} x)'dx=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ v=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx==\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C=\frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} x-x\right)+C.$$

$$5.\int x^2\cdot 3^x dx=\begin{bmatrix} u=x^2,\ dv=3^x dx, & \text{тогда} \\ du=2xdx,\ v=\dfrac{3^x}{\ln 3} & \end{bmatrix}=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}\cdot 2xdx=$$

$$=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}\cdot\int x\cdot 3^x dx=\begin{bmatrix} u=x,\ dv=3^x dx, & \text{и} \\ du=dx,\ v=\dfrac{3^x}{\ln 3} & \end{bmatrix}=$$

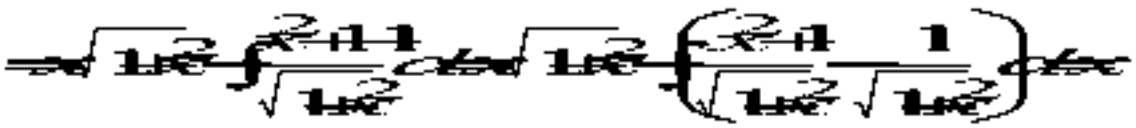
$$=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}\cdot\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}dx\right)=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}\cdot\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C\right)=$$

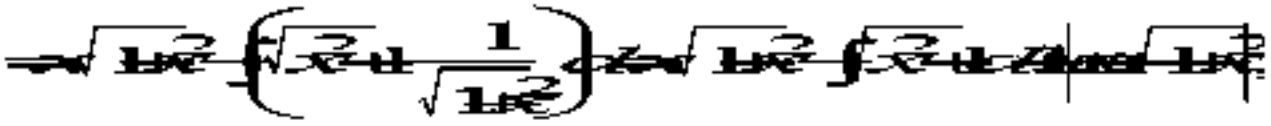
$$=\frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{2x\cdot 3^x}{\ln^2 3}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln^3 3}+C.$$

Рассмотрим два нетиповых примера.

$$6.\ \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{1+x^2};\ dv = dx,\ \text{тогда} \\ du = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};\ v = \int dx = x \end{array}\right] =$$

$$= x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int x\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$





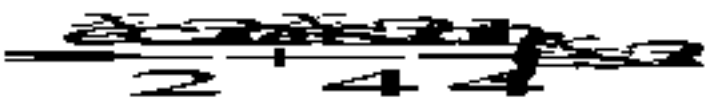
тогда из равенства

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}dx + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$$

находится

$$\int\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right) + C.$$

$$7)\ \int e^x\cdot\sin 2xdx = \left[\begin{array}{l} u = e^x,\ dv = \sin 2xdx,\ \text{тогда} \\ du = e^xdx,\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right] = -\frac{e^x\cdot\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int e^x\cdot\cos 2xdx =$$



Из равенства

$$\int e^x \cdot \sin 2x dx = -\frac{e^x \cdot \cos 2x}{2} + \frac{e^x \cdot \sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^x \cdot \sin 2x dx$$

находится

$$\frac{5}{4}\int e^x \cdot \sin 2x dx = -\frac{e^x \cdot \cos 2x}{2} + \frac{e^x \cdot \sin 2x}{4}$$

или

$$\int e^x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{5}e^x \cdot \sin 2x - \frac{2}{5}e^x \cdot \cos 2x + C.$$

2.5. Интегрирование рациональных дробей

Функция $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется рациональной дробью, где

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$Q_m(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m -$$

многочлены степени n и m соответственно.

Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ будет правильной, если $n < m$; в противном случае $(n \geq m)$ дробь будет неправильной.

Дроби: $\frac{x+1}{x^3+4x^2+5x}$; $\frac{3x+1}{x^2+8x}$ являются правильными, а дроби $\frac{x^3+6x^2+1}{x^3+6x^2}$; $\frac{x^4+6x^3+1}{x^2+6x}$ - неправильными.

Если дробь неправильная, то путём деления числителя на знаменатель её можно представить в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби.

Пример

Представить дробь $\frac{x^4+8x^3+5}{x^2+5x+2}$ в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби.

Решение

Дробь является неправильной, так как степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе

Произведём деление двух многочленов:

$$\begin{array}{r|l} x^4+8x^3+5 & x^2+5x+2 \\ \underline{-\,x^4+5x^3+2x^2} & \overline{x^2+3x-17} \\ 3x^3-2x^2+5 & \\ \underline{-\,3x^3+15x^2+6x} & \\ -17x^2-6x+5 & \\ \underline{-\,-17x^2-85x-34} & \\ 79x+39 & \end{array}$$

Деление производится до тех пор, пока степень многочлена в остатке не будет меньше степени делителя.

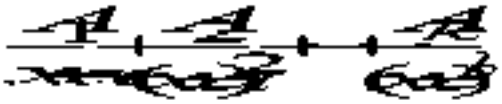
Таким образом, $\frac{x^4+8x^3+5}{x^2+5x+2} = x^2+3x-17+\frac{79x+39}{x^2+5x+2}$. Очевидно, что интегрирование целой части (т. е. многочлена) не представляет никаких трудностей, поэтому интегрирование любой рациональной дроби сводится к интегрированию правильной рациональной дроби.

Интегрирование правильной рациональной дроби можно разделить на несколько этапов:

1. Разложить знаменатель правильной рациональной дроби на множители вида $(x-a)^k$ и $(x^2+px+q)^l$, где a, p, q – действительные числа, k и l – натуральные числа, корни квадратного трёхчлена x^2+px+q – комплексные числа.

2. По виду множителей в знаменателе разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей по правилу:

всякому множителю вида $(x-a)^k$ в разложении соответствует сумма k – дробей вида



всякому множителю вида x^2+px+q в разложении соответствует сумма l – дробей вида

где неопределённые коэффициенты.

3. Найти неопределённые коэффициенты

для этого полученную сумму простейших дробей привести к общему знаменателю и сравнить числители заданной и полученной дробей. Найти неопределённые коэффициенты можно двумя способами:

а) приравнять коэффициенты двух многочленов (числителей) при одинаковых степенях x и решить полученную систему уравнений;

б) сравнить многочлены (числители) при конкретных значениях x; удобнее выбрать такие значения x, при которых знаменатель рассматриваемой дроби равен нулю или любые другие значения (метод частных значений).

4. Проинтегрировать полученные простейшие дроби. При интегрировании получаются интегралы следующего вида:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A_k}{(x-a)^k}dx = A_k \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ (см. интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен).

$\int \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^i}dx$ (интегрирование таких дробей в данном методическом пособии не рассматривается).

Примеры

1. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(x)=\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}-$$

неправильная рациональная дробь, преобразуем ее

$$\begin{array}{r|l} x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\ x^4+4x^3-8 & \\ \underline{x^4-4x^2} & \\ 4x^3+4x^2-8 & \\ \underline{4x^3-16x} & \\ 4x^2+16x-8. & \end{array}$$

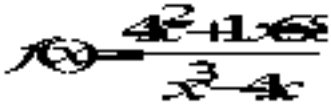
Таким образом, имеем

Следовательно

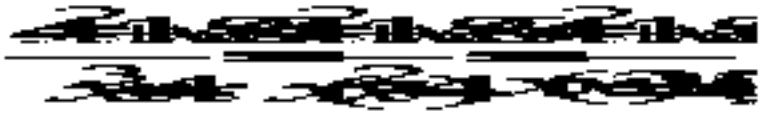
$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx = \int\left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx =$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}\,dx =$$

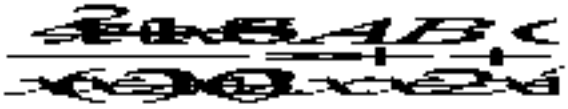
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}\,dx.$$

Последний интеграл рассмотрим отдельно. Подынтегральная функция  является правильной рациональной дробью.

Разложим знаменатель этой дроби на множители



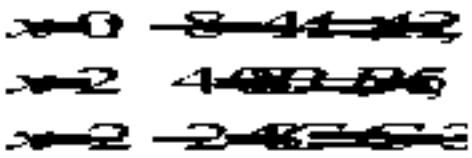
Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей



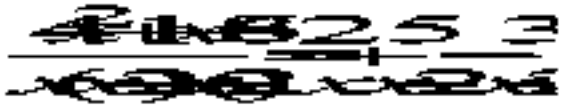
Определим коэффициенты A, B и C. Для этого приведём полученную сумму дробей к общему знаменателю

и приравняем числители

Определим коэффициенты A, B и C методом частных значений, для этого подставим конкретные значения x в обе части вышестоящего выражения; в качестве конкретных значений x рассмотрим те значения, при которых знаменатель рассматриваемой дроби обращается в нуль.



Итак, имеем



Интегрируем данную функцию

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x\cdot(x-2)(x+2)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx =$$

$$= 2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2} = 2\ln|x+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Возвращаемся к исходному интегралу

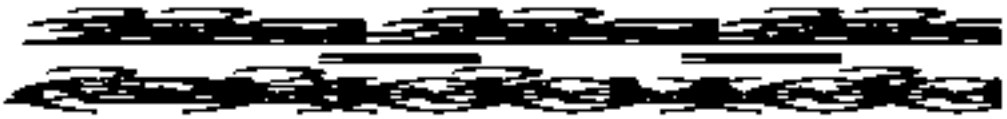
$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

2. $\int\frac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}\,dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+5x+1}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}$ – правильную рациональную дробь.

Разложим знаменатель на множители



Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

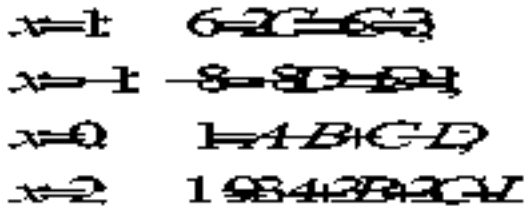
Определим коэффициенты A, B, C и D, для этого приведем сумму простейших дробей к общему знаменателю

$$\frac{x^3-x^2+5x+1}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x-1)^2(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x+1)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)}$$

и приравняем числители

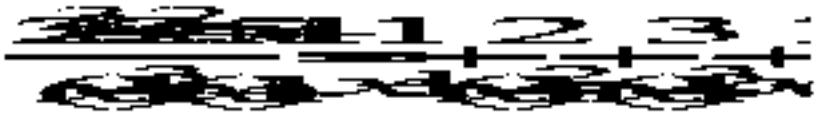
Определим коэффициенты A, B, C и D методом частных значений, подставив эти значения в обе части, в качестве конкретных значений x выбираем $x = 1$; $x = -1$ (это те значения x при которых знаменатель рассматриваемой дроби равен 0) и два значения $x = 0$ и $x = 2$ выбираем произвольно.



подставив значения $C = 3$ и $D = 1$ в последние два уравнения получаем

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+3B=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=2 \end{matrix}$$

Итак, имеем



Интегрируем данную функцию

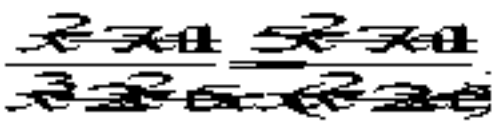
$$\int \frac{2x^3-2x^2-5x+1}{(x-1)^3(x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{x+1} = \ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+\ln|x+1|+C.$$

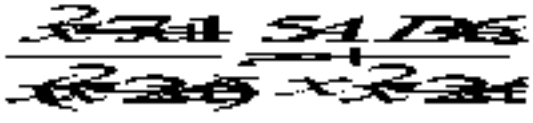
3. $\int \frac{x^2-7x+15}{x^3-2x^2+5x}dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x)=\frac{x^2-7x+15}{x^3-2x^2+5x}$ Это правильная рациональная дробь.

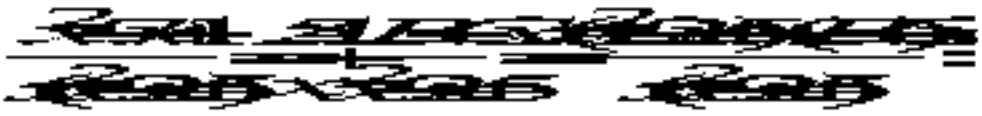
Разложим знаменатель дроби на множители



Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби



Определим коэффициенты A, B и C



$$\Rightarrow x^2-7x+1 \equiv A(x^2-2x+5)+(Bx+C)x;$$

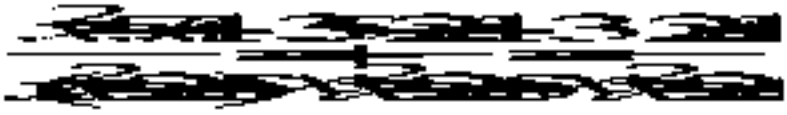
$$x^2-7x+1 \equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx$$

$$x^2-7x+1 \equiv (A+B)x^2+(C-2A)x+5A$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{aligned} x^2: &\quad 1 = A + B; \\ x: &\quad -7 = C - 2A; \\ x^0: &\quad 15 = 5A \Rightarrow A = 3 \\ &\qquad\qquad B = -2 \\ &\qquad\qquad C = -1. \end{aligned}$$

Итак, имеем



Проинтегрируем данную функцию

$$\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x(x^2 - 2x + 5)}\,dx = \int\left(\frac{3}{x} - \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 5}\right)dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 5}\,dx = 3\ln|x| - \int \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 5}\,dx.$$

Рассмотрим второй интеграл отдельно.

$$\int\frac{2x+1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{2x+1}{(x-1)^2+4}dx=\left|\begin{matrix}x-1=t\\x=t+1\\dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{2(t+1)+1}{t^2+4}dt=\int\frac{2t+3}{t^2+4}dt=$$

$$=\int\frac{2tdt}{t^2+4}+3\int\frac{dt}{t^2+4}=\int\frac{d(t^2+4)}{t^2+4}+\frac{3}{2}\text{arctg}\frac{t}{2}+C=\ln\left|t^2+4\right|+\frac{3}{2}\text{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\ln\left|(x-1)^2+4\right|+\frac{3}{2}\text{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$$

Тогда окончательно имеем

$$\int\frac{x^2-7x+15}{x(x^2-2x+5)}\text{dx}=3\ln|x|-\ln\left|x^2-2x+5\right|-\frac{3}{2}\text{arctg}\ \frac{x-1}{2}+C.$$

2.6. Интегрирование тригонометрических функций

а) $\int\sin^m ax\cdot\cos^n axdx$

Пусть хотя бы одно из чисел m или n является нечетным положительным числом. Интеграл находится методом замены переменной; при этом

если m – нечетное число, то нужно сделать замену $\cos ax=t$.

если n – нечетное число, то нужно сделать замену $\sin ax=t$.

При таких подстановках нужно предварительно представить функцию, имеющую нечетную положительную степень в виде произведения первой и четной степени и преобразовать четную степень тригонометрической функции с помощью основного тригонометрического тождества: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Если оба числа m и n являются нечетными положительными числами, то за новую переменную обозначить ту из функций $\cos ax$ и $\sin ax$, степень которой больше, а оставшийся множитель преобразовать так же, как указано выше.

Примеры

$$1.\int\frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos^5 x}}=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x dx}{\sqrt{\cos^5 x}}=\int\frac{(1-\cos^2 x)\cdot\sin x dx}{(\cos x)^{5/2}}=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\-\sin x dx=dt\\\sin x dx=-dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{(1-t^2)\cdot(-dt)}{t^{5/2}}=-\int\frac{dt}{t^{5/2}}+\int\frac{t^2 dt}{t^{5/2}}=-\int t^{-5/2}dt+\int t^{-1/2}dt=-\frac{t^{-3/2}}{-3/2}+\frac{t^{1/2}}{1/2}+C=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{t^3}}+2\sqrt{t}+C=\frac{2}{3\sqrt{\cos^3 x}}+2\sqrt{\cos x}+C.$$

$$2.\int\cos^5 3x dx=\int\cos^4 3x\cdot\cos 3x dx=\int(\cos^2 3x)^2\cdot\cos 3x dx=$$

$$=\int(1-\sin^2 3x)^2\cdot\cos 3x dx=\left|\begin{array}{l}\sin 3x=t\\3\cos 3\,x dx=dt\\\cos 3\,x dx=\frac{1}{3}dt\end{array}\right|=$$

$$=\int(1-t^2)^2\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int(1-2t^2+t^4)dt=\frac{1}{3}\left(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{2}{9}\sin^3 3x+\frac{1}{15}\sin^5 3x+C.$$

3. $\int \cos^9 2x \cdot \sin^3 2x dx = \int \cos^9 2x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin 2x dx =$

$$= \int \cos^9 2x \cdot (1 - \cos^2 2x) \cdot \sin 2x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2\sin 2x dx = dt \\ \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int t^9 \cdot (1 - t^2) \cdot \left(-\frac{1}{2} dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (t^9 - t^{11}) dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{t^{12}}{12} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{20} \cos^{10} 2x + \frac{1}{24} \cos^{12} 2x + C.$$

б) $\int \sin^m ax \cdot \cos^n ax dx$

Если оба числа m и n являются четными положительными числами, то воспользуемся формулами понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Примеры

1. $\int \sin^2 \frac{x}{3}\,dx = \int \frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos\frac{2x}{3}\,dx =$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3} + C = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3} + C.$

2. $\int \cos^4 3x dx = \int (\cos^2 3x)^2\,dx = \int\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+2\cos\ 6x+\cos^2 6x}{4}\,dx =$

$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos\ 6x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 6x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin\ 6x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos\ 12x}{2}\,dx =$

$= \frac{x}{4} + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\int \cos\ 12x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{12}\sin\ 6x + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12}\sin\ 12x + C =$

$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{12}\sin\ 6x + \frac{1}{96}\sin\ 12x + C.$

3. $\int \sin^4 \frac{x}{2}\cos^4 \frac{x}{2}\,dx = \int\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)^4 dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 x dx =$

$= \frac{1}{16}\int (\sin^2 x)^2\,dx = \frac{1}{16}\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\,dx =$

$= \frac{1}{64}\int dx - \frac{2}{64}\int \cos 2x dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{64} - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx =$

$= \frac{x}{64} - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{128}\int dx + \frac{1}{128}\int \cos 4x dx =$

в) $\int \sin ax \cdot \cos bx dx$; $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$; $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$,

где $a \neq b$.

При интегрировании указанных выше произведений синусов и косинусов нужно предварительно преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Примеры

1. $\int \sin 5x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x)dx = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{7}\cos 7x) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}\cos 3x) + C$

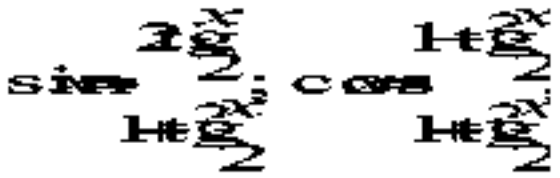
$= -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

2. $\int \cos 3x \cdot \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 4x)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}\sin 10x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + C =$

$= \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

г) $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$

Здесь $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. В этом случае нужно использовать универсальную тригонометрическую подстановку

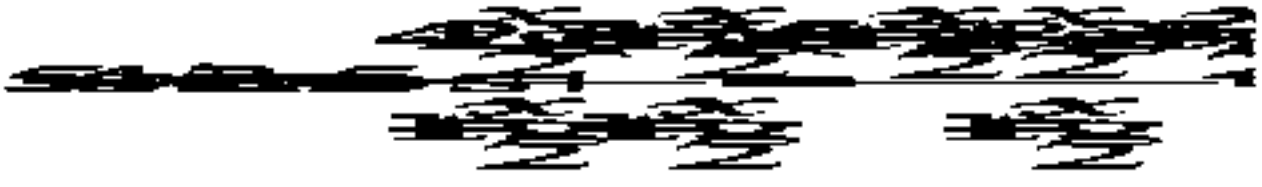


а затем ввести новую переменную

Пример

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}.$$

Преобразуем знаменатель подынтегральной функции



Возвращаемся к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\right)}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)}{2(t^2-4t+4)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-4t+4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \int (t-2)^{-2}dt = \frac{(t-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t-2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2} + C.$$

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Непосредственное интегрирование

1. а) $\int \sqrt{x}\cdot(x+1)(2x+3)dx$; б) $\int \frac{5e^{2x}+\sqrt{x^3}\cdot e^x}{e^x}dx$.

2. а) $\int \frac{(x+3)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{4-\sin^2 x}{2-\sin x}dx$.

3. а) $\int \frac{1}{x^3}\left(3x^2-\frac{1}{x^6}\right)dx$; б) $\int \frac{x^2-6}{x^4-36}dx$.

4. а) $\int \frac{5x^2-4x+12}{x^2}dx$; б) $\int \frac{1-4\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$.

5. а) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)x}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{x^2-4x+3}{x-3}dx$.

6. а) $\int x(\sqrt{x}-9)(\sqrt{x}+9)dx$; б) $\int \frac{5x\sin x+2}{x}dx$.

7. а) $\int \frac{5}{x^2}\left(\frac{x}{25}-x^2\right)dx$; б) $\int \frac{(81-x^2)dx}{x-9}$.

8. а) $\int \left(\frac{3}{x}+4\right)\cdot(\sqrt{x}+1)dx$; б) $\int \frac{6+x^2}{36-x^4}dx$.

9. а) $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot xdx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2+3}dx}{x^2+3}$.

10. а) $\int \frac{7x^2+6x-5}{x^2}dx$; б) $\int \frac{x^2-6x+5}{x-5}dx$.

11. а) $\int \frac{7\sqrt{x}+x\cdot\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$; б) $\int \frac{(1-\cos^2 x)dx}{x^2\cdot\sin^2 x}$.

12. а) $\int (x+2)(1-x)\sqrt{x}\,dx$; б) $\int \frac{4e^{5x}-x^4\cdot e^{4x}dx}{e^{4x}}dx$.

13. а) $\int x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^4}\,dx$; б) $\int \frac{\sin^2 5x+\cos^2 5x}{\sqrt{16-x^2}}dx$.

14. а) $\int (x^2\cdot\sqrt{x}-4x^3+3)dx$; б) $\int (1+x+tg^2 x)dx$.

15. а) $\int x\cdot\left(\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^2}+3\right)dx;$ б) $\int(4+ctg^2x)\,dx.$

16. а) $\int\frac{(x^3\sqrt{x}-2x)dx}{x^3};$ б) $\int\frac{\sqrt{64-x^2}}{64-x^2}dx.$

17. а) $\int\frac{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}{x}dx;$ б) $\int 4\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}dx.$

18. а) $\int\frac{16x^4-1(x^3\sqrt{x}-2x)}{(2x-1)(2x+1)}dx;$ б) $\int\frac{20dx}{\cos(1+tg^2x)}dx.$

19. а) $\int\frac{x^3-2x^2+x}{x-1}dx;$ б) $\int e^x(12e^{-x}+3)\,dx.$

20. а) $\int x(\sqrt{x}-1)\cdot\frac{9}{x}dx;$ б) $\int\frac{(x-3)(x+3)}{x^4-81}dx.$

21. а) $\int(7x+2)\left(\frac{7}{x}-1\right)dx;$ б) $\int\frac{x^2\cdot\cos x\,dx}{2\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}.$

22. а) $\int x^3\left(x^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx;$ б) $\int\frac{x^2-6x-8}{x-2}dx.$

23. а) $\int\frac{x^3-16x}{x+4}dx;$ б) $\int\frac{x^3e^x+3e^{2x}}{e^x}dx.$

24. а) $\int\frac{x^3-2\sqrt[3]{x}+3}{x}dx;$ б) $\int\frac{1+x\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

25. а) $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{x\cdot(x^2+1)}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx$.

26. а) $\int \frac{3}{x^3}\left(\frac{x^2}{3}+x^3+1\right)dx$; б) $\int \left(e^x+4e^{2x}\right)e^{-x}dx$.

27. а) $\int \frac{3x^2+1}{x\sqrt{x}}dx$; б) $\int 3x^2\cdot\left(\frac{1}{x^3\sin x}+\frac{1}{3x^2}\right)dx$.

28. а) $\int (3x^2-1)\cdot x\sqrt{x}\,dx$; б) $\int \frac{x^2+3}{x^4-9}dx$.

29. а) $\int \frac{2x\sqrt{x}+3x+12}{x}dx$; б) $\int \frac{3x^2}{\cos x}\left(\frac{2\cos x}{x^3}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)dx$.

30. а) $\int \frac{(3x+4)(x-1)}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{2dx}{1+\cos 2x}$.

3.2. Подведение под знак дифференциала

1. а) $\int 3\cos 7x dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{3}+1\right)}$; в) $\int e^{\sin x-2}\cos x dx$.

2. а) $\int 4e^{-5x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+7\right)}$; в) $\int \frac{\sin x dx}{\cos x+1}$.

3. а) $\int 2\sin\frac{x}{10}dx$; б) $\int \frac{dx}{(5x+8)^2}$; в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

4. а) $\int \frac{7dx}{\cos^2 3x}$; б) $\int e^{2^{x+3}} dx$; в) $\int \frac{\sqrt{\ln x + 2}}{x} dx$.

5. а) $\int \frac{3dx}{\sin^2 \frac{x}{4}}$; б) $\int \cos(2 - 5x) dx$; в) $\int \frac{xdx}{x^2 + 3}$.

6. а) $\int \frac{5dx}{9 + 4x^2}$; б) $\int \sin\left(\frac{1}{3}x + 4\right) dx$; в) $\int \cos\left(x^3 + 3\right) x^2 dx$.

7. а) $\int \frac{6dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$; б) $\int (5x + 1)^8 dx$; в) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$.

8. а) $\int 2\cos\frac{x}{4} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3}}$; в) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^3 x \cdot \sin^2 x}$.

9. а) $\int 3e^{\frac{x}{7}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(5x + 2)^3}$; в) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 x dx}{1 + x^2}$.

10. а) $\int 5\sin 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{4} + 1\right)}$; в) $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

11. а) $\int \frac{3dx}{\cos^2 \frac{x}{10}}$; б) $\int (7x - 2)^5 dx$; в) $\int \operatorname{ctg} x dx$.

12. а) $\int \frac{4dx}{\sin^2 10x}$; б) $\int e^{\frac{x}{5}+2} dx$; в) $\int \cos^2 x \sin x dx$.

13. а) $\int \frac{7dx}{25+9x^2}$; б) $\int \cos\left(\frac{x}{4}-7\right)dx$; в) $\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$.

14. а) $\int \frac{3dx}{\sqrt{36-25x^2}}$; б) $\int \sin\left(\frac{x}{7}+4\right)dx$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$.

15. а) $\int 2\cos 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{3}+1}}$; в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+4}$.

16. а) $\int 3e^{-\frac{x}{7}}dx$; б) $\int e^{-3x^2}xdx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x-5)}$.

17. а) $\int 25\sin\frac{x}{9}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}\cdot\cos^2 x}$; в) $\int \frac{dx}{\cos^2(4x+7)}$.

18. а) $\int \frac{6dx}{\cos^2 5x}$; б) $\int \frac{e^{-2ctgx}dx}{\sin^2 x}$; в) $\int e^{-\frac{x}{7}+2}dx$.

19. а) $\int \frac{4dx}{\sin^2\frac{x}{6}}$; б) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^2 x}$; в) $\int \frac{dx}{5x-3}$.

20. а) $\int \frac{3dx}{16+25x^2}$; б) $\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int\left(3x+\frac{1}{7}\right)^4 dx$.

21. а) $\int \frac{5dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; б) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$; в) $\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$.

22. а) $\int 5\cos\ 9xdx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{5}+3\right)}$; в) $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$.

23. а) $\int 5e^{5x}dx$; б) $\int \frac{e^x dx}{e^x-4}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{8}-3\right)}$.

24. а) $\int 3\sin\frac{2}{5}xdx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+7}}$; в) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

25. а) $\int \frac{4dx}{\cos^2\frac{x}{12}}$; б) $\int e^{-3x^2}xdx$; в) $\int e^{-4x+5}dx$.

26. а) $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{4x}{5}}$; б) $\int e^{2x^3}x^2dx$; в) $\int \cos(3x+8)dx$.

27. а) $\int \frac{6dx}{9+16x^2}$; б) $\int \frac{\cos(\mathrm{tg}x)dx}{\cos^2 x}$; в) $\int \sin\left(\frac{x}{10}+10\right)dx$.

28. а) $\int \frac{7dx}{\sqrt{64-25x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{7x-5}$; в) $\int \frac{e^{\mathrm{ctg}x}dx}{\sin^2 x}$.

29. а) $\int \sin\frac{3x}{7}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-7}}$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\,x}}{1+x^2}dx$.

30. а) $\int e^{-\frac{2x}{5}}dx$; б) $\int \sqrt{4x-5}dx$; в) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

3.3. Замена переменной

1. *а)* $\int \frac{dx}{e+2\sqrt{x}}$; *б)* $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+3}$ $\left[e^x=t\right]$.

2. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$; *б)* $\int x(5x-1)^{19}dx$ $\left[5x-1=t\right]$.

3. *а)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ $\left[x=\frac{2}{t}\right]$.

4. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; *б)* $\int \frac{xdx}{(3-x)^7}$ $\left[3-x=t\right]$.

5. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ $\left[x=\frac{2}{t}\right]$.

6. *а)* $\int \frac{dx}{x-3\sqrt{x}}$; *б)* $\int \frac{dx}{e^x-2}$ $\left[e^x=t\right]$.

7. *а)* $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$; *б)* $\int x(1-3x)^8dx$ $\left[1-3x=t\right]$.

8. *а)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ $\left[x=\frac{3}{t}\right]$.

9. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$; *б)* $\int \frac{xdx}{(4x+5)^{10}}$ $\left[4x+5=t\right]$.

10. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+4\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$ $\left[x=\frac{3}{t}\right]$.

11. а) $\int \frac{dx}{x+3\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{e^x+5}$ $[x=\ln t]$.

12. а) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3x+2}}$; б) $\int x(3-2x)^{11}dx$ $[3-2x=t]$.

13. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+36}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+25}}$ $\left[x=\frac{5}{t}\right]$.

14. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{xdx}{(3x+4)^6}$ $[3x+4=t]$.

15. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}-4\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$ $\left[x=\frac{5}{t}\right]$.

16. а) $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x-4}$ $[x=\ln t]$.

17. а) $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x-5}}$; б) $\int x(3x+1)^8dx$ $[3x+1=t]$.

18. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+16}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$ $\left[x=\frac{4}{t}\right]$.

19. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{xdx}{(5-x)^8}$ $[5-x=t]$.

20. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+9\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$. $\left[x=\frac{3}{t}\right]$.

21. а) $\int \frac{dx}{x-7\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{e^x-4}$ $[x=\ln t]$.

22. а) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{5x-1}}$; б) $\int x(5x+3)^9 dx$ $[5x+3=t]$.

23. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-25}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$ $\left[x=\frac{4}{t}\right]$.

24. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{xdx}{(3-x)^9}$ $[3-x=t]$.

25. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}-9\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-49}}$ $\left[x=\frac{7}{t}\right]$.

26. а) $\int \frac{dx}{x-7\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x-3}$ $[e^x=t]$.

27. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{7x+5}}$; б) $\int x(2x-5)^5 dx$ $[2x-5=t]$.

28. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+25}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+64}}$ $\left[x=\frac{8}{t}\right]$.

29. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{xdx}{(3x+1)^7}$ $[3x+1=t]$.

30. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+49\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{81-x^2}}$ $\left[x=\frac{9}{t}\right]$.

3.4. Интегрирование по частям

1. а) $\int x\cos\frac{x}{3}dx$; б) $\int \ln(x+4)dx$; в) $\int \sqrt{x^2+9}\,dx$.

2. а) $\int (2x+1)e^{-3x}dx$; б) $\int \arcsin 5x dx$; в) $\int \cos\ln 2x dx$.

3. а) $\int\left(\frac{x}{2}-1\right)\sin 2x dx$; б) $\int (x+4)\ln x dx$; в) $\int e^{3x}\cos x dx$.

4. а) $\int (8x+3)\cos 8x dx$; б) $\int \ln 8x dx$; в) $\int \sin(15\ln x)dx$.

5. а) $\int (x+4)\ln 5x dx$; б) $\int \left(x^2-1\right)5^{-x}dx$; в) $\int \sqrt{x^2-1}dx$.

6. а) $\int\left(1-\frac{5}{2}x\right)\sin 5x dx$; б) $\int (2x-5)\ln x dx$; в) $\int e^x \sin\frac{x}{4}dx$.

7. а) $\int x\cos\left(\frac{x}{5}-1\right)dx$; б) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$; в) $\int e^{4x}\sin x dx$.

8. а) $\int\left(\frac{x}{5}+7\right)e^{0.1x}dx$; б) $\int x\operatorname{arctg} x dx$; в) $\int \sin\ln x dx$.

9. а) $\int (7x+1)\sin\frac{x}{7}dx$; б) $\int x^{-5}\ln x dx$; в) $\int \operatorname{arctg}^2 x dx$.

10. а) $\int x\cos\left(5-\frac{x}{10}\right)dx$; б) $\int \arccos 3x dx$; в) $\int e^x \sin 2x dx$.

11. а) $\int \left(x^2-2x\right)\ln x dx$; б) $\int x\cdot 10^{5x}dx$; в) $\int e^{3x}\cdot\cos x dx$.

12. а) $\int \ln 12x dx$; б) $\int x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$; в) $\int \sqrt{x^2+7}\,dx$

13. а) $\int x^2\sin x dx$; б) $\int \ln(7x+9)dx$; в) $\int \arcsin^2 x dx$.

14. а) $\int (2x+7)\cos\frac{1}{7}x dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx$; в) $\int e^{5x}\cdot\sin x dx$.

15. а) $\int x \cdot e^{x+100} dx$; б) $\int \ln 12x dx$; в) $\int \cos \ln 5x dx$.

16. а) $\int (12x+1) \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$; б) $\int (x^2 - 4x + 4) \ln x dx$; в) $\int \sin(5 \ln x) dx$.

17. а) $\int (x+7) \cdot \sin 7x dx$; б) $\int x^{100} \cdot \ln x dx$; в) $\int e^{20x} \cdot \cos x dx$.

18. а) $\int x \cdot \cos(7x+9) dx$; б) $\int \ln(10-x) dx$; в) $\int \sqrt{x^2 - 10} dx$.

19. а) $\int 2x \sin 4x \cdot \cos 4x dx$; б) $\int x^2 \cdot \ln x dx$; в) $\int e^x \cdot \cos 12x dx$.

20. а) $\int x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x dx$; б) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$; в) $\int \sqrt{x^2 + 12} dx$.

21. а) $\int x \cdot \sin \pi x dx$; б) $\int x^5 \cdot \ln 5x dx$; в) $\int \arccos^2 x dx$.

22. а) $\int x \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$; б) $\int x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$; в) $\int \sin 3x dx$.

23. а) $\int (7x-4) \cdot e^{4-x} dx$; б) $\int \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$; в) $\int \cos(3 \ln x) dx$.

24. а) $\int (x+10) \ln 10x dx$; б) $\int (1+x)^2 \cdot e^x dx$; в) $\int \sin \ln 7x dx$.

25. а) $\int \lg(10x + 0{,}5) dx$; б) $\int x \cdot \cos \frac{2x}{\pi} dx$; в) $\int 2 \sin \ln x \cdot \cos \ln x dx$.

26. а) $\int (x+9) \cdot \sin \frac{x}{9} dx$; б) $\int (1+x^2)^2 \cdot \ln x dx$; в) $\int 2e^x \cdot \sin x \cos x dx$.

27. а) $\int \left(9 - \frac{7}{2} x \right) \cdot \sin 2x dx$; б) $\int \arccos 2x dx$; в) $\int \frac{e^x \cdot \sin x}{\operatorname{tg} x} dx$.

28. а) $\int x \cdot \sin \left(9 - \frac{7x}{2} dx \right)$; б) $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$; в) $\int \cos \ln x dx$.

29. *а)* $\int (x+7)\cdot\cos(x+7)dx$; *б)* $\int x\cdot\ln x^7\,dx$; *в)* $\int e^x\cdot(1+\cos 3x)dx$.

30. *а)* $\int\left(x^2-2x-3\right)\ln x dx$; *б)* $\int\frac{x\cdot\sin^3 x}{1-\cos^2 x}dx$; *в)* $\int\frac{\sin 2x}{e^{2x}}dx$.

3.5. Интегрирование рациональных дробей

1. *а)* $\int\frac{2x+3}{x^2-2x+5}dx$; *б)* $\int\frac{8x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

   в) $\int\frac{2x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; *г)* $\int\frac{x^5+7x^3+x^2+12x+1}{x^4+5x^2+4}dx$.

2. *а)* $\int\frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$; *б)* $\int\frac{4x^2-11x+3}{x^3-4x^2+3x}dx$;

   в) $\int\frac{2x^2+4x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; *г)* $\int\frac{x^5+6x^3+x^2+5x+3}{x^4+4x^2+3}dx$.

3. *а)* $\int\frac{1-2x}{x^2-2x+2}dx$; *б)* $\int\frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

   в) $\int\frac{2x^2-5x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; *г)* $\int\frac{x^5+5x^3+x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2}dx$.

4. *а)* $\int\frac{2-3x}{x^2+2x+2}dx$; *б)* $\int\frac{2x^2+3x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

   в) $\int\frac{2x^2+7x+4}{x^3+4x^2+4x}dx$; *г)* $\int\frac{x^5+7x^3+x^2+10x+3}{x^4+5x^2+6}dx$.

5. *а)* $\int\frac{3-2x}{x^2+4x+5}dx$; *б)* $\int\frac{4x^2-7x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-8x+9}{x^3-6x^2+9x}dx;$ *г)* $\int \frac{x^5+8x^3+x^2+16x+2}{x^4+6x^2+8}dx.$

6. *а)* $\int \frac{3x-4}{x^2+4x+5}dx;$ *б)* $\int \frac{8x-6}{x^3+x^2-6x}dx;$

в) $\int \frac{2x^2+10x+9}{x^3+6x^2+9x}dx;$ *г)* $\int \frac{x^5+9x^3+x^2+20x+3}{x^4+7x^2+12}dx.$

7. *а)* $\int \frac{5+2x}{x^2-6x+10}dx;$ *б)* $\int \frac{4x^2-6}{x^3-x^2-6x}dx;$

в) $\int \frac{3x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}dx;$ *г)* $\int \frac{x^5+6x^3+x^2+8x+1}{x^4+5x^2+4}dx.$

8. *а)* $\int \frac{2-5x}{x^2+6x+10}dx;$ *б)* $\int \frac{4x^2-7x-3}{x^3-2x^2-3x}dx;$

в) $\int \frac{3x^2+5x+1}{x^3+2x^2+x}dx;$ *г)* $\int \frac{x^5+6x^3-x^2+5x-3}{x^4+4x^2+3}dx.$

9. *а)* $\int \frac{1-4x}{x^2-2x+10}dx;$ *б)* $\int \frac{4x^2-4x-2}{x^3-x^2-2x}dx;$

в) $\int \frac{3x^2-7x+4}{x^3-4x^2+4x}dx;$ *г)* $\int \frac{x^5+5x^3-x^2+4x-2}{x^4+3x^2+2}dx.$

10. *а)* $\int \frac{5x+3}{x^2+2x+10}dx;$ *б)* $\int \frac{2x^2-6x-2}{x^3+x^2-2x}dx;$

в) $\int \frac{3x^2+9x+4}{x^3+4x^2+4x}dx;$ *г)* $\int \frac{x^5+7x^3-x^2+10x-3}{x^4+5x^2+6}dx.$

11. а) $\int \frac{5x+2}{x^2-6x+13}dx$; б) $\int \frac{2x^2-3x-3}{x^3-4x^2+3x}dx$,

в) $\int \frac{3x^2-11x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; г) $\int \frac{x^5+8x^3-x^2+16x-2}{x^4+6x^2+8}dx$.

12. а) $\int \frac{4-2x}{x^2+6x+13}dx$; б) $\int \frac{2-3x}{x^3-3x^2+2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+8x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; г) $\int \frac{x^5+9x^3+x^2+18x+4}{x^4+7x^2+12}dx$

13. а) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$; б) $\int \frac{-8x-6}{x^3-x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2-3x+2}{x^3-2x^2+x}dx$; г) $\int \frac{x^5+6x^3-x^2+8x-1}{x^4+5x^2+4}dx$.

14. а) $\int \frac{3x-5}{x^2+4x+8}dx$; б) $\int \frac{2x^2-6x-6}{x^3+x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+5x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; г) $\int \frac{x^5+5x^3+2x^2+4x+6}{x^4+4x^2+3}dx$.

15. а) $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+13}dx$; б) $\int \frac{-5x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-4x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; г) $\int \frac{x^5+4x^3+2x^2+3x+4}{x^4+3x^2+2}dx$.

16. а) $\int \frac{3x-7}{x^2+4x+13}dx$; б) $\int \frac{2x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

17. *а)* $\int \frac{2x+1}{x^2-6x+18}dx$; *б)* $\int \frac{2x^2+6x-6}{x^3-x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-7x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+4x^3+x^2+2}{x^4+6x^2+8}dx$.

18. *а)* $\int \frac{2x-1}{x^2+6x+18}dx$; *б)* $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+7x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+9x^3-x^2+20x-3}{x^4+7x^2+12}dx$.

19. *а)* $\int \frac{3x-4}{x^2-2x+17}dx$; *б)* $\int \frac{4x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+6x^3+x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

20. *а)* $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+17}dx$; *б)* $\int \frac{2x^2-9x+3}{x^3-4x^2+3x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2+6x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+5x^3-2x^2+4x-6}{x^4+4x^2+3}dx$.

21. *а)* $\int \frac{3x-4}{x^2-4x+20}dx$; *б)* $\int \frac{2x-2}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2-9x+8}{x^3-4x^2+4x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+4x^3-2x^2+3x-4}{x^4+3x^2+2}dx$.

22. *а)* $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+20}dx$; *б)* $\int \frac{4x^2+7x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+3x+4}{x^3+4x^2+4x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+7x^3-x^2+12x-2}{x^4+5x^2+6}dx$.

23. *а)* $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+29}dx$; *б)* $\int \frac{2x^2-2x+6}{x^3+x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-11x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+8x^3+x^2+12x+4}{x^4+6x^2+8}dx$.

24. *а)* $\int \frac{2x-3}{x^2+4x+29}dx$; *б)* $\int \frac{3x^2+2x+6}{x^3-x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{5x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+5x^3+x^2+4x+3}{x^4+7x^2+12}dx$.

25. *а)* $\int \frac{4x-7}{x^2-2x+26}dx$; *б)* $\int \frac{2x^2+9x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+6x^3-x^2+5x-4}{x^4+5x^2+4}dx$.

26. *а)* $\int \frac{4x+5}{x^2+2x+26}dx$; *б)* $\int \frac{2x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+6x^3+7x}{x^4+4x^2+3}dx$.

27. *а)* $\int \frac{5x-1}{x^2-6x+25}dx$; *б)* $\int \frac{2x^2-9x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-9x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+2x^3+2x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}dx$.

28. *а)* $\int \frac{5x-3}{x^2+6x+25}dx$; *б)* $\int \frac{6x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

в) $\int \frac{x^2+3x+8}{x^3+4x^2+4x}dx$; *г)* $\int \frac{x^5+3x^3+x^2+2}{x^4+5x^2+6}dx$.

29. *а)* $\int \frac{4x-3}{x^2-8x+17}dx$; *б)* $\int \frac{4x^2-6}{x^3+x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{x^2-11x+18}{x^3-6x^2+9x}dx;$ *г)* $\int \frac{x^5+8x^3-x^2+12x-4}{x^4+6x^2+8}dx.$

30. *а)* $\int \frac{2x+7}{x^2+8x+17}dx;$ *б)* $\int \frac{x+3}{x^3-4x^2+3x}dx;$

в) $\int \frac{x^2+7x+18}{x^3+6x^2+9x}dx;$ *г)* $\int \frac{x^5+9x^3-x^2+18x-4}{x^4+7x^2+12}dx.$

3.6. Интегрирование тригонометрических функций

1. *а)* $\int \cos^2\frac{x}{3}dx;$ *б)* $\int \cos^3 x\cdot\sin^2 xdx;$ *в)* $\int \sin 4x\cdot\cos 5xdx.$
2. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{3}dx;$ *б)* $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 xdx;$ *в)* $\int \sin 3x\cdot\sin 7xdx.$
3. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}dx;$ *б)* $\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx;$ *в)* $\int \cos 3x\cdot\cos 8x\,dx.$
4. *а)* $\int \cos^2\frac{x}{5}dx;$ *б)* $\int \sin^3 x\cdot\sqrt{\cos x}\,dx;$ *в)* $\int \sin 7x\cdot\cos 5xdx.$
5. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{5}dx;$ *б)* $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};$ *в)* $\int \sin 6x\cdot\sin 2xdx.$
6. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}dx;$ *б)* $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}dx;$ *в)* $\int \cos 5x\cdot\cos 7x\,dx$
7. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{6}dx;$ *б)* $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}};$ *в)* $\int \cos 4x\cdot\cos 7x\,dx.$
9. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{6}\cdot\cos^2\frac{x}{6}dx;$ *б)* $\int \cos^3 x\cdot\sin^4 x\,dx;$ *в)* $\int \cos 7x\cdot\sin 4x\,dx.$
10. *а)* $\int \cos^2\frac{2x}{5}dx;$ *б)* $\int \sin^3 x\cdot\cos^4 xdx;$ *в)* $\int \sin 11x\cdot\sin 5xdx.$
11. *а)* $\int \sin^2\frac{2x}{5}dx;$ *б)* $\int \cos^3 x\cdot x\sqrt[4]{\sin^3}\,dx;$ *в)* $\int \cos 9x\cdot\cos 6x\,dx.$

12. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{5}\cdot\cos^2\frac{x}{5}dx$; *б)* $\int \sin^3 x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$; *в)* $\int \cos 6x\cdot\sin 4x\,dx$.

13. *а)* $\int \cos^2\frac{x}{7}dx$; *б)* $\int \cos^3 x\cdot\sqrt[3]{\sin x}\,dx$; *в)* $\int \sin 12x\cdot\cos 8x dx$.

14. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{7}$; *б)* $\int \sin^3 x\cdot\sqrt[4]{\cos x}\,dx$; *в)* $\int \cos 8x\cdot\cos 5x\,dx$.

15. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{7}\cdot\cos^2\frac{x}{7}dx$; *б)* $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x\sqrt{\sin x}}dx$; *в)* $\int \sin 7x\cdot\cos 3x\,dx$.

16. *а)* $\int \cos^2\frac{x}{8}dx$; *б)* $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt{\cos x}}$; *в)* $\int \sin 5x\cdot\sin 8x\,dx$.

17. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{8}dx$; *б)* $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx$; *в)* $\int \cos 7x\cdot\cos 10x dx$.

18. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{8}\cdot\cos^2\frac{x}{8}dx$; *б)* $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$; *в)* $\int \cos 5x\cdot\sin 6x\,dx$.

19. *а)* $\int \cos^2\frac{x}{9}dx$; *б)* $\int \cos^3 x\cdot\sqrt[7]{\sin^4 x}\,dx$; *в)* $\int \sin 7x\cdot\sin 11x dx$.

20. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{9}dx$; *б)* $\int \sin^3 x\cdot\sqrt[7]{\cos^4 x}\,dx$; *в)* $\int \cos 9x\cdot\cos 11x\,dx$.

21. *а)* $\int \sin^2\frac{x}{9}\cdot\cos^2\frac{x}{9}dx$; *б)* $\int \cos^3 x\cdot\sqrt[5]{\sin^4 x}\,dx$; *в)* $\int \cos 11x\cdot\sin 5x\,dx$.

22. *а)* $\int \cos^2\frac{2x}{3}dx$; *б)* $\int \sin^3 x\cdot\sqrt[5]{\cos^4 x}\,dx$; *в)* $\int \sin 12x\cdot\sin 7x dx$.

23. *а)* $\int \sin^2\frac{2x}{3}dx$; *б)* $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x\sqrt{\sin x}}$; *в)* $\int \cos 13x\cdot\cos 5x\,dx$.

24. *а)* $\int \sin^2\frac{2x}{3}\cdot\cos^2\frac{2x}{3}dx$; *б)* $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}$; *в)* $\int \cos 9x\cdot\sin 4x\,dx$.

25. *а)* $\int \cos^2\frac{3x}{4}dx$; *б)* $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}$; *в)* $\int \sin 13x\cdot\sin 8x\,dx$.

26. *а)* $\int \sin^2\frac{3x}{4}dx$; *б)* $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}$; *в)* $\int \sin 12x\cdot\sin 8x\,dx$.

27. *а*) $\int \sin^2 \frac{3x}{4} \cdot \cos^2 \frac{3x}{4} dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[7]{\sin^5 x}}$; *в*) $\int \sin 5x \cdot \cos 8x \, dx$.

28. *а*) $\int \cos^2 \frac{3x}{5} dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[7]{\sin^5 x}}$; *в*) $\int \sin 14x \cdot \sin 9x \, dx$.

29. *а*) $\int \sin^2 \frac{3x}{5} dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[6]{\sin^5 x}}$; *в*) $\int \cos 15x \cdot \cos 11x \, dx$.

30. *а*) $\int \sin^2 \frac{3x}{5} \cdot \cos^2 \frac{3x}{5} dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[6]{\cos^5 x}}$; *в*) $\int \sin 9x \cdot \cos 3x \, dx$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: ООО "Изд-во Оникс", 2008. – 368 с.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2012. – 281 с.

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

**Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова,
О. Е. Турова**

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
**по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения**

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……4
1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ……5
1. 1. Понятия определенного интеграла……5
1. 2. Свойства определенного интеграла ……5
1. 3. Вычисление определенного интеграла ……6
2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ……8
2. 1. Интегрирование по бесконечному промежутку ……8
2. 2. Интеграл от разрывной функции……10
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ……12
3. 1. Площадь плоской фигуры ……12
3.2. Объем тела вращения ……23
3.3. Длина дуги плоской кривой. ……27
4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ……30
4. 1. Вычисление определенных интегралов……30
4. 2. Несобственные интегралы ……36
4. 3. Площадь ……40
4. 4. Объем тела вращения ……46
4. 5. Длина дуги плоской кривой ……47
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……53

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии представлены основные теоретические сведения по теме "Определенный интеграл". рассмотрены основные методы интегрирования, некоторые приложения к геометрическими задачам, разобраны примеры решения задач.

Работа содержит 30 вариантов наборов задач для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы для контрольных работ.

Рекомендуется для всех специальностей УГГУ.

1. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие определённого интеграла

Определённым интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ является число, обозначаемое символом $\int_a^b f(x)dx$ и определяемое как предел интегральной суммы функции на заданном отрезке, а именно

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i,$$

где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$; $x_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,\ldots,n$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

1. 2. Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad A = \text{const};$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a;b).$

I. 3. Вычисление определённого интеграла

1. Для вычисления определённого интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

2. Если для нахождения первообразной используется введение новой переменной $x = \varphi(t)$ (замена переменной), то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt,$$

где $t(a)$ и $t(b)$ новые пределы интегрирования, соответствующие переменной t.

При подстановке $u = u(x)$ формула замены переменной имеет вид

$$\int_a^b f\left[u(x)\right]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

3. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла принимает вид

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Примеры

1. $\int_0^4 \sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^4 = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^4 = \frac{2\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2\cdot 8}{3} = \frac{16}{3}.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\cos 3x dx = 7\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x d3x = \left.\frac{7\cdot\sin 3x}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0\right) = -\frac{7}{3}.$

3. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x\frac{dx}{x} = \int_1^e \ln x d\ln x = \left.\frac{\ln^2 dx}{2}\right|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$

4. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x^3}} = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x} = t, \\ x = t^2, \\ dx = \left(t^2\right)dt = 2tdt, \\ t(1) = \sqrt{1} = 1;\ t(4) = \sqrt{4} = 2 \end{array}\right] = \int_1^2 \frac{t\cdot 2tdt}{1+t^3} = 2\int_1^2 \frac{t^2dt}{1+t^3} =$

$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{3t^2dt}{1+t^3} = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{d(1+t^3)}{1+t^3} = \frac{2}{3}\ln 1+t^3\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(\ln|1+8| - \ln|1+1\right) = \frac{2}{3}\ln\frac{9}{2}.$$

2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2. 1. Интегрирование по бесконечному промежутку

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом первого рода и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, т. е.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится; если указанный предел не существует или равен бесконечности, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ является расходящимся.

Аналогично определяются и другие интегралы по бесконечному промежутку

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx.$$

В последнем случае интеграл является сходящимся, если сходятся оба интеграла, его составляющие.

Примеры

Найти несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1.\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2-4x+13}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{(x-2)^2+9}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+9}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}\Bigg|_2^{b}=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-2}{3}-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6},$$

интеграл сходится.

$$2.\int_e^{\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_e^{b}\frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_e^{b}(\ln x)^{\frac{1}{2}}d(\ln x)=\lim_{b\to\infty}\frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_e^{b}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{b\to\infty}\sqrt{(\ln x)^3}\Bigg|_e^{b}=\frac{2}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{(\ln b)^3}-\sqrt{(\ln e)^3}\right)=\infty,$$

интеграл расходится.

3. $$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(x-2)^3}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{dx}{(x-2)^3}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{d(x-2)}{(x-2)^3}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}(x-2)^{-3}d(x-2)=\lim_{a\to-\infty}\left.\frac{(x-2)^{-2}}{-2}\right|_{a}^{1}=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left.\frac{1}{(x-2)^2}\right|_{a}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(a-2)^2}\right)=-\frac{1}{2},$$

интеграл сходится.

2. 2. Интеграл от разрывной функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b)$, точка $x=b$ является точкой разрыва второго рода. Предел $\lim\limits_{\xi\to 0}\int\limits_{a}^{b-\xi}f(x)dx$ называют несобственным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$, т. е.

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\xi\to 0}\int_{a}^{b-\xi}f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\xi\to 0}\int\limits_{a}^{b-\xi}f(x)dx$, интеграл является сходящимся.

Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке $(a,b]$, а точка $x=a$ является точкой разрыва второго рода, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\xi\to 0}\int_{a+\xi}^b f(x)dx.$$

Если точка $x=c$ является точкой разрыва второго рода функции $y=f(x)$, где $c\in(a,b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

В последнем случае $\int_a^b f(x)dx$ будет сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части.

Примеры

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1.\int_4^5\frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}}=\lim_{\xi\to 0}\int_4^{5-\xi}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}}=\lim_{\xi\to 0}\int_4^{5-\xi}(x-5)^{-\frac{1}{3}}d(x-5)=$$

$$=\lim_{\xi\to 0}\frac{(x-5)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_4^{5-\xi}=\frac{3}{2}\lim_{\xi\to 0}\sqrt[3]{(x-5)^2}\Bigg|_4^{5-\xi}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\xi\to 0}\left(\sqrt[3]{(5-\xi-5)^2}-\sqrt[3]{(4-5)^2}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\xi\to 0}\left(\sqrt[3]{\xi^2}-\sqrt[3]{1}\right)=-\frac{3}{2},$$

интеграл сходится.

$$2.\ \int_{-2}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}=\lim_{\xi\to 0}\int_{-2+\xi}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}=\lim_{\xi\to 0}\int_{-2+\xi}^{0}\frac{\frac{1}{3}d(x^3+8)}{x^3+8}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\ln\left|x^3+8\right|_{-2+\xi}^{0}=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left|(-2+\xi)^3+8\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left(-8+12\xi-6\xi^2+\xi^3+8\right)\right)=$$

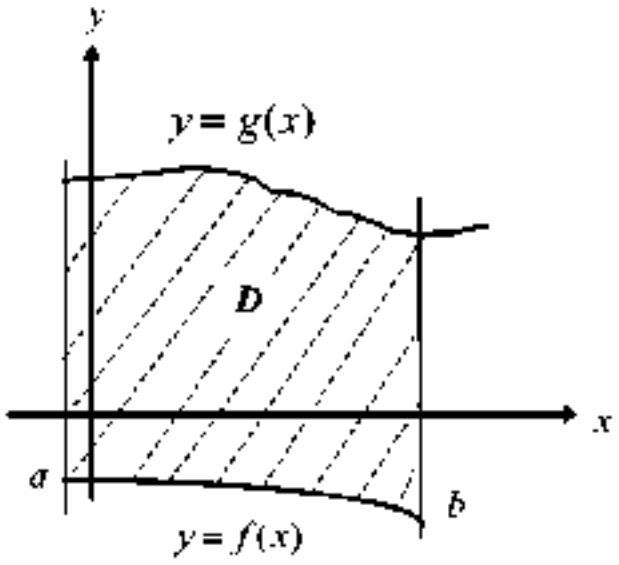
$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left(12\xi-6\xi^2+\xi^3\right)\right)=\infty,$$

интеграл расходится.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

3. 1. Площадь плоской фигуры

а) Площадь криволинейной трапеции D, ограниченной кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$, где $f(x)\le g(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a<b$ (см. рис.).



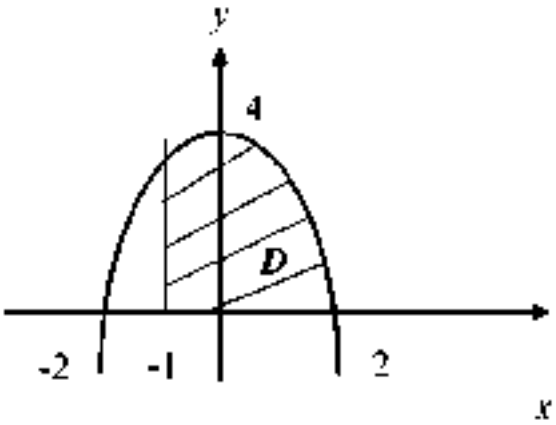
находится по формуле

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx.$$

Примеры

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$; $x = -1$; $y = 0$.

Построим фигуру. Верхняя граница: $y = 4 - x^2$, нижняя граница: $y = 0$, левая граница $x = -1$, правая граница $x = 2$.

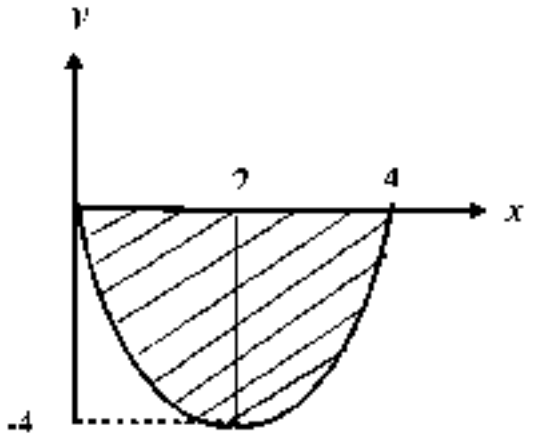


Найдем площадь:

$$S = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - 0)dx = 4x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= 4(2+1) - \frac{1}{3}(8+1) = 12 - 3 = 9 \text{ ед}^2.$$

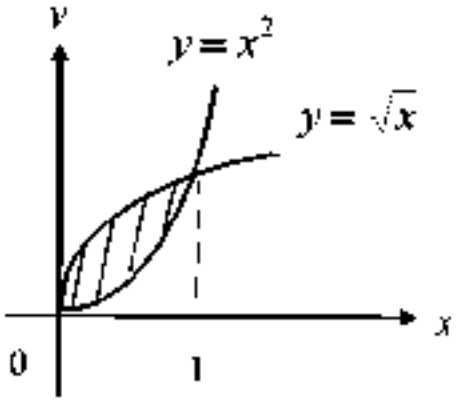
2. Найти площадь фигуры: $y = x^2 - 4x$; $y = 0$.



$$S = \int_0^4 (0 - (x^2 - 4x))dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 + \frac{4x^2}{2}\Big|_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{160}{3}\ ед^2.$$

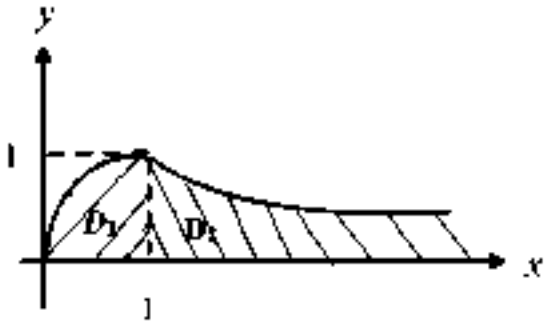
3. Найти площадь фигуры: $y = x^2;\ y = \sqrt{x}$.



$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ ед^2.$$

4. Найти площадь: $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$.



Найдем площадь как сумму площадей двух фигур D_1 и D_2.

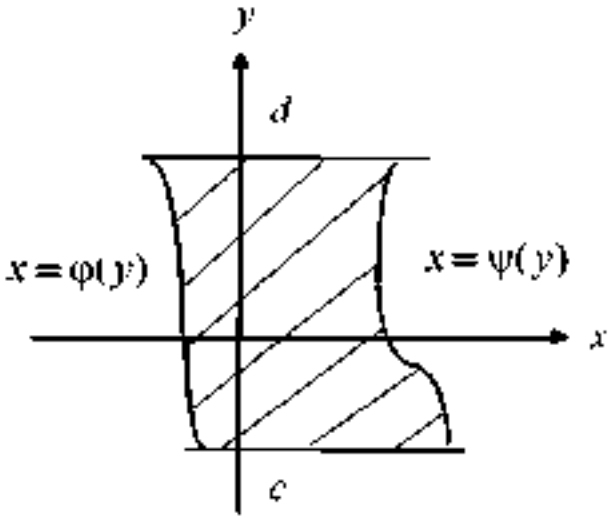
$$S_1=\int_0^1\sqrt{x}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3}\text{ед}^2,$$

$$S_2=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=1\text{ед}^2,$$

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}\text{ед}^2.$$

b) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$x=\varphi(y)$, $x=\Psi(y)$, $y=c$, $y=d$, где $\varphi(y)\le\Psi(y)$, $c<d$



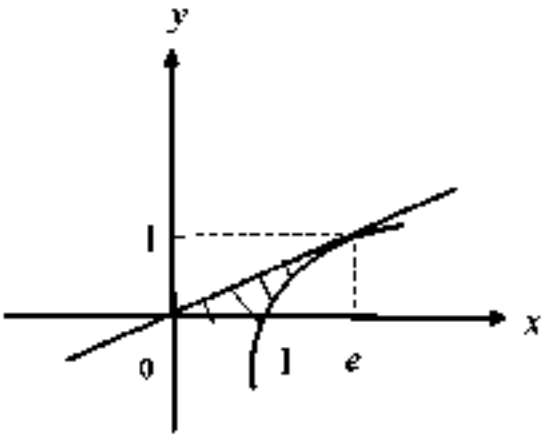
равна:

$$S = \int_c^d (\Psi(y) - \varphi(y))dy.$$

Пример

Найти площадь фигуры: $y = \ln x; \quad y = \frac{1}{e}x; \quad y = 0.$

Построим область:



Запишем ее границы: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y; \quad y = \frac{1}{e}x \Rightarrow x = ey; \quad y = 0, \quad y = 1.$

$$S = \int_0^1 (e^y - ey)dy = e^y\Big|_0^1 - e\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = e - 1 - \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - 1.$$

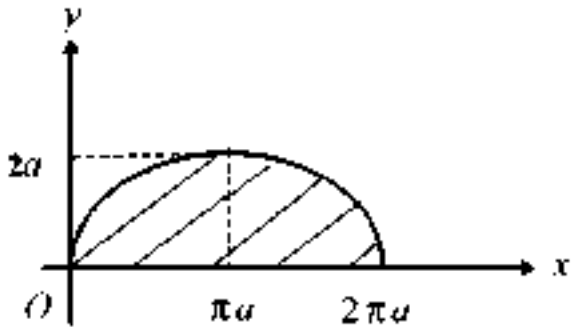
c) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, находим по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dx,$$

где α и β определяются из условий $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а $y(t) \geq 0$ при $\alpha \geq t \leq \beta$.

Пример

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.



Здесь $dx = a(1 - \cos t)\,dt$, а t изменяется от 0 до 2π.

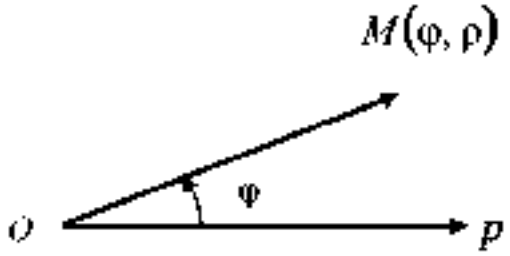
$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt =$$

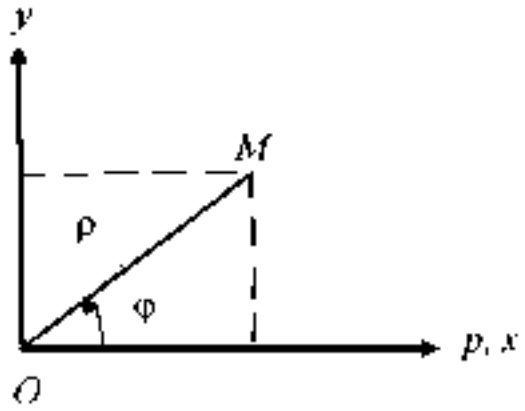
$$= a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} \right) = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

d) Площадь фигуры, границы которой заданы в полярных координатах.

Полярная система координат состоит из точки O – полярного полюса и полярной оси Op. Положение точки M определяется двумя координатами: ρ – полярным радиусом – расстоянием от точки M до полюса O и полярным углом φ – углом между радиус-вектором точки M и полярной осью.



Переход от полярных координат к прямоугольным



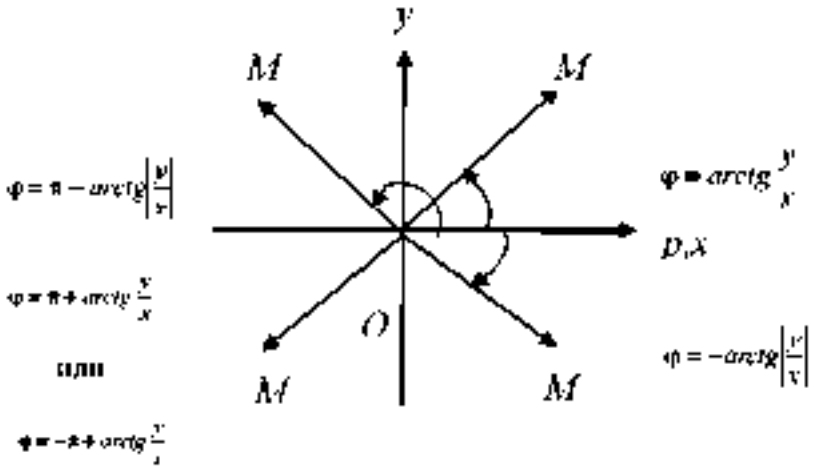
выполняется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Переход от прямоугольных координат к полярным

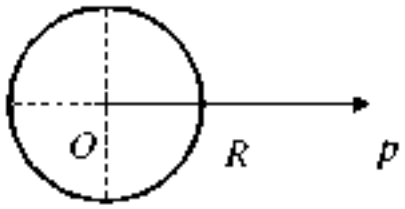
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Угол φ определяется с учетом четверти, в которой лежит точка M (см. рис.).

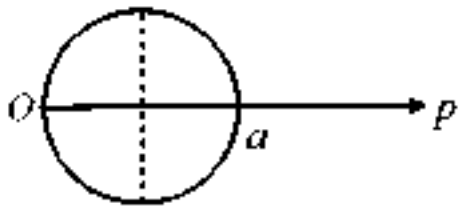


Уравнения некоторых линий в полярных координатах

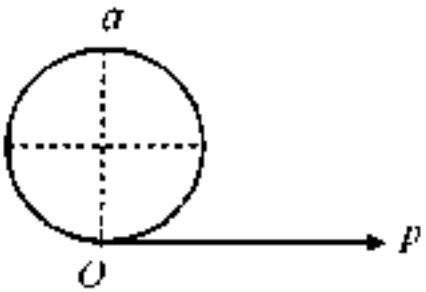
а) $\rho = R$ – уравнение окружности радиуса R с центром в точке O;



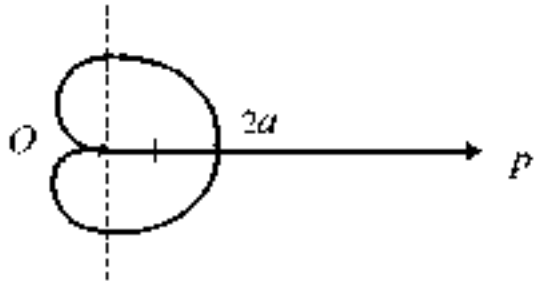
б) $\rho = a\cos\varphi$ – уравнение окружности радиуса $\frac{|a|}{2}$, с центром в точке $\frac{a}{2}$ на полярной оси;



в) $\rho = a\sin\varphi$ – уравнение окружности радиуса $\frac{|a|}{2}$, с центром в точке $\frac{a}{2}$ на прямой, перпендикулярной полярной оси;

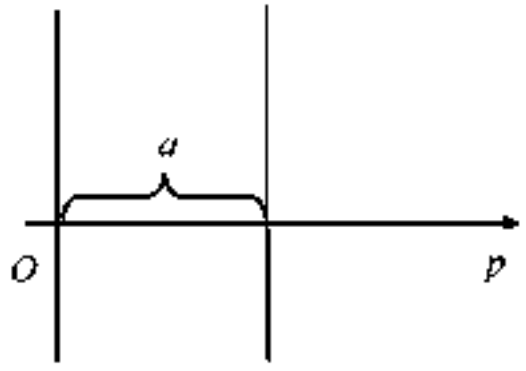


г) $\rho = a(1+\cos\varphi)$ – уравнение кардиоиды

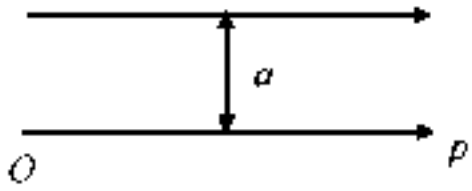


Уравнения $\rho = a(1-\cos\varphi)$; $\rho = a(1+\sin\varphi)$; $\rho = a(1-\sin\varphi)$– также задают различные кардиоиды.

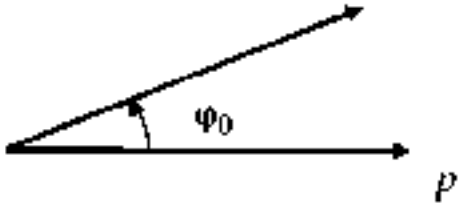
д) $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ уравнение прямой, перпендикулярной оси Op, отстоящей от точки O на расстояние $|a|$;



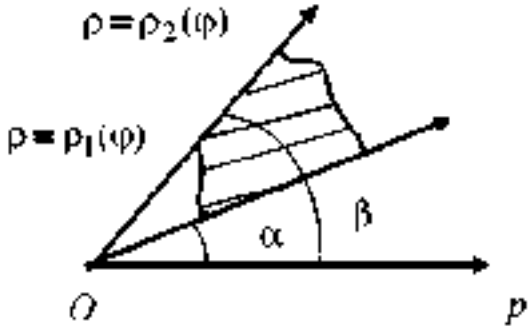
е) $\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi}$– уравнение прямой, параллельной оси Op, отстоящей от неё на расстоянии $|a|$;



ё) $\varphi = \varphi_0$ – уравнение луча, проходящего через точку O под углом φ_0 к оси Op;



Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$, и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где $\alpha < \beta$

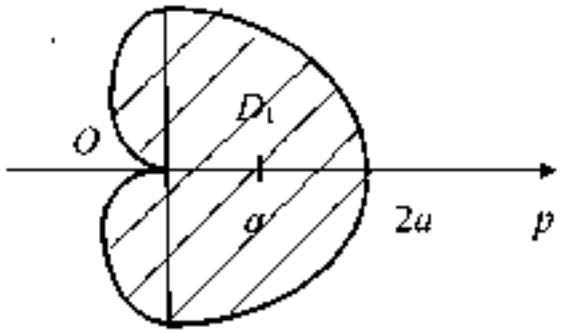


находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right)d\varphi.$$

Примеры

1. Найти площадь фигуры, заключенной внутри кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$

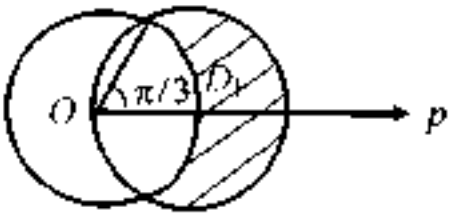


$$S = 2S_{D_1} = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right) = a^2\left(\pi + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= a^2\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}\,ед^2.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\cos\varphi$; $\rho = 1$ (вне окружности $\rho = 1$).



$$S = 2S_{D_1}$$

Найдем точку пересечения окружностей

$$\begin{cases}\rho = 2\cos\varphi \\ \rho = 1\end{cases} \Rightarrow 2\cos\varphi = 1,\ \cos\varphi = \frac{1}{2},\quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

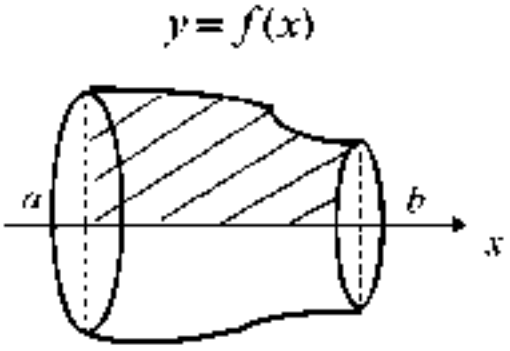
$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\varphi - 1)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - 1)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + 2\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi = \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} - \sin 0 = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ед}^2.$$

3. 2. Объем тела вращения

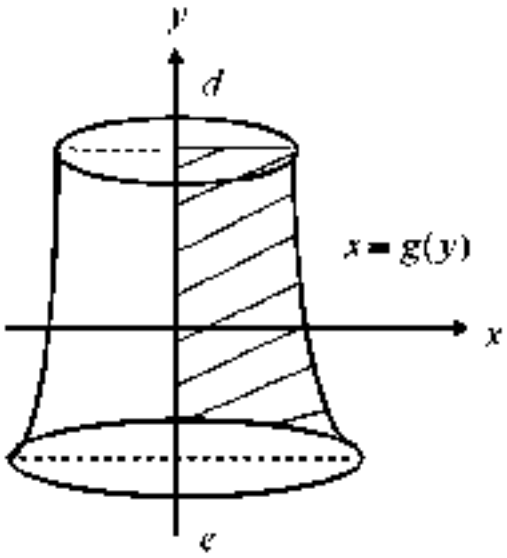
a) Объем тела вращения плоской фигуры с границами $y = f(x), \quad x = a,$ $x = b, \quad y = 0 \quad (a < b)$ вокруг оси Ox



вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

b) Объем тела вращения плоской фигуры с границами $x = g(y), \quad y = c,$ $y = d, \quad x = 0 \quad (c < d)$ вокруг оси Oy



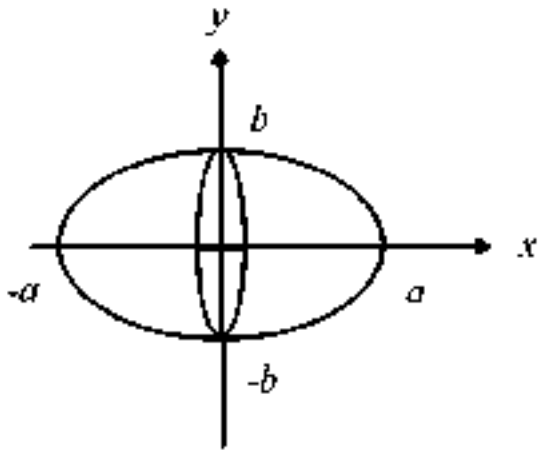
вычисляется по формуле

$$V_{oy} = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy.$$

ПРИМЕРЫ

1. Найти объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.

Построим чертеж.



Выразим y^2 из уравнения эллипса

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V_{ox} = \pi\int_{-a}^{a} y^2dx = \pi b^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

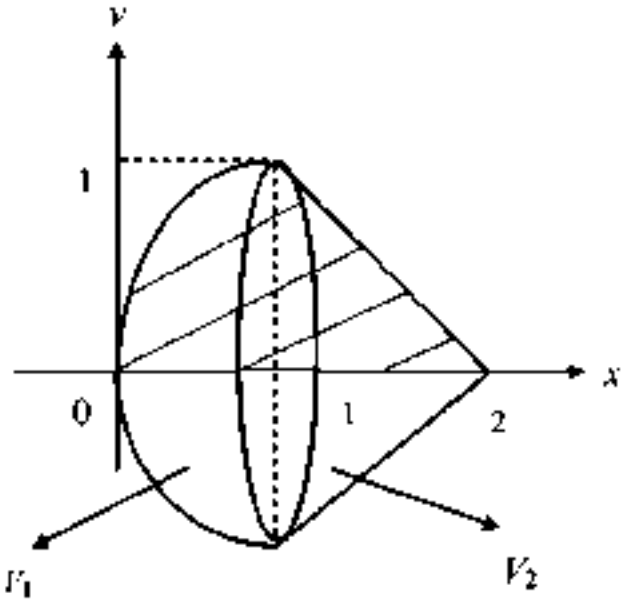
$$= 2\pi b^2\left(x\Big|_0^a - \frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right) = 2\pi b^2\left(a-\frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ ед}^3.$$

Заметим, что, если $a = b = R$, то получим объем шара

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ ед}^3.$$

2. Найти объем тел вращения вокруг оси Ox и Oy фигуры с границами $y = \sqrt{x}$, $y = 2-x$, $y = 0$.

а)



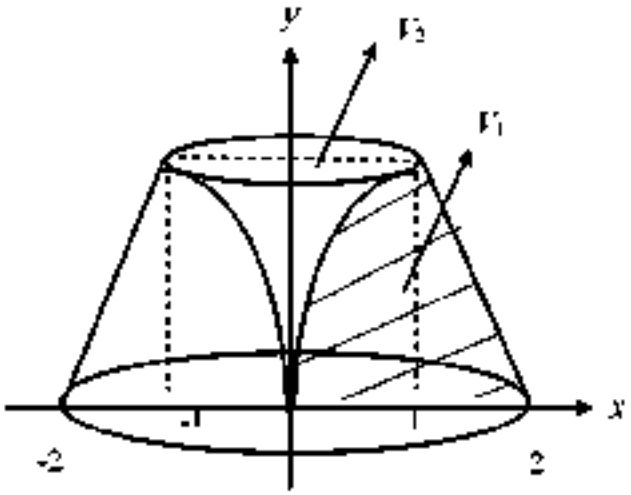
$$V_{0x} = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ ед}^3$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \int_1^2 (x-2)^2 d(x-2) = \pi \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}\left(0-(-1)^3\right) = \frac{\pi}{3} \text{ ед}^3$$

$$V_{0x} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \text{ ед}^3.$$

б)



$$V_{0y} = V_1 - V_2$$

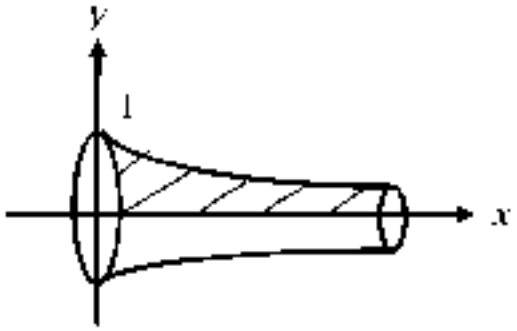
$$V_1 = \pi \int_0^1 (2-y)^2 dy = \pi \int_0^1 (y-2)^2 d(y-2) = \pi \frac{(y-2)^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{3}\left((-1)^3 - (-2)^3\right) = \frac{\pi}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\pi \text{ ед}^3$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 y^4 dy = \pi \frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \text{ ед}^3$$

$$V_{0y} = \frac{7\pi^{(5}}{3} - \frac{\pi^{(3}}{5} = \frac{32\pi}{15} \text{ ед}^3.$$

3. Вычислить объем тела вращения фигуры с границами $y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0$ вокруг оси $0x$



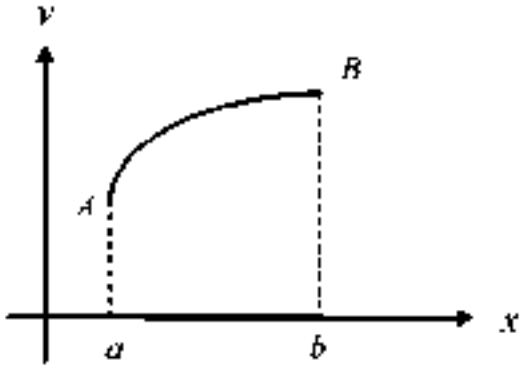
$$V_{ox} = \pi \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = -\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}d(-2x) = -\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-2x}\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-2b} - e^{0}\right) = \frac{\pi}{2}\ \text{ед}^2.$$

3.3. Длина дуги плоской кривой

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина дуги кривой от точки A до точки B определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$



Пример

Найти длину дуги кривой: $y=\frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x};\quad 0\le x\le 3.$

Найдем производную:

$$y'=\left(\frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{3}(3-x)'\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{3}(3-x)\cdot(\sqrt{x})'=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-\frac{2}{3}x+1-\frac{1}{3}x}{2\sqrt{x}}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}.$$

$$l=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=\int_0^3\sqrt{1+\frac{1-2x+x^2}{4x}}dx=\int_0^3\sqrt{\frac{4x+1-2x+x^2}{4x}}dx=$$

$$=\int_0^3\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}dx=\int_0^3\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3 x^{\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{2}\int_0^3 x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^3=\frac{1}{3}\sqrt{27}-0+\sqrt{3}-0=2\sqrt{3}.$$

b) Если кривая AB задана параметрически: $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\ \alpha\le t\le\beta.$ то

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dx.$$

Пример

2. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^{3t}\cos 4t \\ y = e^{3t}\sin 3t \end{cases}$, $0 \le t \le \ln 2$.

Найдем производные x'_t и y'_t

$$x'_t = \left(e^{3t}\cdot\cos 4t\right)' = \left(e^{3t}\right)'\cos 4t + e^{3t}\cdot\left(\cos 4t\right)' = 3e^{3t}\cos 4t - 4e^{3t}\sin 4t$$

$$y'_t = \left(e^{3t}\cdot\sin 4t\right)' = \left(e^{3t}\right)'\sin 4t + e^{3t}\cdot\left(\sin 4t\right)' = 3e^{3t}\sin 4t + 4e^{3t}\cos 4t$$

$$\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = \left(3e^{3t}\cdot\cos 4t - 4e^{3t}\cdot\sin 4t\right)^2 + \left(3e^{3t}\cdot\sin 4t + 4e^{3t}\cdot\cos 4t\right)^2 =$$

$$= 9e^{6t}\cos^2 4t - 24e^{6t}\cos 4t\cdot\sin 4t + 16e^{6t}\sin^2 4t + 9e^{6t}\sin^2 4t +$$

$$+ 24e^{6t}\cdot\sin 4t\cos 4t + 16e^{6t}\cos^2 4t = 25e^{6t}\cos^2 4t + 25e^{6t}\sin^2 4t =$$

$$= 25e^{6t}\left(\cos^2 4t + \sin^2 4t\right) = 25e^{6t}.$$

$$l = \int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\,dt = \int_0^{\ln 2}\sqrt{25e^{6t}}\,dt = \int_0^{\ln 2}5e^{3t}dt = \frac{5}{3}e^{3t}\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{5}{3}e^{3\ln 2} - \frac{5}{3}e^{0} = \frac{5}{3}e^{3\ln 2} - \frac{5}{3}e^{0} = \frac{5}{3}e^{\ln 8} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\cdot 8 - \frac{5}{3} = \frac{40-5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3};$$

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4. 1. Вычисление определённых интегралов

Вычислить интегралы. выбрав нужный метод.

1. а) $\int_0^4 \sqrt{4x+1}dx$; б) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2 \le x \le 0 \\ 4, & 0 < x \le 1 \end{cases}$;

в) $\int_0^1 xe^{4x}dx$; г) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}dx$.

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3\cos 3x dx$; б) $\int_1^2 f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 0, & 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 4x-1, & \frac{3}{2} < x < 2 \end{cases}$;

в) $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$; г) $\int_{-1}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{4-5x}}$.

3. а) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$; б) $\int_0^{\pi} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$;

в) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$; г) $\int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

4. 3. а) $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{e^x dx}{e^{6x-1}}$; б) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\le x<0\\ 1+x, & 0\le x<2\end{cases}$;

в) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx$; г) $\int_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

5. а) $\int_8^{20}\left(\frac{x}{2}+5\right)^{\frac{1}{3}}dx$; б) $\int_2^2 f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}4, & -2\le x<1\\ x, & 1\le x<2\end{cases}$;

в) $\int_0^{\pi}(x-\pi)\cos x dx$; г) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}$.

6. а) $\int_8^{0,5}\frac{dx}{(6x-1)^2}$; б) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\le 0\\ 2x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$;

в) $\int_0^{\pi}\frac{xdx}{e^{2x}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 x dx$.

7. а) $\int_{-0,5}^{1} 2\sin\pi x dx$; б) $\int_{-2}^{0} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}5, & -2\le x\le -1\\ -5x, & -1<x\le 0\end{cases}$;

в) $\int_1^e \frac{\ln x dx}{x^2}$; г) $\int_0^2 \frac{xdx}{(x+1)^2}$.

8. а) $\int_{-3}^{0}(x+4)^{-2}dx$; б) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}-2x, & -1\le x<0\\ 2x, & 0\le x\le 2\end{cases}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+4)\sin 2x dx$; г) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

9. а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{5dx}{\cos^2 \frac{x}{4}}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0\\ e^{2x}, & 0\le x\le 1\end{cases}$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} x^2 \ln x dx$; г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$.

10. а) $\int\limits_0^{0,1} \frac{5dx}{e^{1-5x}}$; б) $\int\limits_{-4}^{0} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}0, & -4\le x<-2\\ x^2, & -2\le x\le 0\end{cases}$;

в) $\int\limits_0^{e-1} (x+1)\cdot\ln(x+1)dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

11. а) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{16x+9}}$; б) $\int\limits_0^{5} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\le x<4\\ -2, & 4\le x\le 5\end{cases}$;

в) $\int\limits_0^{2\frac{\pi}{}} (x+1)\cos 2x dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$.

12. а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(3x+4)^2}$; б) $\int\limits_0^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}x-1, & 0\le x\le 1\\ 10, & 1<x\le 2\end{cases}$;

в) $\int\limits_0^{1} xe^{9x}dx$; г) $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2+8x+15}$.

13. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}-\sin^2 x\right)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{3} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}6x, & -1\le x\le 0\\ 0, & 1<x\le 3\end{cases}$;

в) $\int\limits_0^{\pi} x \sin\frac{x}{3}dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{3+\sqrt{x+1}}$.

14. а) $\int\limits_{0,25}^{0,5} \frac{5dx}{\sin^2 \pi x}$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 6, & -2 \le x < 0 \\ 6-x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{e^x}$; г) $\int\limits_{0}^{5} x \cdot \sqrt{x+4}\, dx$.

15. а) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{\sqrt{3}dx}{x^2+3}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} x_1 - 1, & -1 < x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} x \sin \frac{\pi x}{4} dx$; г) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{(2x-1)^3}$.

16. а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{16-9x}}$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ \frac{1}{\pi}, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} (2x+1)\ln(x+1)dx$; г) $\int\limits_{-3}^{5} x \cdot \sqrt{x+4}\, dx$.

17. а) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; б) $\int\limits_{-10}^{0} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 0, & -10 \le x \le -1 \\ (x+1)^2, & -1 < x \le 0 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-3}^{-2} (x+3)e^{x+3}dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+2}$.

18. а) $\int\limits_{0}^{4\pi} 6\cos\frac{x}{12} dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 2, & -2 \le x \le -1 \\ 0, & -1 < x \le 1 \\ 4, & 1 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\, dx$; г) $\int\limits_{2}^{7} \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$.

19. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{0} 12\sin 6x dx$; б) $\int\limits_{-10}^{10} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}0, & -10\le x\le 0\\ 5x, & 0<x\le 10\end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} x e^{1-x}dx$; г) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{(x^2+2x+1)^2}$.

20. а) $\int\limits_{0}^{9}\sqrt[3]{1-x}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & 1<x\le 2\end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x\cdot\sin x dx$; г) $\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1}dx$.

21. а) $\int\limits_{0}^{2\pi} 5\sin\frac{x}{4}dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}x+4, & 0\le x\le 1\\ 4, & 1<x\le 2\end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1-e}\ln(x+e)dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{xdx}{x^2+6x+9}$.

22. а) $\int\limits_{0}^{\ln 2} e^x(e^x+1)dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}5, & 1\le x\le 2\\ 5x, & 2<x\le 3\end{cases}$;

в) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} x dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin 2x}$.

23. а) $\int\limits_{0}^{1} 12(1+x)^5 dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & -1<x\le 0\\ e, & 0<x\le 1\end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}(3x+4)\sin x dx$; г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx$.

24. а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{4}}$; б) $\int\limits_{-1}^{\ln 3} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x \le 0 \\ e^x, & 0 < x \le \ln 3 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (4x-3)\cos x dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3 x dx$.

25. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 3\sin 6x dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 7, & -2 \le x \le 0 \\ 7x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{e^{2x}}$; г) $\int\limits_5^6 \frac{dx}{(x^2-8x+16)^2}$.

26. а) $\int\limits_0^{e-1} \frac{5dx}{x+1}$; б) $\int f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} \cos 3x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \frac{\pi}{10} \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-0,25}^{0} xe^{4x+1} dx$; г) $\int\limits_5^3 x \cdot \sqrt[3]{x+5}\, dx$.

27. а) $\int\limits_5^6 \sqrt[3]{x-5}\, dx$; б) $\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le \frac{\pi}{6} \\ \sin 2x, & \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{9}}^{\frac{e}{9}} \ln 9x dx$; г) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 4}$.

28. а) $\int_{10}^{\frac{1}{2}} e^{1-0.1x}dx$; б) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \cos 2x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$;

в) $\int_{-1}^{0} \operatorname{arctg} x dx$; г) $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{4x+1}}$.

29. а) $\int_{0}^{6} \left(\frac{x}{6}+1\right)^3 dx$; б) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 4, & -2 \le x \le 0 \\ 4x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int_{-\frac{1}{6}}^{0} x \cdot e^{6x+1}dx$; г) $\int_{0}^{3} x \cdot \sqrt{4-x}\,dx$.

30. а) $\int_{0}^{0.1\pi} 10\cos 5x dx$; б) $\int_{-10}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 2, & -10 < x \le 0 \\ 3x^2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int_{0}^{1} (4-x)\cdot e^x dx$; г) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{1+\sqrt{4-x}}$.

4. 2. Несобственные интегралы

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. а) $\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$; б) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(2-x)^3}}$;

2. а) $\int_{\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+3}$; б) $\int_{0}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$;

3. а) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int_{4}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$;

4. а) $\int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$; б) $\int_{2}^{3} \frac{xdx}{x^2-4}$;

5. а) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$; б) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2 dx}{x^3+1}$;

6. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{(2+x^2)^2}$; б) $\int_{-2}^{0} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+8}}$;

7. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$; б) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

8. а) $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; б) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

9. а) $\int_{0}^{\infty} \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx$; б) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$;

10. а) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

11. а) $\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}$; б) $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$;

12. а) $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)^3}}$;

13. а) $\int_e^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x}$; б) $\int_3^4 \frac{x dx}{x^2-9}$;

14. а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(3+x^2)^3}$; б) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$;

15. а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

16. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5}$; б) $\int_{-3}^1 \frac{dx}{(3+x)^3}$;

17. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-2x-3}$;

18. а) $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2-6x+10}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^4}$;

19. а) $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2-2x+5}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^3}$;

20. а) $\int_1^{\infty} x \cdot e^{-2x^2} dx$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

21. а) $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x^2-2x-8}$;

22. а) $\int_{2}^{\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$; б) $\int_{4}^{5} \frac{xdx}{x^2-16}$;

23. а) $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

24. а) $\int_{1}^{\infty} \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$; б) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$;

25. а) $\int_{4}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$; б) $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x^2-6x+5}$;

26. а) $\int_{4}^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+4}}$; б) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2}$;

27. а) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln^3 xdx}{x}$; б) $\int_{-4}^{5} \frac{dx}{\sqrt[6]{5-x}}$;

28. а) $\int_{2}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$; б) $\int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$;

29. а) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+9}$; б) $\int_{-3}^{0} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+27}}$;

30. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x+9}}$; б) $\int_1^{e} \frac{dx}{x\ln x}$.

3. 3. Площадь

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями.

1. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -x + 10;$
   б) $y = 3^x, \quad y = 1 - x, \quad y = 0;$
   в) $y = \log_2 x, \quad y = x, \quad y = 0, \quad y = 1;$
   г) $\rho = \sqrt{3}, \quad \rho = 2\cos\varphi.$

2. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = -3x - 1;$
   б) $y = 2^{-x}, \quad y = x + 1, \quad y = 0;$
   в) $y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = 2x, \quad y = -2$ (правая фигура);
   г) $\rho = 2, \quad \rho = 4\sin\varphi$ (верхняя фигура).

3. а) $y = x^2 + 2x, \quad y = x + 6;$
   б) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = x^2, \quad y = 0;$
   в) $y = \log_3 x, \quad y = -3x, \quad y = 1;$
   г) $\rho = 1 + \cos\varphi, \quad \rho = 1$ (правая фигура).

4. а) $y = -x^2 + 4, \quad y = x - 2;$
   б) $y = \frac{1}{x^3}, \quad y = x^2, \quad y = 0;$
   в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = -x, \quad y = 2, \quad y = 0;$
   г) $\rho = 4\cos\varphi, \quad \rho = 4\sin\varphi.$

5. а) $y = x^2 + 4, \quad y = 5x + 12;$

б) $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \dfrac{1}{x^4}, \quad y = 0;$

в) $y = \log_4 x, \quad y = \dfrac{1}{2}, \quad y = 0, \quad y = 2;$

г) $\rho = 4\cos\varphi, \quad \rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

6. а) $y = x^2 + 1, \quad y = -x - 11;$

б) $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad y = x, \quad y = 0, \quad (x \geq 0);$

в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = 3x, \quad y = 0;$

г) $\rho = 6\sin\varphi, \quad \rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

7. а) $y = x^2 - 2x, \quad y = -x + 6;$

б) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = x + 1, \quad y = 0$ (правая фигура);

в) $y = \log_5 x, \quad y = -5x, \quad y = 0;$

г) $\rho = 2(1 - \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (левая фигура).

8. а) $y = -x^2 + 4, \quad y = -x - 2;$

б) $y = e^x, \quad y = 1 - x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_{\frac{1}{4}} x, \quad y = -2x, \quad y = 0, \quad y = 2;$

г) $\rho = 4(1 + \sin\varphi), \quad \rho = 4$ (верхняя фигура).

9. а) $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 10;$

б) $y = e^{-x}, \quad y = x + 1, \quad y = 0;$

в) $y = \log_6 x, \quad y = 3x, \quad y = 0, \quad y = 2;$

г) $\rho = 2(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 2$ (нижняя фигура).

10. а) $y=-x^2+9,\quad y=3x-1;$

б) $y=\dfrac{1}{x^3},\quad y=x,\quad y=0,\quad (x\le 0);$

в) $y=\log_{\frac{1}{5}} x,\quad y=5x,\quad y=-1;$

г) $\rho=1+\cos\varphi,\quad \rho=\dfrac{3}{4\cos\varphi}$ (правая фигура).

11. а) $y=x^2-2x,\quad y=-3x+12;$

б) $y=4^{x-1},\quad y=x,\quad y=0;$

в) $y=\log_7 x,\quad y=-7x,\quad y=1;$

г) $\rho=1,\quad \rho=4\cos\varphi$ (правая фигура).

12. а) $y=-x^2+25,\quad y=-x+13;$

б) $y=5^{-x+1},\quad y=1-x,\quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{7}} x,\quad y=-2x,\quad y=-1,\quad y=1;$

г) $\rho=2,\quad \rho=2\sqrt{2}\sin\varphi$ (верхняя фигура).

13. а) $y=x^2-8x,\quad y=x;$

б) $y=\dfrac{16}{x^2},\quad y=x^2,\quad y=0,\quad (x\ge 0);$

в) $y=\log_6 x,\quad y=3x,\quad y=-1\quad y=2;$

г) $\rho=1+\cos\varphi,\quad \rho=\dfrac{3}{2}$ (правая фигура).

14. а) $y=-x^2+4,\quad y=-5;$

б) $y=\dfrac{32}{x^3},\quad y=x^2,\quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{6}} x,\quad y=6x,\quad y=-2;$

г) $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi,\quad \rho=\sin\varphi.$

15. а) $y = x^2 + 2x, \quad y = 2x + 16;$

б) $y = \sqrt{x-2}, \quad y = \frac{81}{x^4}, \quad y = 0;$

в) $y = \log_8 x, \quad y = -8x, \quad y = 2;$

г) $\rho = \cos\varphi, \quad \rho = \frac{3}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

16. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = -7;$

б) $y = \frac{1}{(x-3)^3}, \quad y = x - 3, \quad y = 0, \quad (x \geq 3);$

в) $y = \log_{\frac{1}{9}} x, \quad y = -2x, \quad y = 3, \quad y = 0;$

г) $\rho = 4\sin\varphi, \quad \rho = \frac{3}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

17. а) $y = x^2 - 6x, \quad y = -6x + 4;$

б) $y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = -x + 1, \quad y = 0$ (левая фигура);

в) $y = \lg x, \quad y = \frac{1}{3}x, \quad y = -1, \quad y = 0;$

г) $\rho = 1 - \cos\varphi, \quad \rho = 1$ (левая фигура).

18. а) $y = -x^2 + 1, \quad y = -3;$

б) $y = 2e^x, \quad y = 2 - x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_{0,1} x, \quad y = 10x, \quad y = -4;$

г) $\rho = 4(1 + \sin\varphi), \quad \rho = 4$ (верхняя фигура).

19. а) $y = x^2 + 6x, \quad y = 6x - 25;$

б) $y = 3e^{-x}, \quad y = x + 3, \quad y = 0;$

в) $y = \lg x, \quad y = -2x, \quad y = 3;$

г) $\rho = 2(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 1$ (нижняя фигура).

20. а) $y=-x^2+4,\quad y=-2x+1;$

б) $y=\dfrac{1}{(x-5)^5},\quad y=x-1,\quad (x\le 1);$

в) $y=\log_{0,1}x,\quad y=-x,\quad y=1,\quad y=2;$

г) $\rho=1-\cos\varphi,\quad \rho=-\dfrac{3}{4\sin\varphi}.$

21. а) $y=x^2-4x,\quad y=-2x+5;$

б) $y=3^{x-2},\quad y=3-x,\quad y=0;$

в) $y=\log_2 x,\quad y=3x,\quad y=1,\ y=3;$

г) $\rho=\sqrt{2},\quad \rho=2\cos\varphi$ (правая фигура).

22. а) $y=-x^2+16,\quad y=-9;$

б) $y=3\cdot 2^{-x},\quad y=3-x,\quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{3}}x,\quad y=3x,\quad y=-3;$

г) $\rho=2\sqrt{2},\quad \rho=4\sin\varphi$ (верхняя фигура).

23. а) $y=x^2+4x,\quad y=2x+3;$

б) $y=\dfrac{1}{(x+2)^2},\quad y=(x+2)^2,\quad y=0,\quad (x\ge -2);$

в) $y=\log_3 x,\quad y=-3x,\quad y=4;$

г) $\rho=3(1+\cos\varphi),\quad \rho=3$ (правая фигура).

24. а) $y=-x^2+4,\quad y=2x+1;$

б) $y=\dfrac{1}{(x+1)^3},\quad y=(x+1)^2,\quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{4}}x,\quad y=-4x,\quad y=-2,\quad y=2;$

г) $\rho=\cos\varphi,\quad \rho=\sqrt{3}\sin\varphi.$

25. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -x + 4;$

б) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = \frac{2}{x^4}, \quad y = 0;$

в) $y = \log_4 x, \quad y = 2x, \quad y = -2, \quad y = 1;$

г) $\rho = 2\cos\varphi, \quad \rho = \frac{1}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

26. а) $y = -x^2 + 1, \quad y = -3x - 3;$

б) $y = \frac{5}{x^3}, \quad y = 5x, \quad y = 0, \quad (x \le 0);$

в) $y = \log_{\frac{1}{5}} x, \quad y = 5x, \quad y = -4;$

г) $\rho = 3(1 - \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (левая фигура).

27. а) $y = x^2 - 2x, \quad y = -5x + 4;$

б) $y = \frac{3}{1 + x^2}, \quad y = 3 + x, \quad y = 0$ (правая фигура);

в) $y = \log_6 x, \quad y = -6x, \quad y = 1;$

г) $\rho = 4\sin\varphi, \quad \rho = \frac{2}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

28. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = 3x + 5;$

б) $y = e^{x-3}, \quad y = 4 - x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_{\frac{1}{5}} x, \quad y = -2x, \quad y = -2, \quad y = 2;$

г) $\rho = 3(1 + \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (верхняя фигура).

29. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -2x + 8;$

б) $y = e^{-x+2}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_5 x, \quad y = 4x, \quad y = -2, \quad y = 1;$

г) $\rho = 3(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 3$ (нижняя фигура).

30. а) $y=-x^2+9,\quad y=2x+1;$

б) $y=\dfrac{4}{x^5},\quad y=4x,\quad y=0.\quad (x\le 0);$

в) $y=\log_{\frac{1}{6}} x,\quad y=6x,\quad y=-2;$

г) $\rho=1+\sin\varphi,\quad \rho=\dfrac{3}{4\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

4. 4. Объем тела вращения

Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями.

а) вокруг оси Ox

б) вокруг оси Oy

1. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1;\quad y=\pm 2$

2. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1;\quad x=8$

3. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1;\quad y=2$

4. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1;\quad x=1$

5. $y^2=2x;\quad x=2$

6. $y^2=-3x;\quad x=-3$

7. $y=x^2+1;\quad y=2$

8. $y=x^2-8;\quad y=-4$

9. $y=\sin x,\ y=2-\dfrac{2}{\pi}x,\ y=0$

10. $y=\cos x,\ y=1,\ x=-\dfrac{\pi}{2}$

11. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1;\quad y=\pm 3$

12. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1;\quad x=6$

13 $y^2=5x,\ x=5$

14 $y^2=-4x,\ x=-4$

15. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1;\quad y=1$

16. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1;\quad x=3$

17. $y=x^2+4;\quad y=8$

18. $y=x^2-2;\quad y=-1$

19. $y=\sin x,\ y=0,\ x=\frac{\pi}{2}$

20. $y=\cos x,\ y=1,\ x=\frac{\pi}{2}$

21. $\frac{x^2}{4}-y^2=1;\quad y=\pm 1$

22. $x^2-\frac{y^2}{9}=1;\quad x=2$

23. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;\quad y=2$

24. $\frac{x^2}{16}+y^2=1;\quad x=2$

25. $y^2=7x;\quad x=7$

26. $y^2=6x;\quad x=-6$

27. $y=x^2+9;\quad y=18$

28. $y=x^2-18;\quad y=-9$

29. $y=\sin x,\ y=1,\ y=0,\ x=2$

30. $y=\cos x,\ y=1,\ y=0,\ x=2$

4. 5. Длина дуги плоской кривой

1. *а)* $y=\sqrt{4-x^2}$
$-1\le x\le 1;$

б) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$
$0\le t\le 2\pi.$

2. *а)* $y=\ln\sin x$
$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2};$

б) $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$
$0\le t\le \pi/2.$

3. *а)* $y=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$
$0\le x\le 3;$

б) $\begin{cases} x=4\sin t+3\cos t \\ y=3\sin t-4\cos t \end{cases}$
$0\le t\le \pi.$

4. *а)* $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$
$0\le x\le 4;$

б) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$
$0\le t\le 2\pi.$

5. *а)* $y = \ln\cos x$

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$0 \le t \le \pi.$

6. *а)* $y = 4 - 3\ln(x^2 - 9)$

$4 \le x \le 6;$

б) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

7. *а)* $y = \sqrt{9 - x^2}$

$-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2};$

б) $\begin{cases} x = 2t^3 + 1 \\ y = \frac{t^3}{3} - 2 \end{cases}$

$0 \le t \le 3.$

8. *а)* $y = \ln(2\sin x)$

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2};$

б) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + 1 \\ y = \frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}} - 3 \end{cases}$

$0 \le t \le 2.$

9. *а)* $y = \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$

$-1 \le x \le 2;$

б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$

$0 \le t \le \pi.$

10. *а)* $y = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)$

$0 \le x \le 3$

б) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

11. *а)* $y = \ln(5\cos x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

б) $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

12. *а)* $y = 3 + \ln(x^2 - 1)$

$2 \le x \le 3$;

б) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\pi \le t \le 2\pi$.

13. *а)* $y = \sqrt{16 - x^2}$

$-2 \le x \le 2$;

б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$\pi \le t \le 2\pi$.

14. *а)* $y = \ln(3\sin x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

б) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

15. *а)* $y = 2(x+3)^{\frac{3}{2}}$

$-2 \le x \le 1$;

б) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - 1 \\ y = 2t^2 + 3 \end{cases}$

$0 \le t \le 3$.

16. *а)* $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$

$0 \le x \le 4$;

б) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

17. *а)* $y = \ln(4\cos x)$

$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$;

б) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$

$\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

18. *а)* $y = 5 - 3\ln(x^2 - 9)$

$4 \le x \le 5$;

б) $\begin{cases} x = 8\sin t - 6\cos t \\ y = 6\sin t + 8\cos t \end{cases}$

$\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

19. *а)* $y = \sqrt{25 - x^2}$

$-\frac{5}{2} \le x \le \frac{5}{2}$;

б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$.

20. *а)* $y = \ln(4\sin x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$;

б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

21. *а)* $y = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}$

$-3 \le x \le 0$;

б) $\begin{cases} x = 4\cos t - \cos 4t \\ y = 4\sin t - \sin 4t \end{cases}$

$\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

22. *а)* $y = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$

$0 \le x \le 1$;

б) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t^2 - 2 \\ y = \frac{t^3}{3} + 5 \end{cases}$

$0 \le t \le 4$.

23. *а)* $y = \ln(3\cos x)$

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$;

б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$

$\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

24. *а)* $y = 3 + 2\ln(x^2 - 4)$

$3 \le x \le 5$;

б) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$.

25. *а)* $y = \sqrt{36 - x^2}$

$-3 \le x \le 3$;

б) $\begin{cases} x = 4\sin t - 3\cos t \\ y = 3\sin t + 4\cos t \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$.

26. *а)* $y = \ln(5\sin x)$

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

б) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$.

27. *а)* $y = \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

$1 \le x \le 2$;

б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$.

28. *а)* $y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

$0 \le x \le 2;$

б) $\begin{cases} x = 5\cos t - \cos 5t \\ y = 5\sin t - \sin 5t \end{cases}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

29. *а)* $y = \ln(2\cos x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4};$

б) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + 2 \\ y = \frac{3}{2}t^2 + 7 \end{cases}$

$0 \le t \le 4.$

30. *а)* $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$

$3 \le x \le 4;$

б) $\begin{cases} x = \frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}} + 3 \\ y = \frac{t^3}{3} - 2 \end{cases}$

$0 \le t \le 2.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: ООО "Изд-во Оникс", 2008. – 368 с.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2012. – 281 с.

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Т. И. Королюк

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
**по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей:
очного и заочного обучения**

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ.....3
ВВЕДЕНИЕ.....4
1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....5
2. ВЫДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....6
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....7
4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....12
5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....14
6. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....15
6.1. Показательная функция e^z 15
6.2. Тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$ 16
6.3. Логарифмическая функция $Ln\, z$ 16
6.4. Общая степенная функция z^γ 17
7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....19
7.1. Определение производной.....19
7.2. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексной переменной (условия Коши-Римана).....19
7.3. Правила дифференцирования.....22
7.4. Аналитические функции.....22
7.5. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной.....23
8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....25
8.1. Интеграл от функции комплексной переменной.....25
8.2. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной.....27
8.3. Основная теорема Коши.....29
8.4. Теорема Коши для многосвязной области.....31
8.5. Вычисление интеграла от аналитической функции.....32
8.6. Особые точки – полюсы.....34
8.7. Определение вычета.....34
8.8. Формулы для вычисления вычетов.....35
8.9. Теорема Коши о вычетах.....36
9. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.....40
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....43

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей. В пособии приведены теоретические сведения по теме « Функции комплексной переменной» в объеме курса лекций по этому разделу дисциплины «Математика». Теоретический материал сопровождается решением задач с подробными объяснениями, а также даны варианты заданий, которые могут быть использованы как для самостоятельной работы студентов в аудитории в присутствии преподавателя, так и в качестве домашних и аудиторных контрольных работ.

Целью работы является активация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению одного из разделов курса математики.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Число вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица $(i^2 = -1)$, называется комплексным числом. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются: $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = Jmz$, где Re – начальные буквы латинского слова *realis* – действительный, *Jm* – начальные буквы слова *imaginarius* – мнимый.

Два комплексных числа считаются равными, если равны одновременно их действительные и мнимые части.

Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображается либо точкой плоскости xOy с координатами (x, y), либо вектором, направленным из начала координат в эту точку. Если комплексное число z – действительное, т. е. $z = x$, то соответствующая ему точка лежит на оси Ox, поэтому ось абсцисс называется действительной осью. Чисто мнимые числа $z = iy$ изображаются точками оси Oy, поэтому ось ординат называется мнимой осью.

Если $z = x + iy$, то сопряженное с ним есть $\bar{z} = x - iy$.

Комплексная величина $z = x + iy$, где x и y – действительные переменные, называется комплексной переменной. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа или комплексная переменная z, называется комплексной плоскостью C.

Введем понятие функции комплексной переменной.

Пусть дано некоторое множество D комплексных чисел. Если каждому значению переменной $z \in D$ ставится в соответствие вполне определенное значение переменной w, то переменная w называется функцией комплексной переменной z, в записи: $w = f(z)$. Если каждому значению $z \in D$ соответствует несколько значений w, то функция называется многозначной.

Множество D, состоящее из всех значений независимой переменной z, называется областью определения функции $w = f(z)$, а о функции говорят, что она определена или задана на множестве D. Геометрически область определения функции изображается некоторым множеством точек на комплексной плоскости z.

Примеры

1. Функция $w = z^2$ определена на всей плоскости z, функция однозначная.

2. Функция $w = \sqrt{z}$ определена на всей плоскости и двузначна.

3. Функция $w = \dfrac{1}{z-3}$ определена при всех значениях z, кроме $z = 3$, поэтому область ее определения есть вся комплексная плоскость z, из которой удалена точка $z = 3$. Функция однозначная.

2. ВЫДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть дана функция $w = f(z)$. Обозначим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда $w = f(z)$ перепишется в виде $u + iv = f(x + iy)$.

Отсюда видно, что действительная и мнимая части u, v переменной w являются функциями действительной и мнимой частей x, y переменной z:
$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Итак, задание функции комплексной переменной $w = f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций от двух действительных переменных.

Примеры

1. Для функции $w = z^2$, при $z = x + iy$, $w = u + iv$ имеем $w = u + iv = (x + iy)^2$ или $u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$, откуда $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

2. $w = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$.

$$z = x + iy,\ w = u + iv, \text{ тогда } u + iv = \frac{1}{x + iy}$$

или $u + iv = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, откуда $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

3. $w = \mathrm{Im} z$

$$u + iv = y, \text{ откуда } u = y, \quad v = 0.$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Геометрическую интерпретацию функции одной действительной переменной $y = f(x)$ можно получить с помощью ее графика в плоскости Oxy, строя для каждой пары соответствующих друг другу значений x и y точку с координатами (x, y).

В случае же комплексных переменных, поступая аналогично, нужно было бы строить точку для каждой пары соответствующих друг другу комплексных чисел $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Такая точка (z, w) должна определяться четырьмя действительными координатами (x, y, u, v). В трехмерном пространстве построить такую точку нельзя. Поэтому поступим так.

Возьмем две плоскости: на одной – плоскости аргумента (плоскость Oxy, плоскость (z)) – будем изображать комплексные числа $z = x + iy$, $z \in D$, D – область определения функции $w = f(z)$, а на другой – плоскости функции (пл. 0, uv, плоскость (w)) – соответствующие им комплексные числа w (рис. 1). Получим, что задание функции $w = f(z)$ позволяет каждой точке $z \in D$ плоскости аргумента поставить в соответствие точку $w \in D_1$ плоскости функции,

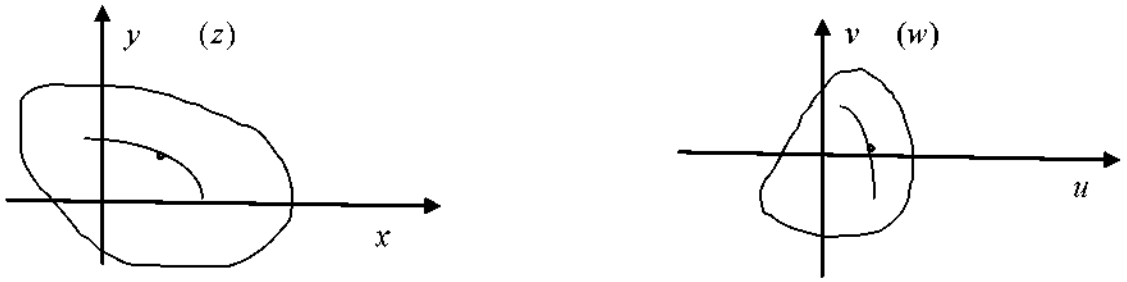


Рис. 1. Геометрическое изображение функции комплексной переменной

т. е. отображает множество D на множество D_1.

Иногда удобно плоскости Oxy и O_1uv совместить (ось O_1u с осью Ox, ось O_1v с осью Oy). Тогда значения незави симой переменной z и функции w изображаются точками одной и той же плоскости.

Пусть $w = f(z)$ – функция комплексной переменной. Если точка $z = x + iy$ описывает какую-либо кривую L в плоскости Oxy, все точки кривой принадлежат множеству D, то соответствующая точка $w = u + iv$ описывает в плоскости O_1uv, как правило, тоже некоторую линию L_1 (рис. 1). Можно сказать, что при отображении $w = f(z)$ кривая L переходит в кривую L_1.

Но не всякая функция комплексной переменной отображает кривую в кривую, а область в область. Так функция $w = \operatorname{Re} z$ отображает всю плоскость z в действительную ось плоскости w.

Для «хороших» функций (например, аналитических, которые мы рассмотрим позже), как правило, образ кривой – кривая, образ области – область.

Поставим вопрос: как, зная кривую L, найти кривую L_1. Если кривая L задана уравнением в комплексной форме $z = g(t)$, то, заменив в равенстве $w = f(z)$ переменную z функцией $g(t)$, мы получим уравнение $w = f(g(t))$ кривой L_1 в комплексной форме. Однако чаще кривая L задается уравнением в прямоугольных координатах $\varphi(x, y) = 0$.

Для кривой L_1 обозначим текущие координаты через u и v, поскольку эта кривая описывается точкой $w = u + iv$. Уравнение кривой L_1 мы должны получить в форме $\Psi(u, v) = 0$. Возьмем на кривой L_1 некоторую точку $w = u + iv$. Она соответствует некоторой точке $z = x + iy$ кривой L. Так как z и w связаны соотношением $w = f(z)$, то $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Решая эту систему уравнений относительно x и y, получим $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Подставляя эти выражения для x и y в уравнение $\varphi(x, y) = 0$, получим уравнение $\varphi(x(u, v), y(u, v)) = 0$. Это уравнение и будет уравнением $\psi(u, v) = 0$ кривой L_1.

Если плоскости Oxy и O_1uv совмещены, то кривые L и L_1 расположены на одной плоскости. Линия L_1 называется образом линии L.

Иногда удобно выразить из уравнения $w = f(z)$ сначала z без w, а затем x и y через u и v.

Пример 1

Кривая L задана на плоскости Oxy уравнением $x^2 + y^2 = 4$. Найти ее образ при отображении $w = 2iz - 1$.

Решение

Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда равенство $w = 2iz - 1$ перепишется в виде $u + iv = 2i(x + iy) - 1$, откуда $u = -2y - 1$, $v = 2x$. Выражаем x и y через u и v: $x = \frac{v}{2}$, $y = -\frac{u+1}{2}$. Подставляем найденные выражения для x и y в уравнение $x^2 + y^2 = 4$ кривой L: $\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{(u+1)^2}{4} = 4$. После упрощения получаем уравнение кривой L_1 в виде $(u+1)^2 + v^2 = 16$.

Итак, кривая L – окружность с центром в начале координат радиуса 2 – преобразуется с помощью заданной функции $w = 2iz - 1$ в кривую L_1 – окружность с центром $(-1, 0)$ радиуса 4.

Пример 2

При отображении $w = \frac{1}{z}$ найти образ прямой линии $y = x + 1$.

Решение

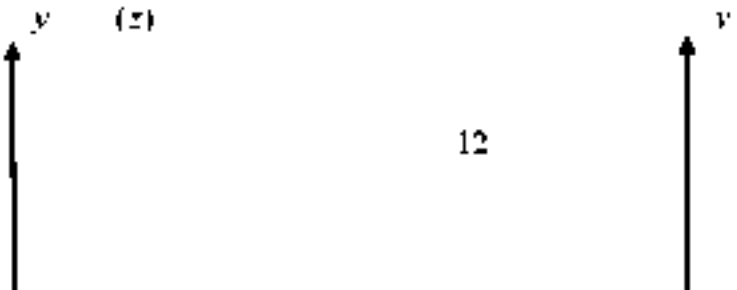
Из уравнения $w = \frac{1}{z}$ находим $z = \frac{1}{w}$. Подставим $z = x + iy$, $w = u + iv$: $x + iy = \frac{1}{u + iv}$, $x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$, откуда $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$, $y = \frac{v}{u^2 + v^2}$.

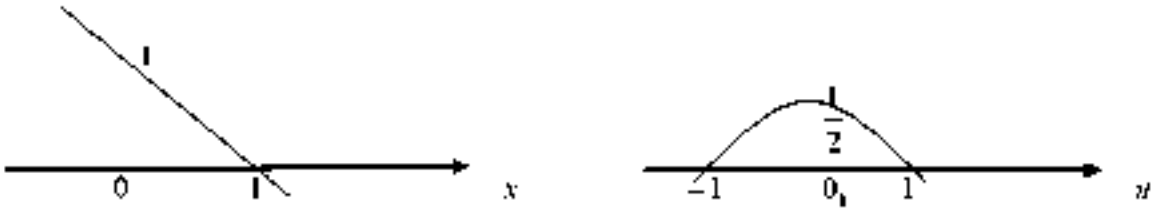
Найденные выражения для x и y подставим в уравнение линии L $y = x - 1$: $-\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} + 1$, после преобразования имеем $u^2 + v^2 + u + v = 0$ или $\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Это уравнение в плоскости O_1uv определяет линию L_1 - окружность с центром $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 3

Пусть $w = z^2$. Найти образ прямой $x + y = 1$.

Выделяя действительную и мнимую части функции $w = z^2$, получим $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Далее из трех уравнений $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $x + y = 1$ исключаем x и y: $u = (x - y)(x + y)$ или $u = (x - y)$, так как $x + y = 1$, тогда $u^2 + 2v = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy = (x + y)^2 = 1$. Получили уравнение образа $u^2 + 2v = 1$ – это уравнение параболы в плоскости O_1uv, вершина которой – точка $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.





Пример 4

Построить на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условиям:

а) $|z-3+2i|=1$; б) $-1<\operatorname{Re} z<1$; в) $\operatorname{Im} z=-2$; г) $|z-1|+|z+1|<3$,

д) $1<|z+2i|<2$; е) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\pi$, ж) $|z|<1$, $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}$.

Решение

а) $|z-3-2i|=|z-(3-2i)|$ есть расстояние от точки z до точки $3-2i$.

Значит, уравнению *а)* удовлетворяют все точки z, лежащие на окружности радиуса 1 с центром $(3,-2)$.

б) Полагая $z=x+iy$, имеем $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}(x+iy)=x$.

Значит, условие *б)* можно записать так: $-1<x<1$. Очевидно, этому условию удовлетворяют точки z, лежащие в полосе между прямыми $x=-1$ и $x=1$, параллельными оси Oy.

в) Полагая $z=x+iy$, имеем $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}(x+iy)=y$.

Значит, условие *в)* можно записать так: $y=-2$. Этому условию удовлетворяют точки прямой $y=-2$, параллельной оси Oy.

г) Равенство $|z-1|+|z+1|<3$ выражает, что сумма расстояний от точки z до точек $+1$ и -1 равна 3. Множество таких точек есть эллипс с фокусами в точках -1 и -1 $(c=1)$ и с большой осью $2a=3$. Значит, неравенству *г)* удовлетворяют точки, лежащие внутри этого эллипса с полуосями $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

д) Неравенству *д)* удовлетворяют все точки кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $(0,-2)$.

е) Неравенство *е*) определяет множество точек z, лежащих внутри угла, вершина которого находится в начале координат, а сторонами являются лучи, наклоненные к положительному направлению оси Ox под углами $\frac{\pi}{4}$ и π.

ж) Система неравенств *ж*) определяет сектор, ограниченный окружностью с центром в начале координат радиуса 1 и радиусами, образующими с осью Ox углы $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

Для проверки усвоения пройденного материала на практических занятиях студентам можно предложить выполнить самостоятельные работы.

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1) Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}\,i; \quad z_4 = 5$$

2) Построить на комплексной плоскости (z) кривые, заданные уравнениями:

а) $|z| = 3$; б) $|z + 1 - 2i| = 2$, в) $\mathrm{Im}\, z = 4$; г) $\arg z = \frac{\pi}{6}$

Вариант 2

1) Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$z_1 = -2i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = -4$

2) Построить на комплексной плоскости (z) кривые, заданные уравнениями:

а) $|z - 3 + 2i| - 1$, б) $|z| - 2$, в) $\mathrm{Re}\, z = 4$; г) $\arg z = \frac{2\pi}{3}$.

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

1) Найти образ линии $x^2 + y^2 = 1$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

2) Построить на комплексной плоскости (z) множества точек z, удовлетворяющих неравенствам:

а) $2<|z+2i|<4$; б) $\mathrm{Re}\, z<-1$; в) $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$; г) $|z+1|<1$ и $Im z<0$.

Вариант 2

1) Найти образ линии $y=x^2$ при отображении $w=iz+1$.

2) Построить на комплексной плоскости (z) множества точек z, удовлетворяющих неравенствам:

а) $-1<Im z<2$, б) $|z+3+i|>1$; в) $\arg z>\frac{\pi}{3}$, г) $|z+1|<1$ и $\mathrm{Re}\, z<-1$.

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть $w=f(z)$ – однозначная функция, определенная для любого $z\in D$ за исключением, может быть, точки z_0.

Говорят, что функция $f(z)$ стремится к пределу A $(A\neq\infty)$, когда z z_0 (конечному), и пишут $\lim_{z\to z_0} f(z)=A$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ξ можно найти положительное число $\delta=\delta(\xi)$ такое, что для всех z, отличных от z_0 и удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\xi$. Геометрически это означает, что как только z попадет в δ – окрестность точки z_0, то $w=f(z)$ попадет в ξ - окрестность точки A.

Полагая $A=B+iC$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$, докажем теорему, устанавливающую связь между пределом функции и пределами ее действительной и мнимой частей.

Теорема

Если существует $\lim_{z\to z_0} f(z)=A=B-iC$, то существуют

$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=B$ и $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=C$.

Доказательство

$$f(z)-A=u(x,y)-B+i(v(x,y)-C).$$

Тогда $|f(z)-A|=\sqrt{(u(x,y)-B)^2+(v(x,y)-C)^2}<\xi$

при $|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ по определению предела.

Отсюда следует, что $|u(x,y)-B|<\xi$ и $|v(x,y)-C|<\xi$

при $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$.

А это означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=B$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=C$.

Справедливо и обратное утверждение.

Из доказанной теоремы следует: если $f(z)\to A$, то $|f(z)|\to|A|$, $\arg f(z)\to\arg A$ при условии $A\neq 0,\ \infty$.

Действительно,

$$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}\to\sqrt{B^2+C^2}=|A|;\ \arg f(z)=arc\,tg\frac{v}{u}\to arc\,tg\frac{C}{B}=\arg A.$$

Поэтому основные теоремы о пределах функций действительных переменных распространяются без изменения на пределы функций комплексной переменной.

Например, если функции $f(z)$ и $g(z)$ определены в некоторой области D и для них $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A_1$, $\lim\limits_{z\to z_0} q(z)=A_2$, то $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\pm q(z))=A_1\pm A_2$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)q(z)=A_1A_2$; $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{q(z)}=\dfrac{A_1}{A_2}$, если $A_2\neq 0$.

Говорят, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $A\neq\infty$, если для любого $\xi>0$ существует $N(\xi)$ такое, что при $|z|>N(\xi)$ выполняется неравенство $|f(z)-A|<\xi$.

Говорят, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, если для любого $N>0$ можно указать такую окрестность точки z_0, что если $z\in D$ и $z\neq z_0$ принадлежит этой окрестности, то $|f(z)|>N$.

Часто применяется понятие о пределе функции по кривой. Говорят, что $f(z) \to A$ при $z \to z_0$ по кривой L, если выполнение условия $|f(z) - A| < \xi$ при $|z - z_0| < \delta$ рассматривается только для точек z, лежащих на кривой L.

Очевидно, если $f(z) \to A$ при $z \to z_0$, то $f(z) \to A$ и по любой кривой. Если же по двум кривым функция имеет разные пределы или по какой-нибудь кривой предела вовсе нет, то $\lim_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и в некоторой ее окрестности.

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Как и в анализе функций действительных переменных, назовем $z - z_0 = \Delta z$ приращением аргумента, а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ – приращением функции. Тогда функция $f(z)$ будет непрерывной в точке z_0, если $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$. Условие непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентно двум следующим: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$, выражающим непрерывность двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в той же точке (x_0, y_0). Справедливо и обратное утверждение. Отсюда следует, что теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций действительных переменных будут справедливы и для непрерывных функций комплексной переменной.

Если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества D, то она называется непрерывной на этом множестве.

Точками разрыва функции $f(z)$ называются точки, в которых нарушается непрерывность функции.

Функция $w = \dfrac{z}{z - i}$ непрерывна на всей комплексной плоскости, кроме точки $z = i$, а функция $w = \dfrac{2z + 1}{|z - 2| - 3}$ непрерывна на всей комплексной плоскости, кроме точек окружности $|z - 2| = 3$.

6. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Показательная функция e^z

Показательная функция e^z, где $z = x + iy$, определяется так:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Функция $e^z \neq 0$ на всей комплексной плоскости. Для e^z сохраняются правила действий с показателями:

$$(e^z)^n = e^{nz}; \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Показательная функция e^z имеет основной период $2\pi i$, т. е. любой другой ее период равен $2\pi k i$, где k – целое число.

Действительно, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$.

Пример

Вычислить значение $e^{-1+\frac{\pi}{4}i}$, записать его модуль, действительную и мнимую части.

Решение

$$e^{-1+\frac{\pi}{4}i} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e}(1+i), \quad \operatorname{Re}\left(e^{-1+\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e};$$

$$\operatorname{Im}\left(e^{-1+\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e}. \quad \left|e^{-1+\frac{\pi}{4}i}\right| = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

6.2. Тригогометрические функции $\sin z$, $\cos z$

Тригонометрические функции $z = \sin z$, $z = \cos z$ определяются так:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in C.$$

$\sin z$ и $\cos z$ сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительной переменной.

Например, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$,
$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

Так как показательная функция e^z имеет основной период $2\pi i$, то показательная функция e^{iz} имеет основной период 2π, тогда $\sin z$ и $\cos z$ тоже имеют основной период 2π

Пример

Вычислить $\cos(2+3i)$.

Решение

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Подставляя $z = 2+3i$, получим

$$\cos(2+3i) = \frac{e^{i(2+3i)} + e^{-i(2+3i)}}{2} = \frac{e^{2i-3} + e^{2i+3}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-3}(\cos 2 + i\sin 2) + e^{3}(\cos 2 - i\sin 2)) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{3} + e^{-3})\cos 2 - i\frac{1}{2}(e^{3} - e^{-3})\sin 2 = ch\,3\cdot\cos 2 - i\,sh3\cdot\sin 2.$$

6.3. Логарифмическая функция $Ln\,z$

Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, $z \neq \infty$, то число w называется логарифмом комплексного числа z (по основанию e) и обозначается $w = Ln\,z$.

Чтобы получить формулу для вычисления логарифма комплексного числа в равенстве $e^w = z$, положим $w = u + iv$, а $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда $e^{u+iv} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ или $e^u(\cos v + i\sin v) = r(\cos v + i\sin v) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. По определению, два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно, $e^u = r$, а $v = \varphi + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, откуда $u = \ln r = \ln|z|$.

Итак,

$$Ln\,z = w = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$$

Окончательно

$$Ln\,z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi k i, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Значение логарифма при $k = 0$ называется главным, его обозначают $\ln z$, оно равно $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

Из изложенного следует, что логарифмы можно находить не только для положительных чисел, но и для произвольных комплексных чисел. При этом обнаружилось, что логарифмическая функция не однозначная, а многозначная, то

есть каждое комплексное число имеет бесконечное множество логарифмов. В частности, имеют логарифмы и отрицательные числа, но при этом все значения логарифма комплексные.

Если $z = x$ – действительное положительное число, то $|z| = x$, а $\arg z = 0$. Поэтому главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает со значением $\ln z$, приводимым обычно в таблицах натуральных логарифмов. Но, кроме этих действительных значений, логарифмы положительных чисел имеют еще и бесконечное множество комплексных значений.

Все значения логарифма комплексного числа имеют одну и ту же действительную часть $\ln|z|$, поэтому геометрически значения логарифма изображаются на плоскости (w) точками вертикальной прямой $u = \ln|z|$.

Пример

Найти $Ln(-1+i)$ и $\ln(-1+i)$.

Решение

$|-1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $Ln(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} + 2\pi ki, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; $\ln(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i$.

6.4. Общая степенная функция z^γ

Если $w = z^\gamma$, где z – произвольное, отличное от 0 и ∞ комплексное число, а γ – любое комплексное число, то полагают по определению

$$w = z^\gamma = e^{\gamma Ln z}.$$

Пусть $z = re^{i\varphi}, \gamma = a + bi$ тогда

$$w = z^\gamma = e^{\gamma Ln z} = e^{(a+bi)(\ln r + i\varphi + 2\pi ki)} = e^{a\ln r - b\varphi - 2\pi kb} \cdot e^{i(b\ln r + a\varphi + 2\pi ka)}, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Так как логарифм комплексного числа имеет бесконечное множество значений, то и выражение z^γ имеет бесконечное множество значений, но в частных случаях они могут все совпадать (если γ – целое число) или среди них может быть только конечное число различных значений (если γ – дробное число).

Пример

Вычислить: а) 2^{3+5i}; б) i^i.

Решение

а)

$$2^{3+5i} = e^{(3+5i)Ln2} = e^{(3+5i)(\ln 2+2\pi ki)} = e^{(3\ln 2-10\pi k)+i(5\ln 2+6\pi k)}$$

$$= e^{3\ln 2-10\pi k} \cdot e^{i5\ln 2} = = e^{3\ln 2-10\pi k}(\cos(5\ln 2)+i\sin(5\ln 2)), k = 0,\pm 1,\pm 2,$$

б) $i^i = e^{iLni} = e^{i(\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2\pi k))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}, k = 0,\pm 1,\pm 2,..$

Видно, что все полученные значения i^i – действительные числа.

Например, при $k = 0$ имеем $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}2079$.

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1

1) Выделить действительную и мнимую части функции $w = ie^{z-i}$.
2) Вычислить:

а) $\sin(4-i)$; б) $Ln(-\sqrt{3}-i)$; в) $(1-i)^{2+i}$.

Вариант 2

1) Выделить действительную и мнимую части функции $w = \sin z$.
2) Вычислить:

а) $\cos(2+5i)$; б) $\ln(-\sqrt{3}-i)$; в) $(1+i)^{3-i}$.

7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Определение производной

Пусть $w = f(z)$ есть однозначная функция, определенная в области D плоскости комплексной переменной (z).

1. $z \in D, z+\Delta z \in D, w = f(z), w+\Delta w = f(z+\Delta z)$.

2. $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$ есть приращение функции $f(z)$ при переходе от точки z к точке $z+\Delta z$.

3. $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

4. Если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при произвольном стремлении $\Delta z \to 0$, то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ в точке z и обозначается $w' = f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z.

Из дифференцируемости $f(z)$ в точке z следует ее непрерывность в этой точке: $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Тогда $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z$, откуда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$, что означает непрерывность $f(z)$ в точке z.

Из непрерывности $f(z)$ в точке z дифференцируемость $f(z)$ не следует.

Если функция $f(z)$ имеет производную в каждой точке области D, то она называется *дифференцируемой в этой области.*

7.2. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексной переменной (условия Коши-Римана)

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция, определенная в области D плоскости комплексной переменной (z). Точки $z = x + iy$ и $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$ принадлежат области D.

Тогда

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) =$$

$$= (u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)) - (u(x,y) + iv(x,y)) = \Delta u + i\Delta v,$$

где $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$ и $\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)$ есть полные приращения функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Теорема

Для того, чтобы однозначная функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы в точке (x,y) существовали частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, причем эти производные удовлетворяли условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти условия называют условиями Коши - Римана.

Так как эти условия значительно раньше были найдены Даламбером и Эйлером, то их называют также условиями Даламбера - Эйлера.

Доказательство

Необходимость

Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z, поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z)$, предел не зависит от того, как точка $z + \Delta z \to z$.

Предположим, что точка $z + \Delta z$ приближается к точке z, например, по прямой, параллельной оси $0x$, тогда $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$ и

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если точка $z + \Delta z \to z$ по прямой, параллельной оси $0y$, то $\Delta x = 0, \Delta z = i\Delta y$, поэтому

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, то, приравнивая полученные выражения для $f'(z)$, находим $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ откуда по определению равенства двух комплексных чисел получаем условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Необходимость доказана.

Достаточность

Так как функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y), то их полные приращения в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1; \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2,$$

где α_1 и $\alpha_2 \to 0$ при $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, причем $\frac{\alpha_1}{\Delta z} \to 0$ и $\frac{\alpha_2}{\Delta z} \to 0$.

Тогда при условии, что частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x, y) удовлетворяют условиям Коши-Римана, приращение функции $w = f(z)$ запишется в виде

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 + i(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2) =$$

$$= (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta x + i\Delta y(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) + \alpha = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta z + \alpha = A\Delta z + \alpha,$$

где $A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ - некоторое постоянное комплексное число, не зависящее от Δz, а $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $|\Delta z|$, т. е. $\to 0$ при $|\Delta z| \to 0$.

Найдем $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{A\Delta z + \alpha}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (A + \frac{\alpha}{\Delta z}) = A$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ существует, конечен и не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, а значит, существует производная функции $w = f(z)$ в точке $z = x + iy$.

Если функция $w = f(z)$ в некоторой точке удовлетворяет условиям Коши-Римана, то производная в этой точке может быть вычислена по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

7.3. Правила дифференцирования

Из определения производной, правил алгебраических действий и теорем о пределах функций комплексной переменной следует, что основные правила дифференцирования функций действительного аргумента остаются справедливыми и для функций комплексной переменной.

7.4. Аналитические функции

Определение 1

Если однозначная функция $w = f(z)$ дифференцируема в области D, то она называется аналитической в этой области.

Определение 2

Однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Пример

Является ли аналитической а) $w = e^z$; б) $w = (\bar{z})^2$?

Решение

а) $w = u + iv, z = x + iy$

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \text{ тогда } u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$$

Найдем частные производные этих функций

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y..$$

Условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются в любой (x, y), следовательно, функция $w = e^z$ дифференцируема на всей комплексной плоскости (z), а значит и аналитическая на всей комплексной плоскости.

б) $w = u + iv, z = x + iy; u + iv = (x - iy)^2; u + iv = x^2 - 2xyi - y^2;$

тогда $u = x^2 - y^2; v = -2xy; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$

Условия Коши-Римана выполняются только в точке $z = 0$, так как равенства $2x = -2x$ и $-2y = 2y$ имеют место лишь при $x = y = 0$.

Следовательно, функция $w = (\bar{z})^2$ дифференцируема лишь в точке $z = 0$. Но, так как в окрестности точки $z = 0$ заданная функция не дифференцируема, она не будет аналитической в точке $z = 0$.

7.5. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной

Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в области D плоскости (z), отображает эту область в область G плоскости (W). Пусть, далее, точка $z_0 \in D$, а соответствующая ей при отображении точка $w_0 \in G$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда величина $k = |f'(z_0)| = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}$ есть коэффициент искажения или масштаб в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Если $k>1$, то дуги при отображении растягиваются, если $k<1$, то дуги сжимаются, если $k=1$, то масштаб при отображении не меняется. Так как производная в точке z_0 не зависит от того, по какой кривой $z \to z_0$, то все бесконечно малые дуги, проходящие через точку z_0, при отображении будут подвергаться одинаковому искажению.

$\arg f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (\arg(w-w_0) - \arg(z-z_0))$ - это угол, на который нужно повернуть касательную к некоторой линии L в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к преобразованной кривой L_1 в точке $w_0 = f(z_0)$.

При отображении с помощью аналитической функции углы между кривыми сохраняются не только по величине, но и по направлению, во всех точках, где $f'(z_0) \neq 0$.

Определение

Всякое отображение, обладающее в некоторой точке свойством постоянства углов и свойством постоянства растяжений, называется конформным в этой точке.

Отображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$ в точке z_0, для которой $f'(z_0) \neq 0$, является конформным отображением.

Самостоятельная работа № 4

Вариант 1

1) Найти область дифференцируемости функции $w = z^2 + (3-i)z + i$ и ее производную.
2) Вычислить:

а) $\cos(1-3i)$; б) $Ln(\sqrt{3}+i)$; в) $(2i)^{5+i}$.

Вариант 2

1) Найти область дифференцируемости функции $w = \cos z$ и её производную.
2) Вычислить:

а) $(i-\sqrt{3})^{2i+1}$; б) $\ln(-3-\sqrt{3}i)$; в) $\sin(i-2)$

Самостоятельная работа № 5

Вариант 1

1) Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости функции $f(z)$.
2) Дифференцируема ли функция $w = \frac{1}{z}$?
3) Вычислить:

а) $\ln(-4-4i)$; б) 5^{4-3i}; в) $\sin 3i$.

Вариант 2

1) Какая функция называется аналитической в точке и в области?
2) Установить, дифференцируема ли функция $w = e^{\bar{z}}$.
3) Вычислить:

а) 2^{1+5i}; б) $Ln(-5i)$; в) $\cos(4+i)$.

Самостоятельная работа № 6

Вариант 1

1) Найти область аналитичности функции $w = e^{2z} + iz$.
2) Найти образ линии $x^2 + y^2 = 4$ при отображении $w = iz + 2$.

Вариант 2

1) Найти образ линии $x^2 + (y-1)^2 = 1$ при отображении $w = \frac{2}{z}$.
2) Проверить условия Коши-Римана для функции $w = e^{z^2}$.

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1. Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть в некоторой области D плоскости комплексной переменной (z) задана однозначная и непрерывная функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, и пусть γ – произвольная гладкая или кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D.

Выберем на дуге γ направление обхода от точки a к точке b.

1) Разобьем дугу γ произвольно на n частичных дуг точками $z_0 = a, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$; обозначим $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\,\Delta y_k$.

2) Выберем на каждом участке (z_{k-1}, z_k) дуги γ по точке $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$.

3) Образуем сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)) \cdot (\Delta x_k - i\Delta y_k) = \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k) +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k).$$

которую назовем интегральной суммой функции $f(z)$.

Предел интегральной суммы σ_n, вычисленный при стремлении к нулю длины наибольшей из частичных дуг (при $n \to \infty$), не зависящий ни от способа разбиения дуги γ на частичные дуги (z_{k-1}, z_k), ни от выбора точек ζ_k, называется интегралом от функции $f(z)$ по дуге γ и обозначается

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k .$$

При указанных выше требованиях к функции $f(z)$ и контуру γ этот предел всегда существует.

Действительно,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k,\ \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k) + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k).$$

По условию $f(z)$ непрерывна в области D, значит, в этой области непрерывны и функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, а γ – гладкая или кусочно-гладкая кривая. Поэтому пределы сумм, стоящих в правой части последнего равенства, существуют и являются криволинейными интегралами по координатам от функций действительных переменных.

Таким образом,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx - u(x,y)dy .$$

Эта формула дает выражение интеграла от функции комплексной переменной через два криволинейных интеграла от действительных функций. Отсюда же следует, что основные свойства криволинейных интегралов по координатам распространяются и на интегралы от функций комплексной переменной.

Некоторые из этих свойств есть:

1) $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$;

2) $\int_\gamma af(z)dz = a\int_\gamma f(z)dz$;

3) $\int_\gamma (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int_\gamma f_1(z)dz + \int_\gamma f_2(z)dz$;

4) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

8.2. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной

1. Пусть дуга γ задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$.

Тогда криволинейные интегралы сводим к определенным и получим

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta u(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt - v(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt +$$

$$+ i\int_\alpha^\beta v(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt + u(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta (u(x(t), y(t)) - iv(x(t), y(t)))\,x'(t)\,dt +$$

$$+ \int_\alpha^\beta (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))\,iy'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (u(x(t), y(t)) + iv(x(t),$$

$$y(t)))\,(x'(t) + iy'(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,dz(t),$$

то есть $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,dz(t)$, где $z(t) = x(t) - iy(t)$

2. Если дуга γ задана уравнением $y = g(x)$, где $a \le x \le b$. то. принимая за параметр x и записывая $z = x - ig(x)$, задачу сводим к случаю 1.

3. Если дуга γ задана уравнением $x = \varphi(y)$, где $x = \varphi(y)$, где $c \le y \le d$, то за параметр принимаем y и записываем $z = \varphi(y) + iy$. Задачу сводим к случаю 1.

Пример 1

Вычислить $\int_\gamma (\bar{z})^2\,dz$ по отрезку, соединяющему точки $z = 0$ и $z = 1 + i$.

Решение

На прямой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = 1 + i$, контур γ задается уравнением $z = x + ix = x(1 + i)$, где $0 \le x \le 1$. Тогда $\bar{z} = x(1 - i)$, $dz = (1 + i)\,dx$ и

$$\int_\gamma (\bar{z})^2\,dz = \int_0^1 x^2(1-i)^2(1+i)\,dx = 2(1-i)\int_0^1 x^2\,dx = 2(1-i)\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-i).$$

Пример 2

По ломаной γ с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(2, 1)$ вычислить интегралы:

а) $\int_\gamma z^2\,dz$; б) $\int_\gamma \mathrm{Re}\,z\,dz$; в) $\int_\gamma \mathrm{Im}\,z\,dz$; г) $\int_\gamma |z|\,dz$.

Решение

а) Уравнение стороны OA: $y = x$, тогда $z = x + ix$ или $z = x(1 + i)$, где $0 \le x \le 1$, $dz = (1 + i)\,dx$, а

$$\int_{OA} z^2\,dz = \int_0^1 x^2(1-i)^2(1+i)\,dx = (1+i)^3\int_0^1 x^2\,dx = (1-i)^3\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1+3i-3-i) = \frac{1}{3}(2i-2) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

Уравнение стороны AB: $y = 1$, тогда $z = x + i$, $dz = dx$, $1 \le x \le 2$, а

$$\int_{AB} z^2 dz = \int_1^2 (x+i)^2 dx = \frac{(x+i)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}((2-i)^3 - (1+i)^3) =$$

$$= \frac{1}{3}(2+i-1-i)((2+i)^2 + (2+i)(1+i) + (1+i)^2) = \frac{1}{3}(4+9i) = \frac{4}{3} + \frac{9}{3}i = \frac{4}{3} + 3i.$$

Окончательно, интеграл по всей ломаной равен

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{4}{3} + 3i = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

б) $\operatorname{Re} z dz$. Для стороны OA: $z = x(1+i)$, $0 \le x \le 1$, $dz = (1+i)\,dx$. Тогда

$$\int_{OA} \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^1 x(1+i)\,dx = (1+i)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Для стороны

AB. $z = x+i$, $1 \le x \le 2$. $dz = dx$, а $\int_{AB} \operatorname{Re} z\, dz = \int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Тогда

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z dz = \int_{OA} \operatorname{Re} z dz + \int_{AB} \operatorname{Re} z dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} = 2 + \frac{1}{2}i.$$

в) $Jm\, z\, dz$.

$$\int_\gamma Jmz dz = \int_{OA} Jmz dz + \int_{AB} Jmz dz = \int_0^1 x(1+i)\,dx + \int_1^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

г) $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Для стороны OA $y = x$, $z = x(1+i)$, $dz = (1+i)dx$, $0 \le x \le 1$

$$\int_{OA} |z|\,dz = \int_0^1 x\sqrt{2}(1+i)\,dx = \sqrt{2}(1+i)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Для стороны AB. $y = 1$, $z = x+i, dz = dx$, $1 \le x \le 2$,

$$\int_{AB} |z|\,dz = \int_1^2 \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_1^2 =$$

$$= \sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Тогда

$$\oint_\gamma |z|\,dz = \int_{OA} |z|\,dz + \int_{AB} |z|\,dz = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}i \approx 2{,}518 + 0{,}707i$$

8.3. Основная теорема Коши

Теорема

Если $f(z)$ есть аналитическая функция односвязной области $\overline{D}$, то интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, целиком лежащему в области $\overline{D}$, равен нулю, т. е.

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство

Известно, что $\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\oint_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy.$

Из аналитичности $f(z)$ в области D следует, что частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ существуют, удовлетворяют условиям Коши-Римана, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, а из предположения о непрерывности $f'(z)$ в области D следует непрерывность частных производных. Поэтому, применяя к криволинейным интегралам формулу Грина, получим

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \iint_{D_1}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + i\iint_{D_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Из условий Коши-Римана подынтегральное выражение в каждом двойном интеграле равно нулю, поэтому

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $\overline{D}$, то $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$ не зависит от пути, соединяющего точки A и B, если дуга AB целиком лежит внутри области $\overline{D}$.

Пример 1

Вычислить по ломаной OAB (см. пример 2 раздела 8) и по отрезку OB интегралы:

а) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz$, б) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z dz$;

Решение

а) $\int\limits_{OAB} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$ (см. пример 2 раздела 8)

$$\int\limits_{OB} z^2 dz = \int\limits_0^2 x^2 (1+\frac{i}{2})^2 (1+\frac{i}{2}) dx = (1+\frac{i}{2})^3 \int\limits_0^2 x^2 dx =$$

$$= (1+\frac{i}{2})^3 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}(1+\frac{i}{2})^3 = \frac{8}{3}(1+\frac{3i}{2}-\frac{3}{4}-\frac{i}{8}) = \frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$$

Получили, что $\int\limits_{OAB} z^2 dz = \int\limits_{OB} z^2 dz$, т. е. интеграл не зависит от пути, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$, так как $f(z)=z^2$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости

б) $w = \operatorname{Re} z$. $u+iv = x$, тогда $u = x$, $v = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ не выполняется ни в одной точке на комплексной плоскости, так как $1 \neq 0$, поэтому $w = \operatorname{Re} z$ не является аналитической на всей комплексной плоскости

$$\int\limits_{OAB} \operatorname{Re} z dz = 2 + \frac{1}{2} i \quad \text{(см. пример 2 раздела 8)},$$

$$\int\limits_{OB} \operatorname{Re} z\, dz = \int\limits_0^2 x\,(1+\frac{i}{2})\,dx = (1+\frac{i}{2})\int\limits_0^2 x\,dx = (1+\frac{i}{2})\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2+i.$$

Так как функция $w = \operatorname{Re} z$ не является аналитической, интеграл $\int \operatorname{Re} z dz$ зависит от пути, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$.

8.4. Теорема Коши для многосвязной области

Сначала рассмотрим двусвязную область (рис. 2), ограниченную простыми замкнутыми кривыми γ_1 и γ_2, которые не пересекаются, а γ_2 целиком лежит внутри γ_1. Допустим, что $f(z)$ является аналитической в области между контурами и на самих контурах γ_1 и γ_2. Проведём в заданной области разрез по линии AB. Предполагая, что разрез имеет как бы два берега, мы превратим эту область в односвязную. Положительное направление обхода по контуру указано на рисунке. Применим теорему Коши к полученной односвязной области, ограниченной контуром $\Gamma\{AEA + AB + BFB + BA\}$.

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad \text{или} \quad \oint_{AEA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \oint_{BFB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0.$$

Так как $\int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0$, то $\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

Из полученной формулы видно, что интегралы от $f(z)$ по внешнему контуру γ_1 и по внутреннему контуру γ_2, обходимым в одном и том же направлении, равны по величине, но, вообще говоря, не равны нулю, так как $f(z)$ может быть неаналитической внутри области, ограниченной контуром γ_2.

Теперь рассмотрим теорему Коши для $(n+1)$- связной области, которая с помощью системы разрезов может быть сделан односвязной.

Если $f(z)$- аналитическая функция в замкнутой многосвязной области, ограниченной внешним замкнутым контуром γ и замкнутыми контурами $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n,$, лежащими внутри γ, то интеграл от этой функции по внешнему контуру γ равен сумме интегралов по внутренним контурам, причём интегрирование по всем контурам выполняется в одном и том же направлении, то есть

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + ... + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

8.5. Вычисление интеграла от аналитической функции

Если функция $f(z)$, аналитическая в односвязной области D, содержащей внутри себя точки z_0 и z, то величина $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ не зависит от пути интегрирования, а зависит, лишь от вида подынтегральной функции и точек z_0 и z.

Если точка z_0 зафиксирована, то интеграл $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ определяет функцию $F(z)$ для каждой выбранной точки $z \in D$. Функция $F(z)$ является аналитической в D и $F'(z)=f(z)$.

Назовём функцию $\Phi(z)$ первообразной для $f(z)$ в области D, если $\Phi(z)$ аналитическая в D и $\Phi'(z)=f(z)$. Тогда $\Phi(z)-F(z)=C$, где C постоянное комплексное число. При $z=z_0$ имеем $\Phi(z_0)-F(z_0)=C$, отсюда $C=\Phi(z_0)$, так как $F(z_0)=0$.

Следовательно, $\int_{z_0}^{z} f(z)dz=\Phi(z)-\Phi(z_0)$.

Полученная формула показывает, что значение интеграла от аналитической функции равно приращению какой-либо первообразной для подынтегральной функции на пути интегрирования.

Таким образом, определение первообразной и формула Ньютона-Лейбница для функций действительной переменной и аналитических функций комплексной переменной полностью совпадают. Поэтому интегралы от элементарных функций комплексной переменной вычисляются с помощью тех же формул и правил, что и в обычном анализе.

Пример 1

Вычислить: а) $\int_{\gamma} z^2 dz$ вдоль контура γ, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$;

б) $\int_{\gamma} e^z dz$ по отрезку, соединяющему точки $z=0$ и $z=i$.

Решение

а) Так как $f(z)=z^2$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости, а первообразной для неё является функция. $F(z)=\frac{z^3}{3}$, то

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{z=0}^{z=2+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{1}{3}(8+12i-6-i) = \frac{2}{3}+\frac{11}{3}i.$$

Получили тот же результат, что и в примере 8.3.1

б) Так как $f(z)=e^z$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости, а первообразной для неё является функция $F(z)=e^z$, то

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_{z=0}^{z=i} e^z dz = e^z\Big|_0^i = e^i - e^0 = e^i - 1 = \cos 1 + i\sin 1 - 1 = (\cos 1 - 1) + i\sin 1.$$

8.6. Особые точки - полюсы

Точка z_0 называется особой точкой для $f(z)$, если в этой точке нарушается аналитичность функции. Точка z_0 называется изолированной особой точкой, если можно указать такую окрестность точки $z_0 : |z - z_0| < r$, в которой, кроме z_0, других особых точек функции $f(z)$ нет.

Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то точка $z = z_0$ называется полюсом функции $f(z)$.

Функция $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z - z_0}$ имеет в z_0 простой полюс или полюс первого порядка, а функция $g(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$ имеет в z_0 полюс m-го порядка, если $\varphi(z)$ аналитическая функция в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Так для функции $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z(z-3)(z+1)^4} = \dfrac{z-1}{z(z-3)(z+1)^3}$ точки $z = 0$ и $z = 3$ - простые полюсы, а точка $z = -1$ - полюс третьего порядка.

8.7. Определение вычета

Понятие вычета является одним из важнейших понятий теории функций комплексной переменной в силу большой практической ценности основной теоремы о вычетах, которую мы рассмотрим ниже.

Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D, то $\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$, где γ - любой замкнутый контур, лежащий целиком в области D. Если же внутри контура γ есть единственная изолированная особая точка функции $f(z)$, то $\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz$, вообще говоря, не равен нулю. Значение этого интеграла, как известно, не зависит от формы контура γ.

Условились величину этого интеграла, делённую на $2\pi i$, называть вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 и обозначать символом

$$res[f(z); z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz .$$

Здесь при интегрировании обход контура γ идёт против движения часовой стрелки.

8.8. Формулы для вычисления вычетов

1. Если z_0 есть простой полюс функции $f(z)$, то вычет $f(z)$ относительно z_0 равен

$$res[f(z); z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) .$$

2. Если z_0 - простой полюс функции $f(z)$, которая может быть представлена в виде $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ - аналитические функции в точке $z = z_0$, причём $z = z_0$ - простой полюс $f_2(z)$, а $f_1(z_0) \neq 0$. Тогда при $f_2'(z_0) \neq 0$

$$res\,[f(z); z_0] = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)} .$$

3. Если точка $z = z_0$ - полюс порядка n функции $f(z)$, то

здесь вычисляется предел производной $(n-1)$ порядка.

Пример 1

Вычислить вычеты функции $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2}$ относительно всех её особых точек.

Решение

Для заданной функции точка $z = -1$ является простым полюсом, а $z = 1$ - полюсом второго порядка.

$$res[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2}=\lim_{z\to -1}\frac{z+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{4}.$$

$$res[f(z),1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}((z-1)^2\frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2})'=\lim_{z\to 1}(\frac{z+2}{z+1})'=\lim_{z\to 1}\frac{z+1-(z+2)}{(z+1)^2}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 2

Найти вычеты в каждой из особых точек функций:

$$а)\ f(z)=\frac{\cos z}{z^3};\ б)\ f(z)=\frac{z^2-2}{z^2+z};\ в)\ f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}.$$

Решение

а) Для $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$ точка $z=0$ является полюсом третьего порядка.

$$res\,[f(z);0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}(z^3\frac{\cos z}{z^3})''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(\cos z)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(-\sin z)'=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{2};$$

б) Для функции $f(z)=\frac{z^2-2}{z^2+z}=\frac{z^2-2}{z(z+1)}$ точка $z=0$ является простым полюсом, а $z=-1$ - тоже простым полюсом

$$res\,[f(z);0]=\lim_{z\to 0}z\frac{(z^2-2)}{z(z+1)}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2-2}{z+1}=-\frac{2}{1}=-2;$$

$$res\,[f(z);-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{(z^2-2)}{z(z+1)}=\lim_{z\to -1}\frac{z^2-2}{z}=\frac{1-2}{-1}=1;$$

в) $z^2+1=0$ при $z=\pm i$. Поэтому точки $z=i$ и $z=-i$ являются простыми полюсами $f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}$

$$res\,[f(z);i]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{e^z}{z+i}=\frac{e^i}{2i}$$

$$=\frac{(\cos 1+i\sin 1)(-i)}{2i\,(-i)}=\frac{\sin 1-i\cos 1}{2}=\frac{\sin 1}{2}-i\frac{\cos 1}{2};$$

$$res\,[f(z);-i]=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to -i}\frac{e^z}{z-i}=\frac{e^{-i}}{-2i}$$

$$=\frac{(\cos 1-i\sin 1)i}{2i\,(-i)}=\frac{\sin 1+i\cos 1}{2}=\frac{\sin 1}{2}+i\frac{\cos 1}{2}.$$

8.9. Теорема Коши о вычетах

Теорема

Если функция $f(z)$, аналитическая в односвязной области D, ограниченной контуром γ, всюду, кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, лежащих внутри области D (но не на кривой γ), то интеграл от функции $f(z)$ по кривой γ равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов $f(z)$ относительно всех особых точек, лежащих внутри γ, т. е.

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\,[f(z), z_k].$$

Доказательство

Для простоты окружим точки $z_1, z_2, ..., z_n$ окружностями $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ с центрами в этих точках и радиусами такими малыми, чтобы окружности не пересекались и лежали в области D, ограниченной контуром γ. Тогда функция $f(z)$ будет аналитической в многосвязной области, ограниченной контурами $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$.

По теореме Коши для многосвязной области имеем

$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + ... + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz$, но $\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i\, res\,[f(z), z_k]$

Тогда

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\,[f(z), z_k]$$

Теорема доказана.

Пример 1

Найти значение $\int_{\gamma} \frac{(z+1)}{(z-2)^2} dz$, где

а) γ - окружность $|z| = 3$; б) γ - окружность $|z+2-i| = 1$.

Решение

Подынтегральная функция имеет единственную особую точку $z = 2$ - полюс второго порядка, которая находится внутри окружности $|z| = 3$ (центр вначале координат, радиус равен 3).

Тогда

$$\oint_{|z|=3} \frac{(z+1)\,dz}{(z-2)^2} = 2\pi i\, res\,[f(z);\,2] = 2\pi i \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2}((z-2)^2\frac{(z+1)}{(z-2)^2})' = 2\pi i \lim_{z\to 2}(z+1)' = 2\pi i.$$

б) Окружность $|z+2-i|=1$ имеет центр в точке $z_0=-2+i$, радиус 1, а полюс $z=2$ лежит вне этой окружности. Поэтому в области, ограниченной этим контуром γ, функция аналитическая. Тогда по основной теореме Коши

$$\oint_{\gamma} \frac{(z+1)}{(z-2)^2}\,dz = 0.$$

Пример 2

Вычислить $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-i)(z-1)}$, где γ - окружность $x^2+y^2=2x+2y$.

Решение

Преобразуем уравнение окружности $x^2+y^2=2x+2y$, выделяя полный квадрат по x и по y:

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)=2 \text{ или } (x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

Точка $(-1;\,1)$ - центр окружности, радиус - $\sqrt{2}$.

Для подынтегральной функции $f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-1)}$ точки $z=i$ и $z=1$ являются простыми полюсами и находятся внутри окружности γ.

Тогда по теореме Коши о вычетах имеем:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-i)(z-1)} = 2\pi i\,(res\,[f(z);\,i] + res\,[f(z);\,1]);$$

$$res\,[f(z),\,i] = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z-1)} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z-1} = \frac{e^i}{2i} = \frac{1}{i-1} = \frac{-i-1}{(i-1)(-i-1)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,$$

$$res\,[f(z);\,1] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{(z-i)(z-1)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z-i} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Тогда

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i) = 0.$$

Пример 3

Вычислить $\oint_{\gamma} \frac{e^{-2z}}{z^2}$, где γ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Решение

Для подынтегральной функции $f(z)=\frac{e^{-2z}}{z^2}$ точка $z=0$ является полюсом второго порядка и находится внутри эллипса с полуосями 3 и 2.
По теореме Коши о вычетах

$$\oint_{\gamma}\frac{e^{-2z}}{z^2}dz = 2\pi i\, res\,[f(z),0] = 2\pi i \lim_{z\to 0}(z^2\frac{e^{-2z}}{z^2})' = 2\pi i \lim_{z\to 0}(e^{-2z})' =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0}(-2)e^{-2z} = 2\pi i\ \ (-2)e^{0} = -4\pi i$$

Самостоятельная работа № 7

Вариант 1

1) Вычислить $\int_{\gamma}\cos z dz$ по отрезку прямой, соединяющему точки $z=i$ и $z=-2+i$.

2) Вычислить $\int_{\gamma}(4i+3\mathrm{Re}\,z)dz$, где γ: $2x^2 \quad y+3=0$ от $z=3i$ до $z=1+5i$.

Вариант 2

1) Вычислить $\int_{\gamma}\sin z dz$, где γ: $x \quad 3x+1=0$ от $z= \quad 1$ до $z=2+i$.

2) Вычислить $\int_{\gamma}(2i\,\mathrm{Im}z+3)\,dz$, где γ: $y=2-x^2$ от $z=2i$ до $z=1+i$.

Самостоятельная работа № 8

Вариант 1

1) Вычислить $\int_{\gamma}(2z-z^2)dz$, где γ: $x^2+y^2-x=0$.

2) Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\frac{4z}{(z-1)^3(z+2)^2}$.

Вариант 2

1) Вычислить $\int_{\gamma}e^{z-2i}dz$, где γ: $|z-2|=2$.

2) Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\frac{\sin z}{(z+1)^2(z \quad i)}$.

Самостоятельная работа № 9

Вариант 1

С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint_\gamma \frac{e^z}{(z^2-1)^2}dz$, $\gamma: x^2+4y^2=4$.

Вариант 2

С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint_\gamma \frac{(3z^2+1)}{(z+2)^2(z-2i)}dz$, $\gamma: |z+1-i|=3$.

Самостоятельная работа № 10

1) Вычислить: $(1-i)^{2i}$, $\sin(3i+2)$.

2) Найти образ линии $x^2-y^2-x=0$ при отображении $w=3\bar{z}-i$.

3) Является ли аналитической функция $w=z+e^{\bar{z}}$?

4) На комплексной плоскости (z) построить множество точек z, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} |z+i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z > -1. \end{cases}$$

5) Вычислить $\int_\gamma e^{\bar{z}}dz$ по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=2-2i$.

4) С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint_\gamma \frac{(z^2+3)\,dz}{z^3-1}$; $\gamma: x^2+y^2=9$.

Самостоятельная работа № 10 содержит набор основных типовых задач по теме изучаемого раздела математики и может быть использована для подготовки к контрольной работе.

С помощью вычетов удается вычислять некоторые определённые интегралы от функций действительной переменной, для чего эти интегралы предварительно преобразуются в интегралы по замкнутому контуру.

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью вычетов вычисляют некоторые несобственные интегралы от функции действительной переменной вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Пусть $f(z)$ - рациональная функция $f(z)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, а разность степеней знаменателя и числителя $m-n>1$. $Q_m(x)\neq 0$, $x\in R$.

Пусть функция $f(z)$, аналитическая на действительной оси, имеет выше действительной оси (в верхней полуплоскости $Imz > 0$) конечное число особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда существует несобственный интеграл от функции $f(z)$ по промежутку $(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[f(z); z_k]$$

Пример

Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}$.

Функция $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$.

Решение

Введём функцию комплексной переменной z

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}.$$

Она имеет в верхней полуплоскости $Imz > 0$ единственную особую точку $z = i$ -полюс третьего порядка. Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} = 2\pi i\, res[f(z); i]$.

Найдем

$$res[f(z), i] = \frac{1}{2!} \lim_{z \to i} ((z-i)^3 \frac{z^2}{(z-i)^3 (z+i)^3})'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{z^2}{(z+i)^3})'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2z(z+i)^3 - z^2 3(z-i)^2}{(z+i)^6})' = = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2z^2 + 2zi - 3z^2}{(z+i)^4})' = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2zi - z^2}{(z+i)^4})' =$$

$$- \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{(2i-2z)(z+i)^4 - (2zi - z^2)4(z+i)^3}{(z+i)^8} -$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{2z^2 - 2 - 8zi}{(z+i)^5} = \frac{1}{2} \frac{(-2-2+8)}{(2i)^5} = \frac{4}{2 \cdot 32i} = \frac{1}{16i} = \frac{-i}{16i(-i)} = -\frac{i}{16}.$$

Окончательно получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi i (-\frac{i}{16}) = \frac{\pi}{8}$$

Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(z) = e^{imz} \cdot F(z)$, где $m > 0$ и $F(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$ равномерно по φ для $Imz \geq 0$;

2) $f(z)$ на действительной оси имеет конечное число простых полюсов $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

3) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости всюду, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} res\,[f(z);\, z_k] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} res\,[f(z);\, x_k]\right).$$

Пример

Вычислить интеграл Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение

Рассмотрим $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$. Введём функцию $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Здесь $m = 1$, $F(z) = \frac{1}{z} \to 0$ при $|z| \to \infty$. Для $f(z)$ точка $z = 0$ - простой полюс, расположенный на действительной оси. Других особых точек нет.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = 2\pi i \frac{1}{2} res\,[f(z), 0] = \pi i \lim_{z\to 0} z \frac{e^{iz}}{z} = \pi i \lim_{z\to 0} e^{iz} = \pi i$$

Но $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{x} + i\frac{\sin x}{x}\right) dx = \pi i.$$

В силу определения равенства двух комплексных чисел имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0, \quad \text{а} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Так как $\frac{\sin x}{x}$ - чётная функция, то $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$, откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. - М.: Наука, 1970. – 380 с.

Волковысский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л. И. Волковысский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. - М.: Наука, 1975. – 220 с.

Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. - М.: Наука, 1968. – 620 с.

Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - М.: Наука, 1979. – 410 с.

Маркушевич, А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. - М.: Наука, 1978. – 360 с.

Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. - М.: Наука, 1984. – 480 с.

Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. - М.: Наука, 1979. – 720 с.

Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. - М.: Наука, 1980. – 510 с.

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

В. Я. Раевский

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов
всех специальностейи очного обучения

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ 6
1.1. Основные понятия 6
1.2. Положительные ряды 14
1.3. Знакочередующиеся ряды 26
1.4. Знакопеременные ряды 29
2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ 32
2.1. Функциональные ряды 32
2.2. Степенные ряды – основные понятия 34
2.3. Свойства суммы степенного ряда 40
2.4. Разложение функций в степенные ряды 44
2.5. Разложения элементарных функций в ряды Маклорена 47
3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ 52
4. ВАРИАНТЫ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ 53
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 67

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие содержит основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы) по теме «Числовые и степенные ряды». Основное внимание уделяется многочисленным типовым задачам, решение которых приводится с детальной подробностью. Для проверки и закрепления полученных знаний в пособие включены разделы «Тренировочные задачи» и «Вопросы и задачи для самопроверки».

Работа содержит 30 вариантов наборов задач для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы для контрольных работ.

Учебное пособие может быть использовано студентами всех специальностей для изучения темы «Числовые и степенные ряды».

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Основные понятия

До появления числовых рядов имела смысл только сумма конечного набора чисел: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Когда-то считалось, что складывать бесконечный набор чисел бессмысленно, так как казалось очевидным, что, складывая бесконечно много, например, положительных чисел, должна получаться бесконечная сумма. На этом, казалось бы, верном, утверждении строились многие известные парадоксы (например, «Ахилл и черепаха»). Однако во многих практических задачах и чисто математических построениях возникали суммы бесконечного набора чисел, что привело к необходимости сделать их предметом исследования математики. Приведем пример практической задачи, в которой (в одном из подходов к ее решению) возникает необходимость сложения бесконечного набора чисел.

Пример1. Допустим, что при добыче нефти десятая ее часть идет на обеспечение самой добычи (механизмы, обеспечивающие добычу, работают на бензине, который производится из той же нефти). Сколько необходимо добыть нефти, чтобы можно было продать 10 тонн?

Решение. Ясно, что нужно добыть, по крайней мере, эти 10 тонн. Но тогда нужно добавочно добыть $10 \cdot 0.1 = 1$ тонну для обеспечения добычи этих 10 тонн. Но для обеспечения добычи этой 1 тонны необходимо добавочно добыть $1 \cdot 0.1 = 0.1$ тонны. Но для обеспечения ее добычи нужно еще добыть $0.1 \cdot 0.1 = 0.01$ тонны. И так далее. Таким образом, общее количество добытой нефти должно быть равно

$$10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots \qquad (1)$$

Таким образом, при таком подходе к решению возникла необходимость сложить бесконечный набор чисел.

Замечание. Конечно, предложенный выше подход к решению примера имеет чисто иллюстративную цель (естественное появление бесконечной суммы), поскольку очевиден следующий более простой путь решения. Пусть x − необходимое количество нефти, которое нужно добыть, чтобы на продажу иметь 10 тонн. Тогда $0.1 \cdot x$ тонн из добытого пойдет на обеспечение самой добычи. Таким образом, продать можно будет только $x - 0.1 \cdot x$ тонн. Откуда получаем уравнение : $x - 0.1 \cdot x = 10$, откуда $x = \frac{10}{0.9} = 11.1111\ldots$ тонн.

Приступим все же к понятию бесконечных сумм. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (2)$$

называется *числовым рядом.* Числа $a_1, a_2, , a_3, \ldots$ называются *членами (или слагаемыми) ряда.* Выражение для a_n под знаком суммы в (2), позволяющее найти любое слагаемое по его порядковому номеру n, называется *общим членом* ряда. При подстановке в это выражение $n = 1, 2, 3, \ldots$ получаем значения, соответственно, *1*-го слагаемого, *2*-го, *3*-го ... . Например, ряд (1) можно с использованием знака суммы записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty} 10 \cdot 0.1^{n-1}$, а потому общий член этого ряда имеет вид: $a_n = 10 \cdot 0.1^{n-1}$. Действительно, подставляя в это выражение *n=1, 2, 3,* ... получаем значения, соответственно, *1*-го слагаемого, *2*-го, *3*-го и т.д. слагаемого ряда (1).

Пример 2. Рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ − так называемый *гармонический* ряд. Числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ... являются членами ряда, а выражение $a_n = \frac{1}{n}$ является общим членом ряда.

Как же определить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, т.е. сумму бесконечного набора слагаемых? Можно воспользоваться тем, что мы умеем складывать любой конечный набор чисел, и попытаемся исчерпать указанную бесконечность «постепенно». Сначала составим «сумму» из одного первого слагаемого: $S_1 = a_1$. Потом сложим первые 2 слагаемых: $S_2 = a_1 + a_2$. Потом первые 3 слагаемых: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, и так далее. И будем следить за поведением бесконечной последовательности чисел $S_1, S_2, S_3, \dots$, которые представляют собой суммы все большего числа слагаемых исходного ряда. Если эта последовательность сумм все увеличивающегося числа слагаемых ряда (2) приближается к определенному числу (т.е. имеет предел), то это число естественно назвать суммой всего ряда. Если же эта последовательность не приближается ни к какому числу (или идет к бесконечности), то естественно считать, что такой ряд суммы не имеет. Число $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называется *n-ой частичной суммой ряда* $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ называется *сходящимся,* если существует (конечный) предел его частичных сумм: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. В этом случае число S называется *суммой* ряда, что записывается как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если же такого предела не существует (или он равен ∞), то ряд называется *расходящимся* (такой ряд суммы не имеет).

Пример 3. Исследуем на сходимость следующий ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}. \qquad (3)$$

Решение. Вычислим несколько первых последовательных частичных сумм и попробуем найти закономерность:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}, \dots \qquad (4)$$

Легко, глядя на (4), угадать общую формулу для частичных сумм: $S_n = \frac{n}{n+1}$ (можно доказать эту формулу строго методом математической индукции). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \{\text{делим числитель и знаменатель на } n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Поэтому по приведенному выше определению данный ряд (3) сходится, а его сумма равна 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$.

Пример 4. Пусть число $a \neq 0$. Рассмотрим ряд

$$a - a + a - a + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a. \qquad (5)$$

Тогда $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, $S_4 = 0$, $S_5 = a$ и так далее. Понятно, что такая последовательность частичных сумм $a, 0, a, 0, a, 0, \ldots$ предела не имеет, поэтому ряд (5) расходится.

Пример 5. Геометрическая прогрессия. Напомним, что геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен предыдущему, умноженному на одно и то же для этой последовательности число q (которое называется *знаменателем* данной прогрессии). Если обозначить буквой a первый член прогрессии, то прогрессия (по определению) имеет вид: $a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$. Соответствующий ряд имеет вид $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ (или $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n$, если начать нумерацию слагаемых не с единицы, а с нуля). Отметим сразу, что если знаменатель прогрессии $q = 1$, то соответствующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a = a + a - a + \cdots$ (при $a \neq 0$)

расходится, поскольку его частичные суммы имеют вид $S_n = a + a + a + \cdots + a = n \cdot a$. а потому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot a) = a \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n = \pm\infty$ в зависимости от знака числа a. Для $q \neq 1$ из школьной программы известна общая формула для суммы первых n слагаемых геометрической прогрессии $S_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n = \frac{a \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$. Поэтому, переходя к пределу $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, легко получить:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} \cdot \lim_{n\to\infty}(1 - q^n) = \frac{a}{1 - q} \cdot \left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right).$$

Несложно выяснить, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ существует (и при этом равен нулю) только в том случае, если $|q| < 1$. Отсюда следует, что ряд, составленный из геометрической прогрессии, сходится (и имеет суммой число $S = \frac{a}{1 - q}$) только тогда, когда $|q| < 1$. В этом случае (когда $|q| < 1$) геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией* и для нее

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \frac{a}{1 - q}. \qquad (6)$$

Заметим, что ряд (1) тоже является бесконечно убывающей геометрической прогрессией с $a = 10$ и $q = 0.1$, а потому из (6) получаем для примера 1, что необходимо добыть $\frac{10}{1 - 0.1} = \frac{10}{0.9} = 11.111111\ldots$ тонн нефти, что выше было получено из простого алгебраического уравнения.

Рассмотрим *свойства сходящихся рядов*. Они напоминают свойства конечных сумм.

1. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то для любого числа c сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ и выполнено:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (7)$$

Фактически это означает возможность вынесения общего множителя c в сумме за скобку (точнее, за знак суммы).

2. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и выполняется:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \qquad (8)$$

Справедливость этих свойств легко доказывается из определения сходящихся рядов и соответствующих свойств пределов последовательностей (предел суммы-разности равен сумме-разности пределов, а постоянный множитель можно выносить за знак предела).

Пример 6. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{4}{n(n+1)} \right)$.

Решение. Используя свойство (8), а затем (7), последовательно получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{4}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вида (6) с первым членом $a = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$, а потому по формуле (6): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ была вычислена в примере 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$. Окончательно получаем: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{4}{n(n+1)} \right) = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -1$.

Далее мы сосредоточим свое внимание на вопросе о том, как по виду ряда

(2) определить, является ли он сходящимся или расходящимся.

Теорема (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а число S является его суммой. Тогда по определению сходящегося ряда предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$ равен S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{9}$$

где

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь вспомогательную последовательность $\{\overline{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$, построенную из последовательности $\{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$ добавлением числа 0 в качестве ее первого члена: $\{\overline{S}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_n, \ldots\} = \{0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$. Таким образом, $\overline{S}_1 = 0$, $\overline{S}_2 = S_1$, $\overline{S}_3 = S_2$ и вообще

$$\overline{S}_n = S_{n-1}, \quad n = 2,3,\ldots \tag{11}$$

Из (11) и (10) следует, что, начиная с $n-2$:

$$S_n - \overline{S}_n = S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1}) = a_n.$$

Ясно, что такое соотношение выполняется и для $n-1$: $S_1 - \overline{S}_1 = a_1 - 0 = a_1$. Таким образом, для всех $n = 1,2,\ldots$ выполнено

$$a_n = S_n - \overline{S}_n. \tag{12}$$

Поскольку последовательность чисел $\{\overline{S}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$, а из (9) последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$ имеет пределом число S, то это же число будет являться и пределом последовательности $\{\overline{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S. \qquad (13)$$

Тогда из (12), (9), (13) и свойств пределов вытекает:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - \overline{S}_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает важное

Следствие (признак расходимости ряда). Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ общего члена ряда при $n \to \infty$ либо не существует, либо существует, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Таким образом, при выяснении вопроса о сходимости некоторого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует (если это не сложно) проверить прежде всего выполнение необходимого условия сходимости : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Если оно не выполняется, то сразу можно сказать, что ряд расходится. А вот если выполняется, то без дополнительного исследования ничего о сходимости сказать нельзя и вопрос о сходимости-расходимости остается открытым. Стремление к нулю общего члена ряда является лишь необходимым условием сходимости. Например, ниже будет показано, что гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ оказывается расходящимся, однако нет сомнений в том, что для него $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Таким образом, для сходимости ряда нужно, чтобы слагаемые не просто

стремились к нулю, а делали бы это «достаточно быстро».

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100000\cdot n+1}$.

Решение. Общий член этого ряда $a_n=\frac{n}{100000n+1}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{100000n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{100000+\frac{1}{n}}=\frac{1}{100000}\neq 0$. Поэтому, по приведенному выше следствию, исследуемый ряд расходится.

Большинство признаков сходимости рядов относятся к так называемым положительным рядам (члены которых неотрицательны).

1.2. Положительные ряды

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=a_1+a_2+a_3+\ldots \qquad (1)$$

называется *положительным*, если все его члены неотрицательны: $a_1\geq 0, a_2\geq 0,\ldots$. Сначала изучим так называемые признаки сравнения, которые требуют для исследования сходимости данного ряда строить некоторый вспомогательный ряд. Ниже сформулировано соответствующее утверждение, смысл которого достаточно прозрачен.

Теорема (признак сравнения рядов). Пусть имеется два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad , \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,, \tag{3}$$

причем члены ряда (2) не превосходят соответствующих членов ряда (3):

$$a_n \le b_n \tag{4}$$

хотя бы начиная *с некоторого* номера *n*. Тогда

1) Если *сходится* ряд с большими членами (3), то *сходится* и ряд с меньшими членами (2).

2) Если *расходится* ряд с меньшими членами (2), то *расходится* и ряд с большими (3).

Рассмотрим примеры применения признака сравнения.

Пример 1. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{5}$$

Решение. Ряд (5) сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, сходимость которого была доказана в предыдущем параграфе. В нашем примере ряд (2) имеет вид исследуемого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ (а потому $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$), а ряд для сравнения (3) имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (а потому $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$). Установим выполнение условия (4) для любого номера n: $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)} \le \frac{1}{n\cdot(n+1)} = b_n$. Тогда по первому утверждению признака сравнения рядов исходный ряд (5) сходится.

Основные недостатки при практическом применении приведенного признака сравнения – это

- необходимость правильного подбора вспомогательного ряда, сходимость или расходимость которого известна;

- необходимость доказательства соответствующего неравенства между членами исследуемого и вспомогательного рядов.

Второго из этих недостатков лишен *признак сравнения в предельной форме*.

Теорема (признак сравнения в предельной форме). Пусть имеются два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (ряды (2) и (3)), для которых выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \text{ причем } c \neq 0 \text{ и } c \neq \infty. \qquad (6)$$

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно, т.е. если мы знаем о сходимости или расходимости одного из рядов (например, ряда (3)), то тот же вывод можно сделать и о втором ряде (ряде (2)).

Для применения признаков сравнения необходимо иметь так называемые *эталонные* ряды, про которые известно, сходятся они или расходятся, чтобы сравнивать с ними исследуемые ряды. Чаще всего в качестве таких рядов выступает геометрическая прогрессия, а также ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots, \qquad (7)$$

про которые известно, что они сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \leq 1$ (это будет доказано ниже в примере 8). В частности, гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (это ряд вида (7) при $\alpha = 1$). Самый важный этап применения признаков сравнения – это правильный выбор эталонных вспомогательных рядов для сравнения с исследуемым рядом. При этом надо обеспечить либо нужное неравенство между слагаемыми двух рядов, либо обеспечить выполнение условия (6). Например, если мы хотим в качестве ряда сравнения выбрать ряд вида (7), то надо правильно выбрать значение параметра

α в (7), чтобы обеспечить выполнение условия (6). При неправильном выборе значения этого параметра значение c этого предела в (6) как раз и оказывается равным либо нулю, либо бесконечности, при которых предельный признак сравнения не работает. Ниже приводится один из возможных приемов выбора правильного значения параметра α при использовании для сравнения эталонного ряда вида (7).

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 5n - 7}{n^3(n+1)} \ . \tag{8}$$

Решение. Для ряда (8) подберем для сравнения вспомогательный ряд вида (7) с таким значением параметра α, при которым окажется выполненным соотношение (6). В нашем примере ряд (2) есть исследуемый ряд (8), а ряд (3) есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, а потому общие члены этих рядов $a_n = \frac{3n^3 + 5n - 7}{n^3(n+1)}$, $b_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$. Для выбора подходящего значения параметра α оценим поведение a_n, оставляя в числителе и знаменателе только старшие степени n, которые и определяют скорости роста числителя и знаменателя с ростом n. Далее значок $\sim$ можно перевести как «при $n \to \infty$ ведет себя так же, как». Итак,

$$a_n = \frac{3n^3 + 5n - 7}{n^3(n+1)} = \frac{3n^3 + 5n - 7}{n^4 + n^3} \ \sim \ \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n} .$$

Поэтому если взять $b_n = \frac{1}{n}$, то окажется $a_n \ \sim \ b_n$, что обеспечит в дальнейшем выполнение условия (6). Поэтому проведем сравнение (в предельной форме) ряда (8) с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, является рядом вида (7) при $\alpha = 1$, а потому расходится. Для проверки выполнения условия (6) вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n^4+5n-7}{n^3(n+1)}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+5n^2-7n}{n^4+n^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$ {делим числитель и знаменатель на n^4}$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{7}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n}}=3$. Поскольку число 3 – это не 0 и не ∞, то по признаку сравнения в предельной форме ряд (8) ведет себя (в смысле сходимости-расходимости) так же, как и гармонический. Но гармонический ряд – расходится, следовательно, ряд (8) тоже расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}} \qquad (9)$$

Решение. Опять сравним (в предельной форме) ряд (9) с рядом вида (7) с подходящим значением параметра α. Для его выбора опять оценим поведение общего члена $a_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}$, оставляя в числителе и знаменателе только старшие степени n :

$$a_n=\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}\sim\frac{n}{\sqrt{n^5}}=\frac{n}{n^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{n^3}}=b_n.$$

Поэтому сравним (в предельной форме) ряд (9) с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Этот ряд сходится, так как это ряд вида (7) при $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$. В нашем примере ряд (2) есть ряд (9) (а потому $a_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}$), а ряд (3) есть сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ (а потому $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$) Вычислим предел (6):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^5+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^5}{n^5+n+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

{делим числитель и знаменатель на n^5 } $=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}}}=1$. Поскольку число 1 – это не 0 и не ∞, то по признаку сравнения в предельной форме ряд (9) ведет себя так же, как и сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Поэтому ряд (9) тоже сходится.

Перейдем к другой группе признаков сходимости-расходимости положительных рядов. Их преимущество состоит в том, что для их применения не надо строить вспомогательные ряды, как это необходимо при применении признаков сравнения рядов.

Теорема (признак Даламбера). Пусть для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l. \qquad (10)$$

Тогда при $l>1$ ряд расходится, а при $l<1$ сходится.

В выражении (10): a_n – общий член исследуемого ряда, а выражение для a_{n+1} получается из выражения для a_n заменой в нем n на $(n+1)$. Доказательство признака Даламбера построено на сравнении ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ со специально построенной сходящейся (в случае $l<1$) или расходящейся (в случае $l>1$) геометрической прогрессией. Оно достаточно формализовано, а потому мы его опускаем.

Большим недостатком признака Даламбера является то, что он не отвечает на вопрос о сходимости-расходимости в случае $l = 1$ (что встречается достаточно часто) и тогда требуется дополнительное исследование. Например, такая ситуация возникает при исследовании гармонического ряда, да и вообще рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots$, сходимость которых в зависимости от значения параметра α обсуждалась выше.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{n \cdot 3^n} . \qquad (11)$$

Решение. Общий член ряда (11) имеет вид $a_n = \frac{2^{2n+1}}{n \cdot 3^n}$. Тогда выражение для a_{n+1} имеет вид: $a_{n+1} = \frac{2^{2(n+1)+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{2^{2n+3}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$. Тогда их отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ равно :

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{2n+3}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} : \frac{2^{2n+1}}{n \cdot 3^n} = \frac{2^{2n+3} \cdot n \cdot 3^n}{2^{2n+1} \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1}} =$ {при делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются} $= \frac{2^2 \cdot n}{(n+1) \cdot 3} = \frac{4n}{3n+3}$. Вычисляем предел (10):

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4n}{3n+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{3 + \frac{3}{n}} = \frac{4}{3}$. Итак, в (10) $l = \frac{4}{3} > 1$, а потому по признаку Даламбера ряд (11) расходится.

Для дальнейших примеров напомним понятие *факториала* числа. Пусть n – натуральное число (т.е. целое положительное). Тогда *факториалом* этого числа (обозначается $n!$) называется произведение всех целых чисел от 1 до этого числа n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad .$$

Например, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Факториалом числа ноль

называется число 1: $0!=1$.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(n+1)!} \quad . \tag{12}$$

Решение. Общий член ряда (12) имеет вид $a_n=\frac{2^{2n}}{(n+1)!}$. Тогда выражение для a_{n+1} имеет вид: $a_{n+1}=\frac{2^{2(n+1)}}{(n+2)!}=\frac{2^{2n+2}}{(n+2)!}$. Тогда их отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ равно :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{2n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{2^{2n}}{(n+1)!}=\frac{2^{2n+2}\cdot(n+1)!}{2^{2n}\cdot(n+2)!}=\frac{2^{2n+2}}{2^{2n}}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+2)!}=4\cdot\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=$$

=\{сокращаем в числителе и знаменателе $1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n+1)$\}$=\frac{4}{n+2}$. Вычисляем предел (10): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n+2}=0$. Итак, в (10) $l=0<1$, а потому по признаку Даламбера ряд (12) сходится.

Признак Даламбера удобно использовать для выяснения сходимости таких рядов, общие члены которых содержат степени (с постоянным основанием) и факториалы. В этом случае в выражении $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ многое сокращается (как это было видно на примерах), а само выражение оказывается достаточно простым для последующего вычисления предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. В некоторых других случаях удобно использовать следующий ниже признак.

Теорема (радикальный признак Коши). Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l. \tag{13}$$

Тогда при $l>1$ ряд расходится, а при $l<1$ сходится.

Аналогичным недостатком этого признака является то, что он не отвечает на вопрос о сходимости в случае $l=1$ и тогда требуется дополнительное исследование

Пример 6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n. \qquad (14)$$

Решение. Общий член ряда (14) имеет вид $a_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Вычислим предел (13):

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$. Итак, для предела (13) получилось $l=\frac{1}{2}<1$, а потому по радикальному признаку Коши ряд (14) сходится.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}. \qquad (15)$$

Решение. Общий член ряда (15) имеет вид $a_n=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$. Вычислим предел (13):

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}}$ – {извлекаем корень из числителя и знаменателя}=

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \{$полученный предел представляет собой как раз второй замечательный предел, определяющий знаменитое число $e = 2.718281828...\} = \dfrac{1}{2}\cdot e = \dfrac{e}{2}$ Итак, для предела (13) получилось $l = \dfrac{e}{2} > 1$, а потому по радикальному признаку Коши ряд (15) расходится.

Признак Коши удобно использовать для выяснения сходимости таких рядов, общий член которых a_n является n-ой степенью некоторого несложного выражения. В этом случае в выражении $\sqrt[n]{a_n}$ корень и степень «сокращаются», а полученное выражение оказывается достаточно простым для последующего вычисления предела (13). В некоторых более сложных случаях удобно использовать следующий ниже признак.

Теорема (интегральный признак Коши). Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ (индекс суммирования n может начинаться с любого целого числа m) существует такая положительная непрерывная и убывающая на $[m,+\infty)$ функция $f(x)$, что $a_n = f(n)$. Тогда для сходимости этого ряда необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_m^{+\infty} f(x)\,dx$.

Для применения этого признака функция $f(x)$, фигурирующая в теореме, может быть построена следующим образом: в выражении для общего члена ряда a_n букву n заменяют на x.

Только этот признак из приведенных выше сможет ответить на вопрос о сходимости гармонического ряда и вообще рядов вида (7), что видно из следующего примера.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots \qquad (16)$$

в зависимости от величины параметра α.

Решение. Если $\alpha<0$, то общий член ряда $a_n=\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ не стремится к нулю (он будет даже стремиться к бесконечности), а потому по сформулированному в предыдущем параграфе признаку расходимости ряда этот ряд расходится. Рассмотрим теперь числа $\alpha\geq 0$. Общий член ряда (16) имеет вид $a_n=\dfrac{1}{n^{\alpha}}$. Заменяя в этом выражении n на x, получим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, для которой, очевидно, выполнено: $f(n)=a_n$. Проверим для нее выполнение условий интегрального признака Коши: функция $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ должна быть положительной, непрерывной и убывающей на $[1,+\infty)$. Очевидно, все эти свойства выполняются в рассматриваемом случае $\alpha\geq 0$. Поэтому по интегральному признаку Коши сходимость ряда (16) совпадает со сходимостью несобственного интеграла $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$. Как известно, этот интеграл сходится для всех $\alpha>1$ и расходится для $\alpha\leq 1$. Таким образом, как это и утверждалось выше, ряд вида (16) сходится для всех $\alpha>1$ и расходится для $\alpha\leq 1$.

Пример 9. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}\quad . \qquad (17)$$

Решение. Суммирование начато с $n=2$, поскольку при $n=1$ общий член ряда $a_n=\dfrac{1}{n\cdot\ln n}$ не определён (деление на $\ln 1=0$). Общий член ряда (17) имеет

вид $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$. Заменяя в этом выражении n на x, получим функцию $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$, для которой, очевидно, выполнено $f(n) = a_n$. Далее, очевидно, что эта функция положительна, непрерывна и является убывающей на $[2,+\infty)$ (последнее следует из очевидного факта, что функция $x \cdot \ln x$ положительная и возрастающая). Поэтому по интегральному признаку Коши сходимость ряда (17) совпадает со сходимостью несобственного интеграла $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$. Исследуем этот интеграл на сходимость. Сходимость этого несобственного интеграла (по определению сходимости) зависит от того, будет ли существовать конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad . \tag{18}$$

Вычислим значение интеграла под знаком предела методом замены переменной:

$$\int_2^b \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \\ \textit{нижний предел по переменной } t = \ln 2 \\ \textit{верхний предел по переменной } t = \ln b \end{array} \right] = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2).$$

Таким образом, предел в (18): $\lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \lim_{b \to +\infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = +\infty$. Поэтому по интегральному признаку Коши ряд (17) расходится.

Замечание. Легко теперь установить (по тому же интегральному признаку Коши), что «чуть исправленный» ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ уже сходится.

1.3. Знакочередующиеся ряды

Мы рассматривали признаки сходимости положительных рядов, все члены которых неотрицательны. Теперь мы будем допускать и отрицательные слагаемые, но для начала будем считать, что знаки слагаемых строго чередуются. *Знакочередующимся рядом* называется ряд, знаки слагаемых которого строго чередуются, начиная с положительного или отрицательного слагаемого. Поскольку число (-1) в четной степени равно 1, а в нечетной (-1), то такие ряды можно записать в форме

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad (1)$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n , \qquad (2)$$

причем в (1) и (2) уже считаем $a_n \geq 0$, так как знак слагаемых мы учли множителем $(-1)^{n+1}$ или $(-1)^n$. Эти множители попеременно принимают значения 1 и (−1), обеспечивая чередование знаков слагаемых рядов (1) и (2). Для обоснования сходимости таких рядов чаще всего используется так называемый *признак Лейбница*.

Теорема (признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов). Пусть для знакочередующегося ряда (1) или (2) выполнено:

1. Последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает, т.е. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда исходный знакочередующийся ряд сходится.

Это только *достаточный* признак сходимости знакочередующихся рядов. Поэтому если для какого-либо знакочередующегося ряда условия признака не

выполнены, это не означает, что этот ряд обязательно расходится. Однако если условия выполнены, то ряд обязательно сходится. Впрочем, понятно, что второе-то условие ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) является необходимым для сходимости рядов вида (1) или (2), иначе общие члены этих рядов $(-1)^{n+1}a_n$ и $(-1)^n a_n$ не стремились бы к 0 тоже, а потому ряды бы оказались расходящимися (см. признак расходимости ряда в параграфе «Числовые ряды – основные понятия»).

Таким образом, справедливо следующее

*Утверждение (*достаточное условие расходимости знакочередующегося ряда). Если для знакочередующегося ряда (1) или (2)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{или не существует, или} \quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \tag{3}$$

то он является расходящимся.

Пример 1. Попробуем через один поменять знаки слагаемых у гармонического ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (который, как выше было выяснено, расходится). Получим следующий знакочередующийся ряд: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Это знакочередующийся ряд вида (1), для которого $a_n=\frac{1}{n}$ и оба условия признака Лейбница, очевидно, выполняются. Действительно, очевидно, что последовательность $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ убывает (с ростом номера n) и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Поэтому этот ряд (в отличие от гармонического) сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^2 = -1+4-9+16-25+\cdots \quad . \tag{4}$$

Решение. Это знакочередующийся ряд вида (2), у которого $a_n = n^2$. Очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, а потому выполнено условие (3) расходимости ряда. Итак, ряд (4) расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n} = -1 + \frac{1}{2 - \ln 2} - \frac{1}{3 - \ln 3} + \cdots \quad . \tag{5}$$

Решение. Покажем, что ряд (5) является знакочередующимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ с

$$a_n = \frac{1}{n - \ln n} \tag{6}$$

и к нему применим признак Лейбница. Для того, чтобы доказать, что ряд (5) является знакочередующимся, нужно показать, что в (6)

$$a_n \geq 0, \quad n = 1,2,\ldots \quad . \tag{7}$$

Затем, чтобы показать, что к ряду (5) применим признак Лейбница, нужно доказать, что

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \tag{9}$$

Для доказательства свойств (7), (8) и (9) рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = x - \ln x \ , \ x \in [1,+\infty) \ . \tag{10}$$

Функция $g(x)$ в (10) это знаменатель в (6), где n заменено на x . Ясно, что

производная $g'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}$, а потому $g'(x)\geq 0$ для всех $x\in[1,+\infty)$, что влечет возрастание функции $g(x)$ на $[1,+\infty)$. Но поскольку $g(1)=1-\ln 1=1-0=1>0$, то и для всех $x\geq 1$ выполнено $g(x)>0$. Отсюда сразу следует справедливость (7) (так как в (6) числитель равен 1, а знаменатель больше нуля) и (8) (так как в (6) числитель не меняется, а знаменатель растет). Покажем выполнение свойства (9):

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}} \quad . \qquad (11)$$

Ясно, что в числителе $\frac{1}{n}\to 0$. Найдем предел выражения $\frac{\ln n}{n}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ {применяем правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределах} $=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Итак, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, а потому из (11) следует $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{0}{1-0}=0$, т.е. выполнение свойства (9). Таким образом, ряд (5) действительно является знакочередующимся рядом, к которому применим признак Лейбница, а потому ряд (5) сходится.

1.4. Знакопеременные ряды

Переходим теперь к изучению рядов с произвольным распределением знаков его слагаемых. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots \qquad (1)$$

с произвольными по знаку слагаемыми $a_1,a_2,a_3,\ldots$. Опять нужно исследовать

его на сходимость. Поскольку большинство пройденных нами признаков сходимости-расходимости касались положительных рядов, то попробуем составить по данному ряду вспомогательный положительный ряд, для которого сможем применить эти признаки. Вспомогательный положительный ряд для ряда (1) построим так: положительные слагаемые оставим на месте, а у отрицательный поменяем знак. То же самое делает взятие модуля от числа (положительное число оставляет на месте, а у отрицательного поменяет знак), поэтому вспомогательный положительный ряд есть ряд, составленный из модулей слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots \quad . \tag{2}$$

Допустим, что имеющимися признаками для положительных рядов мы узнали, сходится ряд (2) или расходится. Можно ли теперь ответить на вопрос о сходимости или расходимости исходного ряда (1)? Иногда да, а иногда нет. Поскольку справедлива следующая

Теорема. Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

А вот если ряд из модулей (2) расходится, то о сходимости или расходимости ряда (1) ничего сказать нельзя. Может быть всякое.

В связи с этим для знакопеременного ряда (1) могут возникнуть только 3 взаимоисключающие ситуации.

1. Ряд (2) сходится. В этом случае (по теореме) сходится и ряд (1), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся* рядом. Этим подчеркивается, что сходится не только этот ряд, но и ряд, составленный из абсолютных величин (т.е. модулей) слагаемых ряда.

2. Ряд (2) расходится, но, тем не менее, сам ряд (1) сходится. В этом случае ряд (1) называется *условно сходящимся рядом.* Этим подчеркивается, что

сходится только сам ряд, но ряд, составленный из абсолютных величин слагаемых ряда, расходится.

3. Исходный ряд (1) расходится. Конечно, расходится при этом и ряд из модулей (2) (т.к. если бы он сходился, то по теореме сходился бы и исходный ряд).

Поэтому, когда ставится вопрос об исследовании сходимости произвольного знакопеременного ряда, то ответом будет являться одно из: а) ряд сходится абсолютно; б) ряд сходится условно; в) ряд расходится.

Пример 1. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится *условно.* Это следует из того, что сам ряд сходится (это было доказано в примере 1 предыдущего параграфа), а составленный из модулей ряд суть гармонический $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Пример 2. Ряд $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно. Это следует из того, что сходится составленный из модулей ряд $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

поскольку это ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots$ при $\alpha=2>1$ (см. пример 8 параграфа «Положительные ряды»).

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot n=-1-2+3+4-5-6+7+8-\ldots$ расходится, так как общий член ряда, очевидно, не стремиться к 0.

Для исследования ряда на абсолютную сходимость может помочь следующая

Теорема (обобщенный признак Даламбера). Дан произвольный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=l$. Тогда при $l < 1$ ряд *абсолютно* сходится, а при $l > 1$ ряд расходится.

Этот признак может быть использован в дальнейшем и для исследования так называемых степенных рядов.

2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.1. Функциональные ряды

Складывать можно не только бесконечно много чисел (т.е. составлять числовые ряды), но и бесконечно много функций. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, … – бесконечный набор некоторых функций. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots \qquad (1)$$

называется *функциональным рядом*. Если в каждую из этих функций подставить одно и то же конкретное (допустимое) значение x и вычислить ее значение, затем подставить в функциональный ряд (1), то он перейдет в числовой ряд. При подстановке некоторых числовых значений x получающийся числовой ряд может оказаться сходящимся, а некоторых – расходящимся.

Областью сходимости функционального ряда (1) называется множество всех чисел x, при подстановке которых в этот ряд получается сходящийся числовой ряд.

Пусть D – область сходимости ряда (1). Тогда для всех x из D ряд (1) сходится, а потому имеет некоторое число S в качестве своей суммы. При разных x сумма ряда S может быть различной, а потому сумма ряда является некоторой *функцией* от x: $S = S(x)$. Тогда можно записать, что для всех x из D:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots = S(x). \qquad (2)$$

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots \ . \qquad (3)$$

Решение. Ряд (3) это функциональный ряд вида (1) при $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$. Нужно выяснить, при подстановке каких числовых значений x в (3) получается сходящийся числовой ряд. Ранее (в параграфе «Положительные ряды», пример 8) мы уже рассматривали подобные числовые ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$ и выяснили, что они сходятся только при условии $\alpha > 1$. Отсюда следует, что и ряд (3) сходится только при $x > 1$. Поэтому областью сходимости D данного ряда является интервал $(1, +\infty)$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots \qquad (4)$$

и выражение для суммы этого ряда $S = S(x)$.

Решение. При подстановке любого числа x в (4) получается, как легко видеть, геометрическая прогрессия с первым членом 1 и со знаменателем прогрессии $q = x$. В параграфе 1.1 мы уже рассматривали условия сходимости

геометрической прогрессии и получили, что она сходится только при условии $|q|<1$. Поэтому *областью сходимости ряда* (4) *является интервал* $(-1, 1)$, а для всех x из этого интервала сумма ряда (по формуле суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии – формула (6) в параграфе 1.1) равна : $S(x)=\frac{1}{1-x}$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{для всех} \quad x \in (-1, 1). \qquad (5)$$

2.2. Степенные ряды – основные понятия

Более подробно рассмотрим специальные функциональные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$, для которых слагаемые $u_n(x)$ имеют вид: $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, где x_0 – некоторое число, а $\{a_n\}$ – некоторая заданная последовательность чисел. Итак, *степенным рядом* с центром в точке x_0 называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 \ldots \quad . \qquad (1)$$

Числа $a_0, a_1, a_2 \ldots$ называются *коэффициентами* степенного ряда.

Пример 1. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x+5)^n = 1 + \frac{1}{2}(x+5) + \frac{1}{3}(x+5)^2 + \ldots .$$

является степенным рядом с центром в точке $x_0 = -5$, а его коэффициенты $a_n = \frac{1}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Проще всего выглядит степенной ряд (1) с центром в нуле, т.е. когда $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots \quad . \qquad (2)$$

Этот ряд можно рассматривать как многочлен бесконечной степени. Ряд (1) с переменной x всегда можно свести к ряду (2), сделав в нем замену переменной $y = x - x_0$. Тогда получится ряд вида (2) с переменной *y*.

Степенной ряд (1) всегда имеет непустую область сходимости, так как *число* x_0 (для ряда (2) это число 0) *всегда входит в эту область*, поскольку при $x = x_0$ степенной ряд (1) обрывается на первом слагаемом (остальные слагаемые зануляются), а потому сходится и сумма его равна a_0 .

Область сходимости степенного ряда (1) имеет специфическую структуру – это либо только одна точка x_0, либо некоторый интервал с центром в этой точке (концы интервала могут входить или не входить в эту область), либо вся числовая прямая (которая, при желании, может тоже рассматриваться как *бесконечный* интервал с центром в точке x_0). А именно, справедлива следующая

Теорема (об области сходимости степенного ряда). Областью сходимости степенного ряда (1) является либо одно число x_0, либо вся числовая прямая, либо интервал вида $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ и, возможно, одна или обе концевых точки этого интервала.

Интервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$, фигурирующий в теореме, называется *интервалом сходимости* степенного ряда (1), а число R называется *радиусом сходимости* этого ряда. Для всех значений x внутри интервала сходимости степенной ряд (1) сходится *абсолютно*. Для ряда (2) (случай $x_0 = 0$) интервал

сходимости имеет вид $(-R,\ R)$.

Радиус сходимости может быть вычислен по одной из следующих формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \tag{3}$$

или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{4}$$

если, конечно, соответствующие пределы существуют. Доказательство теоремы, а также формула (3) для радиуса сходимости могут быть получены несложными рассуждениями из обобщенного признака Даламбера, приведенного в конце параграфа 1.4, но здесь мы на этом останавливаться не будем.

Если по (3) или (4) получается $R = 0$, то область сходимости состоит только из одной точки x_0. Если же $R = \infty$, то областью сходимости является вся числовая прямая.

Для нахождения области сходимости произвольного степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ применяется *следующая схема.*

1) Находим интервал сходимости ряда $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. Для этого либо вычисляется радиус сходимости R по приведенным выше формулам (3) или (4), либо напрямую применяется обобщенный признак Даламбера, приведенный в конце параграфа 1.4. Этот признак удобнее применять тогда, когда в степенном ряде бесконечно много коэффициентов $\{a_n\}$ обращаются в 0, а потому вычисление радиуса сходимости по формуле (3) или (4) невозможно. Это происходит, например тогда, когда ряд содержит только четные (либо только

нечетные) степени $(x-x_0)$, это означает, что в (1) все коэффициенты a_n при нечетных (соответственно, четных) показателях степени $(x-x_0)^n$ обращаются в ноль.

2) Проверяем принадлежность концевых точек интервала сходимости (x_0-R) и (x_0+R) области сходимости. Для этого подставляем каждое из этих чисел в исходный степенной ряд (вместо x) и исследуем на сходимость получившийся числовой ряд. Если ряд оказался сходящимся, то проверяемая граница интервала сходимости принадлежит области сходимости, а если нет, то нет.

3) Выписываем область сходимости как интервал сходимости с возможным включением его концевых точек (в зависимости от результатов пункта 2).

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x+5)^n}{n\cdot 4^n}. \qquad (5)$$

Решение. Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x+5)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}\cdot(x+5)^n$, то ряд (5) есть степенной ряд вида (1) с центром в точке $x_0=-5$ и коэффициентами $a_n=\frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}$.

Согласно приведенной выше схеме нахождения области сходимости степенного ряда, сначала вычислим радиус сходимости по формуле (3). В данном примере

$$|a_n|=\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}\right|=\frac{|(-1)^n|}{|n\cdot 4^n|}=\frac{1}{n\cdot 4^n}, \qquad (6)$$

поскольку $(-1)^n$ при любом натуральном числе n принимает значение либо 1, либо (-1), а выражение $n\cdot 4^n$ всегда положительно. Подставляя в (6) выражение $(n+1)$ вместо n, получим выражение для $|a_{n+1}|$: $|a_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}$. Тогда по

формуле (3) радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\cdot 4^n}:\frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 4^{n+1}}{n\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 4}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+4}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{n}\right)=4.$$

Таким образом, $R=4$. Поэтому интервалом сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$ будет в данном случае интервал $(-9,-1)$. Область сходимости состоит из точек этого интервала и, возможно, одной или обеих граничных точек этого интервала (-1) и (-9). Проверим эти точки на принадлежность области сходимости ряда (5). Для этого (по определению области сходимости ряда) будем подставлять эти числа вместо x в (5) и выяснять, будет ли получающийся при этом числовой ряд сходящимся или расходящимся.

Рассмотрим сначала $x=-1$. Подставляя $x=-1$ в ряд (5) получим числовой ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$. Этот знакочередующийся ряд уже был рассмотрен в параграфе 1.3 (пример 1) и по признаку Лейбница было доказано, что он сходится. Поэтому число $x=-1$ будет включаться в область сходимости ряда (5).

Рассмотрим другую граничную точку интервала сходимости $x=-9$. Подставляя $x=-9$ в ряд (5) получим числовой ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-4)^n}{n\cdot 4^n}$. Упростим выражение для общего члена полученного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-4)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-1\cdot 4)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-1)^n\cdot 4^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\ .$$

При этом выводе мы воспользовались тем, что (-1) в четной степени $2n$ всегда дает 1. Полученный *гармонический* ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$, как

неоднократно было заявлено, расходится. Поэтому число $x = -9$ не будет включаться в область сходимости ряда (5). Таким образом, областью сходимости ряда (5) является полуинтервал $(-9, 1]$.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n . \qquad (7)$$

Решение. Ряд (7) есть степенной ряд вида (1) с центром в точке $x_0 = 0$ (т.е. ряд вида (2)) и коэффициентами $a_n = n!$. Согласно приведенной выше схеме нахождения области сходимости степенного ряда, сначала вычислим радиус сходимости по формуле (3). В данном примере $|a_n| = |n!| = n!$, а потому $|a_{n+1}| = (n+1)!$. Тогда по формуле (3) радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Таким образом, радиус сходимости $R = 0$. В этом случае (как выше сказано) область сходимости состоит из единственной точки $x_0 = 0$.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} . \qquad (8)$$

Решение. Ряд (8) есть степенной ряд вида (1) с центром в точке $x_0 = 0$ (т.е. опять ряд вида (2)) и коэффициентами $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Вычислим радиус сходимости по формуле (3). В данном примере $|a_n| = \left|\dfrac{1}{n!}\right| = \dfrac{1}{n!}$, а потому $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Тогда по формуле (3) радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$. Таким образом, радиус сходимости $R = \infty$. В этом случае (как выше сказано) областью

сходимости является вся числовая прямая $(-\infty,+\infty)$.

2.3. Свойства суммы степенного ряда

Рассмотрим теперь свойства функции $S(x)$, являющейся суммой степенного ряда (1) в предыдущем параграфе и определенной на его области сходимости:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3\ldots \qquad (1)$$

Теорема (о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда). Сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является непрерывной функцией на интервале сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$. Внутри этого интервала степенной ряд можно почленно дифференцировать и брать неопределенный интеграл. Получающиеся при этом степенные ряды *имеют тот же радиус сходимости*, что и исходный степенной ряд.

Утверждение о возможности почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда означают справедливость следующих формул:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(x-x_0)^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1}=$$

$$=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots \qquad (2)$$

$$\int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int(x-x_0)^n dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}=$$

$$=C+a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\frac{a_2}{3}(x-x_0)^3+\frac{a_3}{4}(x-x_0)^4+\ldots \qquad (3)$$

Произвольная постоянная C возникла, как и должно быть, при

вычислении неопределенного интеграла, только здесь ее удобно записать в начале, а не в конце.

По утверждению теоремы сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является дифференцируемой (т.е. имеющей производную) функцией на интервале сходимости $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. После вычисления ее производной по формуле (2) эта производная $S'(x)$ опять представляется суммой степенного ряда $S'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots$ с тем же интервалом сходимости $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. А потому от функции $S'(x)$ опять можно вычислять производную (будет получаться уже вторая производная $S''(x)$), которая опять будет представляться степенным рядом на интервале $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. И так далее. Отсюда вытекает важное следствие.

Следствие. Сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является бесконечно дифференцируемой (т.е. имеет производные любого порядка) функцией на интервале сходимости этого ряда $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

С помощью приведенной выше теоремы можно находить области сходимости и (что наиболее важно) формулы для сумм некоторых степенных (или числовых) рядов. Для этого с помощью интегрирования или дифференцирования исследуемых рядов получают степенной ряд с известной суммой (например, геометрическую прогрессию), т.е. получают формульное выражение для производной или интеграла от искомой суммы $S(x)$, а затем по этому выражению восстанавливают и саму функцию $S(x)$.

Пример 1. Найти интервал сходимости и сумму степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \quad . \tag{4}$$

Решение. Обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда, пусть R – его радиус

сходимости. Тогда выполнено: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ для всех точек из интервала сходимости $x \in (R, R)$. Тогда по формуле (3):

$$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int x^n dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} = C + \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}. \qquad (5)$$

Степенной ряд в правой части (5) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} = x + x^2 + x^3 + \cdots$ при каждом числе x представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом x и знаменателем прогрессии $q = x$. В параграфе 1.1 мы уже рассматривали условия сходимости геометрической прогрессии и получили, что она сходится только при условии $|q| < 1$. Поэтому областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$ является интервал $(-1, 1)$, а для всех x из этого интервала сумма ряда (по формуле суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии – формула (6) в параграфе 1.1) равна $\frac{x}{1-x}$. Таким образом, по приведенной выше теореме о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда интервал сходимости исходного ряда (4) тоже $(-1, 1)$. Подставляя $\frac{x}{1-x}$ в правую часть (5), получаем $\int S(x)dx = \frac{x}{1-x} + C$. Отсюда следует, что функция $\frac{x}{1-x}$ является одной из первообразных для $S(x)$, а потому $S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{(x)'\cdot(1-x)-(1-x)'\cdot x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Итак, мы нашли выражение для суммы степенного ряда (4):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad x \in (-1,1). \qquad (6)$$

Пример 2. Найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0.3^{n+1}}{n+1}=0.3+\frac{0.3^2}{2}+\frac{0.3^3}{3}+\cdots \quad . \tag{7}$$

Решение. Рассмотрим вспомогательный степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, сумму которого обозначим $S(x)$:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots \quad . \tag{8}$$

Найдем формулу для $S(x)$, а тогда $S(0.3)$ даст нам искомую сумму ряда (8). Вычислим производную функции $S(x)$ в (8), используя формулу (2) почленного дифференцирования ряда:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots . \tag{9}$$

Для степенного ряда в правой части (9) мы уже находили сумму и область сходимости (см. параграф 2.1, формула (5)): $1+x+x^2+x^3\ldots = \frac{1}{1-x}$ для всех $x\in(-1,1)$. Поэтому из (9) получаем, что $S'(x)=\frac{1}{1-x}$ для $x\in(-1,1)$. Таким образом, функция $S(x)$ оказывается одной из первообразных функции $\frac{1}{1-x}$. Найдем множество всех первообразных этой функции (т.е. неопределенный интеграл от нее), а затем среди них найдем и $S(x)$: $S(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=-\int\frac{d(1-x)}{1-x}=-\ln|1-x|+C$. Таким образом, получили, что для $x\in(-1,1)$:

$$S(x)=-\ln|1-x|+C \tag{10}$$

при некотором значении произвольной постоянной C. Найдем это значение C. Из (8) следует, что значение функции $S(x)$ при $x=0$ будет

$S(0) = 0 - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} - \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$. Таким образом, $S(0) = 0$, а потому из (10): $0 = -\ln|1 - 0| + C$, откуда $C = 0$. Поэтому из (10) получаем, что $S(x) = -\ln|1 - x|$ для всех $x \in (-1, 1)$. А потому $S(0.3) = -\ln|1 - 0.3| = -\ln 0.7$. Итак, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0.3^{n+1}}{n+1} = 0.3 + \frac{0.3^2}{2} + \frac{0.3^3}{3} - \cdots = -\ln 0.7 \approx 0.35$.

2.4. Разложение функций в степенные ряды

Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, мы в параграфе 2.1 (формула (5)) получили, что сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots = \frac{1}{1-x}$ для всех $x \in (-1, 1)$. Если теперь поменять местами левую и правую часть этого равенства, то получится, что выполнено равенство

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots \text{ для всех } x \in (-1, 1). \qquad (1)$$

Это означает, что функция $f(x) = \frac{1}{1-x}$ представлена на интервале $(-1, 1)$ в виде сходящегося степенного ряда. А для каких еще функций возможно такое представление? И как его найти?

Введем следующее определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ *разлагается в степенной ряд* с центром в x_0 на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, если для всех x из этого интервала справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 \ldots \quad . \qquad (2)$$

Теперь заданные выше вопросы можно переформулировать следующим образом. Какие функции разлагаются в степенные ряды с центром в некоторой

точке x_0 и (если разложение возможно) как найти коэффициенты a_0, a_1, a_2, … этого разложения?

В предыдущем параграфе было сформулировано следствие о том, что сумма степенного ряда является бесконечно дифференцируемой функцией на интервале сходимости ряда. Поэтому разлагаться в степенной ряд могут только функции, имеющие производные любого порядка (да и то не все!). Пусть некоторая функция $f(x)$ имеет производные *любого* порядка в некоторой окрестности точки x_0. Найдем значения самой функции и всех ее производных (по предположению они существуют!) в этой точке : $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$, ... Теперь, используя эти числа, составим следующий степенной ряд:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ . \qquad (3)$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ с центром в точке x_0. Таким образом, каждой бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции можно поставить в соответствие некоторый степенной ряд − ее ряд Тейлора. Оказывается, что уж *если функция разлагается в окрестности некоторой точки в какой-либо степенной ряд, то этот ряд может быть только рядом Тейлора этой функции*. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема (о единственности разложения в степенной ряд). Пусть функция $f(x)$ разлагается в окрестности точки x_0 в степенной ряд:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3\ldots \ . \qquad (4)$$

Тогда она бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки и

$$a_0 = f(x_0),\ \ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ \dots\ ,\ \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ \dots\ . \qquad (5)$$

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость функции $f(x)$, являющейся суммой степенного ряда, уже отмечалась в предыдущем параграфе. Подставив в правую и левую части равенства (4) $x = x_0$, получим первую из формул в (5). Дифференцируя почленно степенной ряд в (4) (а это можно делать с суммой степенного ряда!), получим $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots$. Снова подставляя в это равенство $x = x_0$, получим вторую из формул в (5). Снова дифференцируя это равенство и подставляя $x = x_0$, получим третью формулу в (5). И так далее, что завершает доказательство теоремы.

Формулы (5) и дают ответ на вопрос о способе нахождения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$ разложения функции $f(x)$ в степенной ряд (коли такое разложение вообще возможно). Теперь ответим на вопрос о том, для каких функций гарантирована возможность такого разложения.

Теорема (о разложении). Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некотором интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ и ее производные всех порядков ограничены на этом интервале одним и тем же числом (т.е. в формальной записи $\exists M\ \forall n\ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : |f^{(n)}(x)| < M$), то она разлагается в свой ряд Тейлора на этом интервале, т.е. для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ имеет место представление:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \qquad (6)$$

Особенно просто ряд Тейлора (3) для функции $f(x)$ выглядит при $x_0 = 0$:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

В этом случае ряд Тейлора называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$. Учитывая (6), находим вид разложения функции в ряд Маклорена ($x_0=0$):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (7)$$

Согласно приведенной выше теореме о разложении, представление (7) функции $f(x)$ в виде ряда Маклорена имеет место на любом интервале вида $(-R,R)$, если только функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $(-R,R)$ и ее производные всех порядков ограничены на этом интервале одним и тем же числом .

Разложение функций в ряд Маклорена применяется значительно чаще, поскольку представляет собой удобное для приложений разложение функции по степеням x (т.е. представляет собой многочлен «бесконечной степени»). Найдем разложения в ряд Маклорена некоторых основных элементарных функций.

2.5. Разложения элементарных функций в ряды Маклорена

В этом параграфе мы, используя вид разложения функции в ряд Маклорена

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (1)$$

найдем разложение по степеням x некоторых элементарных функций.

1. Пусть $f(x)=e^x$. Тогда, очевидно, $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\cdots=e^x$. Поэтому на *любом* конкретном интервале $(-R,R)$ эти производные ограничены одним и тем же числом (например, числом $M=e^R$) и

$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=\cdots=e^0=1$. Поэтому условия теоремы о разложении выполняются на *любом* интервале $(-R,R)$, а потому, согласно (1), для всех $x\in(-\infty,+\infty)$:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad . \tag{2}$$

2. Рассмотрим $f(x)=\sin x$. Тогда $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$, $f''(x)=(\cos x)'=-\sin x$, $f'''(x)=(-\sin x)'=-\cos x$, $f''''(x)=(-\cos x)'=-\sin x$. Поскольку опять получилась функция $f(x)=\sin x$, то дальнейшие производные будут повторять те, что мы уже нашли. Поэтому все производные ограничены на всей числовой прямой (например, числом *1*, как все синусы и косинусы) и условия теоремы о разложимости в степенной ряд на всей числовой прямой выполнены. Далее, $f(0)=\sin 0=0$, $f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=-\sin 0=0$, $f'''(0)=-\cos 0=-1$, $f''''(0)=-\sin 0=0$ и далее все циклически повторяется. Поэтому разложение (1) будет содержать только нечетные степени x:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3}$$

для всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

3. Рассмотрим $f(x)=\cos x$. Тогда можно получить разложение в ряд Маклорена тем же путем, что для $f(x)=\sin x$. Но мы сделаем это проще, если учтем полученное разложение (3) для $f(x)=\sin x$ и то, что $\cos x=(\sin x)'$. Дифференцируя (т.е. беря производную) почленно правую и левую части равенства (3), получим, учитывая возможность почленного дифференцирования степенных рядов внутри их интервала сходимости,

$$\cos x=1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}-\frac{7x^7}{6!}+\ldots=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \ .$$

Таким образом, для всех $x\in(-\infty,+\infty)$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots . \qquad (4)$$

4. Рассмотрим $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда, интегрируя почленно полученное ранее разложение $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots$, можно получить

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad (5)$$

для всех $x \in (-1, 1)$. Произвольная постоянная C появилась, как обычно, после вычисления неопределенного интеграла. Найдем ее значение. Для этого подставим в (5) $x = 0$: $\ln 1 = C$, т.е. $C = 0$. Поэтому из (5) получаем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1). \qquad (6)$$

5. Рассмотрим $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, где α – любое действительное число. Тогда, вычисляя значения производных в нуле, из (1) можно (хотя чуть более громоздко, чем в предыдущих примерах) получить:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + \dots \qquad (7)$$

для всех $x \in (-1, 1)$. Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем разложение для квадратного корня:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \dots \quad \text{для всех } x \in (-1, 1). \qquad (8)$$

С помощью приведенных выше разложений для основных элементарных можно находить разложения по степеням x более сложных функций.

Пример1. Разложить по степеням x (т.е. в ряд Маклорена) функцию

$f(x) = x \cdot \ln(1 + x^2)$.

Решение. Заменяя в правой и левой части (6) x на x^2, получим

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Умножая обе части этого равенства на x, получаем

$$x \cdot \ln(1 + x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \frac{x^9}{4} + \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Пример2. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Применяя формулу понижения степени, получаем

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x). \tag{9}$$

Подставляя $2x$ вместо x в разложение (4) для косинуса, последовательно для (9) получаем:

$$\cos 2x = = 1 - \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} - \frac{2^6 \cdot x^6}{6!} + \ldots,$$

$$1 - \cos 2x = \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} + \frac{2^6 \cdot x^6}{6!} - \ldots,$$

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} \cdot x^2 - \frac{2^3}{4!} \cdot x^4 + \frac{2^5}{6!} \cdot x^6 - \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Пример3. Разложить по степеням $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ функцию $f(x) = \sin 2x$.

Решение. Введем новую переменную

$$y = x + \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

и выразим $\sin 2x$ через y. Из (10) следует $x = y - \frac{\pi}{2}$, а потому

$\sin 2x = \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2y + \pi) =$ {пользуемся нечетностью синуса} $= -\sin(\pi - 2y) =$ $= -\sin 2y =$ {в разложение синуса (3) по степеням x подставляем $2y$ вместо x} $= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1} \cdot y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n+1} \cdot y^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Подставляя, согласно (10), $y = x + \frac{\pi}{2}$, окончательно получаем:

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} = -2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2^3}{3!} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^3 - \cdots .$$

Это и есть искомое разложение.

С помощью рядов Тейлора и Маклорена *можно вычислять приближенные значения функции*, обрывая эти ряды на каком-нибудь слагаемом (чем больше оставим членов ряда, тем точнее будет вычисленное значение).

Пример 4. Вычислить приближенно $\sqrt{4.1}$.

Решение. Имеем: $\sqrt{4.1} = \sqrt{4 + 0.1} = \sqrt{4 \cdot \left(1 + \frac{0.1}{4}\right)} = 2 \cdot \sqrt{1 + 0.025}$. Из написанного выше в (8) разложения $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$, оставляя 3 слагаемых, получаем приближенную формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$. Применяя ее при $x = 0.025$, получим $\sqrt{4.1} = 2 \cdot \sqrt{1 + 0.025} \approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.025 - \frac{1}{8} \cdot 0.025^2\right) = 2.02484375$. Отметим, что точное значение $\sqrt{4.1} = 2.024845673\ldots$.

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие числовые ряды называются сходящимися? Что называется суммой сходящегося ряда?
2. Каков общий признак расходимости рядов?
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{100n+30}$.
4. Как формулируется признак сравнения для положительных рядов (в простой и предельной форме)? Какие ряды являются «эталонными»?
5. Исследовать на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(2n)|}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{100n^2+3n-30}$.
6. Как формулируются признаки Даламбера и Коши (радикальный и интегральный) сходимости положительных рядов?
7. Исследовать на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.
8. Какие ряды называются знакочередующимися? Как формулируется признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов?
9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.
10. Какая связь между сходимостью, абсолютной сходимостью и условной сходимостью знакопеременных рядов?
11. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{100n+30}$.
12. Какой вид имеет область сходимости степенного ряда? Как она ищется?
13. Найти области сходимости степенных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n-1}}{10n+1}$.
14. Какие функции могут быть разложены в ряд Тейлора? Как вычислить коэффициенты такого ряда? Что такое ряд Маклорена?

15. Какой вид имеют разложения в степенные ряды функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$, $y = arctg(x)$, $y = (1+x)^m$.

16. Разложить функцию $y = \cos^2 x$ по степеням x.

4. ВАРИАНТЫ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 7}{n^3 \cdot (n+1)}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} x^n}{(n+1)!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = e^{-x^2}$.

Вариант 2

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = x^2 \ln(1 + x^4)$.

Вариант 3

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n - 0.5}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{1}{n}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^{4n}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = \sin^2 x$.

Вариант 4

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2) \cdot 2^{2n}}{(n+3)!}$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 \cdot 3^{2n}}$

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Вариант 5

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий

признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+5)^{2n}}{(n-1)^2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\left(1+e^x\right)^2$.

Вариант 6

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{\sqrt{3^n}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$.

Вариант 7

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2\cdot\sin\frac{1}{n}}{2n^2+1}\right)^n$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sin x+\sin 3x$.

Вариант 8

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{(n+1)^3}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=2^x$.

Вариант 9

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n\cdot(n+1)}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-\sqrt{n}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\cos^2 x$.

Вариант 10

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\sin\frac{1}{n+1}$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)}\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=e^{-x^2}$.

Вариант 11

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3-1}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n-2)!}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n+1}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sqrt{x+3}$.

Вариант 12

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)\cdot 5^{2n+10}}{(n-1)!}$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln 2$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x+2)^n$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\ln(x+2)$.

Вариант 13

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2-1}{5+2n^2}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^n}{n!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=e^x+e^{2x}$.

Вариант 14

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+3}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\ln n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=3e^x-2\ln(1-x)$

Вариант 15

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2\cdot\sin\frac{1}{n+6}}{4n+3}\right)^n$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n-1}n^2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sqrt[3]{1+2x}$.

Вариант 16

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+2n^2-1}{(n^3+1)\cdot(n^3+2)}$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную

сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n-1}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^n}{(2n+1)!}$

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=e^{x^2}$.

Вариант 17

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2\cdot\sqrt{n+1}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=x\ln(1-x^3)$.

Вариант 18

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}}{(2n-1)\cdot 3^{2n+1}}$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2\cdot 3^{2n+1}}$

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=-x\sin^2 x$.

Вариант 19

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\frac{2n+1}{3+n}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2\cdot 3^n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{x}$.

Вариант 20

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{2n^2+1}\right)^n$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^n$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{n^3}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\left(1-e^x\right)^2$.

Вариант 21

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi-2\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{3\cos\frac{1}{n+3}}\right)^{n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-1}{\sqrt{2^{3n}}}$

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+23)^{n}}{(n+2)^{2}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\cos x+x\sin x$.

Вариант 22

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}+2n+1}{5n^{2}-2n-1}\right)^{n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+3)\ln(2n+3)}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n}}{n+2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$

Вариант 23

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{(n+2)^4}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{3n-1}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = 3^{2x}$.

Вариант 24

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{5n^2 + n + 1}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n^2 - n}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+3} n^2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = \frac{1 + \cos 4x}{x}$.

Вариант 25

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий

признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{3^{n+1}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)}\frac{1}{\sqrt{n^4+5}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n x^n$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=e^{-2x}$.

Вариант 26

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}\cdot(3n+2)}{n!}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-2)!}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{3n+1}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sqrt{2x+3}$.

Вариант 27

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n\cdot 7^n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную

сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln 2}{\ln 23}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n (x-2)^n$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\ln(2x+1)$.

Вариант 28

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+3}}{n^3}$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\frac{3}{n^3}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+3}\frac{(n+1)x^n}{(n-1)!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=2e^x-e^{2x}$.

Вариант 29

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)+5\sin\left(3\pi-\frac{1}{n+6}\right)}{3n+4\ln\left(1+\frac{1}{n^5}\right)}\right)^n$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln\sqrt{n}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)^2 n!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=3e^{-x}-\ln(1+x)^2$.

Вариант 30

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^2 n}}$

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^{n-1}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{2n-1}n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). М.: Айрис Пресс, 2006.
2. Щипачев В.С. Курс высшей математики. М.: Проспект, 2002.
3. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах М.: Оникс 21 век, 1998
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. СПб.: Лань, 2009.

Министерство образования и науки РФ
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Т. И. Королюк

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного и заочного обучения

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....4

1. Функция-оригинал и её изображение.....5
2. Линейность преобразования Лапласа.....6
3. Изображение единичной функции $1(t)$.....6
4. Изображения функций e^{at}, $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $sh\omega t$, $ch\omega t$ 7
5. Теорема смещения.....10
6. Дифференцирование изображения.....11
7. Изображения функций t^n, $t^n e^{at}$ 12
8. Теорема запаздывания.....16
9. Дифференцирование оригинала.....21
10. Интегрирование оригинала.....23
11. Свёртка оригиналов, её свойства. Теорема умножения.....24
12. Интеграл Дюамеля.....27
13. Нахождение оригинала по изображению.....30
14. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....39
15. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом 44

УПРАЖНЕНИЯ 51

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....53

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей очного и заочного обучения.

Операционное исчисление является одним из методов прикладного математического анализа. С помощью операционного исчисления во многих случаях удается упростить решение задач, встречающихся в автоматике, электронике и других областях.

В пособии изложены основные сведения о преобразовании Лапласа, его свойствах и применении для решения линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений в объеме курса лекций по этому разделу дисциплины «Математика».

Теоретический материал сопровождается подробным разбором решений типовых задач, а также даны варианты заданий для самостоятельной работы студентов.

Целью работы является активизация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению разделов курса математики и ее приложений.

1. Функция-оригинал и её изображение

Любую функцию $f(t)$ действительной переменной t называют оригиналом, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t)=0$ при всех $t<0$;

2) $f(t)$ кусочно непрерывна, т. е. такая, что в любом конечном интервале она имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;

3) существуют такие постоянные $M>0$ и $S_0 \geq 0$, что $|f(t)| < Me^{S_0 t}$ при любом значении $0 \leq t < \infty$.

Лапласовым изображением оригинала $f(t)$ называют функцию $F(p)$ комплексной переменной $p=x+iy$, определяемую соотношением

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Если функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$, то это соответствие записывают так:

$$f(t)=F(p), \quad F(p)=f(t), \quad L(f(t))=F(p).$$

Для любого оригинала $f(t)$ интеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ сходится абсолютно при $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 - показатель роста функции $f(t)$.

В этой полуплоскости изображение $F(p)$ является аналитической функцией. Переход от функции $f(t)$ к функции $F(p)$ называется *преобразованием Лапласа.*

2. Линейность преобразования Лапласа

Теорема

Если $f(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t)$, C_k - **постоянные и** $F(p) = f(t)$, $F_k(p) = f_k(t)$,

то $F(p) = \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p)$.

Доказательство

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \sum_{k=1}^{n} C_k \left(\int_0^{\infty} f_k(t)\, e^{-pt}\, dt \right) = \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p).$$

3. Изображение единичной функции 1 (*t*)

Простейшей функцией–оригиналом является единичная функция

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Найдем ее изображение

$$L(1(t)) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p} \qquad (\mathrm{Re}\, p > 0).$$

Итак,

$$1(t) = \frac{1}{p} \qquad (\mathrm{Re}\, p > 0).$$

4. Изображения функций e^{at}, sin ωt, cos ωt, *sh* ωt, *ch* ωt

$$L(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a} \quad (\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a).$$

Таким образом, $e^{at} = \dfrac{1}{p-a}$.

В этой формуле a может быть и комплексным. Применяя свойство линейности преобразования Лапласа, найдем изображения тригонометрических функций

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \omega \text{ – положительное число.}$$

$$L(\sin \omega t) = \frac{1}{2i}\left(L(e^{i\omega t}) - L(e^{-i\omega t})\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{(p+i\omega - p + i\omega)}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad \text{при } \mathrm{Re}\, p > 0$$

$$L(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\left(L(e^{i\omega t}) + L(e^{-i\omega t})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

при $\mathrm{Re}\, p > 0$.

Аналогично, исходя из определения гиперболических функций

$$sh\, \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad ch\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2},$$

найдем их отображения.

$$L(sh\omega t)=\frac{1}{2}\left(L(e^{\omega t})-L(e^{-\omega t})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

$$L(ch\omega t)=\frac{1}{2}\left(L(e^{\omega t})+L(e^{-\omega t})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2}\quad \text{при } \mathrm{Re}p>\omega.$$

Получили формулы

$$\sin\omega t=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\qquad sh\omega t=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

$$\cos\omega t=\frac{p}{p^2+\omega^2},\qquad ch\omega t=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

Пример 1

Найти изображение функции $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t<1,\\ 0, & t\ge 1.\end{cases}$

Решение

$$L(f(t))=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^1(1-t)e^{-pt}dt+\int_1^{\infty}0\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=(1-t)\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Big|_0^1-\int_0^1-\frac{1}{p}e^{-pt}\cdot(-dt)=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}e^{-p}-\frac{1}{p^2}.$$

Пример 2

Найти изображение функции

$$f(t) = 2 + \frac{1}{3}e^{-2t} + 4\cos 3t.$$

Решение

Пусть $f(t) = F(p)$.

Тогда

$$F(p) = 2L(1(t)) + \frac{1}{3}L\left(e^{-2t}\right) + 4L(\cos 3t) = 2 \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+2} + 4 \cdot \frac{p}{p^2+9}.$$

Пример 3

Найти оригинал $f(t)$ **для изображения**

$$F(p) = \frac{6}{p} - \frac{5p}{p^2+4} + \frac{2}{p-3}.$$

Решение

$$f(t) = 6 - 5\cos 2t + 2e^{3t}.$$

Пример 4

Найти оригинал $f(t)$ **для изображения**

$$F(p) = \frac{3}{p^2+25} - \frac{2}{p^2+25} = 3 \cdot \frac{p}{p^2+25} + \frac{2}{5}\frac{5}{p^2+25}.$$

Тогда

$$f(t) = 3\cos 5t + \frac{2}{5}\sin 5t.$$

5. Теорема смещения

Если $f(t) = F(p)$, a – любое действительное или комплексное число, то

$$e^{at} f(t) = F(p-a).$$

Доказательство

$$L\left(e^{at} f(t)\right) = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a)$$

при $\mathrm{Re}(p-a) > S_0$.

С помощью этой теоремы находим изображения функций:

$$e^{at} \sin \omega t = \frac{\omega}{(p-a^2)+\omega^2}, \quad e^{at} sh\omega t = \frac{\omega}{(p-a^2)-\omega^2},$$

при $\mathrm{Re}(p-a) > 0$ *при* $\mathrm{Re}(p-a) > \omega$;

$$e^{at} \cos \omega t = \frac{p-a}{(p-a^2)+\omega^2}, \quad e^{at} ch\omega t = \frac{p-a}{(p-a^2)-\omega^2},$$

при $\mathrm{Re}(p-a) > 0$ *при* $\mathrm{Re}(p-a) > \omega$.

6. Дифференцирование изображения

Если $f(t) = F(p)$, **то** $t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}(p)$.

Доказательство

Функция $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt$ **является аналитической. Ее произ-**

водные $F^{(n)}(p)$ **по переменной** p **находятся под знаком интеграла Лапласа**

$$F'(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} \cdot (-t)\, dt,$$

из этого равенства следует, что $tf(t) = -F'(p)$.

Дифференцируя еще раз, получим

$$F''(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} \cdot t^2 dt.$$

откуда

$$t^2 f(t) = F''(p).$$

Дифференцируя n **раз, получим**

$$t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

7. Изображения функций t^n, $t^n e^{at}$

Известно, что $1(t) = \frac{1}{p}$, тогда $t \cdot 1(t) = -\left(\frac{1}{p}\right)'$ или $t = \frac{1}{p^2}$. Аналогично $t^2 = \frac{2}{p^3}$, при любом n получаем $t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Применяя теорему смещения, находим

$$t^n e^{at} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}(p-a) > 0.$$

Пример 1

Найти изображение функции

$$f(t) = 2t^3 - \frac{1}{5} sh\frac{t}{2} + t^4 e^{-5t}.$$

Решение

Пусть $f(t) = F(p)$.

Тогда

$$F(p) = 2 \cdot \frac{3!}{p^4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{p^2 - \frac{1}{4}} + \frac{4!}{(p+5)^5}$$

или

$$F(p) = \frac{12}{p^4} - \frac{1}{10\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)} + \frac{24}{(p+5)^5}.$$

Пример 2

Найти изображение функции

$$g(t) = 3e^{-t}\cos 2t + \frac{7}{2}e^{4t} + t\sin 3t.$$

Решение

Пусть $g(t) = G(p)$, **тогда**

$$G(p) = 3\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{p-4} - \left(\frac{3}{p^2+9}\right) =$$

$$= \frac{3(p+1)}{(p+1)^2+4} + \frac{7}{2(p-4)} + \frac{6p}{(p^2+9)^2}.$$

Пример 3

Найти оригинал $f(t)$ **для изображения**

$$F(p) = \frac{4p-3}{p^2+5p-1}.$$

Решение

Преобразуем $F(p)$, **выделяя полный квадрат по** p **в знаменателе дроби**

$$p^2+5p-1 = \left(p^2+2\cdot\frac{5}{2}p+\frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} - 1 = \left(p+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}.$$

Тогда

$$F(p)=\frac{4\left(p+\frac{5}{2}\right)-10-3}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}$$

или

$$F(p)=4\cdot\frac{4p+\frac{5}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}-13\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{29}}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}.$$

Используя известные изображения, находим искомый оригинал

$$f(t)=4e^{-\frac{5}{2}t}\cdot ch\frac{\sqrt{29}}{2}t-\frac{26}{\sqrt{29}}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot sh\frac{\sqrt{29}}{2}t.$$

Пример 4

Найти оригинал $x(t)$ **для изображения**

$$X(p)=\frac{6}{p+2}-\frac{3}{(p-4)^3}+\frac{2p-1}{p^2-3}.$$

Решение

$$X(p)=6\cdot\frac{1}{p-(-2)}-\frac{3}{2}\frac{2!}{(p-4)^{2+1}}+2\cdot\frac{p}{p^2-3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{p^2-3}.$$

Используя табличные изображения, находим оригинал

$$x(t)=6e^{-2t}-\frac{3}{2}t^2e^{4t}+2ch\sqrt{3}t-\frac{1}{\sqrt{3}}sh\sqrt{3}t.$$

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1) **найти** изображение функции

$$f(t)=\frac{1}{5}-3\sin\frac{2t}{3}+6ch5t-4t;$$

2) **найти** изображение функции

$$g(t)=\frac{1}{4}e^{-2t}\cos 5t-\frac{1}{6}tsh2t;$$

3) **найти** оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{6}{p+2}-\frac{2}{p^3}+\frac{2-p}{p^2+5}.$$

Вариант 2

1) **найти** изображение функции

$$f(t)=5t^2+\frac{1}{2}-4sh\frac{t}{3}+8\cos 3t;$$

2) **найти** изображение функции

$$g(t)=3e^{-t}\sin 2t-\frac{1}{10}tch4t;$$

3) **найти** оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{5p+1}{p^2-2}+\frac{3}{p^4}-\frac{8}{(p+1)^2}.$$

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

1) найти, используя интеграл Лапласа, изображение функции

$$g(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2t+3, & 0\le t\le 1,\\ 0, & t>1;\end{cases}$$

2) найти оригинал $x(t)$ для изображения

$$X(p)=\frac{3-4p}{p^2+3p+4}-\frac{2}{(p-3)^3}.$$

Вариант 2

1) найти оригинал $y(t)$ для изображения

$$Y(p)=\frac{1+6p}{p^2+p+3}-\frac{7}{(p+5)^4};$$

2) используя интеграл Лапласа, найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 3-t, & 0\le t\le 2,\\ 0, & t>2.\end{cases}$$

8. Теорема запаздывания

Если $f(t)=F(p)$, то $f(t-\tau)=e^{-\tau p}F(p)$, τ - любое положительное число.

Доказательство

Известно, что $f(t)=0$ при всех $t<0$. При $t<\tau$ аргумент $t-\tau<0$, поэтому $f(t-\tau)=0$. Это значит, что оригинал включается с запаздыванием на τ. График функции $f(t-\tau)$ получается из графика $f(t)$ смещением последнего вправо на расстояние τ. С помощью единичной функции запаздывающую функцию $f(t-\tau)$ можно записать и так: $f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$, так как $1(t-\tau)=0$ при $t<\tau$ и $1(t-\tau)=1$ при $t>\tau$.

Найдем изображение $f(t-\tau)$:

$$L(f(t-\tau))=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t-\tau)dt=\int_0^{\tau}e^{-pt}f(t-\tau)dt+\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}f(t-\tau)dt.$$

Здесь $\int_0^{\tau}e^{-pt}f(t-\tau)dt=0$, так как $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$.

Во втором интеграле сделаем замену, полагая $t-\tau=u$, тогда $t=u+\tau$; $dt=du$, при $t=\tau$ $u=0$, при $t=\infty$ и $u=\infty$.

Таким образом,

$$L(f(t-\tau))=\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}f(t-\tau)dt=\int_0^{\infty}e^{-p(u+\tau)}f(u)du=$$

$$=e^{-\tau p}\int_0^{\infty}e^{-pu}f(u)du=e^{-\tau p}F(p),$$

что и требовалось доказать.

Пример 1

$1(t) = \frac{1}{p}$. Тогда $1(t-\tau) = e^{-\tau p} \cdot \frac{1}{p}$.

Пример 2

Найти изображение функции $f(t) = (t-3)^3 \cdot 1(t-3)$.

Решение

Известно, что $t^3 = \frac{3!}{p^4}$. В нашем случае запаздывание на $\tau = 3$. Поэтому $(t-3)^3 1(t-3) = e^{-3p} \cdot \frac{3!}{p^4}$.

Пример 3

Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t+1, & 0 < t < 1, \\ 3t, & 1 < t < 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$

Решение

Пусть $f(t) = F(p)$.

Искомое изображение $F(p)$ найдем двумя способами. Сначала по определению с помощью интеграла Лапласа.

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)\,dt=\int_0^{1}(t+1)\,e^{-pt}dt+3\int_1^{4}te^{-pt}dt=$$

$$=(t+1)\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\Big|_0^1-\int_0^1-\frac{1}{p}e^{-pt}dt+3t\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\Big|_1^4-3\int_1^4-\frac{1}{p}e^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1-\frac{12}{p}e^{-4p}+\frac{3}{p}e^{-p}-\frac{3}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^4=$$

$$=-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p^2}-\frac{12}{p}e^{-4p}+\frac{3}{p}e^{-p}-\frac{3}{p^2}e^{-4p}+\frac{3}{p^2}e^{-p}=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}\right)e^{-p}-\left(\frac{3}{p^2}+\frac{12}{p}\right)e^{-4p}.$$

А теперь найдем $F(p)$ с помощью теоремы запаздывания. Для этого запишем наш оригинал $f(t)$ одним аналитическим выражением с помощью единичной функции.

При $t<0$ $f(t)=0$. В момент $t=0$ «включается» функция $t+1$; в момент $t=1$ она «снимается» и «включается» функция $3t$, которая «снимается» в момент $t=4$. Поэтому

$$f(t)=(t+1)\cdot 1(t)-(t+1)\cdot 1(t-1)+3t\cdot 1(t-1)-3t\cdot 1(t-4)=$$
$$=(t+1)\cdot 1(t)+(2t-1)\cdot 1(t-1)-3t\cdot 1(t-4)=$$
$$=(t+1)\cdot 1(t)+(2(t-1)+1)\cdot 1(t-1)-(3(t-4)+12)\cdot 1(t-4).$$

Применяя линейность преобразования Лапласа и теорему запаздывания, получим искомое изображение

$$F(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\frac{3}{p^2}+\frac{12}{p}\right)e^{-4p}.$$

Пример 4

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{5}{(p+2)^4}e^{-p}+\frac{4}{p^3}-\frac{8}{p^2+7}e^{-2p}.$$

Решение

Находим оригинал для каждого слагаемого:

$$\frac{5}{(p+2)^4}=5\,\frac{1}{(p+2)^{3+1}}=\frac{5}{3!}\cdot\frac{3!}{(p-(-2))^{3+1}}=\frac{5}{6}e^{-2t}\cdot t^3.$$

$$\frac{4}{p^3}=4\,\frac{1}{p^{2+1}}=\frac{4}{2!}\cdot\frac{2!}{p^{2+1}}=2t^2,$$

$$-\frac{8}{p^2+7}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{p^2+7}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}\,t,$$

$$\frac{5}{(p+2)^4}\cdot e^{-p}=\frac{5}{6}\cdot e^{-2(t-1)}\cdot(t-1)^3\cdot 1(t-1),$$

оригинал с запаздыванием на $\tau=1$.

$$\frac{4}{p^3}=2t^2$$

$$-\frac{8}{p^2+7}e^{-2p}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}(t-2)\cdot 1(t-2)$$

оригинал с запаздыванием на $\tau=2$.

Суммируя оригиналы для каждого слагаемого, находим

$$f(t)=\frac{5}{6}e^{-2(t-1)}\cdot(t-1)^3\cdot 1(t-1)+2t^2-\frac{8}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}\,(t-2)\cdot 1(t-2).$$

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1

1) найти оригинал для изображения

$$F(p)=\frac{(5-3p)e^{-p}}{2p^2+5}+\frac{7e^{-3p}}{2p^2+4p+1}-\frac{3}{(p+6)^4}.$$

2) найти изображение функции

$$x(t)=5\sin\frac{2t}{5}-2+\frac{1}{4}(t-2)e^{-2(t-2)}ch\frac{3}{2}(t-2)\cdot 1(t-2).$$

Вариант 2

1) найти изображение функции

$$y(t)=7te^{t}\cos\frac{5t}{4}-\frac{1}{6}(t-4)^2\cdot e^{-5(t-4)}\cdot 1(t-4)+3ch\frac{t}{4}.$$

2) найти оригинал для изображения

$$G(p)=\frac{8p}{p^2+2p+6}-\frac{(2-p)e^{-2p}}{4p^2+5}+\frac{10e^{-5p}}{(p-3)^3}.$$

9. Дифференцирование оригинала

Теорема

Если $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, $f'(t)$ принадлежит множеству оригиналов и $f(t)=F(p)$, то $f'(t)=pF(p)-f(0)$.

Доказательство

$$L(f'(t)) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Интегрируя по частям, положим

$$u = e^{-pt}, \quad du = -pe^{-pt}dt, \quad dv = f'(t)dt, \; v = f(t).$$

Получаем

$$f'(t) = (f(t)\ e^{-pt})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}(-p)dt.$$

Так как $\operatorname{Re} p = x > s_0$, то $\left|f(t)\, e^{-pt}\right| \le Me^{-(x-s_0)t}$, поэтому

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\, e^{-pt} = 0$, а $\int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-Pt}dt = F(p)$.

Следовательно, $f'(p) = pF(p) - f(0)$.

Теорема доказана.

Следствие

Если $f''(t), f'''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ - оригиналы, то находим:

$$f''(t) = p(pF(p) - f(0)) - f'(0)$$

или

$$f''(t) = p^2F(p) - pf(0)) - f'(0).$$

Аналогично, для производной n–го порядка имеем

$$f^{(n)}(t) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Для практических приложений полученное свойство является очень важным. Оно показывает, что сложная операция дифференцирования в пространстве оригиналов заменяется в пространстве изоб-

ражений элементарным действием – умножением изображения на степень аргумента p с добавлением многочлена, коэффициентами которого являются начальные значения оригинала. Это очень удобно для решения дифференциальных уравнений операционным методом. так как начальные условия здесь учитываются автоматически.

10. Интегрирование оригинала

Теорема

Если $f(t) = F(p)$, то $\int_0^t f(u)\,du = \frac{F(p)}{p}$, т. е. интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p.

Доказательство

$f(t)$ принадлежит множеству оригиналов, тогда и $\int_0^t f(u)\,du$ тоже является оригиналом. Обозначим $\int_0^t f(u)\,du = g(t)$, пусть $g(t) = G(p)$. $g'(t) = (\int_0^t f(u)\,du)' = f(t)$, $g(0) = 0$, $L(g'(t) = L(f(t))$.

Поэтому $pG(p) = F(p)$, откуда $G(p) = \frac{F(p)}{p}$. Значит, $\int_0^t f(u)\,du = \frac{F(p)}{p}$, что и требовалось доказать.

11. Свёртка оригиналов, ее свойства. Теорема умножения

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - оригиналы. Свёртку этих функций обозначают $f * g$. Она равна

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Свёртка $f * g$ обладает свойствами:

1) переместительным

$$f * g = g * f \text{ или}$$

$$\int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du;$$

2) сочетательным

$$(f * g)\varphi = f(g * \varphi),$$

в силу, которого свёртка нескольких функций всегда даёт одинаковый результат, независимо от того, в каком порядке выполняется свёртывание;

3) распределительным

$$(f + g) * \varphi = (f * \varphi) + (g * \varphi).$$

Свёртка оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ тоже является оригиналом, причём показатель роста свёртки $f * g$ равен наибольшему из показателей роста функций $f(t)$ и $g(t)$.

Пример

Найти свёртку функций $f(t)=t, \quad g(t)=e^{at}$.

Решение

$$f * g = t * e^{at} = \int_0^t ue^{a(t-u)}du = e^{at}\int_0^t ue^{-au}du =$$

$$= e^{at}\left(-u\frac{e^{-au}}{a}\Big|_0^t - \int_0^t -\frac{1}{a}e^{-au}du\right) = e^{at}\left(-\frac{t}{a}e^{-at} + \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-au}\Big|_0^t\right) =$$

$$= e^{at}\left(-\frac{t}{a}e^{-at} - \frac{1}{a^2}e^{-at} + \frac{1}{a^2}\right) = -\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}e^{at}.$$

В другом порядке

$$g * t = e^{at} * t = \int_0^t e^{au}(t-u)du = \int_0^t te^{au}du - \int_0^t ue^{au}du.$$

Произведя интегрирование по частям во втором интеграле, получим

$$e^{at} * t = t\frac{e^{au}}{a}\Big|_0^t - u\frac{1}{a}e^{au}\Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{a}e^{au}du =$$

$$= t\frac{e^{at}}{a} - \frac{t}{a} - \frac{t}{a}e^{at} + \frac{1}{a^2}e^{at} - \frac{1}{a^2} = -\frac{t}{a} + \frac{1}{a^2}e^{at} - \frac{1}{a^2}.$$

Получили

$$f * g = g * f.$$

Теорема умножения

Если $f(t)=F(p)$ **и** $g(t)=G(p)$, **то** $f*g=F(p)\cdot G(p)$, **т. е. при** свертывании оригиналов изображения перемножаются.

Доказательство

$$L(f*g)=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(u)g(t-u)du=$$

$$=\int_0^\infty f(u)du\int_u^\infty e^{pt}g(t-u)dt,$$

изменим порядок интегрирования.

Во внутреннем интеграле проведём замену переменной, положив $t-u=z$, тогда $t=u+z$. $dt=dz$, **при** $t=u$ $z=0$, **при** $t=\infty$ $z=\infty$, получим

$$L(f*g)=\int_0^\infty f(u)du\int_0^\infty e^{-p(u+z)}g(z)dz=$$

$$=\int_0^\infty f(u)e^{-pu}du\int_0^\infty g(z)e^{-pz}dz=F(p)\cdot G(p),$$

что и требовалось доказать.

Теорема умножения имеет важное значение для приложений, так как позволяет находить оригинал, соответствующий произведению

двух изображений $F(p)$ и $G(p)$, если известны оригиналы сомножителей $f(t)$ и $g(t)$.

Пример

Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-a)}$.

Решение

Изображение $F(p)$ можно подставить в виде произведения двух функций

$$F(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-a}.$$

Пусть $F(p)=f(t)$.

Так как $\dfrac{1}{p^2}=t$, $\dfrac{1}{p-a}=e^{at}$, то по теореме умножения искомый оригинал $f(t)=t*e^{at}$. Эту свёртку в предыдущем примере мы нашли, поэтому

$$f(t)=-\frac{t}{a}+\frac{1}{a^2}e^{at}-\frac{1}{a^2}.$$

12. Интеграл Дюамеля

Частным случаем теоремы умножения изображений является формула Дюамеля, часто применяемая для нахождения оригиналов.

Найдем оригинал, соответствующий произведению $pF(p)G(p)$, где $f(t)=F(p)$, $g(t)=G(p)$.

Это произведение представим в виде

$$pF(p)G(p)=\big(pF(p)-f(0)\big)G(p)+f(0)G(p).$$

Так как $pF(p)-f(0)=f'(t)$, то по теореме умножения изображений $\big(pF(p)-f(0)\big)G(p)=f'(t)*g(t)$, а $f(0)G(p)=f(0)\cdot g(t)$.

Теперь можно записать формулу Дюамеля

$$pF(p)G(p)=\int_0^t f'(u)\,g(t-u)\,du+f(0)\,g(t).$$

Правую часть этого соотношения называют интегралом Дюамеля.

Если учесть свойство свёртки $f*g=g*f$, то из последнего равенства получим

$$pF(p)G(p)=\int_0^t g(u)\,f'(t-u)\,du+f(0)\,g(t).$$

Аналогично, если $pF(p)G(p)=\big(pG(p)-g(0)\big)F(p)+g(o)F(p)$, получим

$$pF(p)G(p)=\int_0^t g'(u)\,f(t-u)\,du+g(0)\,f(t),$$

$$pF(p)G(p)=\int_0^t f(u)\,g'(t-u)\,du+g(0)\,f(t).$$

Пример

Найти оригинал для функции $\dfrac{p\omega}{(p-a)(p^2+\omega^2)}$.

Решение

Представим заданную функцию в виде произведения

$$p\ \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p-a}.$$

Имеем

$$F(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\sin\omega t=f(t);\quad G(p)=\frac{1}{p-a}=e^{at}=g(t),$$

$$f(0)=0,\quad f'(t)=\omega\cos\omega t.$$

Тогда запишем

$$pF(p)G(p)=p\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p-a}=\int_0^t f'(u)\,g(t-u)\,du=$$

$$=\int_0^t\omega\cos\omega u\cdot e^{a(t-u)}du=\omega e^{at}\int_0^t\cos\omega u\cdot e^{-au}du.$$

Дважды интегрируя по частям последний интеграл, получим

$$\omega e^{at}\int_0^t\cos\omega u\,e^{-au}du=\frac{1}{a^2+\omega^2}\left(\omega^2\sin\omega t+a\omega\left(e^{at}-\cos\omega t\right)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)(p-a)}=\frac{\omega^2\sin\omega t+a\omega\left(e^{at}-\cos\omega t\right)}{a^2+\omega^2}.$$

13. Нахождение оригинала по изображению

При нахождении оригинала по его изображению широко пользуются свойствами преобразования Лапласа и таблицей соответствий между оригиналами и их изображениями:

Таблица

Соответствия между оригиналами и их изображениями

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$f(t)$	$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
5	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
8	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
9	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

Окончание таблицы

10	$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
11	$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
12	$e^{at}sh\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
13	$e^{at}ch\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
14	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\,sh\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\,ch\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$te^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$te^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\cos^2\omega t$	$\dfrac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
21	$\sin^2\omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$

Пример

Найти оригиналы для следующих изображений:

1) $F(p)=\dfrac{1}{p^5}$.

Решение

Используем соотношение 3 из таблицы, откуда $\dfrac{1}{p^{n+1}}=\dfrac{t^n}{n!}$, по-

этому

$$\frac{1}{p^5}=\frac{t^4}{4!}=\frac{1}{24}t^4.$$

2) $F(p)=\dfrac{3}{(p+2)^4}$.

Решение

Из соотношения 5

$$\frac{t^n e^{at}}{n!}=\frac{1}{(p-a)^{n+1}}\text{, здесь } a=-2,\quad n=3,$$

поэтому

$$\frac{3}{(p+2)^4}=3\cdot\frac{t^3e^{-2t}}{3!}=\frac{1}{2}t^3e^{-2t}.$$

3) $F(p)=\dfrac{5}{p^2+4}$.

Решение

Из соотношения 6

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\sin\omega t,$$

здесь $\omega^2=4,\quad \omega=2$, поэтому

$$\frac{5}{p^2+4}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}=\frac{5}{2}\sin 2t.$$

4) $F(p)=\dfrac{7p}{3p^2+5}$.

Решение

Из соотношения 7

$$\frac{p}{p^2+\omega^2}=\cos\omega t$$

$$\frac{7p}{3p^2+5}=\frac{7p}{3\left(p^2+\frac{5}{3}\right)}=\frac{7}{3}\cdot\frac{p}{p^2+\frac{5}{3}}=\frac{7}{3}\cos\sqrt{\frac{5}{3}}t.$$

5) $F(p)=\dfrac{3}{(p-2)^2-5}$.

Решение

Из соотношения 10

$$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}=e^{at}sh\omega t$$

$$\frac{3}{(p-2)^2-5}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{(p-2)^2-5}=\frac{3}{\sqrt{5}}e^{2t}sh\sqrt{5}t$$

$$\omega=\sqrt{5},\quad a=2.$$

6) $F(p)=\dfrac{p+5}{p^2-4p+7}$.

Решение

$$p^2-4p+7=\left(p^2-4p+4\right)+3=(p-2)^2+3$$

$$\frac{p+5}{p^2-4p+7}=\frac{p+5}{(p-2)^2+3}.$$

Из соотношений 11 и 10

$$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}=e^{at}\cos\omega t,\quad \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}=e^{at}\sin\omega t$$

$$\frac{p+5}{(p-2)^2+3}=\frac{(p-2)+7}{(p-2)^2+3}=\frac{p-2}{(p-2)^2+3}+\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+3}=$$

$$=e^{2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{7}{\sqrt{3}}e^{2t}\sin\sqrt{3}t.$$

7) $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^2+9}$.

Решение

Из соотношения 6

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\sin\omega t,\quad \frac{2}{p^2+9}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}=\frac{2}{3}\sin 3t.$$

Применяя теорему запаздывания, получим

$$\frac{2e^{-p}}{p^2+9}=\frac{2}{3}\sin 3(t-1)\cdot 1(t-1)$$

(при умножении изображения на $e^{-\tau p}$ оригинал запаздывает на τ единиц, в нашем случае $\tau=1$).

Если изображение оригинала является правильной рациональной дробью, выраженной отношением двух многочленов $F(p)=\dfrac{\Phi(p)}{G(p)}$ (степень числится меньше степени знаменателя), то эту дробь разлагают сначала на сумму простейших дробей, затем для каждой полученной дроби находят соответствующий оригинал.

Пример

Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}$.

Решение

Изображение $F(p)$ является правильной рациональной дробью. Разложим эту дробь на сумму простейших дробей

$$\frac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}=\frac{A}{(p+1)^2}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Приводя в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители дробей слева и справа, получим тождество, из которого нужно получить систему из четырех уравнений для определения A, B, C, D.

$$3p^2-2=A(p^2+1)+B(p+1)(p^2+1)+(Cp+D)(p+1)^2$$

$$\begin{array}{ll} p=-1 & \left\{\begin{array}{l} 1=2A,\ A=\dfrac{1}{2} \\ 0=B+C \end{array}\right. \\ p^3: & \\ p: & \left\{\begin{array}{l} 0=B+2D+C \\ -2=A+B+D \end{array}\right. \\ p=0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c} B+C=0 \\ B+2D+C=0,\ отсюда\ D=0 \\ B=-2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2} \\ C=-B=\dfrac{5}{2} \end{array}$$

Тогда

$$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Применяя свойство линейности преобразования Лапласа и соотношения 5, 4 и 7 из таблицы, получим искомый оригинал

$$f(t)=\frac{1}{2}te^{t}-\frac{5}{2}e^{t}+\frac{5}{2}\cos t.$$

Если изображение $F(p)=\dfrac{\Phi(p)}{G(p)}$ является правильной рациональной дробью и $p_1, p_2, ..., p_n$ - полюсы $F(p)$, то для нахождения оригинала $f(t)$ применяют теорию вычетов, а именно:

$$F(p)=f(t)=\sum_{k=1}^{n} res\left[F(p)e^{pt}; p_k\right],$$

где $res\left[F(p)e^{pt}; p_k\right]$ - вычет функции $F(p)e^{pt}$ относительно полюса p_k.

Пример

С помощью вычетов найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}$.

Решение

Для $F(p)$ $p=-1$ - полюс второго порядка, $p=\pm i$ - простые полюсы.

Тогда

$$f(t)=res\left[F(p)e^{pt}; -1\right]+res\left[F(p)e^{pt}; i\right]+res\left[F(p)e^{pt}; -i\right].$$

Найдем вычеты.

$$res\left[F(p)e^{pt};-1\right]=\lim_{p\to -1}\left((p+1)^2\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p^2+1)}\right)'=\lim_{p\to -1}\left(\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{p^2+1}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to -1}\frac{1}{(p^2+1)^2}\left((p^2+1)\left(6pe^{pt}+(3p^2-2)e^{pt}\cdot t\right)-(3p^2-2)e^{pt}\cdot 2p\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\left(-6e^{-t}+e^{-t}\cdot t\right)-e^{-t}(-2)\right)=\frac{1}{4}\left(-12e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-10e^{-t}+2te^{-t}\right)=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}.$$

$$res\left[F(p)e^{pt};i\right]=\lim_{p\to i}(p-i)\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)(p+i)}=\lim_{p\to i}\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p+i)}=$$

$$=\frac{-5e^{it}}{(-1+2i+1)\,2i}=\frac{-5e^{it}}{-4}=\frac{5}{4}(\cos t+i\sin t)=\frac{5}{4}\cos t+i\frac{5}{4}\sin t.$$

$$res\left[F(p)e^{pt};-i\right]=\lim_{p\to -i}(p+i)\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)(p+i)}=\lim_{p\to -i}\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)}=$$

$$=\frac{-5e^{-it}}{-2i\,(-2i)}=\frac{-5e^{-it}}{-4}=\frac{5}{4}(\cos t-i\sin t)=\frac{5}{4}\cos t-\frac{5}{4}i\sin t.$$

Складывая вычеты, получим искомый оригинал

$$f(t)=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{5}{2}\cos t.$$

14. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Задача Коши

Требуется найти частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)}(t) + + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t)\ (a_0 \neq 0),$$

удовлетворяющее условиям: $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$.

Операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) эта задача может быть решена в предположении, что функция $f(t)$, искомая функция $y(t)$ и ее производные до n-го порядка включительно, являются оригиналами.

Пусть $y(t) = Y(p), \quad f(t) = F(p)$, тогда по теореме о дифференцировании оригинала имеем

$$y'(t) = pY(p) - y^0; \quad y''(t) = p^2 Y(p) - py_0 - y_1, \ldots,$$

$$y^{(n)}(t) = p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \ldots py_{n-2} - y_{n-1}.$$

Применяя линейность преобразования Лапласа, перейдем в заданном дифференциальном уравнении от оригиналов к изображениям:

$$a_0(p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \ldots - py_{n-2} - y_{n-1}) +$$
$$+ a_1(p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - \ldots - y_{n-2}) +$$
$$+ \ldots + a_{n-1}(pY(p) - y_0) + a_n Y(p) = F(p).$$

Полученное уравнение – это алгебраическое уравнение первой степени относительно $Y(p)$. Решая его, находим

$$Y(p)=\frac{F(p)+\Phi(p)}{\Psi(p)},$$

где

$$\Psi(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n,$$

$$\Phi(p)=y_0(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1})+$$

$$+y_1(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+...+a_{n-2})+...+$$

$$+y_{n-2}(a_0p+a_1)+a_0y_{n-1}.$$

$\Phi(p)$ - многочлен степени не выше, чем n-1, с коэффициентами, зависящими от начальных условий. Если все начальные значения равны нулю, то $\Phi(p)=0$.

Далее, для найденного изображения $Y(p)$ находим оригинал $y(t)$, который и будет искомым частным решением дифференциального уравнения.

Преимущество операционного метода решения задачи Коши перед классическими методами состоит в том, что уравнение для $Y(p)$ является линейным алгебраическим и, следовательно, в математическом отношении более простым, чем исходное дифференциальное уравнение. Во-вторых, операционным методом сразу находится част-

ное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. и не надо искать общее решение этого уравнения.

Пример 1

Решить уравнение $y''-4y = te^{-t}$ **при начальных условиях** $y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

Решение

Пусть $y(t) = Y(p)$, **тогда**

$$y'(t) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 2.$$
$$y''(t) = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p.$$

Переходим в уравнении к изображениям:

$$p^2Y(p) - 2p - 4Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2},$$

решаем это уравнение

$$(p^2-4)Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + 2p; \quad (p^2-4)Y(p) = \frac{1+2p^3+4p^2+2p}{(p+1)^2}.$$

$$Y(p) = \frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p+1)^2(p^2-4)} \text{ или } Y(p) = \frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p+1)^2(p-2)(p+2)}.$$

Разложим полученную для $Y(p)$ правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей.

$$\frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p-2)(p+2)(p+1)^2}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{(p+1)^2}+\frac{D}{p+1},$$

$$2p^3+4p^2+2p+1=A(p+2)(p+1)^2+B(p-2)(p+1)^2+$$

$$+C(p-2)(p+2)+D(p+1)(p-2)(p+2).$$

$$p=2 \qquad 16+16+4+1=A\cdot 36, \qquad 37=36A, \qquad A=\frac{37}{36}$$

$$p=-2 \qquad -16+16-4+1=B\cdot(-4), \qquad -3=-4B, \qquad B=\frac{3}{4}$$

$$p=-1 \qquad -2+4-2+1=C\cdot(-3), \qquad 1=-3C, \qquad C=-\frac{1}{3}$$

$$p^3: \quad 2=A+B+D, \quad D=2-A-B=2-\frac{37}{36}-\frac{3}{4}=\frac{72-37-27}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}.$$

Тогда

$$Y(p)=\frac{37}{36}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p+1},$$

а искомое частное решение дифференциального уравнения есть

$$y(t)=\frac{37}{36}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-\frac{1}{3}te^{-t}+\frac{2}{9}e^{-t}.$$

Пример 2

Решить уравнение $x'''+2x'=4e^{-t}$ **при начальных условиях** $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

Решение

Пусть $x(t) = X(p)$, тогда

$$x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) = p^3 X(p) - p^2(x(0)) - px'(0) - x''(0) = p^3 X(p),$$

$$4e^{-t} == \frac{4}{p+1}.$$

Переходим в дифференциальном уравнении к изображениям

$$p^3 X(p) + 2pX(p) = \frac{4}{p+1},$$

$$(p^3 + 2p)X(p) = \frac{4}{p+1},$$

откуда

$$X(p) = \frac{4}{(p+1)(p^3+2p)} \text{ или } X(p) = \frac{4}{p(p+1)(p^2+2)}.$$

$$\frac{4}{p(p+1)(p^2+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2}$$

$$4 = A(p+1)(p^2+2) + Bp(p^2+2) + (Cp+D)p(p+1)$$

$p = 0$ $\quad 4 = 2A, \quad A = \frac{4}{2} = 2$

$p = -1$ $\quad 4 = B \cdot (-3), \quad B = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

p^3: $\quad 0 = A + B + C, \quad C = -A - B = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

p^2: $\quad 0 = A + D + C, \quad D = -A - C = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$

Тогда

$$X(p)=2\cdot\frac{1}{p}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{p^2+2}-\frac{4}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{p^2+2}.$$

Искомое частное решение $x(t)$ есть

$$x(p)=2-\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}\cdot\cos\sqrt{2}t-\frac{4}{3\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t.$$

15. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом решаются так же, как и одно уравнение. Отличие будет лишь в том, что вместо одного изображающего уравнения будем иметь систему таких уравнений, причем эта система в отношении изображений искомых функций будет линейной алгебраической.

Пример 1

Решить систему $\begin{cases} x'+3x+y=0 \\ y'-x+y=0 \end{cases}$ при начальных условиях $x(0)=1,\ y(0)=1.$

Решение

Пусть

$$x(t) = X(p), \quad y(t) = Y(p),$$

тогда

$$x'(t) = pX(p) - 1; \quad y'(t) = pY(p) - 1.$$

Переходим в уравнениях к изображениям

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + 3X(p) + Y(p) = 0 \\ pY(p) - 1 - X(p) + Y(p) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p+3)X(p) + Y(p) = 1 \\ -X(p) + (p+1)Y(p) = 1 \end{cases}$$

Получили линейную алгебраическую систему с неизвестными $X(p)$ **и** $Y(p)$.

Решение этой системы находим по формулам Крамера.

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+3)(p+1) + 1 = p^2 + 3p + p + 3 + 1 = (p+2)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = p + 1 - 1 = p,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p + 3 + 1 = p + 4.$$

Тогда $X(p)=\dfrac{p}{(p+2)^2}$; $Y(p)=\dfrac{p+4}{(p+2)^2}$.

Для нахождения оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ найденные их изображения преобразуем

$$X(p)=\frac{p}{(p+2)^2}=\frac{(p+2)-2}{(p+2)^2}=\frac{1}{p+2}-\frac{2}{(p+2)^2}=e^{-2t}-2te^{-2t};$$

$$Y(p)=\frac{p+4}{(p+2)^2}=\frac{(p+2)+2}{(p+2)^2}=\frac{1}{p+2}+\frac{2}{(p+2)^2}=e^{-2t}+2te^{-2t}.$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений есть

$$\begin{cases} x(t)=e^{-2t}(1-2t), \\ y(t)=e^{-2t}(1+2t). \end{cases}$$

Пример 2

Решить систему $\begin{cases} x'+x-y=e^t \\ y'-x+y=\sin t \end{cases}$

при начальных условиях $x(0)=1, \quad y(0)=0.$

Решение

Пусть

$$x(t)=X(p), \quad y(t)=Y(p),$$

тогда

$$x'(t)=pX(p)-1; \quad y'(t)=pY(p).$$

Переходим в уравнениях к изображениям

$$\begin{cases} pX(p)-1+X(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ pY(p)-X(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p+1)X(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1}+1 \\ -X(p)+(p+1)Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1}, \end{cases}$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix}=(p+1)^2-1=p^2+2p,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{p}{p-1} & -1 \\ \dfrac{1}{p^2+1} & p+1 \end{vmatrix}=\frac{p(p+1)}{p-1}+\frac{1}{p^2+1}=$$

$$=\frac{p^4+p^3+p^2+p+p-1}{(p-1)(p^2+1)}=\frac{p^4+p^3+p^2+2p-1}{(p-1)(p^2+1)},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1 & \dfrac{p}{p-1} \\ -1 & \dfrac{1}{p^2+1} \end{vmatrix} = \frac{p+1}{p^2+1} + \frac{p}{p-1} =$$

$$= \frac{p^2-1+p^3+p}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{p^3+p^2+p-1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{p^4+p^3+p^2+2p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}, \quad Y(p) = \frac{p^3+p^2+p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}.$$

Каждую из правильных рациональных дробей представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{p^4+p^3+p^2+2p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-1} + \frac{Dp+E}{p^2+1},$$

$$p^4+p^3+p^2+2p-1 = A(p+2)(p-1)(p^2+1) + Bp(p-1)(p^2+1) +$$

$$+Cp(p+2)(p^2+1)+(Dp+E)p(p+2)(p-1)$$

$p=0 \qquad -1=-2A, \qquad A=\frac{1}{2}$

$p=1 \qquad 4=6C, \qquad C=\frac{2}{3}$

$p=-2 \qquad 16-8+4-4-1=30B, \quad 7=30B, \quad B=\frac{7}{30}$

$p^4: \quad 1=A+B+C+D, \quad D=1-A-B-C=1-\frac{1}{2}-\frac{7}{30}-\frac{2}{3}=-\frac{2}{5}$

$p=-1 \quad -2=-4A+4B-2C-2D+2E.$

$$E=-1+2A-2B+C+D=-1+1-\frac{7}{15}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$X(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{7}{30}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{2}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

По изображению $X(p)$ находим оригинал $x(t)$:

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{t}-\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t,$$

$$x(0)=\frac{1}{2}+\frac{7}{30}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{15+7+20-12}{30}=\frac{30}{30}=1.$$

$$\frac{p^3+p^2+p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p-1}+\frac{Dp+E}{p^2+1},$$

$$p^3+p^2+p-1=A(p+2)(p-1)(p^2+1)+Bp(p-1)(p^2+1)+$$

$$+Cp(p+2)(p^2+1)+(Dp+E)p(p+2)(p-1)$$

$p=0 \qquad -1=-2A, \qquad A=\frac{1}{2}$

$p=1 \qquad 2=6C, \qquad C=\frac{1}{3}$

$p=-2 \qquad -7=30B, \qquad B=-\frac{7}{30}$

$p^4: \quad 0=A+B+C+D, \quad D=-A-B-C=-\frac{1}{2}+\frac{7}{30}-\frac{1}{3}=-\frac{3}{5}$

$p=-1 \quad -2=-4A+4B-2C-2D+2\mathrm{E}$

$$E=-1+2A-2B+C+D=-1+1+\frac{7}{15}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=+\frac{1}{5}$$

$$Y(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{7}{30}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{3}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Искомый оригинал $y(t)$ равен

$$y(t)=\frac{1}{2}-\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t,$$

$$y(0)=\frac{1}{2}-\frac{7}{30}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=\frac{15-7+10-18}{30}=\frac{0}{30}=0.$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений есть

$$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}+\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{t}-\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t \\ y(t)=\frac{1}{2}-\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти изображения для заданных оригиналов

$$1)\ f(t) = 2\cos 5t - e^{-t}\sin 4t;$$
$$2)\ f(t) = \sin 2(t-1)\cdot \mathbf{1}(t-1);$$
$$3)\ f(t) = 3t\cos 4t;$$
$$4)\ f(t) = (t-2)^3 e^{t-2}\cdot \mathbf{1}(t-2).$$

2. С помощью таблицы оригиналов и соответствующих им изображений и свойств преобразования Лапласа найти оригиналы по заданным изображениям:

$$1)\ F(p) = \frac{3p}{p^2-25} + \frac{2}{(p-2)^2+9};$$

$$2)\ F(p) = \frac{4p}{p^2-2p+5};$$

$$3)\ F(p) = \frac{p+8}{p^2+4p+7}e^{-p};$$

$$4)\ F(p) = \frac{7}{(p+3)^3} - \frac{pe^{-2p}}{p^2-16}.$$

3. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1) $y''-4y'+5y = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y''-3y'+2y = e^t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;

3) $y''+y' = \sin 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

4) $y''+4y' = 3\cos t$. $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1970. – 380 с.

Ершова В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. – М.: Наука, 1976. – 255 с.

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Г. М. ПЛОТНИКОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ 5
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 25
ОТВЕТЫ 71
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 83

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей очного обучения.

Пособие содержит 30 вариантов заданий по теме «Теория вероятностей». В начале пособия даны методические указания с подробными решениями аналогичных задач. В конце пособия указаны ответы.

Целью работы является активизация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению разделов курса математики и её приложений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

В данном разделе приведены подробные решения задач, подобных указанным в вариантах.

Задача 1

При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке 0,2. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов ровно 84 будут бракованными?

Решение

Так как $n = 400$ представляет собой достаточно большое число и $p = 0{,}2$, то можно считать, согласно локальной теореме Лапласа, что случайная величина $X = k$ распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

По условиям задачи $k = 84$; $q = 0{,}8$, $p = 0{,}2$, $n = 400$, тогда

$$P(X = 84) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\varphi\left(\frac{84 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\varphi(0{,}5) = \frac{1}{8}0{,}3521 \approx 0{,}044.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приводится в приложениях к учебникам (см., например [4], прил. 1. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике). Для отрицательных значений x пользуются той же таблицей, так как функция $\varphi(x)$ – чётная.

Задача 2

Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}4;\ \ p_2 = 0{,}5;\ \ p_3 = 0{,}7.$$

Найти вероятности того, что в результате этих трёх выстрелов по мишени будет:

а) ровно одно попадание;

б) хотя бы одно попадание;

в) ровно два попадания.

Решение

а) Пусть событие A – одно попадание в мишень. Обозначим $A_1 - A_3$ – события, означающие попадания в мишень соответственно при первом, втором и третьем выстрелах. Событие A выражается так

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

где $\overline{A}_1 - \overline{A}_3$ – события, противоположные соответственно событиям $A_1 - A_3$.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, получим

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$$

$$= P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

б) Пусть событие B – хотя бы одно попадание в мишень, тогда

$$B = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Но легче подсчитать вероятность противоположного события $\overline{B}$ – ни одного попадания при трёх выстрелах:

$$\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

Тогда $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

в) Пусть событие C равно двум попаданиям, тогда

$$C = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3,$$

$$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41.$$

Задача 3

По каналу связи передаётся один из двух возможных сигналов x_1 или x_2. Сигнал x_2 передаётся в среднем в два раза чаще, чем сигнал x_1. Из-за наличия помех возможны искажения: вместо сигнала x_1 на приёме может быть получен сигнал x_2 и наоборот. Свойства канала связи таковы, что сигнал x_1 подвергается искажениям в 10 %, а сигнал x_2 – в 20 % случаев. Предположим, что получен сигнал x_1. Какова вероятность, что передан этот же сигнал?

Решение

Введём обозначения:

событие A – передан сигнал x_1;

событие B – получен сигнал x_1.

Тогда событие $\overline{A}$ – передан сигнал x_2. Событие B может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) A и $\overline{A}$.

По условиям задачи:

$$P(A) = \frac{1}{3}; \quad P(\overline{A}) = \frac{2}{3}.$$

Вероятность того, что получен сигнал x_1, при условии, если передали этот же сигнал:

$$P(B/A)=0{,}9.$$

Вероятность того, что получен сигнал x_1, если передали сигнал x_2:

$$P(B/\overline{A})=0{,}2.$$

Искомую вероятность $P(A/B)$ находим по формуле Бейеса

$$P(A/B)=\frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(A)\cdot P(B/A)+P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9+\frac{2}{3}\cdot 0{,}2}\approx 0{,}692.$$

Задача 4

"n" стрелков независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для каждого стрелка равна $p=0{,}004$. Определить количество стрелков, которое потребуется для поражения цели с вероятностью не меньшей, чем $P=0{,}98$.

Решение

Пусть событие A – поражение цели стрелками, тогда $\overline{A}$ – промахи всех стрелков. Так как выстрелы производятся независимо друг от друга, то по теореме умножения вероятностей

$$P(\overline{A})=(1-p)^n.$$

а вероятность наступления события A

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-p)^n.$$

По условию задачи необходимо, чтобы

$$1-(1-p)^n\geq P$$

или

$$1-P\geq(1-p)^n.$$

Отсюда

$$\lg(1-P) \geq n \cdot \lg(1-p)$$

и, с учетом того, что $\lg(1-p) < 0$:

$$n \geq \frac{\lg(1-P)}{\lg(1-p)}.$$

При $p = 0{,}004$ и $P = 0{,}98$ получим

$$n \geq \frac{\lg 0{,}02}{\lg 0{,}996} \approx 976.$$

Ответ

Для поражения цели требуется не менее 976 стрелков.

Задача 5

Из партии, состоящей из 50 изделий, среди которых имеется 5 бракованных, выбраны случайным образом четыре изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке, и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

Решение

Возможными значениями случайной величины X будут

$x_1 = 0$ (в выборке нет бракованных изделий);

$x_2 = 1$ (в выборке одно бракованное изделие);

$x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 4$ (все четыре выбранных изделия бракованные).

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет эти значения.

а) $x_1 = 0$.

Согласно классическому определению вероятности, вероятностью события A называется отношение числа благоприятных случаев m к общему числу случаев n:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Общее число состоит из возможных комбинаций, которые можно образовать из 50 изделий по четыре, т. е.

$$n=C_{50}^{4},$$

где число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Из этого числа случаев благоприятными являются только те выборки, которые не содержат бракованных изделий. Так как имеется 45 небракованных изделий, то число благоприятных случаев – это число способов, которыми можно выбрать 4 изделия из 45, т. е.

$$m=C_{45}^{4},$$

тогда для $x_1=0$

$$p_1=\frac{C_{45}^4}{C_{50}^4}=\frac{\frac{45!}{4!\cdot 41!}}{\frac{50!}{4!\cdot 46!}}=\frac{42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}=0{,}64696.$$

б) $x_2=1$.

Общее число случаев $n=C_{50}^{4}$.

Благоприятными случаями являются те выборки, которые содержат одно бракованное изделие и три небракованных.

Число способов, которыми можно выбрать одного бракованное изделие из пяти, равно числу сочетаний из 5 по 1, т. е. C_5^1.

Кроме того, число способов, которыми можно выбрать остальные три небракованных изделия из 45, равно C_{45}^3. А так как каждое выбранное бракованное изделие может оказаться в одной выборке с каждой из троек небракованных

изделий, то число всех выборок по 4 изделия, в которых одно бракованное, а три небракованных, равно: $C_5^1 \cdot C_{45}^3$, тогда

$$p_2 = \frac{C_5^1 \cdot C_{45}^3}{C_{50}^4} = 0{,}30807.$$

в) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное 2, равна $(x_3 = 2)$

$$p_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_{45}^2}{C_{50}^4} = 0{,}043.$$

г) $x_4 = 3$.

$$p_4 = \frac{C_5^3 \cdot C_{45}^1}{C_{50}^4} = 0{,}00195.$$

д) $x_5 = 4$.

$$p_5 = \frac{C_5^4 \cdot C_{45}^0}{C_{50}^4} = 0{,}00002.$$

Получим следующий ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	0,64696	0,30807	0,043	0,00195	0,00002

Определяем математическое ожидание (округлим до 0,001).

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}647 + 1 \cdot 0{,}308 + 2 \cdot 0{,}043 + 3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0 = 0{,}398 \approx 0{,}4.$$

Дисперсию вычислим по формуле

$$D(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - (M(X))^2.$$

Для нахождения дисперсии составим ряд распределения для величины x^2 (вероятности округлены до 0,001)

X^2	0	1	4	9	16
P	0,647	0,308	0,043	0,002	0

тогда

$$D(X) = 0 \cdot 0{,}647 + 1 \cdot 0{,}308 + 4 \cdot 0{,}043 + 9 \cdot 0{,}002 + 16 \cdot 0 - (0{,}4)^2 \approx 0{,}338 \approx 0{,}34.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ рассчитывается по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}34} \approx 0{,}58.$$

Найдём функцию распределения $F(x)$. Согласно определению, функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем заданное x:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

1. Пусть $x \le 0$; так как число изделий отрицательным быть не может, то для любого $x \le 0$ (включая 0) $F(x) = 0$.
2. Пусть $0 < x \le 1$ (например, $x = 1/2$):

$$F(x) = P\{X = 0\} = 0{,}64696.$$

3. Пусть $1 < x \le 2$ (например, 1,75)

$$F(x) = P\{X < 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0{,}64696 + 0{,}30807 = 0{,}95503.$$

Очевидно, что и $F(2) = 0{,}95503$.

4. Пусть $2 < x \le 3$, тогда

$$F(x) = P\{X < 3\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} + P\{x = 2\}$$

$$= 0{,}95503 + 0{,}043 = 0{,}99803.$$

5. Пусть $3 < x \le 4$: $F(x) = P\{X < 4\} = 0{,}99803 + 0{,}00195 = 0{,}999$.

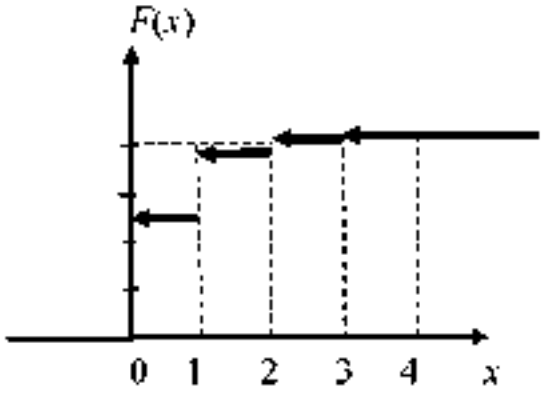
Тогда и $F(4) = 0{,}99998$.

6. Пусть $x > 4$: $F(x) = 0{,}99998 + 0{,}00002 = 1$.

Итого:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}64696, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}95503, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}99803, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}99998, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Изобразим графические функции $F(x)$:



Задача 6

Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X)$ и $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины, если $p_1 = 0{,}3$; $M(X) = 3{,}4$; $D(X) = 0{,}84$.

Решение

Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что X примет x_2, равна $1 - 0,3 = 0,7$.

Напишем закон распределения X:

X	x_1	x_2
P	0,3	0,7

Для отыскания x_1 и x_2 надо составить два уравнения, связывающие эти числа. С этой целью выразим известные математическое ожидание и дисперсию через x_1 и x_2

Найдем $M(X)$

$$M(X) = 0,3x_1 + 0,7x_2.$$

По условию: $M(X) = 3,4$, следовательно,

$$0,3x_1 + 0,7x_2 = 3,4 \qquad (1)$$

Напишем закон распределения X^2

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,3	0,7

Найдем $M(X^2)$

$$M(X^2) = 0,3x_1^2 + 0,7x_2^2.$$

Формула для нахождения дисперсии имеет вид

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Подставляя, $D(X) = 0,84$, получим

$$0,3x_1^2 + 0,7x_2^2 - (3,4)^2 = 0,84$$

или

$$0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 12{,}4. \qquad (2)$$

Объединяя уравнения (1) и (2), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 3{,}4 \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 12{,}4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 34 \\ 3x_1^2 + 7x_2^2 = 124. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$x_1 = \frac{34 - 7x_2}{3}.$$

Подставляя это значение x_1 во второе уравнение, получим после упрощения

$$5x_2^2 - 34x_2 + 56 = 0.$$

Корнями этого квадратного уравнения будут числа $x_2' = 2{,}8$ и $x_2'' = 4$.
Для $x_2' = 2{,}8$ находим

$$x_1' = \frac{34 - 7 \cdot 28}{3} = 4{,}8.$$

Для $x_2'' = 4$ находим

$$x_1'' = \frac{34 - 7 \cdot 4}{3} = 2.$$

Но по условию задачи $x_1 < x_2$, поэтому остаётся принять, что $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид

X	2	4
P	0,3	0,7

Задача 7

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$. Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(\frac{\pi}{16};\frac{\pi}{12}\right)$, если

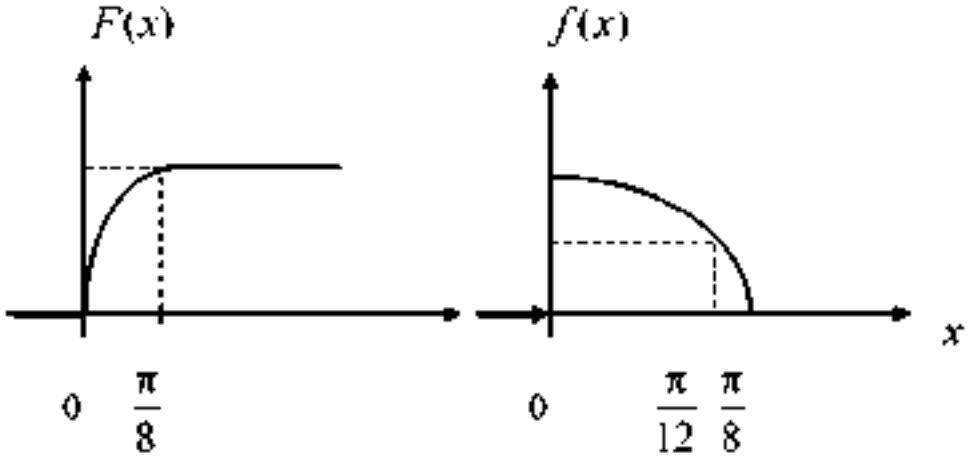
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<0\\ \sin 4x, & \text{при} \quad 0\le x\le \frac{\pi}{8}\\ 1, & \text{при} \quad x>\frac{\pi}{8}\end{cases}$$

Решение

Для нахождения плотности вероятности $f(x)$ воспользуемся формулой $f(x)=F'(x)$. Тогда

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<0\\ 4\cos 4x, & \text{при} \quad 0<x\le \frac{\pi}{8}\\ 0, & \text{при} \quad x>\frac{\pi}{8}.\end{cases}$$

Графики $F(x)$ и $f(x)$ таковы:



Для нахождения математического ожидания используем формулу

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)\,dx,$$

где a и b – границы интервала, которому принадлежат все возможные значения X.

Подставив $a=0;\quad b=\frac{\pi}{8};\quad f(x)=4\cos 4x$, получим

$$M(X)=\int_0^{\pi/8} x\cdot 4\cos 4x dx=4\int_0^{\pi/8} x\cdot\cos 4x dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x; & dv=\cos 4x dx \\ du=dx; & v=\frac{1}{4}\sin 4x \end{array}\right|=$$

$$=4x\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\pi/8}-4\int_0^{\pi/8}\frac{1}{4}\sin 4x=$$

$$=x\sin 4x\,{}_0^{\pi/8}-4\int_0^{\pi/8}\sin 4x dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{4\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\pi/8}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X),$$

тогда

$$D(X)=4\int_a^b x^2\cos 4x dx-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=\begin{matrix} u=x^2, & \cos 4xdx=dv \\ du=2xdx, & v=\frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix}=$$

$$=4\frac{1}{4}\sin 4x\cdot x^2\Big|_0^{\pi/8}-4\frac{1}{4}\int_0^{\pi/8}2x\sin 4x-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=x^2\sin 4x\Big|_0^{\pi/8}-2\int_0^{\pi/8}x\sin 4xdx-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=\left|\begin{matrix} x=u, & \sin 4xdx=dv \\ dx=du, & v=-\frac{1}{4}\cos x \end{matrix}\right|=$$

$$\frac{\pi^2}{64}-2(-\frac{1}{4}x\cos 4x\Big|_0^{\pi/8}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/8}\cos 4xdx)-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{64}-2\frac{1}{16}\sin 4x\Big|_0^{\pi/8}--\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{64}-\frac{1}{8}-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi-3}{16}.$$

Вероятность того, что заданная величина X примет значения, заключённые в интервале $\left(\frac{\pi}{16};\frac{\pi}{12}\right)$, находится по формуле

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

тогда

$$P\left(\frac{\pi}{16}<X<\frac{\pi}{12}\right)=\sin 4x\Big|_{\pi/16}^{\pi/12}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}159.$$

Задача 8

Найти вероятность того, что в четырёх независимых испытаниях событие A повторится:

а) ровно два раза;

б) не менее двух раз;

в) не более двух раз;

г) хотя бы один раз,

если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,4.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой Бернулли: вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события $p(0<p<1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q=1-p$; тогда вероятность того, что в четырёх испытаниях событие A наступит:

а) ровно два раза, равна

$$P_4(2)=C_4^2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}0.16\cdot 0{,}36=0{,}3456;$$

б) не менее двух раз:

$$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 0{,}3456 + 0{,}1536 + 0{,}0256 = 0{,}5248;$$

в) не более двух раз:

$$P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = 1 - P_4(3) - P_4(4) =$$

$$= 1 - 0{,}1536 - 0{,}0256 = 0{,}8208;$$

г) хотя бы один раз:

$$P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) =$$

$$= 1 - C_4^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^4 = 1 - 0{,}1296 = 0{,}8704.$$

Задача 9

Известны математическое ожидание $a = 7$ и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (4, 13).

Решение

Вероятность того, что нормально распределённая величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Подставив $\alpha = 4$, $\beta = 13$, $a = 7$ и $\sigma = 3$, получим

$$P(4 < X < 13) = \Phi\left(\frac{13 - 7}{3}\right) - \Phi\left(\frac{4 - 7}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1).$$

По таблице значений функций Лапласа (смотреть, например [4]. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, прил. 2) находим.

$$\Phi(2) = 0{,}4772; \quad \Phi(1) = 0{,}3413,$$

тогда

$$P(4 < X < 13) = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185.$$

Задача 10

В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на четвёртом этаже;

B – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение

Общее число случаев $n = 6^3 = 216, \quad P(A) = \dfrac{1}{216}$. Вероятность события B вшестеро больше вероятности события A (так как этажей, на которых можно выйти, 6); $m = 6$ и $\mathrm{P(B)} = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$. Для события C число способов, которыми можно распределить трёх пассажиров по шести этажам: $m = C_6^3 = 20$;

$$P(C) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54.}$$

Задача 11

Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Решение

Вероятность выигрыша для игроков обозначим p_1 и p_2.

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{2}{3}.$$

Имеем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{4}, S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{3}.$

$$p_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{1}{3},$$

где $b_1 = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{4}.$

Другое решение:

$$p_1 + p_2 = 1, \; p_2 = \frac{1}{2} p_1, \quad \text{т.е.} \quad p_1 = \frac{2}{3}, \; p_2 = \frac{1}{3}.$$

Задача 12

Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-x^2+2x+3}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $-\frac{1}{3} < X < \frac{4}{3}$.

Решение

Используем формулы для нормального распределения. Плотность нормального распределения: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Преобразуем заданную функцию:

$$f(x) = \gamma e^{-((x^2-2x+1)-1-3)} = \gamma e^{-(x-1)^2+4} = \gamma e^4 e^{-(x-1)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$2\sigma^2 = 1, \quad D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma e^4 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}; \quad \gamma = \frac{1}{e^4\sqrt{\pi}};$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(\sqrt{2}(x-1));$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right);$$

$$P\left(-\frac{1}{3} < X < \frac{4}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{-\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \Phi\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}4714) + \Phi(1{,}8856) = 0{,}1808 + 0{,}4706 = 0{,}6514.$$

Задача 13

Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)^2}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \bar{\in} [a, b]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной x, если $a = 4$, $b = 6$.

Решение

$$Y = \varphi(x) = x^2, \qquad M(Y) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx,$$

$$M(Y) = \int_4^6 x^2 \frac{(x-4)}{2} dx = \frac{86}{3};$$

$$D(Y) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - M^2(Y);$$

$$D(Y) = \int_4^6 x^4 \frac{(x-4)}{2} dx - \left(\frac{86}{3}\right)^2 = \frac{1084}{45} \approx 24.1.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № 1

1. Два брата входят в состав двух различных спортивных команд, состоящих из 12 человек каждая. В двух урнах имеется по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат номер 6.

2. Радиолампа может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий, соответственно, 0,1; 0,2; 0,5. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

3. Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей 6 очков появится хотя бы один раз?

4. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя:

а) не менее 20 конденсаторов;

б) менее 28 конденсаторов;

в) от 14 до 26 конденсаторов.

5. Опыт состоит из трёх бросаний монеты, из которых герб выпадает с вероятностью p = 0,5. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения.

Вариант № 2

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два; в) только один вопрос.

2. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

3. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в соотношении 5/3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажён.

4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах, стрелок поразит мишень 8 раз. Результат, полученный применением локальной теоремы Лапласа, сравнить с результатом, полученным по формуле Бернулли.

5. Опыт состоит из четырех независимых бросаний монеты, в каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0{,}5$. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения.

Вариант № 3

1. В каждой из двух урн находится 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется чёрным.

2. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

3. В лотерее 1000 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 500 рублей, на 10 билетов – по 100 рублей, на 50 билетов – по 20 рублей, на 100 билетов – по 5 рублей, остальные билеты невыигрышные. Некто покупает 1 билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.

4. Для определения содержания полезных компонентов на металлургическом комбинате проводится опробование вагонов с товарной рудой. Найти вероятность того, что из 400 вагонов опробование пройдут ровно 80 вагонов, если из 5 вагонов опробуется только один.

5. Производится 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. Для случайного числа попаданий построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения, г) найти математическое ожидание.

Вариант № 4

1. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях производят по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадает в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

2. Наборщик пользуется двумя кассами. В первой кассе – 90 %, а во второй – 80 % отличного шрифта. Найти вероятность того, что любая извлечённая литера из наудачу взятой кассы будет отличного качества.

3. Студент знает 70 из 90 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 3 вопроса.

4. Имеются 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включённым в течение $p = 0{,}8$ всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 80 станков?

5. Производится взрывание пяти скважин. Вероятность высокой эффективности объёма взорванной массы одной скважины равна 0,7. Построить ряд распределения эффективности объёма взорванной массы и найти её математическое ожидание.

Вариант № 5

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

2. Автомат штампует детали. Вероятность того, что за один час не будет выпущено ни одной нестандартной детали, равна 0,9. Найти вероятность того, что будут стандартными все детали, выпущенные за 3 часа.

3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин как 3/2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

4. Из цифр 1 – 5 выбирается наудачу одна, затем из оставшихся также наудачу выбирается вторая. Найти вероятности следующих событий:

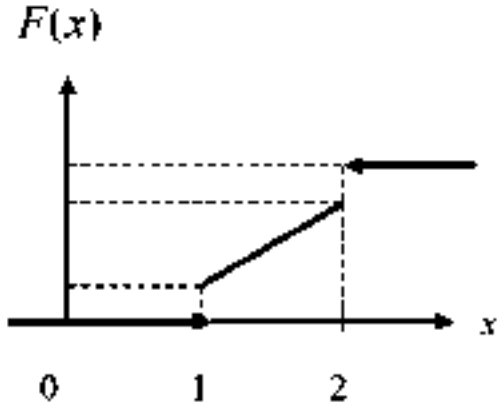
событие A – первая цифра чётная;

событие $Б$ – вторая цифра чётная;

событие B – обе цифры чётные;

событие D – хотя бы одна цифра чётная.

5. Случайная величина X имеет функцию распределения, заданную графически.



Значения $x=1$ и $x=2$ имеют отличные от нуля вероятности:

$$P\{x=1\}=0{,}25,$$
$$P\{x=2\}=0{,}75,$$

при $x<1 \quad F(x)=0,$ при $x>2 \quad F(x)=1.$

На участке $1\le x\le 2 \quad F(x)$ изменяется по линейному закону. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Вариант № 6

1. Для сигнализации об аварии установили три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9; второе – 0,95 и третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

2. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02; для второго – 0,03; для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего – в два раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

3. Какова вероятность того, что квадрат выбранного наудачу целого числа будет оканчиваться цифрой 1.

4. В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий окажется стандартных не менее 84.

5. Производятся последовательные испытания приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

Вариант № 7

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1400 испытаниях событие наступит ровно 28 раз.

2. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,06, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна.

3. Из колоды в 52 карты вынимается наудачу три карты. Найти вероятность того, что это тройка, семёрка и туз.

4. Монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность следующих событий:
событие A – все пять раз появится герб;
событие $Б$ – хотя бы один раз появится герб;
событие B – герб появится ровно два раза.

5. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб.; четыре выигрыша по 25 руб.; десять – по 10 руб.; остальные невыигрышные. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета (случайная величина X – стоимость возможного выигрыша) и найти математическое ожидание.

Вариант № 8

1. В партии из 100 деталей имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 5 изделий, наудачу взятых из этой партии, только 2 окажутся дефектными.

2. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причём из них в первом ящике 17, а во втором – 15 нестандартных деталей. Из второго ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из первого ящика будет стандартной.

3. Данное предприятие в среднем даёт 21 % продукции высшего сорта и 70 % продукции первого сорта. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта.

4. Вероятность того, что в результате четырёх независимых опытов событие A произойдёт хотя бы один раз, равна 0,5. Определить вероятность появления события A при одном опыте, если она во всех опытах остаётся неизменной.

5. Игральная кость брошена 2 раза. Написать ряд распределения числа появлений «тройки» и найти математическое ожидание.

Вариант № 9

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

2. Две перфораторщицы набили по одинаковому комплекту перфокарт, вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05, для второй эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица.

3. Два студента ищут нужную им книгу в букинистических магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом, равна 0,6, а вторым – 0,7. Какова вероятность того, что только один из студентов найдет книгу?

4. С помощью карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово «ракета»?

5. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить ряд и многоугольник распределения вероятностей числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

Вариант № 10

1. На трёх станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляется 10 %, на втором – 30 %, на третьем – 60 % всех деталей. Для каждой детали вероятность быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 – если она изготовлена на втором станке; 0,9 – на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

2. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено 2 залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из 1-го орудия равна 0,3, а из второго – 0,4.

3. На столе лежат 36 экзаменационных билетов с номерами 1, 2, …, 36. Преподаватель берёт три любых билета. Какова вероятность того, что они из первых четырёх?

4. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна 0,6. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

5. Энергосистема состоит из четырёх блоков, работающих независимо. Вероятность исправного состояния блоков в течение времени T равна 0,6. Рассматривается случайная величина X – число блоков, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Построить ряд распределения, функцию распределения величины X. Найти её математическое ожидание.

Вариант № 11

1. Из трёх орудий произведены залпы по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,9, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадает в цель.

2. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат даёт 0,2 % брака, а второй – 0,3 % брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 3000, а со второго 2000 деталей.

3. На экзамене студенту предлагается 20 билетов. В каждом билете 3 вопроса. Из 60 вопросов, вошедших в билеты, студент знает 50. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять из известных ему вопросов?

4. Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа от каждого из которых равна $p = 0{,}0005$. Какова вероятность отказа: а) одного элемента; б) хотя бы одного элемента.

5. В техническом устройстве работают независимо 2 блока. Вероятность безотказной работы первого блока 0,4; второго – 0,7. Случайная величина X – число работающих блоков. Построить ряд распределения, многоугольник распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант № 12

1. Из 50 проб химического состава рудной массы в 35 пробах обнаружено наличие тяжелых металлов. Найти вероятность того, что тяжёлые металлы содержатся в двух взятых наудачу пробах.

2. Детали проходят три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02; на второй – 0,03; на третьей – 0,02. Найти вероятность получения небракованной детали после трёх операций, предполагая, что получение брака на отдельных операциях являются событиями независимыми.

3. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1 : 3 : 6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9; средний – 0,3; мелкий – 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьёт её?

4. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Найти $M(X); D(X); \sigma(X)$. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

Вариант № 13

1. В каждой из двух урн содержатся 3 чёрных и 7 белых шаров. Из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в первую урну, после чего из первой урны наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется белым.

2. Охотники Александр, Виктор и Павел попадают в летящую утку с вероятностями, соответственно равными: 2/3, 3/4 и 1/4. Все одновременно стреляют по пролетающей утке. Какова вероятность того, что утка будет убита?

3. Детали могут быть изготовлены с применением двух технологий: в первом случае деталь проходит 3 технологических операции, вероятность получения брака при каждой из которых равны, соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Во втором случае имеются 2 операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,3. Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если в первом случае вероятность получения продукции первого сорта для небракованной детали равна 0,9, а во втором – 0,8.

4. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что в течение 1 минуты не будет ни одного вызова?

5. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 руб., четыре – по 50 руб., 5 – по 40 руб. и десять по 10 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета (случайная величина X – стоимость возможного выигрыша). Найти $M(X), D(X)$, составить функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

Вариант № 14

1. Три автомата изготовляют детали, которые поступают на общий контейнер. Производительность первого, второго и третьего автоматов относится как 2/3/5. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, отличного качества, равна 0,9, для второго и третьего автоматов эти вероятности, соответственно, равны 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь окажется отличного качества.

2. В записанном номере телефона оказалась стёртой последняя цифра. Какова вероятность того, что, наудачу набирая последнюю цифру телефонного номера, Вы сразу позвоните нужному лицу? Вычислить эту вероятность, предлагая, что Вы вспомнили, что последняя цифра: а) нечётная; б) не больше 5.

3. Производится выстрел по трём складам боеприпасов. Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй – 0,008, в третий – 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

4. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 родившихся детей мальчиков и девочек будет поровну.

Вариант № 15

1. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии первое устройство сработает, равна 0,8, для второго и третьего устройства эти вероятности, соответственно, равны 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработают: а) только одно устройство, б) только два устройства; в) все три устройства.

2. На сборку поступают детали с трёх автоматов. Первый автомат даёт 0,3 % брака, второй – 0,2 % брака, третий – 0,4 % брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступает 1000 деталей, со второго – 2000, а с третьего – 2500.

3. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделён на 6 секторов, отмеченных определёнными цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, когда цифры образуют определённую комбинацию. Какова вероятность открыть замок, установив определённую комбинацию цифр?

4. Игральная кость брошена 3 раза. Написать ряд распределения числа появлений шестёрки. Найти $M(X), D(X)$, составить функцию распределения $F(x)$.

5. Вероятность изделия некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10000 наудачу взятых изделий бракованных окажется ровно 40?

Вариант № 16

1. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,96. Найти вероятность двух попаданий при трёх выстрелах.

2. На сборку поступают детали с четырёх автоматов. Первый даёт 40 %, второй – 30 %, третий – 20 %, а четвёртый 10 % всех деталей данного типа, которые поступают на сборку. Первый автомат даёт 0,1 % брака, второй – 0,2 %, третий – 0,25 %, четвёртый – 0,5 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали.

3. Каждая из букв Т, М, Р, О, Ш написана на одной из пяти карточек. Карточки перемешиваются и раскладываются наугад. Какова вероятность того, что образуется слово «ШТОРМ»?

4. Случайная величина X принимает только два значения + С и - С, каждые с вероятностью 0,5. Найти дисперсию этой случайной величины.

5. На склад магазина поступают изделия, из которых 80 % оказывается высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 взятых наугад изделий не менее 85 изделий окажутся высшего сорта.

Вариант № 17

1. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трёх выстрелах равна 0,992. Найти вероятность четырёх попаданий при пяти выстрелах.

2. Однотипные детали поступают на сборку с двух автоматов. Первый автомат даёт 80 % необходимых для сборки деталей, а второй – 20 %. Вероятность детали быть бракованной, если она изготовлена на первом автомате, равна 1 %, если на втором – 4 %. Поступившая на сборку деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена: а) на первом автомате; б) на втором автомате?

3. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятность того, что все цифры различны.

4. При ведении горных работ происходит загрязнение атмосферы послегазовыми выбросами в 9 из 10 случаев. Найти вероятность того, что при 50 массивных взрывах загрязнение атмосферы наступит не более, чем в 40 случаях.

5. В урне находится 15 белых, 10 чёрных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что: а) при первом испытании появится белый шар (событие А), при втором – чёрный (событие В) и при третьем – синий (событие С); б) при первом испытании появится белый шар, а при втором и третьем – чёрные шары.

Вариант № 18

1. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 120 раз в 144 испытаниях.

2. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3; второй – 0,4; третий – 0,7; четвёртый – 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего.

3. Литьё в болванках поступает с двух заготовительных цехов – 70 % из первого и 30 % из второго. При этом материал первого цеха имеет 10 % брака, а второго – 20 %. Найти вероятность того, что одна наудачу взятая болванка без дефектов.

4. Случайная величина принимает только два значения – +10 и -10, каждое с вероятностью 0,5. Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

5. В урне 15 белых и 20 чёрных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что: 1) оба шара будут чёрными; 2) оба шара будут разного цвета.

Вариант № 19

1. Партия деталей изготовлена двумя рабочими. Первый рабочий изготовил 2/3 партии, второй – 1/3 партии. Вероятность брака для первого рабочего 1 %, для второго – 10 %. На контроль взяли одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

2. Из зенитного орудия производится три выстрела по снижающемуся самолёту. Вероятность попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны, соответственно, 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность не менее двух попаданий в самолёт.

3. Найти функции распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, если известен ряд распределения случайной величины X:

X	2	3	5
P	0,3	0,1	0,6

4. На восьми одинаковых карточках написаны, соответственно, числа 2, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократится.

5. Имеется три одинаковых урны, из которых в первой находится два белых и два чёрных шара, во второй и третьей – по три белых и четыре черных шара. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Найти вероятность того, что шар извлечён: а) из второй урны; б) из первой урны.

Вариант № 20

1. Сборщик получил 3 ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором – 50, из них 10 окрашенных; в третьем – 30, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной.

2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Вычислить вероятность того, что хотя бы два экзамена будут сданы.

3. Производится два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0{,}4;\ p_2 = 0{,}3$. а) записать ряд распределения случайной величины X – общего числа попаданий при двух выстрелах; б) найти математическое ожидание общего числа попаданий при двух выстрелах; в) найти дисперсию и построить многоугольник распределения.

4. Из колоды карт (36) наудачу вынимается две карты. Найти вероятность того, что среди них одна «дама» и один «король».

5. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,6. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,7. На обоих станках изготовлено по две детали. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

Вариант № 21

1. Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных изделий. Найти вероятность того, что среди трёх наугад вынутых из ящика деталей нет дефектных.

2. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, равна 0,6. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

3. Имеется 5 урн: в двух урнах – по 2 белых и 1 чёрному шару; в одной 10 чёрных и ещё в двух – по 3 белых и 1 чёрному шару. Найти вероятность того, что вынутый из наудачу взятой урны шар окажется белым.

4. Из колоды в 36 карт вынимается наудачу две карты. Найти вероятность того, что это шестёрка и семёрка.

5. В лотерее 100 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 25 руб.; на 5 билетов – 20 руб.; на 10 билетов – 5 руб.; на 20 билетов – 1 руб.; остальные билеты невыигрышные. Найти вероятность выигрыша не менее 5 руб. на 1 билет. Составить ряд распределения случайной величины X – стоимости выигрыша на 1 билет. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Билет № 22

1. Чему равна вероятность того, что дни рождения трёх человек придутся на разные месяцы: июнь, июль и август? Вероятности попадания дня рождения на данный месяц считаются равными для всех месяцев года.

2. Студент знает 40 вопросов из 50. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает:

а) все три вопроса; б) только два вопроса.

3. Имеются три одинаковые урны: первая содержит 1 белый и 6 чёрных шаров; вторая – 3 белых и 2 чёрных шара; третья – 7 белых и 8 чёрных шаров. Из одной урны, наудачу выбранной, вынут шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынут из первой урны?

4. Прибор, обладающий надёжностью (вероятностью безотказной работы за время t), равной $p = 0{,}8$, представляется недостаточно надёжным. Для повышения надёжности он дублируется ещё одним точно таким же работающим прибором. Если первый прибор за время t отказал, происходит автоматическое переключение на дублирующий. Приборы отказывают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что система из двух приборов прорабатывает безотказно время t.

5. Электронная аппаратура имеет три дублирующих линии. Вероятность выхода из строя каждой линии за время гарантированного срока работы аппаратуры равна 0,1. Найти закон распределения случайного числа вышедших из строя линий за время гарантийного срока, если выход из строя одной линии не зависит от рабочего состояния других линий. Найти $M(X), \sigma(X)$.

Вариант № 23

1. При разведке медноколчеданных месторождений в 7 из 10 случаев опознавательным признаком может служить присутствие ярозита или барита. Найти вероятность присутствия минералов хотя бы в одном из трёх месторождений.

2. Студент знает 25 вопросов из 30. Каждый экзаменационный билет содержит два вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) оба вопроса; б) хотя бы один вопрос.

3. В урне A белых, B чёрных и C красных шаров. Наугад вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары будут разных цветов.

4. Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 2 чёрных и по 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 чёрный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечён из урны, содержащей 5 белых шаров?

5. Противник стремится сорвать связь, создавая помехи в двухчастотных диапазонах со средними частотами f_1 и f_2. С этой целью мешающий передатчик настраивается попеременно на частоты f_1 и f_2 через равные промежутки времени. Вероятность сбоя от помехи на частоте f_1 составляет 0,3, а на частоте f_2 – 0,6. Какова вероятность того, что связь будет сорвана?

Вариант № 24

1. При установке одного пылеуловителя вероятность выброса в атмосферу вредных веществ составляет 0,8. Сколько пылеуловителей нужно поставить последовательно, чтобы сократить вероятность выбросов в 1,5 раза?

2. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что две наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

3. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, переложили 1 шар в урну, содержащую 4 белых и 4 чёрных шара. Вычислить вероятность вынуть белый шар из второй урны.

4. Вероятность изделия некоторого производства оказаться доброкачественным равна 0,996. Чему равна вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий бракованных окажется ровно 5?

5. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,6. За каждое попадание стрелку засчитывается 3 очка. Построить ряд распределения числа выбитых очков и многоугольник распределения. Найти математическое ожидание.

Вариант № 25

1. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 11. Чему равна вероятность того, что первые два дня августа будут дождливыми?

2. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлено две детали, на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

3. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, причём каждый из них делает по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

4. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдёт 120, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8.

5. Производятся последовательные испытания четырёх приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9. Найти математическое ожидание $M(X)$.

Вариант № 26

1. Сборщик получил 2 коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом № 1, и три коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,9, а завода № 2 – 0,7. Из наудачу взятой коробки сборщик наудачу извлёк деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

2. Брошены две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятёрки, если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.

3. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны, соответственно, 0,4; 0,5; 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих трёх выстрелов в мишени будет одна пробоина.

4. ОТК проверяет детали на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) три первых проверенных изделия стандартны; 2) нестандартным окажется третье по порядку проверки изделие; 3) из трёх проверенных изделий только одно стандартно.

5. Дискретная случайная величина X задана следующим рядом распределения:

X	0	1	3	4
P	0,1	0,2	0,6	0,1

Найти функцию распределения и построить её график. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Вариант № 27

1. В урне A белых и B черных шаров. Из урны вынимается шар, отмечается его цвет, и шар возвращается в урну. После этого из урны берётся ещё один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шары – белые.

2. Вероятность попасть в цель равна 0,01. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы иметь хотя бы одно попадание: а) с вероятностью, не меньшей 0,5; б) с вероятностью, не меньшей 0,9?

3. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что из 300 родившихся детей будут 160 мальчиков.

4. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно, равны 0,5; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. Найти вероятность того, что он принадлежит второй группе.

5. Вероятность появления случайного события A в одном испытании равна 0,6. Проведено два независимых испытания. Составить ряд распределения случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях и найти математическое ожидание и дисперсию.

Вариант № 28

1. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится 76 раз.

2. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подмётки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 1 % каблуков, 4 % подмёток и 5 % верхов. Произведённые каблуки, подмётки и верхи случайным образом комбинируются в цехе, где и шьются ботинки. Найти вероятность не быть испорченным одному ботинку. Какой процент ботинок будет испорченным, т. е. будет содержать дефекты?

3. По танку производятся два одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом – 0,5, при втором – 0,8. Для вывода танка из строя достаточно двух попаданий. При одном попадании танк выходит из строя с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что в результате двух выстрелов танк будет выведен из строя.

4. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них три стандартные); во втором – 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали окажутся стандартными; 2) только одна из двух деталей стандартная; 3) хотя бы одна из двух деталей стандартная.

5. Случайная величина задана законом распределения:

X	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

Вариант № 29

1. Сколько нужно передать одинаковых сообщений, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что сообщение принято не менее одного раза правильно, если вероятность правильного приёма сообщения составляет 0,5?

2. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предполагается упрощённая схема испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, и 0,05 для изделий, которые ему не удовлетворяют. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?

3. В студии телевидения имеется 3 телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включена хотя бы одна камера; б) включена только одна камера; в) включены все три камеры; г) выключены все камеры.

4. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причём в каждой партии по два изделия бракованных. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность бракованного изделия из второй партии.

5. Найти математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть при одном бросании игральной кости. Записать закон распределения в виде таблицы. Найти $D(X)$.

Вариант № 30

1. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна 0,64. Произведено144 испытания. Найти вероятность того, что событие A появится не менее 100 раз.

2. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

3. В урне 5 белых и 7 чёрных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

4. В батарее из 10 орудий одно непристрелянное. Вероятность попадания из пристрелянного орудия равна 0,73, а из непристрелянного – 0,23. Производили один выстрел и промахнулись. Найти вероятность того, что выстрел произведён из непристрелянного орудия.

5. Построить ряд распределения, многоугольник распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания p = 0,3. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Задание 6

Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причём $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины, если:

Таблица 1

Данные для нахождения закона распределения случайной величины

Номер варианта	p_1	$M(X)$	$D(X)$
1	0,2	3,8	0,16
2	0,1	3,9	0,09
3	0,3	3,7	0,21
4	0,5	3,5	0,25
5	0,7	3,3	0,21
6	0,9	3,1	0,09
7	0,9	2,2	0,36
8	0,8	3,2	0,16
9	0,6	3,4	0,24
10	0,4	3,6	0,24
11	0,3	5,4	0,84
12	0,1	4,8	0,36
13	0,3	4,1	1,89
14	0,5	4,5	2,25
15	0,7	2,9	1,89
16	0,9	1,4	1,44
17	0,3	2,4	0,84
18	0,9	3,3	0,81
19	0,3	2,7	0,21
20	0,4	2,2	0,96

Продолжение таблицы 1

Номер варианта	p_1	$M(X)$	$D(X)$
21	0,9	4,1	0,09
22	0,7	3,9	1,89
23	0,1	5,8	0,36
24	0,2	2,6	0,64
25	0,1	1,9	0,09
26	0,3	3,1	1,89
27	0,5	3	1
28	0,4	2,6	0,24
29	0,6	3,2	2,16
30	0,6	3,6	3,84

Задание 7

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$.

Таблица 2

Данные для выполнения задания № 7

Номер вар.	Функция $F(x)$	Номер вар.	Функция $F(x)$
1	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le \frac{3}{4}\pi \\ \cos 2x, & \frac{3}{4}\pi < x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{3}{4}\pi;\ \frac{5}{6}\pi\right)$	2	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x^2, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$
3	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1 \\ \frac{x^2 - x}{2}, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1{,}5;\ 1{,}8)$	4	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x^3, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$
5	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 3x^2 + 2x, & \text{при } 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right)$	6	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2 \\ 0{,}5x - 1, & \text{при } 2 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $(1;\ 3)$
7	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{1}{9}x^2, & \text{при } 0 < x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;\ 2)$	8	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1;\ 2)$

Продолжение таблицы 2

Номер вар.	Функция $F(x)$	Номер вар.	Функция $F(x)$
9	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$	10	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 2\sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right)$
11	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2 \\ \frac{x+2}{4}, & \text{при} -2 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(-1; 1)$	12	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$
13	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1-\cos x}{2}, & 0 \le x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$	14	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{25}, & \text{при} 0 < x \le 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $(4; 5)$

Продолжение таблицы 2

Номер вар.	Функция $F(x)$	Номер вар.	Функция $F(x)$
15	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ \frac{3}{4}(x+1), & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$	16	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \sin 2x, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$
17	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 1-\cos x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$	18	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ \frac{x+1}{3}, & \text{при } -1 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(0.5;\ 1{,}5)$
19	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{36}, & \text{при } 0 < x \le 6 \\ 1, & \text{при } x > 6 \end{cases}$ $(2; 4)$	20	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{100}, & \text{при } 0 < x \le 10 \\ 1, & \text{при } x > 10 \end{cases}$ $(5; 10)$

Продолжение таблицы 2

Номер вар.	Функция $F(x)$	Номер вар.	Функция $F(x)$
21	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ \frac{x+1}{2}, & \text{при } -1 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$	22	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, & \text{при } 1 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;2)$
23	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^3}{8}, & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1;2)$	24	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{3}x, & \text{при } 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;2)$
25	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{4}x, & \text{при } 0 \le x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $(1;2)$	26	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{5}x, & \text{при } 0 \le x \le 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $(1;3)$
27	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$	28	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{2} \\ \cos 3x, & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{3};\ 0\right)$

Окончание таблицы 2

Номер вар.	Функция $F(x)$	Номер вар.	Функция $F(x)$
29	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$	30	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & \text{при } 0 \le x \le 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1; 2)$

Задание 8

Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A повторяется: а) ровно k раз; б) не менее k раз; в) не более k раз; г) хотя бы один раз, зная что в каждом испытании вероятность появления события A равна p.

Таблица 3

Данные для выполнения задания № 8

Номер варианта	n	k	p	Номер варианта	n	k	p
1	6	3	0,7	2	7	2	0,2
3	6	4	0,2	4	5	3	0,1
5	4	3	0.7	6	6	4	0,1
7	5	4	0.5	8	6	2	0,8
9	4	3	0,8	10	3	2	0,8
11	4	2	0,9	12	4	2	0,8
13	5	2	0,7	14	5	3	0.6
15	4	2	0,5	16	4	3	0.4
17	5	2	0,3	18	5	3	0,4

Окончание таблицы 3

Номер варианта	n	k	p	Номер варианта	n	k	p
19	4	2	0,3	20	4	3	0,2
21	5	2	0,1	22	5	2	0.2
23	4	3	0,3	24	3	2	0.4
25	5	3	0,5	26	6	3	0,6
27	4	2	0,7	28	5	4	0,8
29	6	4	0.9	30	6	5	0,1

Задание 9

Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α, β).

Таблица 4

Данные для выполнения задания № 9

Номер варианта	a	σ	α	β	Номер варианта	a	σ	α	β
1	2	4	6	10	2	10	4	2	13
3	9	5	5	14	4	8	1	4	9
5	7	2	3	10	6	6	3	2	11
7	5	1	1	12	8	4	5	2	11
9	3	2	3	10	10	2	5	4	9
11	2	2	1	5	12	3	2	2	6
13	4	3	3	7	14	7	3	4	8
15	6	3	5	9	16	4	1	1	5
17	4	2	2	6	18	5	2	3	7
19	5	3	4	8	20	6	3	5	9

Окончание таблицы 4

Номер варианта	a	σ	α	β	Номер варианта	a	σ	α	β
21	3	4	6	10	22	5	3	5	9
23	2	2	4	6	24	3	2	1	5
25	7	2	3	13	26	9	5	7	14
27	6	2	2	12	28	2	2	4	7
29	8	4	4	13	30	6	3	2	12

Исходные данные к расчётным заданиям № 10 – 15 приведены в таблице 5 в конце заданий.

Задание 10

Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит n; б) произведение числа очков не превосходит n; в) произведение числа очков делится на n.

Задание 11

Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных.

Задание 12

В лифт k-этажного дома вошли n пассажиров ($n< k$). Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятности того, что: а) все пассажиры выйдут одновременно на одном и том же этаже; б) все вышли на разных этажах.

Задание 13

В круге радиуса R наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны S_1 и S_2.

Задание 14

Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком p_1, вторым – p_2. Первый сделал n_1, второй – n_2 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

Задание 15

Два игрока поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадет герб. Первый бросок делает игрок A, второй – B, третий A и т. д.

Найти вероятность указанного ниже события.

Варианты 1 – 8. Выиграл A до k-ого броска.

Варианты 9 – 15. Выиграл A не позднее k-ого броска.

Варианты 16 – 23. Выиграл B до k-ого броска.

Варианты 24 – 30. Выиграл B не позднее k-ого броска.

Задание 16

Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$.

Варианты $1-8$: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, x\in[a;b],\\ 0, \quad x\overline{\in}[a;b].\end{cases}$

Варианты $9-16$: $f(x)=\begin{cases}a, x\in[\gamma;b],\\ 0, x\in[\gamma;b].\end{cases}$

Варианты $17-24$: $f(x)=\begin{cases}\gamma, x\in[a;b],\\ 0, x\overline{\in}[a;b].\end{cases}$

Варианты $25-30$: $f(x)=\begin{cases}a, x\in\left[\dfrac{b-\gamma}{2};\dfrac{b+\gamma}{2}\right],\\ 0, x\overline{\in}\left[\dfrac{b-\gamma}{2};\dfrac{b+\gamma}{2}\right].\end{cases}$

Указание

Использовать формулы равномерного распределения.

Задание 17

Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $F(x)=\gamma e^{ax^2+bx+c}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $x_1<X<x_2$.

Указание

Использовать формулы для нормального распределения.

Задание 18

Дана плотность распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь одной из указанных ниже геометрических фигур.

Варианты 1 - 15: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a;b],\\ 0, \quad x\overline{\in}[a;b];\end{cases}$

в вариантах 1 – 5: Y – площадь равностороннего треугольника со стороной x;

в вариантах 6 – 10: Y – площадь круга радиуса x;

в вариантах 11 – 15: Y – площадь квадрата со стороной x.

Варианты 16 - 31: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2}, x\in[a;b],\\ 0, \quad x\overline{\in}[a;b];\end{cases}$

в вариантах 16 – 20: Y – площадь равностороннего треугольника со стороной x;

в вариантах 21 – 25: Y – площадь круга радиуса x;

в вариантах 26 – 31: Y – площадь квадрата со стороной x.

Таблица 5

Исходные данные к расчётным заданиям

Номер варианта	Задание № 10	Задание № 11				Задание № 12		Задание № 13		
	n	*n*	*l*	*m*	*k*	*k*	*n*	*R*	S_1	S_2
1	3	10	2	4	6	6	4	11	2,25	3,52
2	4	10	2	3	6	7	4	12	2,37	3,52
3	5	10	3	5	7	8	5	13	2,49	3,52
4	6	10	3	5	6	9	5	14	2,55	1,57
5	7	11	2	5	7	10	6	11	2,27	5,57
6	8	11	3	4	8	11	4	12	2,39	5,57
7	9	11	3	5	7	12	4	13	2,51	1,57
8	10	12	3	8	5	13	3	14	2,57	3,52
9	3	12	2	8	3	14	3	11	2,29	3,52
10	4	12	2	5	4	13	4	12	2,41	3,52
11	5	9	2	4	6	12	3	13	2,53	3,52
12	6	9	3	5	6	11	3	14	2,59	5,57
13	7	9	2	3	7	10	4	15	2,5	8,7
14	8	8	2	4	5	9	4	16	2,6	8,5
15	9	8	2	5	4	8	3	11	2,2	3,5
16	10	8	3	4	5	7	3	12	2,4	3,5
17	11	10	4	6	5	6	4	13	2,5	3,5
18	12	10	5	7	7	7	4	14	2,6	1,8
19	13	10	4	6	7	8	5	15	2,7	7,9
20	14	12	4	8	6	9	5	16	2,7	8,2
21	15	8	2	3	4	10	6	11	2,3	3,5
22	16	8	2	3	5	11	4	12	2,4	3,5
23	17	8	2	4	3	12	4	13	2,5	3,5

Окончание таблицы 5

номер варианта	Задание № 10	Задание № 11				Задание № 12		Задание № 13		
	n	n	l	m	K	k	n	R	S_1	S_2
24	18	8	3	5	4	13	3	14	2,6	5,6
25	19	8	1	4	2	14	3	15	2,5	8,7
26	20	9	2	3	5	12	3	11	2,3	5,6
27	3	9	3	4	4	11	3	12	2,4	5,6
28	4	9	2	6	3	10	4	13	2,5	3,5
29	5	9	4	5	5	9	4	14	2,6	5,6
30	6	9	3	5	4	8	3	15	2,7	7,9

В первой горизонтальной строке указаны номера задач; в левом столбце – номера вариантов.

Таблица 6

Исходные данные к расчётным заданиям

Номер варианта	Задание № 14				Зад. № 15	Задание № 16				Задание № 17					Задание № 18	
	p_1	p_2	n_1	n_2	k	a	b	x_1	x_2	a	b	c	x_1	x_2	a	b
1	0,61	0,55	2	3	4	2,5	4	3	3,3	-2	8	-2	1	3	0	2
2	0,62	0,54	3	2	5	1,5	3	2	2,6	-2	4/3	-2/3	1/3	2/3	1	2
3	0,63	0,53	2	3	6	1,5	2,5	2	2,3	-2	-8	2	-3/2	-1	2	3
4	0,64	0,52	3	2	7	1	3,5	2	2,8	-4	6	2	0	3/4	2	4
5	0,65	0,51	2	3	8	-1	2	-0,7	1,1	-3	3	-2	1/2	3/2	3	5
6	0,66	0,49	3	2	9	-2	1	-1,5	0,3	-4	-6	-2	-3/4	1/4	0	2
7	0,67	0,48	2	3	10	-3	5	-2	2	-3	-3	2	-1/2	3/2	1	3
8	0,68	0,43	3	2	11	-1,5	2,5	-1	0	-3	-4	2	1/3	4/3	2	4
9	0,69	0,46	2	3	4	1	1,8	1,3	1,6	-2	-4/3	2/3	-1/3	2/3	3	5
10	0,71	0,45	3	2	5	1	2,4	1,5	2	-3	4	-2	-1/3	5/3	4	6

Окончание таблицы 6

Номер варианта	**Задание № 14**				**Задание № 15**	**Задание № 16**				**Задание № 17**					**Задание № 18**	
	p_1	p_2	n_1	n_2	***k***	***a***	***b***	x_1	x_2	***a***	***b***	***c***	x_1	x_2	***a***	***b***
11	0,72	0,44	2	3	6	2	3,5	2,5	3	-2	8	0	1	3	0	2
12	0,73	0,43	3	2	7	2	2,8	2,1	2,5	-2	1,3	0	1/3	2/3	1	2
13	0,74	0,42	2	3	8	1	2,8	-1	3	-2	-8	0	-3/2	-1	2	3
14	0,75	0,41	3	2	9	1	2,6	1,5	3	-4	6	0	0	3/4	2	4
15	0,76	0,39	2	3	10	2	3	1	3	-3	3	0	1/2	3/2	3	5
16	0,77	0,38	3	2	12	2	4,8	4,5	5	-4	-6	0	-3/4	1/4	0	2
17	0,78	0,37	2	3	5	-4	-2	-1	0	-3	-3	0	-1/2	3/2	1	3
18	0,39	0,45	3	2	6	-3	-1	-2	0	-3	-4	0	1/3	4/3	2	4
19	0,38	0,46	2	3	7	2	4	0	3	-2	-4/3	0	-1/3	2/3	3	5
20	0,37	0,47	3	2	8	1	3	0	2	-3	4	0	-1/3	5/3	4	6
21	0,36	0,48	2	3	9	1	1,5	0	0,5	-2	8	-1	1	3	0	2
22	0,35	0,49	3	2	10	-1	1,5	0	1	-4	6	1	0	3/4	1	2
23	0,34	0,51	2	3	11	-1,5	-1	-1	2	-2	-8	-1	-3/2	-1	3	4
24	0,33	0,52	3	2	4	-1,5	1	-1	1	-4	-6	-1	-3/4	1/4	2	4
25	0,32	0,53	2	3	5	0,5	1	0	3	-3	3	-1	1/2	3/2	3	5
26	0,31	0,54	3	2	6	0,2	2	0	4	-3	-4	1	1/3	4/3	3	4
27	0,29	0,55	2	3	7	0,5	3	0	0,5	-3	-3	1	-1/2	3/2	0	2
28	0,28	0,56	3	2	8	0,4	4	1	5	-3	4	-1	-1/3	5/3	1	3
29	0,27	0,57	2	3	9	1/4	1	0	3	-2	-4/3	1/3	-1/3	2/3	2	4
30	0,26	0,58	3	2	10	0,02	2	0	3	-2	4/3	-1/3	1/3	2/3	3	5

ОТВЕТЫ

Вариант № 1

1) $\frac{1}{144}$; 2) 0,25; 3) $\frac{91}{216}$;

4) ≈ 0,5; ≈ 0,9599; ≈ 0,8664;

5)

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Вариант № 2

1) ≈ 0,41; ≈ 0,43; ≈ 0,14;

2) 0,126; 3) $\frac{5}{8}$; 4) ≈ 0,28; ≈ 0,27;

5)

X	0	1	2	3	4
P	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Вариант № 3

1) $\frac{2}{3}$; 2) 0,32; 3) 0,061; 4) ≈ 0,04986;

5)

X	0	1	2	3	4
P	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

Вариант № 4

1) 0,092; 0,398; 0,504; 2) 0,85; 3) 0,456; 4) $\approx 0{,}4938$;

5)

X	0	1	2	3	4	5
P	0,0024	0,0284	0,1323	0,3087	0,3601	0,1683

Вариант № 5

1) $\approx 0{,}9375 \cdot 10^{-6}$; 2) 0,729; 3) $\frac{3}{7}$; 4) 0,4; 0,4; 0,1; 0,7;

5) $M(X) = \frac{3}{4}$; $D(X) = \frac{29}{48}$.

Вариант № 6

1) 0,02525; 0,24725; 0,727; 2) 0,024; 3) 0,2; 4) $\approx 0{,}9768$;

5)

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

Вариант № 7

1) $\approx 0{,}00001$; 2) 0,08; 3) 0,00289; 4) $\frac{1}{32}$; $\frac{31}{32}$; $\frac{5}{16}$;

5)

X	0	1	10	25	50
P	0,35	0,5	0,1	0,04	0,01

Вариант № 8

1) $\frac{C_{90}^{3}C_{10}^{2}}{C_{100}^{5}}$; 2) $\frac{13}{84}$; 3) 0,763; 4) ≈ 0.159;

5)

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

Вариант № 9

1) $\approx 0{,}0125$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0,46; 4) $\frac{1}{360}$;

5)

X	0	1	2	3	4
P	0.0625	0,25	0.375	0.25	0.0625

Вариант № 10

1) 0.85; 2) 0,8236; 3) $\frac{1}{1785}$; 4) 0.84;

5)

X	0	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0.125	0,0625	0.0625

Вариант № 11

1) 0,116; 2) 0,0024; 3) ≈ 0,573; 4) $\frac{1}{e}$; $1-\frac{1}{e}$;

5)

X	0	1	2
P	0,18	0,54	0,28

Вариант № 12

1) ≈ 0,47; 2) ≈ 0,93; 3) 0,24; 4) 6,4; 13,04; 3,61;

5) ≈0,196.

Вариант № 13

1) 0,7; 2) $\frac{15}{16}$; 3) 0,4536; 4) $\frac{1}{e}$;

5)

X	0	10	40	50	100
P	0,98	0,01	0,005	0,004	0,001

Вариант № 14

1) 0,77; 2) $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$;; 3) 0,0425; 4) $\sigma = 2.2$;

5) ≈ 0,052.

Вариант № 15

1) 0,068; 0,352; 0,576; 2) $\approx 0{,}0031$; 3) $\frac{1}{1296}$;

4) 5) $\approx 0{,}0021$.

X	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Вариант № 16

1) 0,384; 2) 0,002; 3) $\frac{1}{120}$; 4) C^2; 5) 0,1056.

Вариант № 17

1) 0,4096; 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; 3) $\approx 0{,}302$; 4) $\approx 0{,}0091$;

5) $\frac{25}{1092}$; $\frac{25}{364}$.

Вариант № 18

1) $\approx 0{,}05$; 2) 0,0336; 3) 0,87; 4) 10; 5) $\frac{38}{119}$; $\frac{60}{119}$.

Вариант № 19

1) 0,04; 2) 0,124; 3) $M(X) = 3{,}9$; $D(X) = 1{,}89$;; 4) $\frac{5}{14}$;

5) $\frac{7}{19}$; $\frac{6}{19}$.

Вариант № 20

1) $\frac{2}{5}$; 2) 0,954; 3)

X	0	1	2
P	0,42	0,46	0.12

4) $\frac{8}{315}$; 5) 0,1764.

Вариант № 21

1) $\approx 0{,}7265$; 2) 0,936; 3) $\frac{17}{30}$; 4) $\frac{8}{315}$;

5)

X	0	1	5	20	25
P	0,64	0,2	0.1	0,05	0,01

Вариант № 22

1) $\frac{1}{288}$; 2) $\frac{741}{1470}$; $\frac{39}{98}$; 3) $\frac{15}{127}$; 4) 0,96;

5)

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0.027	0,001

Вариант № 23

1) 0,973; 2) $\frac{20}{29}$; $\frac{85}{87}$; 3) $\frac{ABC \cdot 3!}{(A+B+C)(A+B+C-1)(A+B+C-2)}$;

4) $\frac{5}{32}$; 5) 0,72.

Вариант № 24

1) 3; 2) $\frac{27}{16\pi^2}$; 3) $\frac{23}{45}$; 4) $\approx 0{,}176$;

5)

X	0	3	6	9
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Вариант № 25

1) $\frac{11}{93}$; 2) $\approx 0{,}251$; 3) $\frac{6}{7}$; 4) $\approx 0{,}003$;

5)

X	1	2	3	4
P	0,1	0,09	0,081	0,729

Вариант № 26

1) 0,78; 2) $\frac{1}{7}$; 3) 0,36; 4) 0,729; 0,081; 0,027; 5) 2,4; 1,44.

Вариант № 27

1) $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$; 2) 69; 229; 3) $\approx 0{,}033$; 4) $\frac{21}{59}$;

5)

X	0	1	2
P	0,16	0,48	0,36

Вариант № 28

1) $\approx 0{,}06$; 2) 0,903; 9,7 %; 3) 0, 6; 4) $\frac{3}{25}$; $\frac{23}{50}$; $\frac{29}{50}$; 5) 2,2.

Вариант № 29

1) 4; 2) 0,99; 3) 0,936; 0,288; 0,216; 0,064; 4) $\frac{13}{66}$; 5) 3,5; $\frac{35}{12}$.

Вариант № 30

1) $\approx 0{,}869$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{5}{33}$; 4) 0,241;

5)

X	0	1
P	0,7	0,3

Ответы к заданию № 6 из таблицы 1

Номер варианта	X_1	X_2	P_1	P_2	**Номер варианта**	X_1	X_2	P_1	P_2
1	3	4	0,2	0,8	16	1	5	0,9	0,1
2	3	4	0,1	0,9	17	1	3	0,3	0,7
3	3	4	0,3	0,7	18	3	6	0,9	0,1
4	3	4	0,5	0,5	19	2	3	0,3	0,7
5	3	4	0,7	0,3	20	1	3	0,4	0,6
6	3	4	0,9	0,1	21	4	5	0,9	0,1
7	2	4	0,9	0,1	22	3	6	0,7	0,3
8	3	4	0,8	0,2	23	4	6	0,1	0,9
9	3	4	0,6	0,4	24	1	3	0,2	0,8
10	3	4	0,4	0,6	25	1	2	0,1	0,9
11	4	6	0,3	0,7	26	1	4	0,3	0,7
12	3	5	0,1	0,9	27	2	4	0,5	0,5
13	2	5	0,3	0,7	28	2	3	0,4	0,6
14	3	6	0,5	0,5	29	2	5	0,6	0,4
15	2	5	0,7	0,8	30	2	6	0,6	0,4

Ответы к заданию № 7 из таблицы 2

Номер варианта	$M(X)$	$D(X)$	Номер варианта	$M(X)$	$D(X)$
1	$\pi-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi-3}{4}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{19}{12}$	$\frac{11}{144}$	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{80}$
5	$\frac{5}{27}$	$\frac{13}{1458}$	6	3	$\frac{1}{3}$
7	2	0,5	8	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{9}$
9	1	$\pi-3$	10	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$	$\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}-9$
11	0	$\frac{4}{3}$	12	0	$\frac{\pi^2}{4}-2$
13	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}-2$	14	$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{18}$
15	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{27}$	16	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi+3}{4}$
17	1	$\pi-3$	18	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
19	4	2	20	$\frac{20}{3}$	$5\frac{5}{9}$
21	0	$\frac{1}{3}$	22	2	$\frac{1}{3}$
23	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{20}$	24	1,5	0,75

Окончание таблицы

Номер варианта	$M(X)$	$D(X)$	Номер варианта	$M(X)$	$D(X)$
25	2	$\frac{4}{3}$	26	2,5	2,08
27	$\frac{\pi}{2}-1$	$\pi-3$	28	$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{3}+\frac{1}{9}$
29	$\pi-1$	$\pi-3$	30	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{80}$

Ответы к заданию № 8 из таблицы 3

Номер варианта	а) ровно k раз	б) не менее k раз	в) не более k раз	г) хотя бы один раз
1	0.1852	0,93	0,256	0,9993
2	0,28	0,42	0,86	0,79
3	0,01536	0,01696	0,9984	0,74
4	0,0081	0,00856	0,99954	0,4095
5	0.4116	0,6517	0,7599	0,9919
6	0,001215	0,00127	0,99994	0,4686
7	0,15625	0,1875	0,96875	0,96875
8	0,01536	0,998	0,27904	0,99993
9	0.4096	0,8192	0,5904	0,9984
10	0,384	0,896	0,488	0,992
11	0.0486	0,9963	0,0523	0,9999
12	0.1536	0,9728	0,1808	0,9984
13	0,1323	0,9692	0,1631	0,9976
14	0,3456	0,6826	0,6630	0,9898

Окончание таблицы

Номер варианта	а) ровно k раз	б) не менее k раз	в) не более k раз	г) хотя бы один раз
15	0,375	0,6875	0,6875	0,9375
16	0,1586	0,1792	0,9744	0,3704
17	0,3087	0,4718	0,8369	0,8319
18	0,2304	0,3174	0,9133	0,92222
19	0,2646	0,3483	0,9163	0,7599
20	0,0256	0,0272	0,9984	0,5904
21	0,0729	0,0815	0,99144	0,4095
22	0,2048	0,2627	0,9421	0,6723
23	0,0756	0,0837	0,9919	0,7599
24	0,288	0,352	0,936	0,784
25	0,3125	0,5	0,8125	0,9675
26	0,2765	0,8208	0,4557	0,9959
27	0,2646	09163	0,3483	0,9919
28	0,4096	0,7373	0,6723	0,9997
29	0,0984	0,9841	0,1143	0,9999
30	0,000054	0,000055	0,999999	0,4686

Ответы к заданию № 9 из таблицы 4

№ 1: 0,1359; № 2: 0,7506; № 3: 0,6294;
№ 4: 0,8412; № 5: 0,9104; № 6: 0,0493;
№ 7: 0,9998; № 8: 0,5746; № 9: 0,4998;
№ 10: 0,2638; № 11: 0,6247; № 12: 0,6247;
№ 13: 0,4706; № 14: 0,4706; №: 15: 0,4706
№ 16: 0,8399; № 17: 0,6826; № 18: 0,6826;
№ 19: 0,4706; № 20: 0,4706; № 21: 0,1865;
№ 22: 0,4082; № 2: 0,1359; № 24: 0,6826;
№ 25: 0,9758; № 26: 0,4967; № 27: 0,9758;
№ 28: 0,1525; № 29: 0,7357; № 30: 0,8854.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 456 с.

Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. учебное пособие. – М.: Кнорус, 2010. – 492 с.

Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшее образование. 2009. – 403 с.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высшее образование, 2009. – 480 с.

Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз. 1988. – 406 с.

Соболев А. Б., Рыбалко А. Ф., Варакин А. Н. Математика: курс лекций для технических вузов. Книга 2. – М.: Изд. центр «Академия», 2010. – 445 с.

Цыдесенко В. Ф. Сборник задачи по специальным курсам высшей математики. – М.: Высшая школа. 1983. – 110 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МАТЕМАТИКА

Специальность
21.05.04 Горное дело

специализация № 3:
Открытые горные работы

формы обучения: **очная, заочная**

Автор: Власова Л.В., доцент, к.ф.-м.н.

Екатеринбург

Варианты заданий для контрольных работ и самостоятельной работы студентов всех специальностей по теме: "Дифференцирование функций нескольких переменных" содержат 30 вариантов по 7 заданий в каждом варианте, также задания могут быть использованы на практических занятиях в аудитории.

Вариант 1.

1) Найти область определения функции $z = 2\cdot\sqrt{36-4x^2-9y^2}$ и построить линии уровней $z=0$, $z=3$, $z=6$, $z=12$.

2) Для функции $u = \frac{x\cdot y^2}{z} - y\cdot e^{z/x}$ найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$ в точке $M(1,-1;2)$.

3) Найти экстремумы функции $z = x\cdot\sqrt{y} - x^2 + 6x - y$.

4) Найти полный дифференциал функции $w(t,z) = \ln\left(arctg\frac{t}{z}\right)$ и вычислить его значение при $t = z = 1$, $\Delta t = 0{,}2$, $\Delta z = 0{,}1$.

5) Для функции $\omega = \cos(3u - 2v)$, где $u = 2^{\sin x}$, $v = \log_2(3\sqrt{x} + 2)$ найти $\frac{d\omega}{dx}$ в точке $x = 0$.

6) Найти производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $\arcsin(xy) + ctg\left(\frac{\pi x}{4y}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{z}$ x при $x=1$, $y=1$, $z=0{,}5$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 6 = 0$ в точке $M(1;2;-1)$.

Вариант 2.

1) Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2+y^2-4} - 3\ln(2x - y^2)$.

2) Для функции $u = \sin^2(2x + 3y)$ вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

3) Найти экстремум функции $z = x^2 + 2y^2 - 2xy + 3x - y + 5$.

4) Для функции $z = (2x-1)^{3y^2}$ составить формулу полного дифференциала.

5) Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $y^2 - 4xy = 0$ и вычислить ее значение при $x = 1$, $y = 4$.

6) Найти градиент функции $u = \frac{x\cdot y^2}{z} + \frac{z\cdot y}{\sqrt[3]{x}}$ в точке $M(1;2;\ 1)$.

7) Для функции $u=\ln(2x-y^2)$, где $x=3e^t$, $y=arctg\left(\frac{t}{2}\right)$ найти $\frac{du}{dt}$ и вычислить ее значение в точке $t=0$.

Вариант 3.

1) Найти и построить область определения функции $z=\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{y}\right)$.

2) Для функции $u=ctg(\sqrt{x^3}+y)$ найти формулу полного дифференциала.

3) Найти экстремумы функции $z=xy-x^2y-xy^2$.

4) Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $arctg\frac{x+2y}{3}=2x+\frac{y}{5}$ и вычислить ее значение при $x=0$, $y(0)=0$.

5) Найти полную производную $\frac{du}{dx}$, если $u=x^y$, где $y=\ln(2x)$.

6) Найти производную функции $\omega=x^2y+2y^2z+3z^2x$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=\vec{MN}$, где $N(-1;4;-5)$.

7) Найти градиент функции $v=e^{xz^3-y^2}$ в точке $M(1;2;-1)$ и его величину.

Вариант 4.

1) Найти область определения функции $f(x,y)=\frac{2x-3y}{3x-y}$. Вычислить $f(1,3)$, $f(a,-a)$, $f(-a,a)$, $a\neq 0$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^3-x^2y-xy^2$.

3) Для функции $z=arctg\frac{y}{x-1}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=0$, $y=1$, $\Delta x=\Delta y=0{,}1$.

4) Найти производную $\frac{du}{dt}$ сложной функции $u=\sin(2x+y^2)$, где $x=\ln(2\sqrt{t}+1)$, $y=ctg\frac{1}{t}$.

5) Найти $\frac{dy}{dx}$ производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $2x^2+y^2-4x+6y-1=0$ и вычислить ее значение при $x=0$, $y<-2$.

, если $u=x^y$, где $y=\ln(2x)$.

6) Найти градиент функции $u=z^2e^{x-2y}+\cos\frac{\pi y}{xz^2}$ в точке $M(2;1;-1)$.

7) Вектор $\vec{l}$ составляет с осью OX угол $\alpha = 30^0$, с осью OУ $0 \le \beta \le 90^0$. Найти производную функции $z = x^3 - 3\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt{xy^3}$ в точке $M(1;1)$ по направлению $\vec{l}$.

Вариант 5.

1) Найти и построить область определения функции $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

3) Для функции $u = e^{x^2 - y^2} \cdot \sin\dfrac{\pi}{2y}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = -0{,}01$.

4) Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z = arctg(uv)$, где $u = \cos(2x - y)$, $v = tg\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, где $x = 4$, $y < 0$. Сделать чертеж.

6) В точке $M(4;3;-12)$ вычислить модуль градиента функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7) Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M_1(3;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{M_1M_2}$, где $M_2(6;5)$.

Вариант 6.

1) Найти и построить область определения функции $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. Построить линии уровней $z = \dfrac{1}{3}$, $z = \dfrac{1}{2}$, $z = 1$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x + 4y + 15$.

3) Для функции $u = e^{xy} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = -0{,}01$.

4) Найти производную $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ сложной функции $v = ctg\left(\dfrac{y^2}{z}\right)$, где $y = \ln(5x + 4u)$, $v = arctg(\sqrt{x \cdot u})$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 16 = 0$ в точке, где $x = 2$, $y < 3$. Сделать чертеж.

6) Найти градиент функции $u = \arccos\frac{z}{x+y} - \sqrt[3]{\frac{y}{x^2 z}}$ в точке $M(1;1;1)$.

7) Найти производную функции $z = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{y}{\sqrt{z}} - xyz^3$ в точке $M_1(1;-2;1)$ по направлению вектора $\bar{l} = \overline{M_1 M_2}$, где $M_2(-1;4;-2)$.

Вариант 7.

1) Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$.

2) Найти экстремумы функции $z = 2x^2 + 2y^2 - 36xy + 430$.

3) Для функции $u = arctg\frac{x}{y}$ вычислить частные производные второго порядка и их значения в точке $M(1,-1)$

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции, где $z = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

5) Найти частные производные неявной функции $z = f(x,y)$, заданной уравнением $z - \ln(2y - x) + 2^{x+2z} - \frac{8y}{\sqrt[3]{z}} = 0$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ в точке $M_0(3;4;5)$.

6) В точке $M(4,3,\ 12)$ вычислить модуль градиента функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7) Найти производную функции $u = xy^{\ln z}$ в точке $M_1(1;1;2)$ по направлению вектора $\bar{l} = \overline{M_1 M_2}$, где $M_2(3;-1;1)$.

Вариант 8.

1) Найти и построить область определения функции $w = \arcsin(|y| - x)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

3) Для функции $u = e^x \cos(2y)$ вычислить частные производные второго порядка и их значения при $x = 1$, $y = 0$.

4) Для функции $z = x^3 \ln y$, где $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u + 2v$ найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ в точке, где $y = -5$, $x > 0$.

6) Найти градиент функции $u = \arcsin\frac{z}{x+y}\ \sqrt[3]{\frac{y}{x^2 z}}$ в точке $M(1,1,1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2(2-z^2)-y^2=0$ в точке $M_0(1,-1;1)$.

Вариант 9.

1) Найти и построить область определения функции $z=\arccos(|x|+y)$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^2+2y^2-3x+4y$.

3) Для функции $u=2^{\arcsin\frac{y}{z}}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=0$, $z=1$, $\Delta x=\Delta z=0{,}01$.

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z=tg(2x^2-y)$, где $x=\ln(2t)$, $y=\sqrt{t}$.

5) Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;1)$ $z=f(x,y)$ – неявной функции, заданной уравнением $x\ln(2z-y)+arctg\frac{z}{y}-\frac{\pi}{2x}$.

6) Найти производную функции $u=\frac{1}{\pi}tg\frac{\pi\cdot x^2}{2y}+e^{x-2y}$ в точке $M_1(1,2)$ по направлению вектора $\bar{l}=\overline{M_1M_2}$, где $M_2(5;-1)$.

7) Найти градиент функции $u=\frac{2z}{\sqrt[3]{x}}+yz^3-\sqrt{\frac{x}{y}}$ в точке $M_1(8;2;1)$. Составить уравнение поверхности уровня функции, проходящей через точку M_1.

Вариант 10.

1) Найти и построить область определения функции $z=\arcsin(x^2+y^2-2x)$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^2-xy+y^2-6x+9y+20$.

3) Для функции $u=\sqrt{y+1}\cdot\ln(x^2+2y)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=1$, $y=0$, $dx=dy=0{,}1$.

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z=\lg(x+y^2)$, где $x=arctg\frac{1}{t}$, $y=\sin(\pi\cdot t)$.

5) Уравнение $2x^2+y^2-4x+6y-1=0$ задает неявную функцию $y(x)$. Найти производную $\frac{dy}{dx}$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к графику этой функции в точке, где $y=-1$, $x>0$.

6) Найти градиент функции $u=e^{\frac{x-y}{z}}-\frac{1}{\pi}tg\frac{\pi\cdot z}{xy^2}$ в точке $M(1;1;1)$.

7) Найти производную функции $u=\frac{xy}{\sqrt{2z}}+\frac{z}{2x^2y}+\sqrt{\frac{2y}{z}}$ в точке $M_1(1;2;4)$ по направлению вектора $\bar{l}=\bar{M_1M_2}$, где $M_2(-2;0;-2)$.

Вариант 11.

1) Найти и построить область определения функции $z=\frac{\ln(x-1)}{1+\ln y}$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+23$.

3) Для функции $z=\sin^2(2x+3y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения при $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{6}$.

4) Для функции $z=\frac{u}{\ln v}$, где $u=\sqrt{4x-y^2}$, $v=4-x^2-y^2$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $2x^2+3y^2-12x-6y+16=0$ в точке, где $x=4$, $y>0$.

6) Найти модуль градиента функции $u=e^{\frac{2x-y}{z}}-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\cdot z}{xy^2}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Найти производную функции $u=\sqrt[3]{y^2-4z}+arctg\frac{x-z}{y}$ в точке $M_1(1;2;-1)$ по направлению вектора $\bar{l}=\bar{M_1M_2}$, где $M_2(-2;-4;1)$.

Вариант 12.

1) Найти область определения функции $z=\sqrt{x-y+1}\cdot\ln(x+y)$.

2) Найти экстремумы функции $z=\frac{y}{x}-\frac{1}{y}+x$.

3) Найти полный дифференциал функции $v(t,z)=\ln\left(arctg\frac{t}{z}\right)$ и вычислить его значение при $t=z=1$, $dt=0{,}01$, $\Delta z=-0{,}01$.

4) Для функции $z=u\cdot e^{\frac{u}{v}}$, где $u=x^2+y^2$, $v=xy$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x^2+y^2=2x-4y+20$ в точке, где $x=4$, $y>0$.

6) Найти производную функции $u=x\cdot\arcsin\frac{z-y}{2}-\sqrt[3]{y^2-4z}$ в точке $M_1(-1;1;2)$ по направлению вектора $\bar{l}=\bar{M_1M_2}$, где $M_2(0;2;1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2+4y^2+9z^2=21$ в точке, где $x_0=2$, $y_0<0$, $z_0=1$.

Вариант 13.

1) Найти и построить область определения функции $v = \arccos(x - 2y)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 + 6xy$.

3) Для функции $u = ctg(e^{y-x^2})$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 1$, $y = -1$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$.

4) Для функции $z = arctg(xy)$, где $y = e^{2x}$ найти $\frac{dz}{dx}$.

5) Для функции, заданной уравнением $\frac{6}{\pi}\arcsin\frac{x+y}{4z} - \sqrt[3]{\frac{zx^2}{y}} = 0$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти градиент функции $u = y \cdot \ln(x + 2z) + z\sqrt[3]{x^2y^2}$ в точке $M(-1;1;1)$. Найти модуль градиента.

7) Найти производную функции $u = \frac{x-y}{\sqrt[3]{z}} + \frac{x+2y}{x-z} + \sqrt[3]{\frac{xy^2}{2z}}$ в точке $M_1(2;1;1)$ по направлению вектора $\bar{l} = M_1M_2$, где $M_2(0;-1;2)$.

Вариант 14.

1) Найти и построить область определения функции $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$.

2) Найти экстремумы функции $z = e^{-x}(x - y^2)$.

3) Вычислить приближено изменение функции $\varphi = arctg\frac{x+1}{y}$, если x изменяется от $x_1 = 0$ до $x_2 = 0{,}2$, y изменяется от $y = 1$ до $y_2 = 0{,}9$

4) Для функции $z = \ln^2(u) - \ln(2v)$, где $u = tg(3x)$, $v = \sin(3x)$ найти $\frac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ в точке, где $y = -6$, $x < 0$.

6) Найти градиента функции $u = \frac{x}{\ln(y+z)} + \sqrt[3]{2x^2z^4}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Найти производную функции $u = \arcsin(x\sqrt{y})$ в точке $M_1\left(\frac{1}{2};1\right)$ по направлению вектора $\bar{l} = M_1M_2$, где $M_2\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Вариант 15.

1) Найти область определения функции $z=\sqrt{x-y+2}+\ln(y-x^2)$.

2) Показать, что функция $z=x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$ имеет экстремум в точке $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u=y\cdot e^{2x(1-y)}+\cos\frac{\pi\cdot x}{2y^2}$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z=arctg\frac{y}{x}$, где $y=\ln(2x+1)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

5) Уравнение $\frac{6}{\pi}\arcsin\frac{x+z}{4y}-\sqrt[3]{\frac{x^2y}{z}}=0$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти частную производную этой функции в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти производную функции $u=ye^{2y-x}+\frac{\sqrt{z}}{x+y}$ в точке $M_1(2;1;4)$ по направлению вектора $\bar{l}=\bar{M_1M_2}$, где $M_2(0;-2;-2)$.

7) Найти градиент функции $u=\frac{1}{\pi}\left(ctg\frac{\pi\cdot y^2}{2x}\right)^2$ в точке $M(2;1)$

Вариант 16.

1) Найти и построить область определения функции $u=\frac{x+y}{x^2+y^2}$. Вычислить значение функции u в точке $M(1;3)$.

2) Найти экстремумы функции $z=e^{0.5x}(x+y^2)$.

3) Для функции $u=\frac{xy}{x^2+y^2}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0,1$, $\Delta y=-0,2$.

4) Для сложной функции $z=x^2y-xy$, где $x=u\cos v$, $y=v\sin u$ найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

5) Уравнение $\arccos\frac{x}{y}=\frac{\pi}{3}+zy-\sqrt{\frac{z}{x}}$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z>0$.

6) Найти производную функции $u = \arcsin\frac{2y-x}{z} + \frac{\sqrt[3]{2x^2z}}{y^3}$ в точке $M_1(2;1;-1)$ по направлению вектора $\bar{l} = M_1\bar{M}_2$, где $M_2(-1;-5;1)$.

7) Найти модуль градиента функции $u = \frac{2x-y}{3y+2z}$ в точке $M(-1;1;-1)$.

Вариант 17.

1) Найти область определения функции $u = \arccos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

2) Показать, что функция $z = 3x+6y-x^2-xy-y^2$ имеет экстремум в точке $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u = z\cdot e^{y-x} + \frac{1}{z^2}\cos\frac{\pi\cdot x}{y}$ найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$. Вычислить их значения в точке $M(1;2;1)$.

4) Для функции $z = 2u+\sqrt{v}$, где $u = \arcsin(xy)$, $v = \ln(x^1+2y)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $x\ln(2y-z) + arctg\frac{y}{z} = \frac{\pi}{2x}$ задает неявную функцию $z = f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2,1,1)$.

6) Найти модуль градиента функции $u = \frac{1}{\pi}tg\left(\frac{\pi\cdot x}{y\cdot z}\right) - \frac{z-x}{y-x} + x\cdot\sqrt{\frac{y}{z}}$ в точке $M(1\ 2;2)$

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду $z = 2x^2+4y^2$ в точке, где $y=1$, $z=12$, $x<0$.

Вариант 18.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arcsin(|x|-|y|)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3+3y^2-3xy-1{,}75$.

3) Для функции $u = \ln(x^2-3y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения при $x=2$, $y=0$.

4) Для функции $u = \frac{x^2-y}{x^2+y}$, где $y = arctg\frac{1}{x}$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

5) В точке $M(2;1)$ найти угловой коэффициент касательной к кривой $x^2-y^2+y = 2^{y-2}-2^y$

6) Найти градиент функции $u = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\cdot x}{yz}\cdot e^{x-y} - \sqrt{\frac{zy^2}{2x}}$ в точке $M(-1;1;2)$.

7) Найти производную функции $u = \frac{x}{y}\arcsin\frac{y}{x}$ в точке $M_1(-2;1)$ по направлению вектора $\bar{l} = M_1\bar{M}_2$, где $M_2(2;4)$.

Вариант 19.

1) Найти и построить область определения функции $u = \frac{\ln(x^2 \quad 2y)}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

2) Найти экстремумы функции $z = 3x^2 + y^3 - 3xy$.

3) Для функции $u = \frac{ctg\left(2y + \frac{\pi}{4}\right)}{x - 1}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 3$, $y = 0$, $\Delta x = -0.04$, $\Delta y = 0.01$.

4) Для функции $z = \ln(y^2 - 2x^2)$, где $y = e^{x+1}$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

5) Уравнение $\arcsin\frac{x}{y} = \frac{\pi}{6} + zy - \sqrt{\frac{z}{x}}$ задает неявную функцию $z = f(x, y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2}; 1, z_0\right)$, $z_0 > 0$.

6) Найти производную функции $u = \frac{x^2}{yz} - \sqrt{\frac{y}{2x}} + xyz^3$ в точке $M_1(1;2;-1)$ по направлению вектора $\bar{l} = \overline{M_1M_2}$, где $M_2(-2;-4;1)$.

7) Найти градиент функции $z = x^3 + y^4$ в точке $M(2;1)$.

Вариант 20.

1) Найти область определения функции $z = \log_3(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

2) Показать, что функция $z = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ имеет экстремум в точке $M_0(1;1)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u = y \cdot e^{2(1-x)} + \cos\frac{\pi \cdot x}{2y^2}$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Катеты $a = 12$ (см), $b = 5$(см) измерены с точностью $\Delta a = \Delta b = 0{,}1$ (см). Найдите гипотенузу треугольника и относительную погрешность значения гипотенузы $\left(\delta c = \frac{\Delta c}{c} \cdot 100\%\right)$.

4) Для функции $u = x^2 + 2y^2 - \ln(1 + y)$, где $y = \sin(3x)$ найти $\frac{du}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $2x^2+y^2-4x-6y-1=0$ в точке, где $y=-1$, $x<0$.

6) Найти градиент функции $z=arctg\sqrt{\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}}$ в точке $M_0(\sqrt{2},1)$.

7) Найти производную функции $u=xe^{2y+z}+z\cdot\sqrt{\frac{x}{y^2}}$ в точке $M_1(-1;1;2)$ по направлению вектора $\bar{l}=M_1\bar{M}_2$, где $M_2(4;3;14)$.

Вариант 21.

1) Найти и построить область определения функции $z=\arcsin\frac{1}{x}+\arccos\frac{1}{y}$.

2) Найти экстремумы функции $z=3x^2+y^2-6xy$.

3) Для функции $u=(x^2+2)\cdot\arcsin\frac{1}{y}$ найти частные производные второго порядка.

4) Найти производную $\frac{du}{dt}$ сложной функции $u=e^{x-3y}$, где $x=\sin(\pi\cdot t)$, $y=\sqrt[3]{t}$ и ее значение при $t=1$.

5) Уравнение $x\ln(2y+z)+arctg\frac{z}{y}+\frac{\pi}{2x}=0$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;-1)$.

6) Составить уравнения касательных плоскостей к эллипсоиду $x^2+2y^2+3z^2=21$ в точках пересечения эллипсоида и прямой $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$.

7) Найти производную функции $z=x^2-y^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении вектора l_α, составляющего с осью ОУ угол $\beta=60^0$.

Вариант 22.

1) Найти и построить область определения функции $v=\arccos(x^2+y^2-2y)$. Вычислить z при $x=0$, $y=1$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^2-2x\sqrt{y}+y-4x$.

3) Для функции $u=\frac{5x+3y}{9x-2y}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=1$, $y=2$, $\Delta x=-0,1$, $\Delta y=0,3$.

4) Для функции $w = tg\frac{4u}{v^2}$, где $u = \arcsin(t - 2z)$, $v = \ln(t^2 - z^2)$ найти $\frac{\partial w}{\partial z}$.

5) Уравнение $arctg\frac{x+2y}{3z} - ye^{x-z} + \frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}$ задает неявную функцию $z = f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти модуль градиента функции $u = \frac{2x^2}{9} + \frac{3y^2}{z} - xyz$ в точке $M(1,-2;3)$.

7) Найти производную функции $u = \frac{z}{\sqrt[3]{x-y}} + \frac{1}{\ln 2}\cdot 2^{3x-z}\sqrt{x(y^2 - z)}$ в точке $M_1(2,1,-3)$ по направлению вектора $\bar{l} = M_1\bar{M}_2$, где $M_2(5;-5;-1)$.

Вариант 23.

1) Найти область определения функции $u = \arccos\left(\frac{x}{y}\right)$.

2) Найти экстремум функции $z = x^3 + 2y^3 - xy^2 + 1$.

3) Для функции $u = x\ln(3x+2y)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 1$, $y = -1$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}01$.

4) Для функции $z = u^v$, где $u = \sin(2y)$, $v = arctg\frac{x}{y}$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x\cdot 3^{\frac{x+1}{y}} + tg\frac{\pi x}{4y} - 10 = 0$ в точке $M(1;1)$.

6) Найти производную функции $u = \sqrt{3}\arcsin\frac{x-y}{z} + y^2\cdot\sqrt{\frac{z}{x^3}}$ в точке $M_1(1.2;1)$ по направлению вектора $\bar{l} = M_1\bar{M}_2$, где $M_2(-1;5;-10)$.

7) Найти градиент функции $u = \frac{x}{\sqrt[3]{z(2x+y)}} + 3\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{z}} + xyz^2$ в точке $M(1;2;-2)$.

Вариант 24.

1) Найти и построить область определения функции $z = x + 2y - \arccos(xy)$.

2) Найти экстремум функции $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$.

3) Для функции $u = e^{1-x} \cdot \ln(2y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z = (u+1)^{v-1}$, где $u = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$, $v = \cos(2x+3y)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $x\ln(2z+y) + arctg\frac{z}{y} + \frac{\pi}{2x} = 0$ задает неявную функцию $z = f(x, y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2,-1,1)$.

6) Найти производную функции $u = \sqrt{3}\arccos\frac{x-y}{z} + \frac{4}{x}tg\frac{\pi y}{x^2}$ в точке $M_1(2;1;2)$ по направлению вектора $\bar{l} = \overline{M_1M_2}$, где $M_2(5;-1;-4)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sin(3x)\cdot\cos y - z = 0$ в точке, где $x = y = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 25.

1) Найти и построить область определения функции $u = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{y+2}$. Вычислить значение функции u в точке $M(5;-1)$.

2) Найти экстремумы функции $z = e^{0.5y}(x^2 + y)$.

3) Вычислить приближено изменение функции $z = \arcsin\frac{y}{x}$, если x изменяется от $x_1 = 5$ до $x_2 = 4{,}5$, y изменяется от $y_1 = 3$ до $y_2 = 3{,}3$

4) Для функции $z = y^{\sqrt{x}}$, где $y = \log_2(x^2 + 2x)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к гиперболе $x^2 - 2y^2 - 4y - 4 = 0$ в точке $M(2;2)$. Сделать чертеж.

6) Найти производную функции $u = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\cdot z}{x^2y} + \frac{x+2y}{z+y}$ в точке $M_1(1;2;1)$ по направлению вектора $\bar{l} = \overline{M_1M_2}$, где $M_2(3;1;-1)$.

7) Найти градиент функции $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ в точке $M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Вариант 26.

1) Найти и построить область определения функции $u = \frac{2x+y}{\cos(y-x)}$.

2) Найти экстремумы функции $z = \frac{x}{y} - \frac{1}{x} + y$.

3) Для функции $u = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2x-y)\right)$ найти частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$. Вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z = u^{v-1}$, где $u = \arcsin(x+2y)$, $v = \ln(x-\sqrt{y})$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $\frac{x-y}{z^2} + e^{2z+x} - x\sqrt{y} = 0$ задает неявную функцию $z = f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;-1)$

6) Найти градиент функции $u = arcctg\frac{x}{y+z} + \sqrt{\frac{z^5}{2x^2 y}}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $u = \frac{1}{\ln 2}\cdot 2^{\frac{x}{z}-z} + \frac{\sqrt{x}}{z} - \frac{2x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\ln 2}$ в точке $M_1(1;4;1)$

Вариант 27.

1) Найти и построить область определения функции $z = tg\left(y + 2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Вычислить z при $x = 0$, $y = 1$.

2) Найти экстремумы функции $z = 2y^2 - 2y\sqrt{x} + x - 4y$.

3) Для функции $z = x^2 + 2y^2 - 3xy$ найти формулы частных приращений $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и полного приращения. Вычислить приращения, если x изменяется от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}1$, y изменяется от $y_1 = 2$ до $y_2 = 1{,}9$.

4) Для функции $z = x^y$, где $y = e^{-x}\cdot\sin(2x)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу $3x^2 - 2y^2 - 6x - 12y + 7 = 0$ в точке, где $x = 3$, $y > 3$.

6) Найти градиент функции $u = y\ln(x+2z) - \sqrt{3}\arccos\frac{z}{x^2+y^2}$ в точке $M_1(-1;1;1)$.

7) Найти производную функции $u = 3\cdot\sqrt[3]{\frac{xz^2}{y-1}} + \frac{x+z}{2y-z} - \frac{x^2y}{4z^3}$ в точке $M_1(2;3;1)$ по направлению вектора $\bar{l} = \overline{M_1M_2}$, где $M_2(4;1;2)$.

Вариант 28.

1) Найти и построить область определения функции $u = \arcsin\frac{y-2}{x}$.

2) Для функции $u = x^{\frac{z}{y}}$ найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ при $x=2,\ y=-1,\ z=1$.

3) Найти экстремумы функции $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

4) Высота $H = 4(\text{см})$ и образующая $L = 5(\text{см})$ конуса измерены с точностью $\Delta = 0{,}1(\text{см})$. Найти объем конуса. Найти абсолютную и относительную погрешности объема.

5) Для функции $z = \arcsin\frac{x}{z}$, где $z = \sqrt{x^2+1}$ найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{du}{dx}$ в точке, где $x=1$.

6) Найти градиент функции $u = \sqrt{2}\cdot\arcsin\frac{x+2y}{x+z} + \sqrt[3]{\frac{2yz^2}{x}}$ в точке $M(1,-1;2)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + \ln(y^3+z^3) - \ln(x^3+z^3) = 1$ в точке, где $x=1,\ z=-2,\ y<0$.

Вариант 29.

1) Найти и построить область определения функции $u = \arccos\sqrt{xy}$.

2) Для функции $z = x^y$ найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Сравнить эти производные.

3) Найти экстремумы функции $z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy$.

4) С помощью дифференциала найти формулу объема стекла, нужного для изготовления цилиндрического стакана с толщиной стенок и дна к, если радиус внутреннего цилиндра R, а высота внутреннего цилиндра H.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $\ln x + \ln y - \sqrt[3]{y} = 0$ в точке $M(e;1)$.

6) Для функции $z = \ln(2x+y^2)$, где $x = \sin(2t),\ y = \cos^2 t$ найти $\frac{dz}{dt}$.

7) Найти модуль градиента функции $u = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z$ в точке $M_1(1;1;1)$ и производную в точке M_1 по направлению вектора $\bar{l} = \overline{M_1M_2}$, где $M_2(-1;3;0)$.

Вариант 30.

1) Найти и построить область определения функции $u=\sqrt{\frac{x^2-4x+y^2}{x^2+4x+y^2}}$.

2) Для функции $z=\ln\left(tg\frac{x}{y}\right)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3) Найти экстремум функции $z=2x^2+y^2-xy-7x+14$.

4) Для функции $u=\sqrt[3]{x+y^2}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=2$, $y=5$, $\Delta x=0.1$, $\Delta y=0.01$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xe^{2x-y}-e^{(x^2+2y)}=0$ в точке $M_1(1;-1)$.

6) Для функции $z=\frac{u}{v}arctg(u+v)$, где $u=xy$, $v=x+y$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7) Найти градиент функции $u=\frac{x^2}{y}-\frac{4y}{z^2}+x^2z^2$ в точке $M_1(1;-1;2)$. Найти производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\vec{l}=M_1M_2$, где $M_2(3;-4;-4)$.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный университет»

О. В. Садырева, И. Г. Коршунов

ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург

2019

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Учебно-методическим советом УГГУ

Председатель совета
_____ Упоров С.А.

ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург, 2019

ФИЗИКА. Методические указания для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки/Садырева О.В., Коршунов И.Г.; Урал.гос. горный ун-т.– Екатеринбург, 2019.– 29 стр.

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:

- Внимательно прочитать условие задачи.
- Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
- Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
- Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
- Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
- Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать но оси координат и записать в скалярной форме.
- Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
- После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.
- Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.

2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением 1,2 м/с2 , останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?

3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.

4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.

5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?

6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S = 800 + 8t - 0{,}5\,t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?

8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.

9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

10. На горизонтальной платформе шахтной клети находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/^{2} , при спуске с ускорением 9,8 м/с^2.

11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.

13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. =736 Вт). Определить коэффициент трения.

14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением 0,5 м/^{2}, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30°.

15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5°.

16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин$^{-1}$.Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки 1,2 кН·м. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом 0,6 м, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен 0,5.

19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой $8с^{-1}$.Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1м.
23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергия поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом 0,4м и имеющий массу 100 кг, был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с. Определить момент сил трения.

2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМРОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 106 Па и температуре 20°С? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л. Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и темпера-тура 16°С. Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°С и 7°С. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом $C_2 H_2$ при температуре 27° С до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена из-расходована, если давление в баллоне при температуре 23°С стало равным 14 МПа ? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°С. Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450° С. Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600° С, если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно 10^5 Па, а начальная температура 17° С?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 $см^3$ воздуха в секунду при давлении 50 атм ?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800° С. До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°С, γ=1,4?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до 10^{-15} мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 $см^3$ при указанном давлении и температуре 27° С ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана CH_4 до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20° С, а после него 2600° С. Молярная масса 0,016 кг/моль.

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода CO, принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°С до 100° С надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47° С, а объем увеличился в 10 раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600° С до 2000° С. Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны 1,25 кДж/(кг·К) и 0,96 кДж/(кг·К).

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 $м^3$ в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227° С. Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежечасно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9° С. Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит 0,02Кл заряда. Ширина ремня 0,3м, скорость его движения 20 м/с. Какой заряд проходит ежесекундно через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?

48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6 \cdot 10^3$ км и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м.

49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ, заряд каждой пластины 10 нКл. Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см.

50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ, расстояние 1 мм, диэлектрик слюда ($\varepsilon = 6$), площадь каждой пластины 300 $см^2$?

51. Какую работу надо совершить , чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от 0,03 м до 0,1 м? Площадь пластин 100 $см^2$. Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В.

52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В, потребляя ток в 40 А. Напряжение на электростанции 120 В, а расстояние до нее 1 км. Определить сечение медных соединительных проводов ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом м).

53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 1,5 мм для изготовления спирали вулканизатора , применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали 5,5 Ом, а удельное сопротивление нихрома $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом м?

54. Цена деления прибора $1,5 \cdot 10^{-5}$ А /дел. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом. Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А?

55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре 30^0 С. Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м. Площадь сечения проводов 0,8 $мм^2$, $\rho = 0{,}017$(Ом· $мм^2$ /м), $\alpha = 0{,}0044$ град-1.

56. ЭДС батареи 12 В, ток короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?

57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность 9,5 Вт, а при токе 8 А мощность 14,4 Вт.

58. Ток в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от 0 до 10 А в течение 30 с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние 5 см от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром 10 см, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе 0,2 А. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля 12,8 А /м . Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли,
если обмотка тангенс–буссоли имеет 10 витков радиусом 25 см. При токе 0,64 А стрелка отклоняется на угол 45°.

63. Плоский контур площадью 20 см ^{2} находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,03 Тл. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром 51 см и вакуумным зазором 2 мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800.

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита , если проводник массой 10 г и длиной 1м при токе в нем 19,6 А висит в поле , не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл движется проводник длиной 10 см со скоростью 15 м /с, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника 15 см^2, Индукция магнитного поля в сердечнике 1,4 Тл. Вычислить величину средней ЭДС , возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение 0,001с.

68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 $см^2$, длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника
0,56м.

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой 5 мм и частотой 1500 $мин^{-1}$. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 $мин^{-1}$. Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 $мин^{-1}$. Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 $с^{-1}$.

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0{,}5\sin t$, $y = 2\cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5\sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0{,}1\sin 0{,}5\pi t$ (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6}\sin 10^4 \pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5 \cdot 10^3$ м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см^2 и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см^2.

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2{,}5 \cdot^{10\text{-}6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух

пластин площадью 75 $см^2$ каждая, рас-стояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 25 нФ. На обкладках конденсатора сосредоточен заряд 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2{,}5 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 0,01 $м^2$ и расстоянием между ними 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м.

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГн. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В. На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50\cos 10^4 \pi t$(В). Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80пФ и катушки с индуктивностью 1,2 мГн. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 $см^2$ имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 $см^2$ каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 $см^2$ каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга I мм, расстояние от щелей до экрана 3м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластинки освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0°, длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза (n=1,5) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете (λ =600 нм).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Нью-она в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1°. Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет (λ=0,6 мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на I мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен 35°. Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.
116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43°. Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57°. Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45°. Во сколько раз
уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60°?

120. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4$К. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 К, определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт. Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 $см^2$.

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна 0,55 Дж. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре 1100 К посылает на измерительный прибор некоторое тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм. Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 $см^2$, чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм. Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона I эВ?

128. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм. Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм.

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм.

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы

отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 $см^2$ ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно $2,2 \cdot 10^{-7}$ $Н/м^2$. Сколько фотонов падает на I $см^2$ за одну секунду?

6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна $1,097 \cdot 107 м^{-1}$.

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.

136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31}$кг, масса протона $1,67 \cdot 10^{-27кг}$.

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью $6 \cdot 10^6$м/с, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51МэВ.

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки, составляет 0,85 скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения ($\lambda_{мин}$ =77,6 пм). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в возбужденном состоянии (n=2).
Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.
46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?
147. В одномерной потенциальной яме шириной *l* находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса L_Z орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной *l*
с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии (n=3).

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция $_{38}Sr^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько β-частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа $_{11}Na^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат $_{92}U^{238}$ массой 1 г излучает $1{,}24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода $_{53}J^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько β-частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора $_{15}P^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.
158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?
60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра $_7N^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. (m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра $_6C^{12}$, если известно, что m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0$n1 = 1,00867 а.е.м.; m $_{12}C^6$ = 12,00000 а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. (m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода $_8O^{16}$, если m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.;
m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_8O^{16}$ = 1 5,99491 а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома $_{11}Na^{23}$, если m $_{11}Na^{23}$ = 22,98977а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $_3Li^7$, если известно, что m $_3Li^7$ =7,01601 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода $_1H^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра $_5B^{11}$,если известны следующие массы: m $_5B^{11}$ = 11,00931 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра $_{11}Na^{23}$, если известны следующие массы: m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_{11}Na^{23}$ = 22,98977 а.е.м.; m $_{11}Na^{22}$ = 21,99444 а.е.м.

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра $_2He^4$,если известны массы: m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_2He^3$ = 3,01603 а.е.м.

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра $_8O^{16}$ ($_8O^{16} \rightarrow {}_7N^{15} + {}_1H^1$). m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_8O^{16}$ = 15,99491 а.е.м.; m $_7N^{15}$ = 15,00011 а.е.м.

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$, если m $_{13}Al^{27}$ =2 6,98154 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_{15}P^{30}$= 29,97263 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.

172.Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: $1H^2 + {}_1H3 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1$, если m $_1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; m $_1H^3$ =3,01605 а.е.м.; m $_0n^1$ =1,00867 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция $_2He^3 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1H^1$. Вычислить энергию этой реакции. (m $_2He^3$ = 3,01603 а.е.м.; m $_1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.).

174. Вычислить энергию ядерной реакции $_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1$. (m $_7N^1$ ^{4}= 14,00307а.е.м.; m $_0n^1$ =1,00867 а.е.м ; m $_6C^{14}$= 14,00324 а.е.м.; m $_1H^1$= 1,00783 а.е.м.).

175. Определить энергию ядерной реакции $_3Li6 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4$. (m $_3Li^6$ = 6,01513 а.е.м.; m $_1H^2$= 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ =4 ,00260 а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра $_6C^{14}$? Известны массы: m $_6C^{14}$ = 14,00324 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.; m $_6C^{13}6$ = 13,00335а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить $_6C^{12}$ на три равные части.(m $_6C^{12}$= 12,00000 а.е.м.; m $_2He^4$= 4,00260 а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции $_{20}Ca^{44} + {}_{1}H^{1} \rightarrow {}_{19}K^{41} + 2He^{4}$. (m $_{20}Ca^{44}$= 43,95549 а.е.м.; m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м., m $_{2}He^{4}$ = 4,00260 а.е.м.; m $_{19}K^{41}$= 40,96184 а.е.м.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

8.1 Основная литература

1.	И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с.
2.	В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.)
3.	Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23753.html - ЭБС «IPRbooks».
4.	Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62614.html -ЭБС «IPRbooks».
5.	Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с.

Дополнительная литература

1. И.Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/48021.html -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/30092.html - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45392.html - ЭБС «IPRbooks».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$3.00\ 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6.67\ 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Число Авогадро	N_A	$6.02\ 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8.31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1.38\ 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	$1а.е.м.$	$1.660\cdot10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	e	$1.60\ 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9.11\cdot10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1.67\ 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85\ 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	h $\hbar$	$6.63\cdot10^{-34}$ Дж/с $1.05\ 10^{-34}$ Дж/с

Приложение 2

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Множитель	Приставка			Множитель
Наименование	Обозначение			Наименование	Обозначение		
	русское	международное			русское	международное	
экса	Э	E	10^{18}	деци	д	d	10^{-1}
пэта	П	P	10^{15}	санти	с	c	10^{-2}
тера	Т	T	10^{12}	милли	м	m	10^{-3}
гига	Г	G	10^{9}	микро	мк	μ	10^{-6}
мега	М	M	10^{6}	нано	н	n	10^{-9}
кило	к	k	10^{3}	пико	п	p	10^{-12}
Гекто	г	h	10^{2}	фемто	ф	f	10^{-15}
Дека	да	da	10^{1}	атто	а	a	10^{-18}

Примечание Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.)

Приложение 3

Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

Приложение 4

Внесистемные единицы

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна атомная единица массы	т а е м	10^3 кг $1.66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута час сутки	мин ч сут	60 с 3600 с 86400 с
Плоский угол	градус минута секунда град	° …′ .. ″ град	$1.74 \cdot 10^{-2}$ рад $2.91 \cdot 10^{-4}$ рад $4.85 \cdot 10^{-6}$ рад $(\pi/200)$ рад
Объем, вместимость	литр	Л	10^{-3} м^3
Длина	астрономическая единица световой год парсек	а.е. св. год пк	$1.50 \cdot 10^{11}$ м $9.46 \cdot 10^{15}$ м $3.08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	Дптр	1 м$^{-1}$
Площадь	гектар	Га	10^4 м^2
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В·А	
Примечание: Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками			

Приложение 5

Плотность некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, г/см^3	Твердое тело	Плотность, г/см^3
Алюминий	2.70	Цезий	1.90
Барий	3.50	Каменная соль	2,2
Ванадий	6.02	Латунь	8,55
Висмут	9.80	Марганец	7,40
Железо (чугун, сталь)	7.88	Платина	21,4
Литий	0,53	Золото	19,3
Медь	8.93	Висмут	9,8
Никель	8.90	Уран	18,7
Свинец	11.3	Цинк	7.15
Серебро	10.5	Вольфрам	19,3

Приложение 6

Плотность некоторых жидкостей и газов

Жидкость (при 15° С)	Плотность, г/см³	Газ (при нормальных условиях	Плотность, кг/м³
Вода (дистиллированная при 4°С)	1.00	Водород	0.09
Глицерин	1.26	Воздух	1.29
Керосин	0 8	Гелий	0.18
Ртуть	13 6	Аргон	1,78
Масло (оливковое, смазочное)	0 9	Азот	1,25
Масло касторовое	0.96	Кислород	1.43
Сероуглерод	1.26		
Эфир	0.7		
Спирт	0 80		

Приложение 7

Удельное сопротивление ρ некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, Ом·м	Материал	Удельное сопротивление, Ом·м
Алюминий	$2,53\ 10^{-8}$	Ртуть	$9,6\cdot10^{-7}$
Алюминий провод	$2,87\cdot10^{-8}$	Свинец	$2,08\cdot10^{-7}$
Бумага	10^{15}	Серебро	$1,6\ 10^{-8}$
Вода дистиллированная	10^{4}	Сталь литая	$1,3\ 10^{-7}$
Вода морская	0,3	Сталь чистая	$1,01\ 10^{-7}$
Вольфрам	$5,5\cdot10^{-8}$	Стекло	10^{11}
Графит	$3,9\ 10^{-6}$	Стекло кварцевое	10^{16}
Железо чистое	$9,8\ 10^{-8}$	Угольные щётки	$4\cdot10^{-5}$
Железо	$8,7\ 10^{-8}$	Цинк	$5,9\cdot10^{-8}$
Золото	$2,2\ 10^{-8}$	Чугун серый	$1\cdot10^{-6}$
Константан	$5\ 10^{-7}$	Никель	$8,7\ 10^{-8}$
Масло парафиновое	10^{14}	Нихром	$1,12\cdot10^{-6}$
Магний	$4,4\ 10^{-8}$	Олово	$1,2\cdot10^{-7}$
Манганин	$4,3\ 10^{-7}$	Платина	$1,07\ 10^{-7}$
Медь	$1,72\ 10^{-8}$	Медь провод	$1,78\ 10^{-8}$

Приложение 8

Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Ацетон	21,4	Парафин	2,0
Вакуум	1.0	Парафинированная бумага	2,0
Воздух	1,000594	Полиэтилен	2,2
Вода	81	Слюда	7,0
Вода дистиллированная	31	Спирт этиловый	25,1
Воск	7.8	Спирт метиловый	33,5
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	5,0	Фарфор	5,0
Масло трансформаторное	2.2	Эбонит	2.6

Приложение 9

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
A, α	Альфа	N, ν	ню
B, β	Бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	Гамма	O, o	омикрон
Δ, δ	Дельта	Π, π	пи
E, ε	Эпсилон	P, ρ	ро
Z, ζ	Дзета	Σ, σ	сигма
H, η	Эта	T, τ	тау
Θ, θ	Тэта	Y, υ	ипсилон
J, ι	Йота	Φ, φ	фи
K, κ	Каппа	X, χ	хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	пси
M, μ	Ми	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания к решению задач и выполнению домашних контрольных работ	3
1. Механика	4
2. Молекулярная физика и термодинамика	7
3. Электричество и магнетизм	10
4. Механические и электромагнитные колебания и волны	12
5. Волновая и квантовая оптика	15
6. Квантовая физика и физика атома	18
7. Элементы ядерной физики	19
Список литературы	23
Приложения	24

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

РУКОВОДСТВО ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ХИМИЯ

Специальность

21.05.04 Горное дело
Специализация №3 ***«Открытые горные работы»***

форма обучения: очная, заочная

квалификация выпускника: Горный инженер (специалист)

Автор: Попова М.Н.

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	3
2. Строение атома	4
3 . Химическая кинетика и равновесие	6
3.1. Скорость химических реакций	6
3.2. Химическое равновесие	8
4. Растворы электролитов	11
4.1. Концентрация растворов	11
4.2. Электролитическая диссоциация	16
4.3. Гидролиз солей	20
5. Окислительно-восстановительные процессы	23
5.1. Окислительно-восстановительные реакции	23
5.2. Гальванические элементы	26
5.3. Электрохимическая коррозия	29
5.3. Электролиз растворов	31
6. Номера вариантов	36
7. Список литературы	40
8. Приложение	41

Введение

Без химии трудно представить прогресс в горном деле. Все сферы горного производства пронизаны современной химической наукой и технологией. Поэтому горный инженер любой специальности должен обладать достаточными знаниями в области химии.

Основной вид занятий студентов–заочников – самостоятельная работа над учебным материалом. По курсу химии она складывается из следующих этапов: изучение материала по учебникам и учебным пособиям; выполнение контрольной работы, посещение лекций, выполнения лабораторного практикума, сдачи зачёта или экзамена в период экзаменационной сессии. К лабораторному практикуму допускаются только студенты, сдавшие в срок контрольные задания.

Контрольную работу студент должен писать в тетради и сдавать для регистрации в деканат. На обложке тетради указать фамилию, имя, отечество, номер группы, номер варианта, название специальности. Обязательно полностью переписать условия заданий, иначе работа не будет проверена. Вариант задания соответствует последним двум цифрам номера зачётной книжки (или студенческого билета) студента (номера вариантов «соответствующих заданий приведены в конце данной методической разработки»).

1. Строение атома

Задание 1. Какой подуровень заполняется в атоме электронами после заполнения подуровня 4p?

Решение. Подуровню 4p отвечает сумме n+l, равная 4+1=5. Такой же суммой n+l характеризуют подуровни 3d(3+2=5) и 5s(5+0=5) . Однако состоянию 3d отвечает меньшее значение n(n=3), чем состоянию 4p, поэтому подуровень 3s будет заполняться раньше, чем подуровень 4p. Следовательно, в соответствии с правилом Клечковского после заполнения подуровня 4p будет заполняться подуровень 5d, которому отвечает на единицу большее значение n(n=5) .

Задание 2. Напишите электронные формулы атомов и ионов, укажите положение их в периодической системе Д. И. Менделеева (номер периода, группа, подгруппа): Na^+; Cl^-

Решение. Электронная формула химического элемента натрия следующая: 1s2 2s2 2p6 3s1. Он расположен в третьем периоде, первой группе, главной подгруппе периодической системы Д. И. Менделеева.

Электронная формула иона Cl^-: 1s2 2s2 2p6 3s2 3p6. Хлор расположен в третьем периоде, седьмой группе, главной подгруппе периодической системы Д. И. Менделеева.

Каждое задание содержит 2 вопроса (а, б)

Задания к разделу 2

Номер задания	а) Укажите численные значения главного и орбитального квантовых чисел данных подуровней, рассчитайте последовательность их заполнения	б) Напишите электронные формулы предложенных атомов и ионов, укажите их положение в системе (номер периода, группа, подгруппа)
1	3p; 4s; 2p	Fe; Na^+
2	3d; 4p; 3p	Co; Br^-
3	5d; 4p 4d	Ni; Ba^{2+}
4	3d; 4f; 5s	Zn; Ca^{2+}
5	4d; 4s; 5s	Sn; S^{2-}
6	6s; 4p; 4f	W; Bi^{3+}
7	3d; 5s; 7p	S; La^{3+}
8	4d; 6s; 5d	P; Tl^{3+}
9	4p; 5p; 4f	Br; Zr^{4+}
10	3d; 3p; 2s	Al; Hg^{2+}
11	5d; 3s; 6s	Pb; Au^{3+}
12	6d; 4f; 5p	Ge; Ag^+
13	5d; 3p; 4d	Ga; Sb^{3+}
14	7s; 6p; 4d	Ni; Bi^{3+}
15	5d; 4p; 3d	Cl; Pb^{2+}
16	5s; 6s; 4p	Y; Hf^{4+}
17	6p; 5f; 6d	Zr; At^-
18	5d; 5s; 4f	Ta; Ga^{3+}
19	3s; 4d; 3p	Mo; Cu^{2+}
20	5f; 4d; 4s	Cr; Se^{2-}

3. Химическая кинетика и равновесие

3.1 Скорость химических процессов

В зависимости от характера реакции скорость определяется следующим образом. Для гомогенных систем (однородным по составу и свойствам) скорость измеряется:

$$V = \frac{\Delta \cdot C}{\Delta \cdot \tau}$$

где V – скорость химической реакции, моль/л·сек.

ΔC – изменение концентрации вещества за время $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$

τ_1 – исходный момент времени, с,

τ_2 – текущий момент времени, с ($\tau_2 > \tau_1$)

В гетерогенных системах (состоящих из 2х или более однородных частей, находящихся в разном фазовом состоянии) при определении скорости концентрации твердых веществ не учитываются. Скорость реакции зависит от природы реагирующих веществ, концентрации, температуры, давления и присутствия катализаторов.

Скорость химической реакции прямо пропорциональна произведению молярных концентраций реагирующих веществ.

Пример 1. $H_2 + Cl_2 = 2HCl$

$V^{\rightarrow} = k \cdot C_{H2} \cdot C_{Cl2}$

где k – константа скорости прямой реакции

C_{H2}- концентрация водорода, моль/л

C_{Cl2}- концентрация хлора, моль/л

Концентрация веществ может обозначаться квадратными скобками, заключенными вокруг формулы вещества. Например, для этой реакции скорость прямой реакции можно записать так:

$V^{\rightarrow} = k \cdot [H_2] \cdot [Cl_2]$

Зависимость скорости реакции от температуры определяется правилом Вант-Гоффа: при повышении температуры на каждые 10^0 скорость большинства реакций увеличивается в 2-4 раза

$$\nu_2 = \nu_1 \cdot \gamma^{\frac{t_2 - t_1}{10}}$$

где γ – температурный коэффициент скорости реакции, значения которого для большинства реакций лежит в интервале от 2 до 4.

ν_2 - скорость реакции при температуре t_2, °С

ν_1 - скорость реакции при температуре t_1, °С

Пример 2. Температурный коэффициент скорости реакции равен 2,8. Во сколько раз возрастёт скорость реакции при повышении температуры от 20^0 до $75\ ^0$С ?

Решение. $t_2 - t_1 = 75 - 20 = 55$ °С. Обозначив скорость реакции при 20^o и 75^o соответственно ν_1 и ν_2 получаем: $\nu_2 / \nu_1 = 2{,}8^{55/10} = 2{,}8^{5{,}5} = 287$.

Скорость реакции увеличится в 287 раз.

2.2 Химическое равновесие

Состояние системы, при котором скорости прямой и обратной реакции равны, называют химическим равновесием. Состояние равновесия характеризуется константой равновесия K_c.

Гомогенная система:

$2CO_{(г)} + O_2 = 2CO_{2\ (г)}$

$$K_c = \frac{C^2_{CO_2}}{C^2_{CO} C_{O_2}}$$

где C_{co}; C_{O2}; C_{CO2} – равновесные концентрации веществ, моль/л.

Гетерогенная система:

Fe_2O_3 (т) + $3H_2$ (г) = 3Fe (т)+$3H_2O$ (г)

$$K_c = \frac{C^3_{H2O}}{C^3_{H_2}}$$

В выражении константы равновесия концентрация твердой фазы не входит, так как она является практически постоянной величиной.

На состояние равновесия системы влияют давление, концентрация реагирующих веществ и температура. Система может находиться в состоянии равновесия бесконечно долго. Если изменить условия его

существования, равновесие будет нарушено. Переход из одного равновесного состояния в другое называют смещением равновесия. Определить направление смещения равновесия позволяет принцип Ле Шателье: если находящаяся в равновесии система подвергается внешнему воздействию, равновесие смещается в направлении, которое способствует ослаблению этого воздействия.

Пример. 1 Для реакции N_2 (г)+ $3H_2$ (г) = $2NH_3$ (г) в какую сторону смещается равновесие если увеличить концентрацию аммиака и давление?

Решение: С увеличением концентрации аммиака равновесие смещается влево. С увеличением давления в этой системе равновесие смещается вправо.

Пример 2. В системе А(г)+2В(г)=С(г) равновесные концентрации равны C^p_a =0,06 моль/л, $C^p_в$ =0,12 моль/л , C^p_c =0,216 моль/л . Найти константу равновесия реакции и исходные концентрации веществ А и В.

Решение: Константа равновесия выражается уравнением:

$$K_c = \frac{C^p_c}{C^p_a C^2_в} = \frac{0{,}216}{0{,}06 \cdot (0{,}12)^2} = 250$$

Для нахождения исходных концентраций веществ А и В следует учесть, что согласно уравнению реакции, из 1 моль А и 2 моль В образуется 1 моль С. Поскольку по условию задачи в каждом литре системы образовалось 0, 216 моль вещества С, то при этом было израсходовано 0,216 моль вещества А и 0,216*2 = 0,432 моль вещества В. Таким образом, искомые исходные концентрации равны:

C^o_a = 0,06+0,216=0,276 моль/л,

$C^o_в$ = 0,12+0,432=0,552 моль/л.

Задания к разделу 2.

21. Напишите выражение для константы равновесия реакции:

$Si + 2H_2O \leftrightarrow SiO_2+2H_2$

22. Рассчитайте исходную концентрацию CO для реакции, если равновесные концентрации [CO]=0,01, [COS] = 0,03 моль/л.

$Sb_2S_3+3CO=2Sb+3COS$

23. Температурный коэффициент скорости реакции равен 2,5. Во сколько раз увеличится скорость, если температуру повысить на 40°?

24. В какую сторону сдвинется равновесие системы $C+2N_2O \leftrightarrow CO_2+2N_2$ если увеличить объём системы?

25. Как повлияет на равновесие реакции $CaCO_3 \leftrightarrow CaO+CO_2$ -179 кДж, понижение температуры?

26. Напишите выражение для константы равновесия реакции:

$Fe_2O_3 +3CO \leftrightarrow 2Fe + 3CO_2$

27. Чему равна начальная концентрация NO_2, если в момент равновесия концентрация NO была 0,3 моль/л , O_2 – 0,15 моль/л, NO_2 - 0,2 моль/л.

28. Во сколько раз изменится скорость химической реакции, если температуру понизили с 25° до -15° при температурном коэффициенте скорости 2?

29. Куда сдвинется равновесие реакции $H_2 +J_2 \leftrightarrow 2HJ$ при уменьшении объёма системы в 3 раза?

30. Куда сдвинете я равновесие реакции $N_2O_4 \leftrightarrow 2NO_2$ -Q, если повысить температуру в системе?

31. Напишите выражение для константы равновесия реакции:

$2N_2O \leftrightarrow 2N_2 + O_2$

32. Чему равна скорость реакции $CuO + 2HNO_3 = Cu(NO_3)_2 + H_2O$ при концентрации 3 моль/л и константе скорости реакции К = 0,4 ?

33. Во сколько раз уменьшится скорость химической реакции при снижении температуры с 50 до 20 С°, если температурный коэффициент равен 3 ?

34. В какую сторону сдвинется равновесие реакции $CO + H_2O \leftrightarrow CO_2 + H_2$ при увеличении давления?

35. В какую сторону сдвинется равновесие реакции $2C + O_2 \leftrightarrow 2CO$; $\Delta H^0 = -105$ кДж при понижении температуры ?

36. Написать выражение для константы равновесия реакции:

$2C_2H_4$ (г) + $5O_2 \leftrightarrow 4CO_2 + 2H_2O$ (пар)

37. Рассчитать начальную концентрацию кислорода для реакции, если равновесные концентрации кислорода равна 0,34 моль/л, а диоксида азота равна 0,72 моль/л.

$2NO + O_2 \leftrightarrow 2NO_2$

38. Температурный коэффициент скорости реакции равен 5. Во сколько раз увеличится скорость реакции, если температуру повысить с 80^0 до 110^0С.

39. В какую сторону сдвинется равновесие реакции при уменьшении объёма системы: $2CO + O_2 \leftrightarrow 2CO_2$

40. В системе: $N_2 + O_2 \leftrightarrow 2NO$ ΔH^0=180 кДж. Произошло повышение температуры. В какую сторону сдвинулось равновесие?

Задания 41-60 . Напишите математическое выражение Кс (константы химического равновесия) для обратимых реакций и укажите направление смещения равновесия при изменении условий:

А) уменьшении парциального давления одного из исходных газообразных веществ;

Б) понижении давления;

В) повышении температуры.

Номер задания	Уравнение реакции	ΔH^o, кДж/моль
41	$2N_2O_{(г)} + O_{2(г)} = 4NO_{(г)}$	196
42	$4NH_{3(г)} + 5O_{2(г)} = 4NO_{(г)} + 6H_2O_{(г)}$	908
43	$2H_2S_{(г)} + 3O_{2(г)} = 2SO_{2(г)} + 2H_2O_{(г)}$	1038
44	$CO_{2(г)} + H_{2(г)} = CO_{(г)} + H_2O_{(г)}$	41
45	$2H_{2(г)} + O_{2(г)} = 2H_2O_{(г)}$	-484
46	$2SO2_{(г)} + O2_{(г)} = 2SO3_{(г)}$	-196

47	$2NO_{(г)} + O2_{(г)} = 2NO2_{(г)}$	-112
48	$Fe3O4 + H2_{(г)} = 3FeO + H2O_{(г)}$	62
49	$FeO + H2_{(г)} = Fe + H2O_{(г)}$	-272
50	$C + H2O_{(г)} = CO_{(г)} + H2_{(г)}$	131
51	$CO_{(г)} + H2O_{(г)} = CO2_{(г)} + H2_{(г)}$	-41
52	$SO3_{(г)} + H2_{(г)} = SO2_{(г)} + H2O_{(г)}$	-144
53	$H2_{(г)} + Cl2_{(г)} = 2HCl_{(г)}$	-184
54	$FeO + CO_{(г)} = Fe + CO2_{(г)}$	-11
55	$2ZnS + 3O2_{(г)} = 2ZnO + 2SO2_{(г)}$	-878
56	$N2_{(г)} + 3H2_{(г)} = 2NH3_{(г)}$	-92
57	$CaCO3 = CaO + CO2_{(г)}$	175
58	$2MgCl_2 + 2O_{2(г)} = 2MgO + 2Cl_{2(г)}$	82
59	$Ca(OH)_{2(т)} = CaO_{(т)} + H_2O_{(г)}$	48
60	$H_2O_{(г)} + CO_{(г)} = CO_{2(г)} + H_{2(г)}$	-41

4 Растворы электролитов

4.1 Концентрация растворов

Содержание растворенного вещества в растворе может быть выражено либо безразмерными единицами долями, либо величинами размерными – концентрациями. Наиболее часто употребляют следующие методы выражения концентрации растворов.

Массовая доля растворенного вещества (ω) – отношение массы растворенного вещества ($m_в$) к общей массе раствора ($m_р$):

$$\omega = \frac{m_в}{m_р}$$

Если отношение $m_в/m_р$: умножить на 100%, то концентрация раствора будет выражена в %.

Молярная концентрация ($C_м$ или М) или молярность – число молей растворенного вещества (ν) в одном литре раствора:

$$C_м = \frac{\nu}{M} = \frac{m_b}{M \cdot V} \text{ (моль/л)}$$

где $m_в$ – масса растворенного вещества, М - молярная масса растворенного вещества, г/моль,

V - объём раствора, л.

Эквивалентная концентрация ($C_э$) – отношение массы растворенного вещества к произведению эквивалента данного вещества на объём раствора:

$$C_э = \frac{m_b}{Э \cdot V} \text{ (моль/л)}$$

Пример 1. Вычислить массу хлорида натрия и воды, необходимых для приготовления 500 г раствора, в котором содержание хлорида натрия в массовых долях равно 0,05 (или 5 %)

Решение:

По определению массовой доли, выраженной в %.

$$\omega = \frac{m_b}{m_{р-ра}} \cdot 100\ \%$$

Отсюда находим $m_в = \frac{\omega \cdot m_{р-ра}}{100} = \frac{5 \cdot 500}{100} = 25$ г.

Учитывая, что масса раствора равна 500 г, масса воды будет равна: 500-25=475 г.

Пример 2. Определить молярную концентрацию 15 % раствора карбоната натрия с плотностью 1,18 г/мл.

Решение:

Воспользуемся формулой, связывающей процентную и молярную концентрацию:

$$C_м = \frac{\omega \cdot \rho \cdot 10}{M},$$

где ρ – плотность раствора, г/мл

ω - массовая доля, %

М - молярная масса растворенного вещества, г/моль

В нашем случае: М =106

$$C_м = \frac{15 \cdot 1{,}18 \cdot 10}{106} = 1{,}66 \text{ моль/л}$$

Задания к подразделу 4.1

Каждое задание содержит по 2 задачи (а, б)

61 а) К 500 мл раствора соляной кислоты (р = 1.10 г/мл) прибавили 2.5 л воды, после чего раствор стал 4% - ным. Определите процентное содержание растворенного вещества в исходном растворе. б) Определите молярную концентрацию 10% - ного раствора азотной кислоты (р=1,06 г/мл).

62 а) Определите молярную концентрацию раствора сульфата калия, в 200 мл которого содержится 1,74 г растворенного вещества. б) Определите процентное содержание растворенного вещества 1М раствора нитрата никеля (11), плотность которого 1,08 г/мл.

63 а) Определите молярную концентрацию 10%-ного раствора серной кислоты (р=1,07 г/мл). б) Сколько мл воды следует добавить к 100 мл 20%-го раствора серной кислоты (р=1,14 г/мл) для получения 5%-го раствора?

64 а) В каком объеме воды следует растворить 32,2 г, чтобы получить 5%-ный раствор сульфата натрия? б) Определите процентное содержание растворенного вещества 0,9М раствора (р=1,05 г/мл).

65 а) Сколько граммов медного купороса $CuSO4 \cdot 5H2O$ и воды требуется для приготовления 150 г 8%-ного раствора в расчете на безводную соль? б) Определите молярную концентрацию 27%-ного раствора соляной кислоты (р=1,14 г/мл).

66 а) До какого объёма следует разбавить 1,5 л 20%-ного раствора хлорида аммония (р=1,06 г/мл), чтобы получить 10%-ный раствор (р=1,03 г/мл).

б) Сколько миллилитров 70%-ного раствора нитрата калия (р=1,16 г/мл) требуется для приготовления 0.5 л 0,2М раствора?

67 а) Сколько граммов кристаллической соды $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ надо взять для приготовления 2 л 0,2 М раствора Na_2CO_3? б) Сколько миллилитров 36% - ного раствора соляной кислоты (р = 1,18 г/мл) требуется для приготовления 4 л 0,5 М раствора?

68 а) К 1 л 20% - ного раствора гидроксида натрия (р = 1,22 г/мл) прибавили 10 л воды. Определите процентное содержание растворенного вещества в полученном растворе, б) Определите молярную концентрацию 8% - ного раствора сульфата натрия (р = 1,08 г/мл),

69 а) Сколько миллилитров 10%-ного раствора Na_2CO_3 (р ~ 1,10 г/мл), следует прибавить к 1 л 2% -ного раствора (р = 1,02 г/мл), чтобы получить 3% - ный раствор этой соли? б) Определите процентное содержание растворенного вещества в 2 М растворе гидроксида натрия (р = 1,08 г/мл).

70 а) Сколько миллилитров воды следует прибавить к 25 мл 40% - ного раствора КОН (р=1,40 г/мл), чтобы получить 2 % - ный раствор? б) Сколько миллилитров 96 % -ного раствора серной кислоты (р = 1,84 г/мл) требуется для приготовления 300 мл 0,5 М раствора?

71 а) Сколько граммов медного купороса $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ следует добавить к 150 мл воды, чтобы получить 5% -ный раствор $CuSO_4$? б) Сколько миллилитров 30% - ного раствора азотной кислоты (р= 1,84 г/мл) требуется для приготовления 250 мл 0,5 М раствора?

72 а) Определите процентное содержание растворенного вещества в 0.25 М растворе гидрокскда натрия (р = 1,01 г/мл), б) Сколько миллилитров 0,1 М раствора HC1 можно приготовить из 20 мл 0,5 М раствора этой кислоты?

73 а) Определите молярную концентрацию 10% - ного раствора соляной кислоты (р = 1,05 г/мл), б) Сколько миллилитров 30% -ной азотной кислоты (р = 1.18 г/мл) требуется для приготовления 250 мл 11% - ного раствора (р = 1,07 г/мл)?

74 а) Сколько миллилитров 30% раствора КОН (р=1,29 г/мл) требуется для приготовления 300 мл 0.1 М раствора? б) К 760 мл 20% - ного раствора NaOH (р= 1,22 г/мл) прибавили 140 мл 10% - ного раствора NaOH (р=1,11 г/мл). Определите процентное содержание растворенного вещества.

75 а) К 50 мл 96% раствора серной кислоты (р=1,84 г/мл) прибавили 50 мл воды. Определите процентное содержание растворенного вещества в полученном растворе. б) Определите молярную концентрацию 72% раствора азотной кислоты (р = 1,43 г/мл).

76 а) Определите молярную концентрацию 6%-ного раствора фосфорной кислоты (р = 1,03 г/мл), б) Определите процентное содержание растворенного вещества раствора, полученного смешением 10 мл 96% -ного раствора азотной кислоты р=1,5 г/мл и 20 мл 48%-го раствора азотной кислоты р =1,3 г/мл.

77 а) До какого объема следует разбавить 500 мл 20% - кого раствора хлорида натрия (р ~ 1,15 г/мл), чтобы получить 4,5% - ный раствор (р ~ 1,03 г/мл)? б) Определите молярную концентрацию 50% раствора азотной кислоты (р =1,31 г/мл).

78 а) Определите молярную концентрацию 60%-ного раствора серной кислоты (р =1,5 г/мл). б) Сколько миллилитров 32% - ного раствора азотной кислоты (р =1,39 г/мл) необходимо для приготовления 300 мл 0,75М раствора?

79 а) Сколько миллилитров 0,2 М раствора азотной кислоты необходимо для нейтрализации 80 мл 0,6 М раствора NaOH? б) Определите процентное содержание растворенного вещества в 1,5 М растворе КОН (р = 1,07 г/мл).

80 а) Определите молярную концентрацию 10 % раствора карбоната натрия (р=1,10 г/мл). б) Сколько миллилитров 30% раствора (р=0,9 г/мл) требуется для получения 400 мл 2М его раствора?

4.2. Электролитическая диссоциация.
Ионно-молекулярные уравнения.

Электролитами называют вещества, растворы и расплавы которых проводят электрический ток. К электролитам относятся неорганические кислоты, основания, амфотерные гидроксиды и соли. Они распадаются в водных растворах и расплавах на катионы и анионы.

Процесс распада молекул электролитов на ионы в среде растворителя получил название электролитической диссоциации. Количественно диссоциация определяется степенью и константой диссоциации. Степень диссоциации – это число, показывающее какая часть молекул от общего их количества в растворе распадается на ионы:

$$\alpha = \frac{\textit{число распавшихся молекул } (n)}{\textit{общее число растворенных молекул } (N)}$$

По степени диссоциации электролиты условно разделяют на сильные ($\alpha \approx 1$) и слабые($\alpha < 1$).

Сильные электролиты

К ним относятся минеральные кислоты: HNO_3, H_2SO_4, HCl, HBr, HJ, $HClO_4$; гидроксиды щелочных и щелочно-земельных металлов: LiOH, NaOH, KOH, $Ba(OH)_2$ и др. ; соли – средние, кислые, основные – $Fe_2(SO_4)_3$; $NaHCO_3$; $Al(OH)Cl_2$ и тп.

Сильные электролиты диссоциируют практически нацело:

$Fe_2(SO_4)_3 = 2Fe^{3+} + 3SO_4^{2-}$

$HNO_3 = H^+ + NO^{3-}$

$NaHCO_3 = Na^+ + HCO^{3-}$

$Ba(OH)_2 = Ba^{2+} + 2OH^-$

Слабые электролиты

К ним относятся кислоты: HNO_2, H_2CO_3, H_2S и др. а также все органические кислоты, в том числе уксусная CH_3COOH; гидроксиды металлов основного характера $Fe(OH)_3$, $Cu(OH)_2$ и др. (кроме щелочных и щелочноземельных) и гидроксид аммония NH4OH, а также амфотерные гидроксиды $Al(OH)_3$; $Cr(OH)_3$; $Zn(OH)_2$; $Sn(OH)_2$ и др.

Для слабых электролитов диссоциация обратимый процесс, для которого справедливы общие законы равновесия. Например, для уксусной кислоты константа равновесия, называемая константой диссоциации имеет вид: $CH_3COOH \leftrightarrow CH_3COO^- + H^+$

$$К_д = \frac{C_{CH_3COO} - \cdot C_{H+}}{C_{CH_3COOH}}$$

Многоосновные кислоты и многокислотные основания диссоциируют ступенчато, и каждую ступень равновесного состояния характеризует своя константа диссоциации (причем $К_{С1}$ всегда больше $К_{С2}$ и т.д.), например, при диссоциации H_2S: 1-я ступень $H_2S \leftrightarrow H^+ + HS^-$ $\quad К_{С1} = \frac{[H^+]\cdot[HS^-]}{[H_2S]} = 6\cdot10^{-8}$

2- я ступень $HS^- \leftrightarrow H^+ + S^{2-}$ $\quad К_{С2} = \frac{[H^+]\cdot[S^{2-}]}{[HS^-]} = 1\cdot10^{-14}$,

где [ ] - равновесные концентрации ионов и молекул.

Диссоциация $Cu(OH)_2$:

1-я ступень $Си(OH)_2 \leftrightarrow Си(OH)^+ + OH^-$

2-я ступень $Си(OH)^+ \leftrightarrow Си^{2+} + OH^-$

Амфотерные гидроксиды, например $Pb(OH)_2$ диссоциируют по основному типу: $Pb(OH)_2 \leftrightarrow PbOH^+ + OH^-$

$PbOH^+ \leftrightarrow Pb^{2+} + OH^-$

и кислотному:

$H_2PbO_2 \leftrightarrow H^+ + HPbO_2^-$

$HPbO_2^- \leftrightarrow H^+ + PbO_2^{2-}$

В растворах электролитов реакции протекают между ионами. Для записи ионных реакций применяют ионные уравнения. При составлении ионных уравнений реакций все слабые электролиты, газы и труднорастворимые электролиты записывают в молекулярной форме, все сильные электролиты (кроме труднорастворимых солей) в ионной форме. Примеры составления ионных уравнений реакций:

а) **образование труднорастворимых соединений**:

$Cu(NO_3)_2 + 2NaOH = Cu(OH)_2\downarrow + 2NaNO_3$

$Cu^{2+} + 2NO^{3-} + 2Na^+ + 2OH^- = Cu(OH)_2\downarrow + 2Na^+ + 2NO^{3-}$

$Cu^{2+} + 2OH^- = Cu(OH)_2\downarrow$

б) **образование газообразных веществ**:

$Na_2CO_3 + 2HCl = 2NaCl + H_2O + CO_2$

$2Na^+ + CO_3^{2-} + 2H^+ + 2Cl^- = 2Na^+ + 2Cl^- + H_2O + CO_2$

$CO_3^{2-} + 2H^+ = H_2O + CO_2$

в) **образование слабых электролитов:**

$CH_3COONa + HNO_3 = CH_3COOH + NaNO_3$

$CH_3COO^- + Na^+ + H^+ + NO_3^- = CH_3COOH + Na^+ + NO_3^-$

$CH3COO^- + H^+ = CH_3COOH$

Пример 1. Написать реакции для следующих превращений: $KOH \xrightarrow{A} KHSO_3 \xrightarrow{B} K_2SO_3$

Решение:

$$A.\ KOH + H_2SO_3 = KHSO_3 + H_2O$$

$$K^+ + OH^- + H_2SO_3 = K^+ + HSO_3^- + H_2O$$

$$OH^- + H_2SO_3 = HSO_3^- + H_2O$$

$$B.\ KHSO_3 + KOH = K_2SO_3 + H_2O$$

$$K^+ + HSO_3^- + K^+ + OH^- = 2K^+ + SO_3^{2-} + H_2O$$

$$HSO_3^- + OH^- = SO_3^{2-} + H_2O$$

Задания к разделу 4.2.

Задания 81-100. напишите для предложенных соединений уравнения диссоциации, а также в молекулярной и ионной формах уравнения возможных реакций взаимодействия их H_2SO_4 с и NaOH.

81. HCl; $Cr(OH)_3$	91. $Ca(OH)_2$; H_3PO_4
82. $Cd(OH)_2$; H_2S	92. HNO_3; $Be(OH)_2$
83. $Cu(OH)_2$; HBr	93. $H_2Cr_2O_7$; KOH
84. H_2SO_3; $Sn(OH)_2$	94. HCN; $Ga(OH)_3$
85. H_2SiO_3; $Pb(OH)_2$	95. KOH; H_2CO_3
86. CH_3COOH; $Fe(OH)_3$	96. HF; $Be(OH)_2$
87. H_2Se; $Zn(OH)_2$	97. NH_4OH; $HClO_4$
88. $Fe(OH)_2$; H_3AsO_3	98. $Pb(OH)_2$; HNO_2
89. LiOH; HJ	99. $Mg(OH)_2$; HClO
90. H_2Te; $Al(OH)_3$	100. $Ba(OH)_2$; $HMnO_4$

Задания 101-120. Напишите в молекулярной и ионной формах уравнения реакций для следующих превращений:

101. $Ni(OH)_2 \rightarrow (NiOH)_2SO_4 \rightarrow NiSO_4 \rightarrow Ni(OH)_2$

102. $CuSO_4 \rightarrow (CuOH)_2SO_4 \rightarrow Cu(OH)_2 \rightarrow Cu(OH)NO_3$

103. $Bi(NO_3)_3 \rightarrow Bi(OH)(NO_3)_2 \rightarrow Bi(OH)_3 \rightarrow Bi_2O_3$

104. $Co(OH)_2 \rightarrow Co(OH)Cl \rightarrow CoCl_2 \rightarrow Co(NO_3)_2$;

105. $Pb(NO_3)_2 \rightarrow Pb(OH)NO_3 \rightarrow Pb(OH)_2 \rightarrow K_2PbO_2$

106. $NiCl_2 \rightarrow Ni(OH)_2 \rightarrow Ni(OH)Cl \rightarrow NiCl_2$

107. $Cr(OH)Cl_2 \rightarrow CrCl_3 \rightarrow Cr(OH)_3 \rightarrow Cr(OH)SO_4$

108. $(SnOH)_2SO_4 \rightarrow SnSO_4 \rightarrow Sn(OH)_2 \rightarrow Na_2SnO_2$;

109. $NiBr_2 \rightarrow Ni(OH)Br \rightarrow Ni(OH)_2 \rightarrow NiSO_4$

110. $CoSO_4 \rightarrow Co(OH)_2 \rightarrow (CoOH)_2SO_4 \rightarrow Co(NO_3)_2$

111. $Cr_2(SO_4)_3 \rightarrow Cr(OH)SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 \rightarrow CrCl_3$;

112. $NiSO_4 \rightarrow (NiOH)_2SO_4 \rightarrow Ni(OH)_2 \rightarrow NiBr_2$;

113. $Fe(OH)SO_4 \rightarrow Fe_2(SO_4)_3 \rightarrow Fe(OH)_3 \rightarrow FeCl_3$

114. $Sn(OH)_2 \rightarrow Sn(OH)Cl \rightarrow K_2SnO_2 \rightarrow Sn(OH)_2$

115. $NiBr_2 \rightarrow (NiOH)_2 SO_4 \rightarrow Ni(OH)_2 \rightarrow NiBr_2$

116. $Al(OH)_3 \rightarrow Al(OH)_2Cl \rightarrow AlCl_3 \rightarrow Al(NO_3)_3$;

117. $CoCl_2 \rightarrow Co(OH)_2 \rightarrow (CoOH)_2SO_4 \rightarrow CoSO_4$,

118. $Bi(OH)_3 \rightarrow Bi(OH)_2NO_3 \rightarrow Bi(OH)_3 \rightarrow Bi_2O_3$

119. $Cu(OH)_2 \rightarrow Cu(OH)Cl \rightarrow CuCl_2 \rightarrow Cu(NO_3)_2$

120. $CoSO_4 \rightarrow (CoOH)_2SO_4 \rightarrow Co(OH)_2 \rightarrow Co(NO_3)_2$

4.3. Гидролиз солей

Гидролиз солей – это процесс взаимодействия ионов соли с молекулами воды, приводящий к смещению ионного равновесия воды и изменению pH среды.

В зависимости от силы электролита, образовавшего соль, различают три случая гидролиза.

Гидролиз по катиону

Гидролиз по катиону протекает, если соль образована слабым основанием и сильной кислотой. В растворах таких солей возникает кислая реакция среды (pH<7). Например: для $CuCl_2$ ионное уравнение гидролиза следующее:

$Cu^{2+} + HOH = CuOH^+ + H^+$, pH<7

молекулярное уравнение гидролиза: $CuCl_2 + HOH = CuOHCl + HCl$.

Гидролиз по аниону

Гидролиз по аниону протекает, если соль образована слабой кислотой и сильным основанием. Растворы таких солей имеют щелочную реакцию среды (pH>7). Например, для Na_2CO_3 ионное уравнение гидролиза:

CO_3^{2-} + HOH == HCO_3^- + OH^- pH>7

Молекулярное уравнение: Na_2CO_3 + HOH = $NaHCO_3$ + NaOH

Гидролиз по катиону и аниону

Гидролиз по катиону и аниону протекает, если соль образована и слабым основанием, и слабой кислотой. Реакция среды в растворе при этом остается близкой к нейтральной и определяется сравнительной силой слабых оснований и кислоты, образующих соль.

В случае гидролиза по катиону и аниону возможны два варианта протекания реакции.

1. Если соль растворима в воде, то гидролиз протекает при обычных условиях по первой ступени, т.е. одна молекула соли взаимодействует с одной молекулой воды. Ионное уравнение гидролиза:

NH_4^+ + CO_3^{2-} + HOH = NH_4OH + HCO_3^- pH~7.

Молекулярное уравнение гидролиза:

$(NH_4)_2CO_3$ + HOH = NH_4OH + NH_4HCO_3.

2. Если соль не существует в растворе (в таблице растворимости против такой соли стоит прочерк), то при соединении с водой такая соль полностью разлагается водой с образованием слабого труднорастворимого гидроксида, выпадающего в осадок, и слабой, часто летучей кислоты. Например: Al_2S_3

Ионное уравнение гидролиза:

$2A1^{3+}3S^{2-}$ + 6HOH = $2A1(OH)_3$ + $3H_2O$

Молекулярное уравнение гидролиза:

$A1_2S_3$ + 6HOH= $2A1(OH)_3$ +$3H_2S$.

Задания к подразделу 4.3

Задания 121-140. Напишите в молекулярной и ионной формах уравнения реакций гидролиза солей, укажите значения pH растворов этих солей (больше или меньше семи).

121. $NaNO_2$, $Cu(NO_3)_2$	131. Na_2HPO_4, $Mg(NO_3)_2$
122. $AlCl_3$, $NaHCO_3$	132. $Al_2(SO_4)_3$, Na_2SeO_3
123. Na_3PO_4, $ZnCl_2$	133. $CuSO_4$, K_3PO_4
124. $FeCl_2$, K_2S	134. Na_2SO_3, $Fe_2(SO_4)_3$
125. K_2SO_3, $ZnSO_4$	135. NaCN, $FeSO_4$
126. NH_4Cl, KClO	136. $Ba(CH_3COO)_2$, $CoSO_4$
127. Na_2Se, $MnCl_2$	137. $NiSO_4$, NaF
128. $ZnSO_4$, BaS	138. $Pb(NO_3)_2$, $Ba(NO_3)_2$
129. $Ni(NO_3)_2$, KNO_2	139. $Cr_2(SO_4)_3$, $NaCH_3COO$
130. NH_4Br, Na_2S	140. KHS, $MgSO_4$

Задания 141-160. Напишите в молекулярной и ионной формах уравнения реакций совместного гидролиза предложенных солей.

141. $Fe_2(SO_4)_3 + Na_2CO_3$	151. $CrCl_3 + K_2S$
142. $Na_2S + Al_2(SO_4)_3$	152. $Na_2CO_3 + Cr(NO_3)_3$
143. $NH_4Cl + Na_2SiO_3$	153. $K_2SiO_3 + Bi(NO_3)_3$
144. $Cr_2(SO_4)_3 + K_2S$	154. $Na_2SO_3 + CrCl_3$
145. $K_2CO_3 + Bi(NO_3)_3$	155. $NH_4NO_3 + Na_2SiO_3$
146. $Na_2S + AlCl_3$	156. $AlCl_3 + Na_2SO_3$
147. $BeSO_4 + K_2S$	157. $K_2SO_3 + CrCl_3$
148. $Cr_2(SO_4)_3 + Na_2SO_3$	158. $Na_2S + Al_2(SO_4)_3$
149. $K_2SO_3 + AlBr_3$	159. $Fe(NO_3)_3 + K_2CO_3$
150. $Bi(NO_3)_3 + Na_2CO_3$	160. $Al(NO_3)_3 + Na_2CO_3$

5. Окислительно-восстановительные процессы.

5.1 Окислительно-восстановительные реакции

Окислительно-восстановительными реакциями называют реакции, протекающие с изменением степени окисления (СО) элементов. Степень окисления – это тот условный заряд атома элемента, который вычисляют, исходя из предположения, что молекула состоит только из ионов (как правило, обозначают арабской цифрой, заряд ставят перед цифрой). СО рассчитывается на основании положения, что сумма СО всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов , составляющих ион – заряду иона.

Ряд элементов имеют постоянную СО. Например:

Водород Н (за исключением гидридов, где, СО Н = - 1) +1

Щелочные металлы (Na, K, Li и др.) +1

Металлы 2 группы периодической системы (Ca, Zn и т. д.) +2

Металлы 3 группы периодической системы (A1) +3

Кислород О -2

(За исключением OF_2, где СО кислорода +1; перекисей H_2O_2, Na_2O_2 и т.д., где СО кислорода – 1).

Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций.

Прежде всего необходимо рассчитать степени окисления всех элементов реакции в левой и правой частях уравнения. Для нахождения коэффициентов при составлении окислительно-восстановительных реакций необходимо:

- соблюдение принципа электронного баланса (число электронов, отданных восстановителем (Red) , должно быть равно числу электронов, принятых окислителем (Ox), например:

$Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3$

Red Ox

$4 \quad Al - 3\bar{e} = Al^{3+}()$

$3 \quad O_2 + 4\bar{e} = 2O^{2-}$

$$4Al + 3O_2 = 2Al_2O_3$$

В реакциях, протекающих в водных растворах, следует использовать среду (кислую, щелочную, нейтральную). Например, в кислой среде:

$$K_2Cr_2O_7 + KJ + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + J_2 + H_2O + K_2SO_4$$

$$3 \quad 2J^- - 2\bar{e} = J_2$$
$$1 \quad Cr_2O_7^{2-} + 6\bar{e} + 14H^+ = 2Cr^{+3} + 7H_2O$$

Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$$K_2Cr_2O_7 + 6KJ + 7H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + 3J_2 + 7H_2O + 4K_2SO_4$$

В щелочной среде:

$$KCrO_2 + KClO_4 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KCl + H_2O$$

$$8 \quad CrO_2^- - 3\bar{e} + 4OH^- \rightarrow CrO_4^{2-} + 2H_2O$$
$$3 \quad ClO_4^- + 8\bar{e} + 4H_2O \rightarrow Cl^- + 8OH^-$$

Суммарное молекулярное уравнение реакции

$$8KCrO_2 + 3KClO_4 + 8KOH \rightarrow 8K_2CrO_4 + 3KCl + 4H_2O$$

Среда нейтральная:

$$KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$$

$$3 \quad Mn - 2\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4H^+$$
$$2 \quad MnO_4 + 3\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4OH^-$$

$$6H_2O + 4H_2O \rightarrow 12H^+ + OH^-$$

$$2H_2O \rightarrow 4H^+$$

Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$$2KMnO_4 + 3MnSO_4 + 2H_2O = 5MnO_2 + K_2SO_4 + 2H_2SO_4$$

Задания 161-180. Составьте электронно-ионные схемы и молекулярные уравнения реакций. Укажите окислитель и восстановитель. Для каждого задания по две реакции (а, б):

161. а) $Na_2SeO_3 + KBrO + H_2O \rightarrow Br_2; SeO_4^{2-}$

б) $HCl + HNO_3 \rightarrow Cl_2; NO$

162. а) $Cr_2(SO_4)_3 + Cl_2 + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

б) $NaNO_2 + KJ + H_2SO_4 \rightarrow NO; J_2$

163. а) $NaCrO_2 + NaClO + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

б) $H_2S + SO_2 \rightarrow S; H_2O$

164. а) $HNO_3 + Ni^0 \rightarrow N_2O; Ni^{2+}$

б) $SO_2 + Br_2 + H_2O \rightarrow HBr; H_2SO_4$

165. а) $K_2Cr_2O_7 + Na_3AsO_3 + H_2SO_4 \rightarrow AsO_4^{3-}; Cr^{3+}$

б) $KCrO_2 + Cl_2 + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

166. а) $SO_2 + NaClO_3 + H_2O \rightarrow SO_4^{2-}; Cl^-$

б) $K_2Cr_2O_7 + HCl \rightarrow Cr^{3+}; Cl_2$

167. а) $KMnO_4 + H_2S + H_2SO_4 \rightarrow Mn^{2+}; SO_4^{2-}$

б) $J_2 + Cl_2 + H_2O \rightarrow JO_3^-; Cl^-$

168. $SnCl_2 + KBrO_3 + HCl \rightarrow Sn^{4+}; Br^-$

б) $KClO_3 + KCrO_2 + NaOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

169. $Ni(OH)_2 + NaClO + H_2O \rightarrow Ni(OH)_3; Cl^-$

б) $KMnO_4 + Na_2SO_3 + H_2O \rightarrow MnO_2; SO_4^{2-}$

170. а) $MnSO_4 + PbO_2 + H_2SO_4 \rightarrow Pb^{2+}; MnO_4^-$

б) $FeCl_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow Fe^{+3}; Mn^{+2}$

171. а) $H_3PO_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow Mn^{+2}; H_3PO_4$

б) $MnO_2 + KClO_2 + KOH \rightarrow MnO_4^{2-}; Cl^-$

172. а) $KMnO_4 + NaNO_2 + H_2O \rightarrow NO_3^-; MnO_2$

б) $S + HNO_3 \rightarrow SO_2; NO$

173. а)$H_2S + K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 \rightarrow S; Cr^{+3}$

б) $KNO_3 + Zn + KOH \rightarrow ZnO_2^{2-}; NH_3$

174. а) $Cr_2O_3 + KClO_3 + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

б) $FeCl_2 + HNO_3 + HCl \rightarrow Fe^{+3}; N_2O$

175. а) $KClO_3 + MnO_2 + KOH \rightarrow MnO_4^{2-}; Cl^-$

б) $Na_3AsO_3 + J_2 + H_2O \rightarrow AsO_4^{3-}; J^-$

176. а) $H_2S + HNO_3 \rightarrow SO_4^{2-}; Cl^-$

б) $J_2 + Na_2SO_3 + H_2O \rightarrow J^-; SO_4^{2-}$

177. а) $C + HNO_3 \rightarrow CO_2; NO_2$

б) $H_2S + Cl_2 + H_2O \rightarrow SO_4^{2-}; Cl^-$

178. а) $SnCl_2 + Na_3AsO_3 + HCl \rightarrow As; Sn^{+4}$

б) $KNO_3 + Zn + NaOH \rightarrow ZnO_2^{2-}; NH_3$

179. а) $Cr_2O_3 + KClO_3 + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

б) $KMnO_4 + Na_2SO_3 + H_2SO_4 \rightarrow Mn^{+2}; SO_4^{2-}$

180. а) $Mn(NO_3)_2 + NaBiO_3 + HNO_3 \rightarrow Bi^{+3}; MnO_4^-$

б) $H_2S + Br_2 + H_2O \rightarrow SO_4^{2-}; Br^-$

5.2 Гальванические элементы

Гальваническими элементами называют устройства, в которых энергия окислительно-восстановительных реакций преобразуется в электрическую энергию. В медно-цинковом гальваническом элементе электродвижущая сила (ЭДС) возникает за счёт разности потенциалов меди и цинка, опущенных в растворы своих солей: соответственно $CuSO_4$ и $ZnSO_4$. Если концентрации растворов составляют 1 моль/л, то расчет эдс производят следующим образом. Составляют схему гальванического элемента:

Zn │ZnSO4 ‖ CuSO4 │Cu

Затем выписывают из таблицы стандартных электродных потенциалов значения потенциалов меди и цинка, соответственно

$E^o_{Zn^{2+}/Zn}$ = -0,76 В ()

$E^o_{Cu^{2+}/Cu}$ = +0,34 В ()

ЭДС можно рассчитать как разность потенциалов медного и цинкового электродов: ЭДС = E_{ox} - E_{red}. Определяют окислитель и восстановитель, сравнивая значения потенциалов. Потенциал у цинка отрицательнее, следовательно, цинковый электрод будет играть роль восстановителя:

(-) $Zn^0 - 2\bar{e} \rightarrow Zn^{2+}$ процесс окисления

и цинк будет отрицательным полюсом (анодом) в данном гальваническом элементе. Потенциал меди положительнее, поэтому медный электрод будет положительным полюсом (катодом), а процесс будет таким:

(+) $Cu^{2+} + 2\bar{e} \rightarrow Cu^0$ процесс восстановления.

Направление движения электронов будет от цинка к меди (показано мостиком со стрелкой на электрохимической схеме гальванического элемента. ЭДС = +0,34 – (-0,78) = 1,1 В

Концентрационный гальванический элемент.

В таком элементе оба электрода из одного металла, но растворы солей, в которые погружены электроды, различной концентрации. Поэтому необходимо рассчитать потенциалы по уравнению Нернста:

$$E^p_{оф/вф} = E^0_{оф/вф} + \frac{0.059}{n} \lg \frac{C_{оф}}{C_{вф}}$$ где

оф – окисленная форма элемента в потенциалопределяющей реакции,

вф – восстановленная форма элемента в этой реакции,

С – молярные концентрации соответствующих веществ,

n – количество электронов, перешедших от восстановителя к окислителю.

Пример 1. Рассчитать эдс гальванического элемента, состоящего из никелевых электродов, опущенных в растворы сульфата никеля с концентрацией 10^{-4} моль/л и 1 моль/л соответственно.

Решение:

Схема гальванического элемента:

$Ni \mid NiSO_4$, 0,0001 М $\mid\mid$ $NiSO_4$ 1 М $\mid Ni$

$E^o_{2H^+/H_2} = -0,25$ В

Определяем потенциал никеля по уравнению Нернста:

$E_{Ni2^+/Ni} = E^o_{Ni2^+/Ni} + 0,059/2 \lg C_{Ni2+} = - 0,25 + 0,059/2 \lg 10^{-4} = - 0,309$ В

Направление движения электронов во внешней цепи от электрода с Е = -0,25 В к электроду с Е = -0,309В.

(-) Ni $|NiSO_4$, 0,0001 M $||$ $NiSO_4$,1 M $|$Ni (+)

Уравнения электродных процессов:

(-) $Ni^0 - 2\bar{e} \rightarrow Ni^{2+}$ (процесс окисления)

(+) $Ni^{2+} + 2\bar{e} \rightarrow Ni^0$ (процесс восстановления)

Значение эдс составляет:

эдс = $E_{ox} - E_{red}$ = -0,25 – (-0,309) = 0,059 В.

Задания к подразделу 5.2

Для предложенных гальванических элементов рассчитайте электродные потенциалы и ЭДС. Если концентрация раствора не указана, потенциал считается стандартным из таблицы 1. Напишите уравнения анодного и катодного процессов, молекулярное уравнение токообразующей реакции, составьте схему и укажите направления движения электронов и ионов.

181	Al $\|Al_2(SO_4)_3$, 0,005 M $\|\|NiSO_4$, 0,01 M $|$ Ni
182	Ni $|NiSO_4$, 0,1 M $\|\|H_2SO_4$ $|H_2$(Pt)
183	Sn $|SnSO_4$ $\|\|Cr_2(SO_4)_3$, 0,05 M $|$Cr
184	(Pt) H_2 $|H_2SO_4$ $\|\|Al_2(SO_4)_3$, 0,005 M $|$Al
185	Cu $|CuSO_4$, 0,1 M $\|\|H_2SO_4|H_2$(Pt)
186	Ag $|AgNO_3$, 0,01 M $\|\|H_2SO_4|H_2$(Pt)
187	Co $|CoSO_4$, 0,01 M $\|\|CoSO_4|$Co
188	Zn $|ZnSO_4$, 0,1 M $\|\|FeSO_4$, 0,01 M $|$Fe
189	Ag $|AgNO_3$, 0,01 M $\|\|Zn(NO_3)_2|$Zn
190	(Pt) H_2 $|H_2SO_4\|\|ZnSO_4$, 0,01 M $|$Zn
191	Cd $|Cd(NO_3)_2$, 0,1 M $\|\|Cd(NO_3)_2$, 0,001 M $|$Cd
192	Ni $|NiSO_4$, 0,001 M $\|\|NiSO_4|$Ni
193	Fe $|FeSO_4$ $\|\|FeSO_4$, 0,01 M $|$Fe
194	Cr $|Cr_2(SO_4)_3$, 0,005 M $\|\|ZnSO_4|$Zn
195	Zn $|Zn(NO_3)_2$, 0,001 M $\|\|Zn(NO_3)_2|$Zn

196	Ag | $AgNO_3$ | | $Cr(NO_3)_3$, 0,005 M | Cr
197	Cd | $CdCl_2$, 0,1 M | | $CuCl_2$, 0,1 M | Cu
198	Ti | $Ti_2(SO_4)_3$, 0,5 M | | $CuSO_4$ | Cu
199	Sn | $SnSO_4$, 0,01 M | | $Fe_2(SO_4)_3$ | Fe
200	Ag | $AgNO_3$, 0,0001 M | | $Pb(NO_3)_2$, 0,1 M | Pb

5.3 Электрохимическая коррозия металлов

Коррозией металлов называют самопроизвольное разрушение металлов под действием различных окислителей из окружающей среды.

Механизм электрохимической коррозии аналогичен механизму процессов в короткозамкнутых гальванических элементах, в которых на участках с более отрицательным потенциалом идёт процесс окисления (разрушения металла), а на участках с более положительным потенциалом процесс восстановления окислителя (коррозионной среды).

Наиболее часто встречаются окислители:

- ионы водорода (коррозия с водородной деполяризацией)

$2H^+ + 2\bar{e} \rightarrow H_2$ (кислой среде)

$2H_2O + 2\bar{e} \rightarrow H_2 + 2OH^-$ (в нейтральной и щелочной среде)

- молекулы кислорода

$O_2 + 4\bar{e} + 4H^+ \rightarrow 2H_2O$ (в кислой среде)

$O_2 + 4\bar{e} + 2H_2O \rightarrow 4OH^-$ (в нейтральной и щелочной среде)

Пример 1. Гальванопара алюминий – железо в воде (среда нейтральная). Учитываем, что в воде есть растворенный кислород.

Схема гальванопары:

Al \| H_2O, O_2 \| Fe

Выписываем потенциалы алюминия и железа из таблицы потенциалов:

$E^\circ_{Al^{3+}/Al} = -1,88$ В $\quad E^\circ_{Fe(OH)_2/Fe} = -0,46$ В

восстановитель - Al; окислитель – O_2

4 (-) $Al^0 - 3\bar{e} \rightarrow Al^{3+}$ - процесс окисления

3 (+) $O_2 + 4\bar{e} + 2H_2O \rightarrow 4OH^-$ - процесс восстановления

$4Al + 3O_2 + 6H_2O = 4Al(OH)_3$

Направление движения электронов от участка с меньшим потенциалом к участку с большим потенциалом. Подвергаться коррозии будет в первую очередь алюминий.

Пример 2. Определить процессы, протекающие при коррозии луженого железа в кислой среде.

Решение:

Схема гальванопары:

Fe | H^+ | Sn

Потенциалы: $E^o_{Fe^{2+}/Fe}$ =-0,44 В, $E^o_{Sn^{2+}/Fe}$ = -0,136 В, $E^o_{2H^+/H_2}$ = 0 В

Восстановитель – Fe; окислитель - H^+

Fe (-) $Fe^0 - 2\bar{e} \rightarrow Fe^{2+}$ - процесс окисления

Sn (+) $2H^+ + 2\bar{e} \rightarrow H_2$ - процесс восстановления

$Fe + 2H^+ \rightarrow Fe^{2+} + H_2$

Электроны движутся от участка с меньшим потенциалом к участку с большим потенциалом, т.е. от Fe к Sn.

Задания к подразделу 5.3

Рассмотрите коррозию гальванопары, используя потенциалы из таблицы 1, укажите анод и катод соответствующей гальванопары в различной коррозионной среде, напишите уравнения электродных процессов, молекулярное уравнение реакции коррозии, укажите направление перемещения электронов в системе.

Номер задания	Коррозионная среда		
	а) $H_2O + O_2$	б) $NaOH + H_2O$	в) $H_2O + H^+$
201	Fe | Zn	Zn | Al	Pb | Zn
202	Fe | Ni	Fe | Zn	Al | Cu
203	Pb | Fe	Cd | Cr	Al | Ni

204	Cu | Zn	Al | Cu	Sn | Cu
205	Zn | Fe	Fe | Cr	Co | Al
206	Zn | Al	Pb | Zn	Cr | Ni
207	Cr | Cu	Pb | Cr	Bi | Ni
208	Cu | Al	Cr | Zn	Fe | Mg
209	Zn | Sn	Mg | Cd	Cr | Bi
210	Co | Mg	Zn | Fe	Pb | Al
211	Pb | Zn	Bi | Ni	Cd | Al
212	Bi | Ni	Cu | Zn	Fe | Ni
213	Fe | Mg	Co | Sn	Ni | Mn
214	Sn | Fe	Pb | Zn	Cr | Fe
215	Cr | Fe	Fe | Mg	Co | Cu
216	Fe | Cr	Ce | Cu	Fe | Cu
217	Cr | Cu	Cd | Zn	Zn | Cu
218	Cd | Zn	Ce | Ni	Cr | Cd
219	Mg | Cu	Cr | Cd	Zn | Al
220	Sn | Cu	Bi | Ni	Pb | Cr

5.4 Электролиз растворов

Электролизом называется процесс, протекающий на электродах при пропускании через раствор или расплав электролита постоянного электрического тока. Электрод, на котором происходит восстановление, называется катодом. Он соединен с отрицательным полюсом источника постоянного тока. Электрод, на котором происходит окисление, называется анодом. Он соединен с положительным полюсом источника постоянного тока.

При электролизе водных растворов протекают процессы, связанные с электролизом воды.

Катодные процессы

На катоде возможно восстановление

- катионов металла $Me^{n+} + n\bar{e} \rightarrow Me^0$

- катиона водорода (свободного или в составе молекул воды)

$2H^+ + 2\bar{e} \rightarrow H_2$ (в кислой среде)

$2H_2O + 2\bar{e} \rightarrow H_2 + 2OH^-$ (в нейтральной и щелочной среде)

Для выбора приоритетного процесса необходимо сравнить стандартные электродные потенциалы металла и водорода. Потенциал восстановления водорода следует использовать с учётом его перенапряжения $E^{\circ}_{2H_2O/H_2} = 1{,}0$ В.

Все металлы при электролизе водных растворов можно разделить на 3 группы:

1. активные металлы (Li - Al) на катоде не осаждаются, вместо них идёт восстановление ионов водорода:

$2H_2O + 2\bar{e} \rightarrow H_2 + 2OH^-$

2. металлы средней активности (Mn; Zn; Fe; Sn) могут осаждаться на катоде с одновременным выделением водорода.

3. неактивные металлы (Ag; Cu; Au) из-за высокой окислительной способности их катионов осаждаются на катоде без выделения водорода:

$$Ag^+ + 1\bar{e} \rightarrow Ag^0$$

Анодные процессы

На аноде возможны процессы окисления:

- материала анода: $Me^0 - n\bar{e} \rightarrow Me^{n+}$

- анионов солей: $2Cl^- - 2\bar{e} \rightarrow Cl_2$

- молекул воды: $2H_2O - 4\bar{e} \rightarrow O_2 + 4H^+$

Анионы кислородсодержащих кислот, имеющие в своём составе атом элемента в высшей степени окисления (SO_4^{2-}; NO_3^-; PO_4^{3-} и др.) при электролизе на аноде не разряжаются.

С учетом перенапряжения величину потенциала кислорода нужно считать равной +1,8 В.

Пример 1. Электролиз водного раствора сульфата натрия с инертными электродами: $Na_2SO_4 = 2Na^+ + SO_4^{2-}$

(-) катод Na^+; H_2O	(+) анод SO_4^{2-}; H_2O
$E^o_{Na^+/Na} = -2,71$ В	$E^o_{O_2/2H_2O} = 1,8$ В
$E^o_{2H_2O/H_2} = -1,0$ В	
Так как $E^o_{Na^+/Na} < E^o_{2H_2O/H_2}$, то происходит восстановление воды	$2H_2O - 4\bar{e} \rightarrow O_2 + 4H^+$
$2H_2O + 2\bar{e} \rightarrow H_2 + 2OH^-$	
$Na^+ + OH^- = NaOH$	$2H^+ + SO_4^{2-} = H_2SO_4$
Среда щелочная	Среда кислая

Пример 2. Электролиз водного раствора хлорида олова с инертными электродами

(-) катод Sn; H_2O	(+) анод Cl^-; H_2O
$E^o_{Sn^{2+}/Sn} = -0,136$ В	$E^o_{Cl_2/2Cl^-} = 1,36$ В
$E^o_{2H_2O/H_2} = -1,0$ В	$E^o_{O_2/2H_2O} = 1,8$ В
Так как $E^o_{Sn^{2+}/Sn} > E^o_{2H_2O/H_2}$ идет процесс восстановления катионов олова	Так как $E^o_{Cl_2/2Cl^-} < E^o_{O_2/2H_2O}$, идёт процесс окисления ионов хлора
$Sn^{2+} + 2\bar{e} \rightarrow Sn^0$	$2Cl^- - 2\bar{e} \rightarrow Cl_2$

Электролиз с растворимым анодом если анод изготовлен из металла, способного растворяться в данном электролите, то происходит окисление металла и анод называют растворимым.

Пример 3. Электролиз водного раствора сульфата меди с медным анодам.

(-) катод Cu; H_2O	(+) анод Cu; SO_4^{2-}; H_2O

$E^{o}_{Cu^{2+}/Cu} = +0,34$ В	$E^{o}_{Cu^{2+}/Cu} = +0,34$ В
$E^{o}_{2H_2O/H_2} = -1,0$ В	$E^{o}_{O_2/2H_2O} = +1,8$ В
Так как $E^{o}_{Cu^{2+}/Cu} > E^{o}_{2H_2O/H_2}$ идет восстановление катионов меди:	Сульфат–ионы не разряжаются, так как $E^{o}_{Cu^{2+}/Cu} < E^{o}_{O_2/2H_2O}$
$Cu^{2+} + 2\bar{e} \rightarrow Cu^{0}$	Анод растворяется $Cu^{0} - 2\bar{e} \rightarrow Cu^{2+}$

Массу вещества, получаемого электролизом, определяют позаконам, открытым М. Фарадеем в 1834 г. Обобщенный закон Фарадея связывает массу вещества, образовавшегося при электролизе, со временем электролиза и силой тока:

$$M = \frac{Мэкв \cdot J \cdot \tau}{F} (г)$$

где m – масса образовавшегося вещества, г;

J – сила тока, А;

τ – время электролиза, с;

F – константа Фарадея (96500 кул/моль)

$М_{экв}$ – молярная масса электрохимических эквивалентов вещества. Рассчитывается как частное от деления молярной массы вещества на число электронов, перемещаемых при окислении или восстановлении.

Пример 1. Ток силой 2, 5А, проходя через раствор электролита, за 30 мин выделяет из раствора 2,77 г металла. Найти молярную массу эквивалентов металла.

Решение:

Из закона Фарадея:

$$М_{экв} = \frac{m \cdot F}{J \cdot t} = \frac{2,77 \cdot 96500}{2,5 \cdot 1800} = 59,4 \text{ г/моль.}$$

Задания к подразделу 5.4

Рассмотрите катодные и анодные процессы при электролизе водных растворов указанных веществ. Процессы на электродах обоснуйте значениями потенциалов (таблица 1). Составьте схемы электролиза с инертными электродами водных растворов предложенных соединений (отдельно два раствора). С инертными электродами, или растворимым анодом. Рассчитайте массу или объём (при н.у. для газов) продуктов, выделяющихся на электродах при пропускании через раствор в течении 1 часа тока силой 1А.

221	$LiBr$; $CoSO_4$	231	$NaCl$; $Al_2(SO_4)_3$
222	K_3PO_4; $Pb(NO_3)_2$	232	$Co(NO_3)_2$; KJ
223	$Ba(NO_3)_2$; $Sn(NO_3)_2$	233	$NiSO_4$; $NaNO_2$
224	$Cr(NO_3)_3$; $CuCl_2$ (Cu -)	234	$FeBr_2$; $NaOH$
225	$Ca(NO_3)_2$; $NiSO_4$	235	$ZnCl_2$; $CoBr_2$
226	K_2CO_3; $NiBr_2$ (Ni -)	236	$NiSO_4$; $MgCl_2$
227	$CoCl_2$; HNO_3	237	$MgCl_2$; $AgNO_3$ (Ag -)
228	$AgNO_3$; $Al_2(SO_4)_3$	238	$Ba(NO_3)_2$; Na_2CO_3
229	$BaCl_2$; H_2SO_4	239	$NaNO_3$; $NiCl_2$
230	$Pb(NO_3)_2$; H_2SO_4	240	KOH; $ZnSO_4$

6. Варианты заданий

Номер варианта – последние две цифры зачётной книжки

Номер варианта	Номера заданий
01	1, 21, 41, 61, 81, 101, 121, 141, 161, 181, 201, 221

02	2, 22, 42, 62, 82, 102, 122, 142, 162, 182, 202, 222
03	3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163, 183, 203, 223
04	4, 24, 44, 64, 84, 104, 124, 144, 164, 184, 204, 224
05	5, 25, 45, 65, 85, 105, 125, 145, 165, 185, 205, 225
06	6, 26, 46, 66, 86, 106, 126, 146, 166, 186, 206, 226
07	7, 27, 47, 67, 87, 107, 127, 147, 167, 187, 207, 227
08	8, 28, 48, 68, 88, 108, 128, 148, 168, 188, 208, 228
09	9, 29, 49, 69, 89, 109, 129, 149, 169, 189, 209, 229
10	10, 30, 50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 190, 210, 230
11	11, 31, 51, 71, 91, 111, 131, 151, 171, 191, 211, 231
12	12, 32, 52, 72, 92, 112, 132, 152, 172, 192, 212, 232
13	13, 33, 53, 73, 93, 113, 133, 153, 173, 193, 213, 233
14	14, 34, 54, 74, 94, 114, 134, 154, 174, 194, 214, 234
15	15, 35, 55, 75, 95, 115, 135, 155, 175, 195, 215, 235
16	16, 36, 56, 76, 96, 116, 136, 156, 176, 196, 216, 236
17	17, 37, 57, 77, 97, 117, 137, 157, 177, 197, 217, 237
18	18, 38, 58, 78, 98, 118, 138, 158, 178, 198, 218, 238
19	19, 39, 59, 79, 99, 119, 139, 159, 179, 199, 219, 239
20	20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240
21	1, 25, 44, 63, 85, 107, 132, 151, 172, 193, 211, 231
22	2, 22, 46, 61, 82, 105, 134, 152, 173, 194, 208, 222
23	3, 21, 41, 67, 84, 108, 127, 148, 169, 185, 207, 234
24	4, 27, 42, 63, 83, 103, 131, 146, 165, 192, 205, 231
25	5, 26, 47, 65, 87, 106, 129, 141, 172, 189, 212, 238
26	6, 21, 43, 64, 89, 107, 122, 151, 169, 191, 209, 227
27	7, 25, 49, 65, 86, 103, 125, 145, 162, 189, 212, 235
28	8, 23, 47, 62, 83, 106, 124, 141, 162, 187, 207, 224
29	9, 21, 42, 67, 85, 108, 125, 142, 163, 186, 208, 229
30	10, 22, 47, 61, 79, 111, 126, 143, 171, 193, 209, 238

31	11, 27, 41, 68, 81, 107, 125, 152, 175, 198, 209, 238
32	12, 24, 55, 73, 82, 112, 131, 147, 168, 191, 213, 235
33	13, 34, 56, 765, 91, 102, 126, 148, 170, 189, 204, 227
34	14, 25, 44, 67, 87, 105, 134, 151, 169, 192, 207, 228
35	15, 31, 47, 75, 95, 117, 137, 150, 173, 189, 212, 234
36	16, 29, 41, 74, 93, 112, 134, 152, 171, 188, 211, 233
37	17, 32, 43, 78,, 91, 101, 135, 153,172, 193, 210, 240
38	18, 21, 42, 67, 85, 102, 126, 142, 164, 187, 208, 231
39	19, 39, 45, 68, 84, 111, 127, 141, 163, 192, 207, 230
40	20, 38, 44, 67, 88, 110, 131, 142, 161, 189, 211, 226
41	11, 29, 40, 61, 90, 105, 128, 154, 168, 190, 209, 222
42	12, 22, 45, 62, 92, 107, 130, 153, 167, 191, 210, 223
43	13, 27, 46, 63, 93, 108, 131, 154, 162, 190, 205, 229
44	14, 30, 43, 62, 94, 109, 132, 149, 170, 187, 212, 235
45	15, 31, 47, 69, 87, 103, 133, 148, 169, 191, 211, 226
46	16, 22, 48, 68, 86, 102, 132, 147, 168, 190, 204, 231
47	17, 23, 42, 67,85, 115, 135, 151,161, 191, 205, 228
48	18, 32, 55, 71, 91, 107, 134, 150, 167, 192, 206, 229
49	19, 31, 54, 72, 92, 108, 129, 149, 172, 189, 210, 227
50	10, 23, 47, 62, 93, 112, 136, 153, 171, 187, 208, 221
51	11, 24, 48, 61, 87, 113, 131, 152, 167, 191, 212, 234
52	12, 25, 41, 62, 88, 110, 130, 156, 168, 192, 206, 231
53	13, 26, 42, 63, 89, 111, 131, 149, 161, 190, 209, 238
54	14, 32, 49, 71, 87, 109, 132, 148, 170, 183, 205, 229
55	15, 33, 43, 70, 35, 108, 133, 151, 163, 184, 204, 240
56	16, 31, 48, 69, 84, 107, 135, 149, 161, 187, 202, 224
57	17, 28, 42, 61, 35, 104, 129, 148,164, 189, 209, 222
58	18, 21, 42, 67, 85, 102, 126, 142, 164, 187, 208, 231
59	19, 29, 44, 62, 84, 105, 128, 147, 163, 185, 210, 223

60	20, 32, 47, 68, 83, 109, 130, 152, 164, 187, 206, 225
61	1, 31, 56, 78, 97, 117, 136, 156, 176, 195, 210, 234
62	2, 29, 54, 76, 96, 112, 135, 154, 174, 198, 209, 233
63	3,28, 53, 75, 94, 111, 134, 153, 173, 194, 208, 231
64	4, 26, 51, 74, 93, 115, 132, 151, 172, 193, 207, 230
65	5, 24, 55, 71, 92, 114, 134, 152, 171, 189, 204, 222
66	6, 27, 51, 72, 91, 109, 140, 155, 165, 191, 205, 235
67	7, 23, 44, 63, 85, 106, 139, 150,171, 192, 201, 226
68	8, 34, 47, 62, 87, 104, 136, 156, 164, 189, 219, 227
69	9, 29, 41, 61, 89, 108, 136, 156, 161, 187, 218, 231
70	10, 21, 49, 67, 86, 105, 128, 147, 162, 188, 217, 236
71	11, 22, 48, 69, 88, 110, 129, 148, 169, 185, 212, 235
72	12, 32, 52, 64, 84, 112, 127, 151, 168, 186, 211, 232
73	13, 29, 53, 75, 95, 116, 135, 154, 175, 193, 210, 234
74	14, 28, 54, 77, 99, 115, 136, 153, 176, 194, 209, 233
75	15, 37, 51, 76, 98, 114, 134, 151, 168, 191, 208, 231
76	16, 36, 52, 71, 91, 112, 133, 152, 167, 192, 207, 229
77	17, 31, 48, 70,, 92, 110, 130, 156,174, 199, 206, 228
78	18, 30, 47, 72, 93, 112, 131, 155, 175, 198, 205, 230
79	19, 32, 46, 75, 95, 110, 128, 154, 176, 197, 204, 223
80	20, 33, 44, 78, 91, 111, 125, 153, 171, 196, 205, 224
81	11, 34, 41, 79, 90, 117, 126, 149, 170, 190, 206, 225
82	12, 29, 51, 78, 94, 106, 130, 147, 173, 189, 204, 226
83	13, 26, 49, 77, 95, 108, 131, 146, 174, 191, 212, 230
84	14, 28, 47, 74, 93, 107, 129, 145, 175, 195, 215, 235
85	15, 27, 52, 69, 86, 104, 136, 154, 161, 188, 207, 236
86	16, 30, 51, 68, 85, 105, 134, 156, 174, 189, 208, 237
87	17, 29, 44, 61,, 89, 106, 135, 147,176, 191, 210, 223
88	18, 31, 47, 62, 91, 110, 132, 152, 175, 192, 209, 224

89	19, 32, 48, 63, 90, 109, 128, 156, 168, 194, 211, 240
90	20, 34, 49, 67, 91, 112, 129, 153, 169, 199, 210, 239
91	11, 35, 47, 71, 88, 107, 127, 156, 171, 189, 207, 225
92	11, 36, 48, 72, 87, 106, 126, 155, 172, 188, 206, 226
93	13, 29, 47, 73, 89, 108, 129, 158, 176, 187, 212, 227
94	14, 33, 44, 78, 90, 105, 128, 157, 173, 186, 211, 226
95	15, 31, 43, 77, 89, 104, 127, 156, 173, 194, 211, 222
96	16, 30, 51, 76, 88, 105, 123, 155, 174, 195, 210, 232
97	17, 28, 48, 72, 86, 103, 128, 151, 175, 187, 211, 235
98	18, 27, 47, 73, 85, 102, 127, 149, 172, 186, 210, 228
99	19, 26, 42, 71, 81, 109, 125, 152, 171, 189, 209, 235
00	20, 24, 41, 75, 82, 110, 121, 148, 169, 190, 208, 227

Список литературы

1. Глинка Н.Л. Общая химия.:Учебник/под.рел. В.А.Попкова, А.В.Бабкова.-18-е изд., перераб. и доп.-М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2011,886с

2. Коровин Н.В. Общая химия Учебник/ 13-е изд., перераб. и доп.-М.: Издательский центр "Академия" 2011 .-496с
3, Глинка Н.Л. Задачи и упражнения по общей химии. Учебное пособие/ Изд.стер.- М.: КНОРУС. 2011. 240с.
4. Попова М.Н., Ишметова Р.И. Общая химия. Учебное пособие по самостоятельной работе для студентов заочного обучения всех специальностей. Издание УГГУ. Екатеринбург, 2010.-43 с.
5. Кузьменко Н.Е., Еремин В.В., Попков В.В. Начала химии: учебник – М.: Экзамен, 2004.-720 с.

8 Приложения

Таблица 1

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E^0
Ag	α -$Ag_2S + 2\bar{e} = 2Ag + S^{2-}$	-0,70
	$Ag(CN)_2^- + \bar{e} = Ag + 2CN^-$	-0,29
	$AgI + \bar{e} = Ag + I^-$	-0,152
	$AgCN + \bar{e} = Ag + CN^-$	-0,04
	$Ag(S_2O_3)_2^{3-} + \bar{e} = Ag + 2S_2O_3^{2-}$	0,01
	$AgBr + \bar{e} = Ag + Br^-$	0,071
	$AgCl + \bar{e} = Ag + Cl^-$	0,222
	$Ag_2O + H_2O + 2\bar{e} = 2Ag + 2OH^-$	0,344
	$Ag(NH_3)_2^+ + \bar{e} = Ag + 2NH_3$	0,373
	$Ag_2CrO_4 + 2\bar{e} = 2Ag + CrO_4^{2-}$	0,446
	$Ag_2C_2O_4 + 2\bar{e} = 2Ag + C_2O_4^{2-}$	0,472
	$AgBrO_3 + \bar{e} = Ag + BrO_3^-$	0,55
	$2AgO + H_2O + 2\bar{e} = Ag_2O + 2OH^-$	0,60
	$Ag^+ + \bar{e} = Ag$	0,799
	$Ag_2O + 2H^+ + 2\bar{e} = 2Ag + H_2O$	1,173
	$2AgO + 2H^+ + 2\bar{e} = Ag_2O + H_2O$	1,398
Al	$AlO_2^- + 2H_2O + 3\bar{e} = Al + 4OH^-$	-2,35
	$Al(OH)_3 + 3\bar{e} = Al + 3OH^-$	-2,31
	$AlF_6^{3-} + 3\bar{e} = Al + 6F^-$	-2,07
	$Al^{3+} + 3e = Al$	-1,663
	$Al(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Al + 3H_2O$	-1,471
	$AlO_2^- + 4H^+ + 3e = Al + 2H_2O$	-1,262
As	$As + 3H^+ + 3e = AsH_3$	-0,60
	$HAsO_2 + 3H^+ + 3e = As + 2H_2O$	0,248
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = HAsO_2 + 2H_2O$	0,559
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = H_3AsO_3 + H_2O$	0,58
Au	$Au(CN)_2 + e = Au + 2CN^-$	-0,61
	$AuBr_4^- + 2e = AuBr_2^- + 2Br^-$	0,802
	$AuCl_4^- + 2e = AuCl_2^- + 2Cl^-$	0,926
	$AuBr_2^- + e = Au + 2Br^-$	0,959
	$AuCl_2^- + 2e = Au + 2Cl^-$	1,15
	$Au^{3+} + 2e = Au^+$	1,401
	$Au^{3+} + 3e = Au$	1,498
	$Au^+ + 3e = Au$	1,692
B	$BF_4^- + 3e = B + 4F^-$	-1,04

	$H_3BO_3 + 3H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,869
	$BO_3^{3-} + 6H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,165
Ba	$Ba^{2+} + 2e = Ba$	-2,905
Be	$Be^{2+} + 2e = Be$	-1,847
	$Be(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-1,820
	$BeO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-0,909
Bi	$Bi_2O_3 + 3H_2O + 6e = 2Bi + 6OH^-$	-0,46
	$BiOCl + 2H^+ + 3e = Bi + Cl^- + H_2O$	0,16
	$Bi^{3+} + 3e = Bi$	0,215
	$BiO^+ + 2H^+ + 3e = Bi + H_2O$	0,32
	$Bi_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Bi + 3H_2O$	0,371
	$NaBiO_3(т) + 6H^+ + 2e = Bi^{3+} + Na^+ + 3H_2O$	1,6 - 1,808
Br	$2BrO^- + 2H_2O + 2e = Br_2 + 4OH^-$	0,45
	$2BrO_3^- + 6H_2O + 10e = Br_2 + 12OH^-$	0,50
	$BrO_3^- + 2H_2O + 4e = BrO^- + 4OH^-$	0,54
	$BrO_3^- + 3H_2O + 6e = Br^- + 6OH^-$	0,61
	$BrO^- + H_2O + 2e = Br^- + 2OH^-$	0,76
	$Br_3^- + 2e = 3Br^-$	1,05
	$Br_2(ж) + 2e = 2Br^-$	1,065
	$BrO_3^- + 6H^+ + 6e = Br^- + 3H_2O$	1,44
	$2BrO_3^- + 12H^+ + 10e = Br_2 + 6H_2O$	1,52
	$2HBrO + 2H^+ + 2e = Br_2 + 2H_2O$	1,59
C	$HCOO^- + 2H_2O + 2e = HCHO + 3OH^-$	-1,07
	$2CO_2 + 2H^+ + 2e = H_2C_2O_4$	-0,49
	$CO_2 + 2H^+ + 2e = HCOOH$	-0,20
	$C(графит) + 4H^+ + 4e = CH_4$	-0,132
	$CO_2 + 2H^+ + 2e = CO + H_2O$	-0,12
	$HCOOH + 2H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	-0,01
	$HCOOH + 4H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,145
	$HCOO^- + 3H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	0,167
	$CH_3CHO + 2H^+ + 2e = C_2H_5OH$	0,19
	$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = HCHO + 2H_2O$	0,197
	$HCOO^- + 5H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,199
	$CO_3^{2-} + 8H^+ + 6e = CH_3OH + 2H_2O$	0,209
	$CO_3^{2-} + 3H^+ + 2e = HCOO^- + H_2O$	0,227
	$HCHO + 2H^+ + 2e = CH_3OH$	0,232
	$2CO_3^{2-} + 4H^+ + 2e = C_2O_4^{2-} + 2H_2O$	0,441
	$C_2H_5OH + 2H^+ + 2e = C_2H_6 + H_2O$	0,46
	$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = C(графит) + 3H_2O$	0,475

	$CO + 6H^+ + 6e = CH_4 + H_2O$	0,497
	$CH_3OH + 2H^+ + 2e = CH_4 + H_2O$	0,59
Ca	$Ca^{2+} + 2e = Ca$	-2,866
Cd	$CdS + 2e = Cd + S^{2-}$	-1,175
	$Cd(CN)_4^{2-} + 2e = Cd + 4CN^-$	-1,09
	$Cd(OH)_2 + 2e = Cd + 2OH^-$	-0,81
	$Cd(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cd + 4NH_3$	-0,61
	$Cd^{2+} + 2e = Cd$	-0,403
	$Cd(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cd + 2H_2O$	0,005
	$CdO + 2H^+ + 2e = Cd + H_2O$	0,063
Ce	$Ce^{3+} + 3e = Ce$	-2,48
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M H_2SO_4)	1,44
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M HNO_3)	1,61
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M $HClO_4$)	1,70
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$	1,77
Cl	$ClO_4^- + H_2O + 2e = ClO_3^- + 2OH^-$	0,36
	$2ClO^- + 2H_2O + 2e = Cl_2 + 4OH^-$	0,40
	$ClO_4^- + H_2O + 8e = Cl^- + 8OH^-$	0,56
	$ClO_3^- + 3H_2O + 6e = Cl^- + 6OH^-$	0,63
	$ClO_2 + 2H_2O + 5e = Cl^- + 4OH^-$	0,85
	$ClO^- + H_2O + 2e = Cl^- + 2OH^-$	0,88
	$ClO_3^- + 2H^+ + e = ClO_2 + H_2O$	1,15
	$ClO_4^- + 2H^+ + 2e = ClO_3^- + H_2O$	1,189
	$ClO_2 + 4H^+ + 4e = 2HCl + H_2O$	1,351
	$Cl_2 + 2e = 2Cl^-$	1,3595
	$ClO_4^- + 8H^+ + 8e = Cl^- + 4H_2O$	1,38
	$2ClO_4^- + 16H^+ + 14e = Cl_2 + 8H_2O$	1,39
	$ClO_2 + 5H^+ + 5e = HCl + 2H_2O$	1,436
	$ClO_3^- + 6H^+ + 6e = Cl^- + 3H_2O$	1,451
	$2ClO_3^- + 12H^+ + 10e = Cl_2 + 6H_2O$	1,47
	$HClO + H^+ + 2e = Cl^- + H_2O$	1,494
	$ClO_2 + 4H^+ + 5e = Cl^- + 2H_2O$	1,51
	$2ClO_2 + 8H^+ + 8e = Cl_2 + 4H_2O$	1,549
	$HClO_2 + 3H^+ + 4e = Cl^- + 2H_2O$	1,57
	$2HClO + 2H^+ + 2e = Cl_2 + 2H_2O$	1,63
	$2HClO_2 + 6H^+ + 6e = Cl_2 + 4H_2O$	1,64
Co	β -$CoS + 2e = Co + S^{2-}$	-1,07
	α -$CoS + 2e = Co + S^{2-}$	-0,90
	$Co(CN)_6^{3-} + e = Co(CN)_6^{4-}$	-0,84

	$Co(OH)_2 + 2e = Co + 2OH^-$	-0,73
	$CoCO_3 + 2e = Co + CO_3^{2-}$	-0,64
	$Co(NH_3)_6^{2+} + 2e = Co + 6NH_3$	-0,42
	$Co^{2+} + 2e = Co$	-0,277
	$Co(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Co + 2H_2O$	0,095
	$Co(NH_3)_6^{3+} + e = Co(NH_3)_6^{2+}$	0,1
	$CoO + 2H^+ + 2e = Co + H_2O$	0,166
	$Co(OH)_3 + e = Co(OH)_2 + OH^-$	0,17
	$Co^{3+} + 3e = Co$	0,33
	$Co^{3+} + e = Co^{2+}$	1,38 - 1,842
Cr	$Cr(OH)_2 + 2e = Cr + 2OH^-$	-1,4
	$Cr(OH)_3 + 3e = Cr + 3OH^-$	-1,3
	$CrO_2^- + 2H_2O + 3e = Cr + 4OH^-$	-1,2
	$Cr^{2+} + 2e = Cr$	-0,913
	$Cr^{3+} + 3e = Cr$	-0,744
	$Cr(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Cr + 3H_2O$	-0,654
	$Cr^{3+} + e = Cr^{2+}$	-0,407
	$CrO_4^{2-} + 4H_2O + 3e = Cr(OH)_3 + 5OH^-$	-0,13
	$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 12e = 2Cr + 7H_2O$	0,294
	$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Cr + 4H_2O$	0,366
	$CrO_4^{2-} + 4H^+ + 3e = CrO_2^- + 2H_2O$	0,945
	$CrO_2^- + 4H^+ + e = Cr^{2+} + 2H_2O$	1,188
	$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$	1,333
	$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 3e = Cr^{3+} + 4H_2O$	1,477
Cs	$Cs^+ + e = Cs$	-2,923
Cu	$Cu_2S + 2e = 2Cu + S^{2-}$	-0,89
	$CuS + 2e = Cu + S^{2-}$	-0,71
	$Cu(CN)_2^- + e = Cu + 2CN^-$	-0,43
	$Cu_2O + H_2O + 2e = 2Cu + 2OH^-$	-0,36
	$Cu(OH)_2 + 2e = Cu + 2OH^-$	-0,22
	$CuI + e = Cu + I^-$	-0,185
	$Cu(NH_3)_2^+ + e = Cu + 2NH_3$	-0,12
	$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu + 4NH_3$	-0,07
	$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu(NH_3)_2^+ + 2NH_3$	-0,01
	$CuI_2^- + e = Cu + 2I^-$	0,00
	$CuBr + e = Cu + Br^-$	0,03
	$CuCl + e = Cu + Cl^-$	0,137
	$Cu^{2+} + e = Cu^+$	0,153
	$CuCl_2^- + e = Cu + 2Cl^-$	0,177

	$2Cu^{2+} + H_2O + 2e = Cu_2O + 2H^+$	0,203
	$Cu^{2+} + 2e = Cu$	0,345
	$Cu^{2+} + 2Cl^- + e = CuCl_2^-$	0,463
	$Cu^+ + e = Cu$	0,520
	$Cu^{2+} + Cl^- + e = CuCl$	0,538
	$CuO + 2H^+ + 2e = Cu + H_2O$	0,570
	$Cu(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cu + 2H_2O$	0,609
	$Cu^{2+} + Br^- + e = CuBr$	0,640
	$2CuO + 2H^+ + 2e = Cu_2O + H_2O$	0,669
	$Cu^{2+} + I^- + e = CuI$	0,86
	$Cu^{2+} + 2CN^- + e = Cu(CN)_2$	1,12
Dy	$Dy^{3+} + 3e = Dy$	-2,353
Eu	$Eu^{2+} + 2e = Eu$	-3,395
	$Eu^{3+} + e = Eu^{2+}$	-0,429
F	$F_2O + 2H^+ + 4e = 2F^- + H_2O$	2,1
	$F_2 + 2e = 2F^-$	2,87
Fe	$FeS + 2e = Fe + S^{2-}$	-0,95
	$Fe(OH)_2 + 2e = Fe + 2OH^-$	-0,877
	$FeCO_3 + 2e = Fe + CO_3^{2-}$	-0,756
	$Fe(OH)_3 + e = Fe(OH)_2 + OH^-$	-0,56
	$Fe^{2+} + 2e = Fe$	-0,440
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 8e = 3Fe + 4H_2O$	-0,085
	$Fe_2O_3 + H_2O + 2H^+ + 2e = 2Fe(OH)_2$	-0,057
	$Fe_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Fe + 3H_2O$	-0,051
	$Fe(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Fe + 2H_2O$	-0,047
	$Fe^{3+} + 3e = Fe$	-0,037
	$Fe(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Fe + 3H_2O$	0,059
	$Fe(OH)_3 + H^+ + e = Fe(OH)_2 + H_2O$	0,271
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$	0,356
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M H_2SO_4)	0,68
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M HCl)	0,70
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$ (1M HCl)	0,71
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$	0,771
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 2e = 3Fe^{2+} + 4H_2O$	0,980
Ga	$Ga^{3+} + 3e = Ga$	-0,53
Gd	$Gd^{3+} + 3e = Gd$	-2,397
Ge	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 2e = Ge^{2+} + 3H_2O$	-0,363
	$GeO_2 + 4H^+ + 4e = Ge + 2H_2O$	-0,15
	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 4e = Ge + 3H_2O$	-0,13

	$Ge^{2+} + 2e = Ge$	0,000
H	$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$	-0,828
	$2H^+ + 2e = H_2$	0,0000
	$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776
Hf	$Hf^{4+} + 4e = Hf$	-1,70
	$HfO_2 + 4H^+ + 4e = Hf + 2H_2O$	-1,57
Hg	$HgS + 2e = Hg + S^{2-}$	-0,69
	$Hg(CN)_4^{2-} + 2e = Hg + 4CN^-$	-0,37
	$Hg_2I_2 + 2e = 2Hg + 2I^-$	-0,041
	$HgI_4^{2-} + 2e = Hg + 4I^-$	-0,04
	$HgO(красная) + H_2O + 2e = Hg + 2OH^-$	0,098
	$Hg_2Br_2 + 2e = 2Hg + 2Br^-$	0,140
	$HgBr_4^{2-} + 2e = Hg + 4Br^-$	0,21
	$Hg_2Cl_2 + 2K^+ + 2e = 2Hg + 2KCl (тв)$	0,2415
	$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$	0,268
	$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^- (1M KCl)$	0,28
	$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^- (0,1M KCl)$	0,334
	$HgCl_4^{2-} + 2e = Hg + 4Cl^-$	0,48
	$Hg_2SO_4 + 2e = 2Hg + SO_4^{2-}$	0,6151
	$Hg_2^{2+} + 2e = 2Hg$	0,788
	$Hg^{2+} + 2e = Hg$	0,850
	$2Hg^{2+} + 2e = Hg_2^{2+}$	0,920
	$HgO + 2H^+ + 2e = Hg + H_2O$	0,926
Ho	$Ho^{3+} + 3e = Ho$	-2,319
I	$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,14
	$2IO_3^- + 6H_2O + 10e = I_2 + 12OH^-$	0,21
	$IO_3^- + 3H_2O + 6e = I^- + 6OH^-$	0,25
	$2IO^- + H_2O + 2e = I_2 + 4OH^-$	0,45
	$IO^- + H_2O + 2e = I^- + 2OH^-$	0,49
	$I_2 + 2e = 2I^-$	0,536
	$I_3^- + 2e = 3I^-$	0,545
	$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,56
	$HIO + H^+ + 2e = I^- + H_2O$	0,99
	$2ICl_2^- + 2e = I_2 + 4Cl^-$	1,06
	$IO_3^- + 6H^+ + 6e = I^- + 3H_2O$	1,085
	$IO_3^- + 5H^+ + 4e = HIO + 2H_2O$	1,14
	$2IO_3^- + 12H^+ + 10e = I_2 + 6H_2O$	1,19
	$2HIO + 2H^+ + 2e = I_2 + 2H_2O$	1,45
	$H_5IO_6 + H^+ + 2e = IO_3^- + 3H_2O$	1,60

Ir	$IrO_2 + 4H^+ + 4e = Ir + H_2O$	0,93
	$Ir^{3+} + 3e = Ir$	1,15
K	$K^+ + e = K$	-2,924
La	$La^{3+} + 3e = La$	-2,522
Li	$Li^+ + e = Li$	-3,045
Mg	$Mg(OH)_2 + 2e = Mg + 2OH^-$	-2,69
	$Mg^{2+} + 2e = Mg$	-2,363
	$Mg(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mg + 2H_2O$	-1,862
Mn	$MnCO_3 + 2e = Mn + CO_3^{2-}$	-1,48
	$Mn^{2+} + 2e = Mn$	-1,18
	$Mn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mn + 2H_2O$	-0,727
	$MnO_4^- + e = MnO_4^{2-}$	0,564
	$MnO_4^- + 2H_2O + 3e = MnO_2 + 4OH^-$	0,60
	$MnO_2 + 4H^+ + 2e = Mn^{2+} + 2H_2O$	1,228
	$Mn_2O_3 + 6H^+ + 2e = 2Mn^{2+} + 3H_2O$	1,443
	$MnO_4^- + 8H^+ + 5e = Mn^{2+} + 4H_2O$	1,507
	$Mn^{3+} + e = Mn^{2+}$ (8M H_2SO_4)	1,509
	$MnO_4^- + 4H^+ + 3e = MnO_2 + 2H_2O$	1,692
	$MnO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MnO_2 + 2H_2O$	2,257
Mo	$H_2MoO_4 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	-1,091
	$MoO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = Mo + 8OH^-$	-1,05
	$Mo^{3+} + 3e = Mo$	-0,200
	$MoO_2 + 4H^+ + 4e = Mo + 2H_2O$	-0,072
	$MoO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Mo + 4H_2O$	0,154
	$MoO_3 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + H_2O$	0,320
	$MoO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	0,606

Элемент	Реакция	E^0
N	$3N_2 + 2\bar{e} = 2N_3^-$	-3,4
	$3N_2 + 2H^+ + 2\bar{e} = 2HN_3$	-3,1
	$N_2 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_2OH + 2OH^-$	-3,04
	$N_2 + 4H_2O + 4\bar{e} = N_2H_4 + 4OH^-$	-1,16
	$N_2 + 8H_2O + 6\bar{e} = 2NH_4OH + 6OH^-$	-0,74
	$NO_2^- + H_2O + \bar{e} = NO + 2OH^-$	-0,46
	$NO_2^- + 6H_2O + 6\bar{e} = NH_4OH + 7OH^-$	-0,15
	$NO_3^- + 2H_2O + 3\bar{e} = NO + 4OH^-$	-0,14
	$NO_3^- + 7H_2O + 8\bar{e} = NH_4OH + 9OH^-$	-0,12

	$NO_3^- + H_2O + 2\bar{e} = NO_2^- + 2OH^-$	0,01
	$N_2 + 6H^+ + 6\bar{e} = 2NH_3$	0,057
	$N_2H_4 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_4OH + 2OH^-$	0,1
	$N_2 + 8H^+ + 6\bar{e} = 2NH_4^+$	0,275
	$2NO_2^- + 4H_2O + 6\bar{e} = N_2 + 8OH^-$	0,41
	$NH_2OH + 2H_2O + 2\bar{e} = NH_4OH^- + 2OH^-$	0,42
	$2NO_2 + 4H_2O + 8e = N_2 + 8OH^-$	0,53
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,78
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,80
	$2NO + 2H_2O + 4e = N_2 + 4OH^-$	0,85
	$HNO_2 + 7H^+ + 6e = NH_4^+ + 2H_2O$	0,864
	$NO_3^- + 10H^+ + 8e = NH_4^+ + 3H_2O$	0,87
	$2NO_2 + 2e = 2NO_2^-$	0,88
	$N_2O + H_2O + 2e = N_2 + 2OH^-$	0,94
	$NO_3^- + 3H^+ + 2e = HNO_2 + 2H_2O$	0,94
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,957
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,96
	$HNO_2 + H^+ + e = NO + H_2O$	1,00
	$NO_2 + 2H^+ + 2e = NO + H_2O$	1,03
	$NO_2 + H^+ + e = HNO_2$	1,09
	$2NO_3^- + 10H^+ + 8e = N_2O + 5H_2O$	1,116
	$2NO_3^- + 12H^+ + 10e = N_2 + 6H_2O$	1,246
	$2HNO_2 + 4H^+ + 4e = N_2O + 3H_2O$	1,297
	$2NO_2 + 8H^+ + 8e = N_2 + 4H_2O$	1,36
	$2HNO_2 + 6H^+ + 6e = N_2 + 4H_2O$	1,45
	$2NO + 4H^+ + 4e = N_2 + 2H_2O$	1,678
	$N_2O + 2H^+ + 2e = N_2 + H_2O$	1,766
Na	$Na^+ + e = Na$	-2,714
Nd	$Nd^{3+} + 3e = Nd$	-2,431
Ni	γ-$NiS + 2e = Ni + S^{2-}$	-1,04
	α-$NiS + 2e = Ni + S^{2-}$	-0,83
	$Ni(OH)_2 + 2e = Ni + 2OH^-$	-0,72
	$Ni(NH_3)_6^{2+} + 2e = Ni + 6NH_3$	-0,49
	$NiCO_3 + 2e = Ni + CO_3^{2-}$	-0,45
	$Ni^{2+} + 2e = Ni$	-0,25
	$Ni(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Ni + 2H_2O$	0,110
	$NiO + 2H^+ + 2e = Ni + H_2O$	0,116
	$NiO_2 + 4H^+ + 2e = Ni^{2+} + 2H_2O$	1,68

Np	$Np^{3+} + 3e = Np$	-1,856
	$Np^{4+} + e = Np^{3+}$	0,152
	$NpO_2^+ + 4H^+ + 2e = Np^{3+} + 2H_2O$	0,451
	$NpO_2^+ + e = NpO_2$	0,564
	$NpO_2^{2+} + e = NpO_2^+$	1,149
	$Np_2O_5 + 2H^+ + 2e = 2NpO_2 + H_2O$	1,253
O	$O_2 + 2H_2O + 4e = 4OH^-$	0,401
	$O_2 + 2H^+ + 2e = H_2O_2$	0,682
	$H_2O_2 + 2e = 3OH^-$	0,88
	$O_2 + 4H^+ + 4e = 2H_2O$	1,229
	$O_3 + H_2O + 3e = O_2 + 2OH^-$	1,24
	$O_3 + 6H^+ + 6e = 3H_2O$	1,511
	$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776
	$O_3 + 2H^+ + 2e = O_2 + H_2O$	2,07
Os	$OsO_2 + 2H_2O + 4e = Os + 4OH^-$	-0,15
	$OsCl_6^{3-} + e = Os^{2+} + 6Cl^-$	0,4
	$OsO_4 + 8H^+ + 8e = Os + 4H_2O$	0,85
	$OsCl_6^{2-} + e = OsCl_6^{3-}$	0,85
	$Os^{2+} + 2e = Os$	0,85
	$OsO_4 + 4H^+ + 4e = OsO_2 + 2H_2O$	0,96
P	$H_2PO_2^- + e = P + 2OH^-$	-2,05
	$HPO_3^{2-} + 2H_2O + 2e = H_2PO_2^- + 3OH^-$	-1,57
	$PO_4^{3-} + 2H_2O + 2e = HPO_3^{2-} + 3OH^-$	-1,12
	$2H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_4P_2O_6 + 2H_2O$	-0,94
	$P + 3H_2O + 3e = PH_3 + 3OH^-$	-0,89
	$H_3PO_2 + H^+ + e = P + 2H_2O$	-0,51
	$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(белый) + 3H_2O$	-0,502
	$H_3PO_3 + 3H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(красный) + 3H_2O$	-0,454
	$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(белый) + 4H_2O$	-0,411
	$H_3PO_4 + 4H^+ + 4e = H_3PO_2 + 2H_2O$	-0,39
	$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(красный) + 4H_2O$	-0,383
	$H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_3PO_3 + H_2O$	-0,276
	$H_3PO_3 + 2H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$P + 3H^+ + 3e = PH_3$	0,06
	$H_4P_2O_6 + 2H^+ + 2e = 2H_3PO_3$	0,38
Pb	$PbS + 2e = Pb + S^{2-}$	-0,93
	$PbO + H_2O + 2e = Pb + 2OH^-$	-0,58
	$PbCO_3 + 2e = Pb + CO_3^{2-}$	-0,506

	$PbI_2 + 2e = Pb + 2I^-$	0,365
	$PbSO_4 + 2e = Pb + SO_4^{2-}$	-0,3563
	$PbF_2 + 2e = Pb + 2F^-$	-0,350
	$PbBr_2 + 2e = Pb + 2Br^-$	-0,280
	$PbCl_2 + 2e = Pb + 2Cl^-$	-0,268
	$Pb^{2+} + 2e = Pb$	-0,126
	$PbO_3^{2-} + H_2O + 2e = PbO_2^{2-} + 2OH^-$	0,2
	$PbO + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,248
	$Pb(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,277
	$PbO_2 + H_2O + 2e = PbO + 2OH^-$	0,28
	$Pb_3O_4 + 2H^+ + 2e = 3PbO + H_2O$	0,972
	$PbO_2 + 4H^+ + 2e = Pb^{2+} + 2H_2O$	1,449-1,455
	$PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = PbSO_4 + 2H_2O$	1,685
	$Pb^{4+} + 2e = Pb^{2+}$	1,694
Pd	$Pd(OH)_2 + 2e = Pd + 2OH^-$	0,07
	$PdI_6^{2-} + 2e = PdI_4^{2-} + 2I^-$	0,623
	$PdCl_4^{2-} + 2e = Pd + 4Cl^-$	0,623
	$PdO + 2H^+ + 2e = Pd + H_2O$	0,896
	$PdCl_6^{2-} + 4e = Pd + 6Cl^-$	0,96
	$Pd^{2+} + 2e = Pd$	0,987
	$PdBr_6^{2-} + 2e = PdBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,993
	$PdO_2 + 2H^+ + 2e = PdO + H_2O$	1,283
	$PdCl_6^{2-} + 2e = PdCl_4^{2-} + 2Cl^-$	1,288
Pt	$PtS + 2e = Pt + S^{2-}$	-0,95
	$PtS_2 + 2e = PtS + S^{2-}$	-0,64
	$Pt(OH)_2 + 2e = Pt + 2OH^-$	0,15
	$PtI_6^{2-} + 2e = PtI_4^{2-} + 2I^-$	0,393
	$PtBr_4^{2-} + 2e = Pt + 4Br^-$	0,58
	$PtBr_6^{2-} + 2e = PtBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,59
	$PtCl_6^{2-} + 2e = PtCl_4^{2-} + 2Cl^-$	0,720
	$PtCl_4^{2-} + 2e = Pt + 4Cl^-$	0,73
	$Pt(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pt + 2H_2O$	0,980
	$PtO_2 + 2H^+ + 2e = Pt(OH)_2$	1,045
	$Pt^{2+} + 2e = Pt$	1,188
Ra	$Ra^{2+} + 2e = Ra$	-2,925
Rb	$Rb^+ + e = Rb$	-2,925
S	$SO_4^{2-} + H_2O + 2e = SO_3^{2-} + 2OH^-$	-0,93
	$2SO_4^{2-} + 5H_2O + 8e = S_2O_3^{2-} + 10OH^-$	-0,76
	$SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S + 6OH^-$	-0,66

	$2SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S_2O_3^{2-} + 6OH^-$	-0,58
	$S_2^{2-} + 2e = 2S^{2-}$	-0,524
	$S + 2e = S^{2-}$	-0,48
	$2S + 2e = S_2^{2-}$	-0,476
	$S + H^+ + 2e = HS^-$	-0,065
	$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 8e = 2S^{2-} + 3H_2O$	-0,006
	$S_4O_6^{2-} + 2e = 2S_2O_3^{2-}$	0,08
	$SO_4^{2-} + 8H^+ + 8e = S^{2-} + 4H_2O$	0,149
	$S + 2H^+ + 2e = H_2S$	0,141-0,17
	$SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SO_3 + H_2O$	0,17
	$SO_3^{2-} + 6H^+ + 6e = S^{2-} + 3H_2O$	0,231
	$2SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = S_2O_3^{2-} + 5H_2O$	0,29
	$SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = H_2S + 4H_2O$	0,311
	$SO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = S + 4H_2O$	0,357
	$2H_2SO_3 + 2H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,40
	$H_2SO_3 + 4H^+ + 4e = S + 3H_2O$	0,449
	$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 4e = 2S + 3H_2O$	0,5
	$2SO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,705
	$S_2O_8^{2-} + 2e = 2SO_4^{2-}$	2,01
Sb	$SbO_2^- + 2H_2O + 3e = Sb + 4OH^-$	-0,675
	$Sb + 3H^+ + 3e = SbH_3$	-0,51
	$SbO_3^- + H_2O + 2e = SbO_2^- + 2OH^-$	-0,43
	$Sb_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Sb + 3H_2O$	0,152
	$SbO^+ + 2H^+ + 3e = Sb + H_2O$	0,212
	$SbO_3^- + 2H^+ + 3e = SbO_2^- + H_2O$	0,353
	$SbO_2^- + 4H^+ + 3e = Sb + 2H_2O$	0,446
	$Sb_2O_5 + 6H^+ + 4e = 2SbO^+ + 3H_2O$	0,581
	$Sb_2O_5 + 4H^+ + 4e = Sb_2O_3 + 2H_2O$	0,671
Sc	$Sc^{3+} + 3e = Sc$	-2,077
Se	$Se + 2e = Se^{2-}$	-0,92
	$Se + 2H^+ + 2e = H_2Se$	-0,40
	$SeO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Se + 6OH^-$	-0,366
	$SeO_4^{2-} + H_2O + 2e = SeO_3^{2-} + 2OH^-$	0,05
	$H_2SeO_3 + 4H^+ + 4e = Se + 3H_2O$	0,741
	$SeO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SeO_3 + H_2O$	1,15
Si	$SiO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Si + 6OH^-$	-1,7
	$SiF_6^{2-} + 4e = Si + 6F^-$	-1,2
	$SiO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = Si + 3H_2O$	-0,455
	$Si + 4H^+ + 4e = SiH_4$	0,102

Sn	$SnS + 2e = Sn + S^{2-}$	-0,94
	$Sn(OH)_6^{2-} + 2e = HSnO_2^- + H_2O + 3OH^-$	-0,93
	$HSnO_2^- + H_2O + 2e = Sn + 3OH^-$	-0,91
	$SnF_6^{2-} + 4e = Sn + 6F^-$	-0,25
	$Sn^{2+} + 2e = Sn$	-0,136
	$SnO_2 + 2H^+ + 2e = SnO + H_2O$	-0,108
	$SnO_2 + 4H^+ + 4e = Sn + 2H_2O$	-0,106
	$SnO + 2H^+ + 2e = Sn + H_2O$	-0,104
	$Sn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Sn + 2H_2O$	-0,091
	$SnCl_6^{2-} + 2e = SnCl_4^{2+} + 2Cl^-$ (1M HCl)	0,14
	$Sn^{4+} + 2e = Sn^{2+}$	0,151
Sr	$Sr^{2+} + 2e = Sr$	-2,888
Te	$Te + 2e = Te^{2-}$	-1,14
	$Te + 2H^+ + 2e = H_2Te$	-0,72
	$TeO_3^{2-} + 2H_2O + 4e = Te + 6OH^-$	-0,57
	$TeO_2 + 4H^+ + 4e = Te + 2H_2O$	0,529
	$TeO_4^{2-} + 2H^+ + 2e = TeO_3^{2-} + H_2O$	0,892
	$H_6TeO_6 + 2H^+ + 2e = TeO_2 + 4H_2O$	1,02
Ti	$Ti^{2+} + 2e = Ti$	-1,63
	$TiO + 2H^+ + 2e = Ti + H_2O$	-1,306
	$TiF_6^{2-} + 4e = Ti + 6F^-$	-1,19
	$TiO_2 + 4H^+ + 4e = Ti + 2H_2O$	-0,86
	TiO_2(рутил) $+ H^+ + 4e = Ti^{3+} + 2H_2O$	-0,666
	TiO_2(рутил) $+ 2H^+ + 4e = Ti^{2+} + 2H_2O$	-0,502
	$Ti^{3+} + e = Ti^{2+}$	-0,368
	$Ti^{4+} + e = Ti^{3+}$ (5M H_3PO_4)	-0,15
	$TiO^{2+} + 2H^+ + 2e = Ti^{2+} + H_2O$	-0,135
	$TiO^{2+} + 2H^+ + e = Ti^{3+} + H_2O$	0,10
Tl	$Tl_2S + 2e = 2Tl + S^{2-}$	-0,93
	$TlI + e = Tl + I^-$	-0,753
	$TlBr + e = Tl + Br^-$	-0,658
	$TlCl + e = Tl + Cl^-$	-0,557
	$TlOH + e = Tl + OH^-$	-0,344
	$Tl^+ + e = Tl$	-0,3363
	$Tl(OH)_3 + 2e = TlOH + 2OH^-$	-0,05
	$Tl_2O_3 + 3H_2O + 4e = 2Tl^+ + 6OH^-$	0,02
	$TlOH + H^+ + e = Tl + H_2O$	0,778
	$Tl^{3+} + 2e = Tl^+$	1,252
U	$UO_2 + 2H_2O + 4e = U + 4OH^-$	-2,39

	$U^{3+} + 3e = U$	-1,798
	$U^{4+} + e = U^{3+}$	-0,607
	$UO_2^{2+} = UO_2^{+}$	0,05
	$UO_2^{2+} + 4H^{+} + 2e = U^{4+} + 2H_2O$	0,334
	$UO_2^{+} + 4H^{+} + e = U^{4+} + 2H_2O$	0,62
V	$V^{2+} + 2e = V$	-1,175
	$V^{3+} + e = V^{2+}$	-0,255
	$VO_2^{+} + 4H^{+} + 5e = V + 2H_2O$	-0,25
	$VO_2^{2+} + e = VO^{+}$	-0,044
	$VO_2^{+} + 4H^{+} + 3e = V^{2+} + 2H_2O$	0,360
	$V_2O_5 + 6H^{+} + 2e = 2VO^{2+} + 3H_2O$	0,958
	$VO_2^{+} + 2H^{+} + e = VO^{2+} + H_2O$	1,004
	$VO_4^{3-} + 6H^{+} + 2e = VO^{+} + 3H_2O$	1,256
	$H_2VO_4^{-} + 4H^{+} + e = VO^{2+} + 3H_2O$	1,314
W	$WO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = W + 8OH^{-}$	-1,05
	$WO_2 + 4H^{+} + 4e = W + 2H_2O$	-0,119
	$WO_3 + 6H^{+} + 6e = W + 3H_2O$	-0,09
	$W_2O_5 + 2H^{+} + 2e = 2WO_2 + H_2O$	-0,031
	$2WO_3 + 2H^{+} + 2e = W_2O_5 + H_2O$	-0,029
	$WO_4^{2-} + 8H^{+} + 6e = W + 4H_2O$	0,049
	$2WO_4^{2-} + 6H^{+} + 2e = W_2O_5 + 3H_2O$	0,801
Zn	$ZnS + 2e = Zn + S^{2-}$	-1,405
	$Zn(CN)_4^{2-} + 2e = Zn + 4CN^{-}$	-1,26
	$Zn(OH)_2 + 2e = Zn + 2OH^{-}$	-1,245
	$Zn(OH)_4^{2-} + 2e = Zn + 4OH^{-}$	-1,22
	$ZnO_2^{2-} + 2H_2O + 2e = Zn + 4OH^{-}$	-1,216
	$ZnCO_3 + 2e = Zn + CO_3^{2-}$	-1,06
	$Zn(NH_3)_4^{2+} + 2e = Zn + 4NH_3$	-1,04
	$Zn^{2+} + 2e = Zn$	-0,763
	$ZnO_2^{2-} + 4H^{+} + 2e = Zn + 2H_2O$	0,441
Zr	$ZrO^{2+} + 2H^{+} + 4e = Zr + H_2O$	-1,570
	$ZrO_2 + 4H^{+} + 4e = Zr + 2H_2O$	-1,553
	$Zr^{4+} + 4e = Zr$	-1,539

Таблица 2

Окислительно-восстановительные потенциалы водорода, кислорода и некоторых металлов в кислой, нейтральной и щелочной средах

Среда					
Кислая (pH = 0)		Нейтральная (pH = 7)		Щелочная (pH = 14)	
Red/Ox пара	φ^0, В	Red/Ox пара	φ^0, В	Red/Ox пара	φ^0, В
Mg^{2+}/Mg	-2.36	$Mg(OH)_2/Mg$	-2.38	$Mg(OH)_2/Mg$	-2.69
Al^{3+}/Al	-1.66	$Al(OH)_3/Al$	-1.88	CrO_2^-/Cr	-1.32
Zn^{2+}/Zn	-0.76	$Cr(OH)_3/Cr$	-0.93	ZnO_2^{2-}/Zn	-1.22
Cr^{3+}/Cr	-0.74	$Zn(OH)_2/Zn$	-0.81	SnO_2^{2-}/Sn	-0.91
Fe^{2+}/Fe	-0.44	$Sn(OH)_2/Sn$	-0.50	$Fe(OH)_2/Fe$	-0.87
Cd^{2+}/Cd	-0.40	$Fe(OH)_2/Fe$	-0.46	$2H_2O/H_2$	-0.83
Co^{2+}/Co	-0.28	$2H_2O/H_2$	-0.41	$Cd(OH)_2/Cd$	-0.82
Ni^{2+}/Ni	-0.25	$Cd(OH)_2/Cd$	-0.41	$Co(OH)_2/Co$	-0.73
Sn^{2+}/Sn	-0.14	$Co(OH)_2/Co$	-0.32	$Ni(OH)_2/Ni$	-0.72
Pb^{2+}/Pb	-0.13	$Ni(OH)_2/Ni$	-0.30	PbO_2^{2-}/Pb	-0.54
$2H^+/H_2$	0.00	$Pb(OH)_2/Pb$	-0.14	$Bi_2O_3/2Bi$	-0.45
Ag^+/Ag	+0.80	BiO^+/Bi	-0.04	AlO_2^-/Al	-0.36
Bi^{3+}/Bi	+0.21	$Cu(OH)_2/Cu$	+0.19	$Cu(OH)_2/Cu$	-0.22
Cu^{2+}/Cu	+0.34	$AgCl/Ag$	+0.22		
$O_2/2H_2O$	+1.22	$O_2/4OH^-$	+0.81	$O_2/4OH^-$	+0.40
		$Cl_2/2Cl^-$	+1.36		

Таблица 3

Названия некоторых кислот и их солей

Кислота		Название солей
Название	Формула	
Азотистая	HNO_2	Нитриты
Азотная	HNO_3	Нитраты
Бромоводородная	HBr	Бромиды
Дихромовая	$H_2Cr_2O_7$	Дихроматы
Иодоводородная	HJ	Иодиды
Кремниевая	H_2SiO_3	Силикаты
Марганцовая	$HMnO_4$	Перманганаты
Сероводородная	H_2S	сульфиды
Серная	H_2SO_4	сульфаты
Сернистая	H_2SO_3	сульфиты
Ортофосфорная	H_3PO_4	Фосфаты
Фосфористая	H_3PO_3	Фосфиты
Угольная	H_2CO_3	Карбрнаты
Уксусная	CH_3COOH	ацетаты
Хлороводородная	HCl	хлориды
Хлорноватистая	HClO	гипохлориты
Хлорноватая	$HClO_3$	хлораты
Хлорная	$HClO_4$	перхлораты
Хромовая	H_2CrO_4	хроматы

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Н. А. Зайцева

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ

Учебно-методическое пособие для выполнения практических работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия» для студентов всех специальностей

Екатеринбург
2017

317

Рецензент: Т. И. Красненко, д-р химических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории оксидных систем ИХТТ УрО РАН

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры химии 25 февраля 2016 г. (протокол № 6) и рекомендовано для издания в УГГУ

Зайцева Н. А.
317 КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ: учебно-методическое пособие для выполнения пркгических работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия» для студентов всех специальностей / Н. А. Зайцева. – Екатеринбург: Изл-во УГГУ, 2017. – 35 с.

В учебно-методическом пособии изложены краткие сведения о качественных реакциях в неорганической химии. Пособие содержит необходимые сведения для выполнения практических работ по качественному анализу катионов и решения задач.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей.

© Зайцева Н. А., 2017

© Уральский государственный горный университет, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Качественная реакция – химическая реакция, с помощью которой можно определить наличие в растворе того или иного вещества или его фрагмента (катиона, аниона, функциональной группы). Качественная реакция на ионы позволяет обнаружить («открыть») в растворе присутствие соответствующих ионов. При обнаружении открываемого иона обычно фиксируют появление аналитического сигнала — образование осадка, изменение окраски раствора, появление запаха и т. д.

Требования к качественным реакциям

1. Экспрессность (реакция должна протекать быстро).
2. Высокая чувствительность.
3. Селективность или специфичность.
4. Необратимость.

Чувствительность реакции определяется наименьшим количеством искомого вещества, которое может быть обнаружено данным реактивом в капле раствора.

Существенной характеристикой анализа является селективность (избирательность).

По избирательности реагенты можно разделить на три группы:

1. *Специфические реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить только одно вещество (ион),

например: крахмал для обнаружения I_2 (синяя окраска); щёлочь для обнаружения NH^{4+} (запах аммиака).

Специфические реакции – реакции, которые дают возможность открывать одни ионы в присутствии различных других ионов.

2. *Селективные реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить небольшое число веществ. Например, диметилглиоксим в аммиачном буферном растворе реагирует с Fe (II), Co (II), Ni (II), Zr (IV), Th (IV).

3. *Групповые реагенты* – используются в систематическом анализе смеси катионов и взаимодействуют со всеми катионами одной аналитической группы.

Реакции, позволяющие обнаружить искомые ионы в отдельных порциях сложной смеси при условии устранения влияния других ионов, называют **дробными реакциями**, а метод анализа, основанный на применении дробных реакций, называют **дробным анализом.** При этом порядок обнаружения катионов и анионов не имеет особого значения. При **систематическом анализе**, в отличие от дробного, соблюдается определенный порядок разделения и последующего открытия ионов. К обнаружению ионов приступают лишь после удаления из раствора всех других ионов, мешающих открытию. Систематический (групповой) анализ применяют при невозможности использования дробного анализа. На основе растворимости их солей или других соединений ионы делят на аналитические группы, на основании различных классификаций катионов разработаны разные методы систематического анализа катионов.

Методы систематического анализа

1. Сероводородный – основан на разной растворимости сульфидов и хлоридов в зависимости от *pH*-среды.

2. Аммиачно-фосфатный – основан на разной растворимости фосфатов.

3. Кислотно-основной – основан на разной растворимости в кислотах и основаниях гидроксидов и солей (табл. 1).

Таблица 1

Классификация катионов по кислотно-основному методу

Группа	Катионы	Групповой реактив	Характеристика группы
I	Na^+, K^+, NH_4^+	–	Хлориды, сульфаты и гидроксиды растворимы в воде
II	Ag^+, Pb^{2+}, Hg_2^{2+}	2M HCl	Хлориды нерастворимы в воде и разбавленных кислотах
III	Ca^{2+}, Sr^{2+}, Ba^{2+}	2M H_2SO_4	Сульфаты нерастворимы в воде, кислотах и щелочах
IV	Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}, $^*As^{3+}$, $^*As^{5+}$, Sn^{2+}, Sn^{4+}	4M NaOH (избыток)	Гидроксиды амфотерны, растворимы в избытке щелочи
V	Fe^{2+}, Fe^{3+}, Mn^{2+}, Mg^{2+}, Bi^{3+}, Sb^{3+}, Sb^{5+}	2M NaOH (25 % NH_4OH)	Гидроксиды нерастворимы в избытке щелочи и аммиаке
VI	Cu^{2+}, Co^{2+}, Ni^{2+}, Hg^{2+}, Cd^{2+}	25% NH_4OH (избыток)	Гидроксиды растворимы в избытке аммиака с образованием аммиакатов

$^*As^{3+}$ и As^{5+} гидроксидов не образуют.

Лабораторная работа № 1

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на катионы железа, определить наиболее подходящие реактивы для открытия Fe^{3+} и Fe^{2+}.

Для получения аналитического сигнала в качественном анализе используют химические реакции разных типов: реакции ионного обмена (осаждение, нейтрализация), окислительно-восстановительные, комплексообразование. Для обнаружения ионов железа возможно использование всех типов реакций.

Реакции ионного обмена в качественном анализе

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов $FeCl_3$ и $FeSO_4$, добавьте по 1 мл раствора щёлочи в каждую пробирку. Сравните полученные осадки $Fe(OH)_3$ и $Fe(OH)_2$, составьте уравнения обеих реакций. Растворимы ли полученные гидроксиды железа в избытке щёлочи?

Опыт 2. Действие раствора аммиака на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл разбавленного раствора гидроксида аммония в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с

осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций. Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на оба осадка: образуют ли ионы железа аммиачные комплексы?

Реакции окисления-восстановления

Опыт 3. Действие окислителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

а) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор перманганата калия, в какой из них наблюдается обесцвечивание $KMnO_4$? Запишите уравнение реакции, учитывая, что в кислой среде перманганат-ионы восстанавливаются до ионов Mn^{2+}, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

б) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор бихромата калия, в какой из них наблюдается изменение окраски раствора? Запишите уравнение реакции, учитывая, что бихромат-ионы $Cr_2O_7^{2-}$ восстанавливаются до ионов Cr^{3+}, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

Опыт 4. Действие восстановителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 1 мл раствора йодида калия. Какая из солей железа проявила окислительный свойства? Запишите уравнение реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Реакции с участием комплексных ионов

Опыт 5. Реакция ионов железа с роданидом аммония

В две пробирки налейте по 1 мл раствора $FeCl_3$ и $FeSO_4$, добавьте по 1 мл раствора роданида аммония NH_4SCN в каждую пробирку. В какой из пробирок наблюдается образование роданида железа красного цвета? Составьте уравнение реакции.

Опыт 6. Реакция ионов железа с реактивом Чугаева

В две пробирки налейте по 1 мл раствора соли железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл раствора аммиака и по 1 капле раствора диметилглиоксима ($C_4H_8N_2O_2$). Для какого иона железа наблюдается образование окрашенного внутрикомплексного соединения с реактивом Чугаева? Составьте уравнение реакции образования диметилглиоксимата железа [Fe $(C_4H_7O_2N_2)_2$].

Опыт 7. Берлинская лазурь и турнбуллева синь

На растворы $FeCl_3$ и $FeSO_4$ подействуйте каплей раствора жёлтой кровяной соли (гексацианоферрата (II) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок берлинской лазури имеет состав Fe_4 [$Fe(CN)_6$]$_3$.

На растворы $FeCl_3$ и $FeSO_4$ подействуйте каплей раствора красной кровяной соли (гексацианоферрата (III) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок турнбуллевой сини

имеет состав Fe_3 [Fe $(CN)_6]_3$. Сделайте вывод, какой кровяной солью можно открыть ион Fe^{2+}, и с помощью какой обнаруживается ион Fe^{3+}.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что произойдет с зеленоватым осадком Fe $(OH)_2$ при добавлении к нему раствора перекиси водорода H_2O_2? Запишите уравнение реакции, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

2. Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов $FeCl_3$ и NaOH, если ПР (Fe $(OH)_3$) = $3{,}8 \cdot 10^{-38}$, а концентрации растворов 0,001 моль/л? Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов $FeSO_4$ и NaOH, если ПР (Fe $(OH)_2$) = $4{,}8 \cdot 10^{-16}$, а концентрации обоих растворов 0,001 моль/л?

3. Какой объём соляной кислоты с концентрацией 0,01 моль/л требуется для полного растворения осадка Fe $(OH)_3$ массой 0,5 г?

4. Реакция образования окрашенного роданида железа (опыт 3) является обратимой. Запишите выражение для константы равновесия этой реакции. Какими способами, согласно принципу Ле-Шателье, можно сместить равновесие в сторону образования окрашенного продукта?

5. Запишите уравнения реакций первичной и вторичной диссоциации красной и жёлтой кровяных солей. Почему чаще всего именно цианид-ионы используются для маскирования ионов железа в растворах?

6. Подвергаются ли соли железа гидролизу? Запишите уравнения взаимодействия с водой для $FeCl_3$ и $FeSO_4$, определите тип гидролиза и кислотность среды раствора. Какую окраску приобретёт лакмус в этих растворах?

Лабораторная работа № 2

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы **Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}**, выполняемыми пробирно, капельно, и с использованием экстракции, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Предел обнаружения – минимальная концентрация или минимальное количество вещества, которое может быть обнаружено данным методом допустимой погрешностью. Предел обнаружения в значительной степени зависит от условий протекания реакции. Обычно для обнаружения ионов применяют реакции с пределом обнаружения 10^{-7} г (0,1мкг) в 1 мл раствора.

Приемы для обеспечения низкого предела обнаружения

1. *Капельный анализ* – метод микрохимического анализа, в котором качественную реакцию проводят с использованием капли раствора. Реакции выполняют на стеклянной или фарфоровой пластинке, фильтровавальной бумаге (иногда предварительно пропитанной раствором реагента и высушенной). Пределы обнаружения веществ 0,1–0,001 мкг в капле объемом 50 мм^3. Минимальные пределы обнаружения достигаются при выполнении анализа на фильтровальной бумаге.

2. *Микрокристаллоскопический анализ* – метод анализа, основанный на реакциях образования кристаллических осадков с

характерной формой кристаллов, для рассмотрения которых используется микроскоп.

3. *Экстракция* – процесс переведения вещества из водной фазы в органическую, используется для разделения и концентрирования веществ.

4. *Флотация* – процесс разделения мелких твёрдых частиц в водной суспензии или растворе, основанный на их избирательной адсорбции на границах раздела фаз в соответствии с их смачиваемостью, используется для разделения и концентрирования.

5. *Метод «умножающихся реакций»* – ряд последовательных реакций, в результате которых получается новое вещество в количестве, во много раз превышающем первоначальное количество обнаруживаемого вещества.

6. *Каталитические реакции.*

Реакции в пробирке (в растворе)

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку. Составьте уравнения реакций образования синего CoOHCl, голубого CuOHCl и зелёного NiOHCl. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком концентрированной щёлочи, составьте уравнения реакций образования гидроксидов кобальта (II), никеля (II) и меди (II).

Опыт 2. Действие раствора аммиака на Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки, запишите уравнения реакций, учитывая, что в аммиачных комплексах кобальта и никеля координационное число комплексообразователя равно шести, а медь удерживает только четыре лиганда.

Разрушаются ли полученные аммиакаты раствором кислоты?

Опыт 3. Реакции с желтой кровяной солью

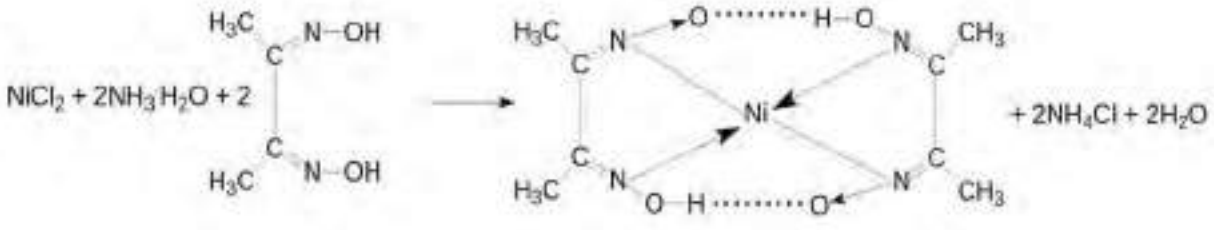
В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора гексацианоферрата (II) калия в каждую пробирку. Что наблюдается? Составьте уравнения реакций, учитывая, что все осадки получены в результате полного ионного обмена.

Капельные реакции на фильтровальной бумаге

Опыт 4. Реакция катионов Ni^{2+} с реактивом Чугаева

На сухую фильтровальную бумагу поместите несколько капель раствора соли никеля (II), добавьте каплю раствора аммиака и каплю раствора диметилглиоксима $C_4H_8N_2O_2$ (реактив Чугаева). Сравните наблюдаемый аналитический сигнал с реакцией образования

диметилглиоксимата железа (II), выполненной в предыдущей работе. Запишите уравнение реакции



Проведите аналогичную реакцию с растворами меди (II) и кобальта (II). Какой из этих ионов может мешать определению ионов никеля и почему?

Опыт 5. Капельная реакция ионов Co^{2+}с роданидом аммония

Поместите на сухую фильтровальную бумагу несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли NH_4SCN, при необходимости добавьте ещё одну каплю раствора. Как изменилась окраска кристаллов? Составьте уравнение реакции образования комплексного соединения $(NH_4)_2[Co(SCN)_4]$.

Обнаружение катионов с использованием экстракции

Опыт 6. Реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите в пробирку несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли тиоцианата (роданида) аммония. Как изменилась окраска раствора?

Чувствительность этой реакции можно повысить с помощью экстракции окрашенного комплекса $(NH_4)_2[Co(SCN)_4]$ органическим растворителем. Добавьте к полученному раствору несколько капель изоамилового спирта, взболтайте. Дождитесь разделения в пробирке водной и спиртовой фаз. Что при этом наблюдается?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения реакций первичной и вторичной диссоциаций гексаамминкобальта (II), гексаамминникеля (II), тетраамминмеди (II). Запишите формулы для константы нестойкости.

2. Для открытия ионов Ni^{2+} с помощью диметилглиоксима при реакции на капельной пластинке предел обнаружения Ni^{2+} – 0,16 мкг; в пробирке можно обнаружить 1,4 мкг Ni^{2+} в 1 мл. Предел обнаружения можно уменьшить до 0,015 мкг, если каплю анализируемого раствора нанести на фильтровальную бумагу, пропитанную диметилглиоксимом. Если осадок диметилглиоксимата никеля (II) флотируется на границе раздела фаз «вода – изоамиловый спирт», то предел обнаружения ионов Ni^{2+} понижается до 0,002 мкг. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Ni^{2+}, открываемых каждым из способов.

3. Окисление тиосульфат-ионов ионами железа (III) ускоряется в присутствии ионов меди (каталитическая реакция). Время обесцвечивания тиоцианата железа (III) тиосульфатом натрия в отсутствие меди около двух минут. В присутствии ионов Cu^{2+} раствор тиоцианата железа (III) обесцвечивается мгновенно. Предел обнаружения меди – 0,02мкг в 1 мл. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Cu^{2+}, соответствующую этому пределу обнаружения.

Лабораторная работа № 3

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы **Al^{3+}**, **Cr^{3+}** и **Zn^{2+}**, научиться использовать амфотерность их гидроксидов в химическом анализе, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Для проведения каждой качественной реакции необходимо соблюдать определенные условия, основные из которых: *pH*-среды; температура; концентрации реагентов; присутствие определенных веществ; отсутствие мешающих ионов или веществ. Для протекания многих реакций необходима среда с определенным значением *pH* водного раствора. Значение *pH* можно контролировать с помощью индикаторов или прибора *pH*-метра. Для поддержания нужного значения *pH* при необходимости используют соответствующие буферные растворы.

Буферные растворы — это растворы, способные сохранять постоянное значение *pH* при разбавлении водой или добавлении к ним определенного количества сильных кислот или оснований. В состав буферной смеси входят в определенном количественном соотношении слабые кислоты и их соли с сильными основаниями или слабые основания и их соли с сильными кислотами.

Амфотерность гидроксидов алюминия, цинка и хрома (III) позволяет отделять их от остальных катионов действием растворов щелочей различной концентрации.

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по несколько капель очень разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку до образования нерастворимых гидроксидов. Составьте уравнения реакций. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком щёлочи до полного растворения, составьте уравнения реакций образования тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.

Опыт 2. Действие раствора аммиака на ионы Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

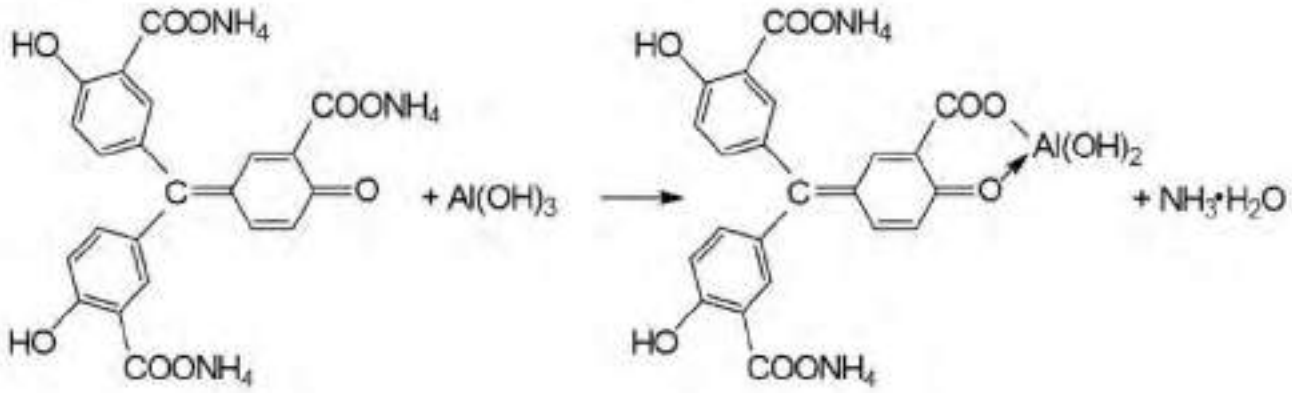
В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций образования соответствующих гидроксидов.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки. Какие гидроксиды растворяются частично или полностью? Составьте реакцию комплексообразования, учитывая, что в образующихся аммиакатных комплексах координационное число каждого комплексообразователя вдвое больше, чем модуль его степени окисления.

Опыт 3. Реакция ионов алюминия с алюминоном

В пробирку поместите 3–4 капли раствора соли алюминия, при необходимости 2–3 капли раствора уксусной кислоты и 3–5 капель 0,01 % раствора алюминона ($C_{21}H_{11}O_9$ $(NH_4)_3$). Смесь нагрейте на

водяной бане, добавьте несколько капель раствора аммиака до щелочной реакции и выпадения красного хлопьевидного осадка алюминиевого лака.



Опыт 4. Реакция ионов цинка с желтой кровяной солью

В пробирке к 1 мл раствора $ZnCl_2$ добавьте 1 мл раствора гексацианоферрата (II) калия. Наблюдайте выпадение белого осадка $K_2Zn_3[Fe(CN)_6]_2$. Составьте уравнение этой реакции ионного обмена.

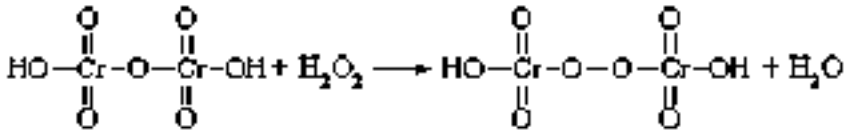
Опыт 5. Восстановительные свойства ионов хрома (III)

В пробирку поместите 2–3 капли раствора соли хрома(III), прибавьте 4–5 капель 2 моль/л раствора щёлочи NaOH до растворения осадка, и 2–3 капли 3 % раствора перекиси водорода H_2O_2. Нагревайте до изменения зеленой окраски раствора на желтую (цвет хромат-ионов CrO_4^{2-}). Составьте уравнение окислительно-восстановительной реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Опыт 6. Образование надхромовой кислоты

К жёлтому раствору хромата натрия, полученному в предыдущем опыте, прибавьте 5 капель пероксида водорода H_2O_2, ~0,5 мл изоамилового спирта, тщательно перемешайте и прибавьте по каплям раствор серной кислоты (1 моль/л). Верхний органический слой окрашивается в интенсивно синий цвет за счёт экстракции образовавшейся надхромовой кислоты H_2CrO_6. Запишите уравнение реакции, протекающее через образование дихромовой кислоты и её последующее окисление перекисью водорода:

$$2Na_2CrO_4+2H_2SO_4 \rightarrow H_2Cr_2O_7+2Na_2SO_4+H_2O$$



$$H_2Cr_2O_8 + 3\ H_2O_2 \leftrightarrow 2\ H_2CrO_6 + 2\ H_2O$$

Составьте электронно-ионный баланс для этой реакции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения первичной и вторичной диссоциации солей, полученных в первом опыте: тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.

2. Напишите выражение константы нестойкости для комплексных ионов тетраамминцинка и гексаамминхрома, полученных во втором опыте.

3. Напишите уравнения диссоциаций хромовой, дихромовой и надхромовой кислот.

Лабораторная работа № 4

РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^+, Pb^{2+}, Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ

Цель работы: познакомиться с разделением и идентификацией катионов методом бумажной хроматографии

Хроматография – физико–химический метод разделения веществ, основанный на использовании сорбционных процессов в динамических условиях.

Анализируемые компоненты распределяются между подвижной и неподвижной фазами. Неподвижной фазой служит твердое вещество – сорбент. Подвижной фазой является жидкость или газ, протекающий через неподвижную фазу – элюент. Элюент в процессе хроматографирования перемещается вдоль сорбента, так что частицы анализируемых веществ могут многократно переходить из подвижной фазы в неподвижную и наоборот. Разделение веществ с помощью хроматографии основано на различном сродстве разделяемых компонентов к подвижной и неподвижной фазам.

Бумажная хроматография – вид хроматографии, в котором носителем неподвижного растворителя служит очищенная от примесей фильтровальная бумага. Подвижная фаза продвигается вдоль листа бумаги, главным образом за счет капиллярных сил. Бумажная хроматография отличается простотой, экспрессностью, наглядностью разделения, высокой чувствительностью (можно определить 10–20 мкг вещества с точностью 5–7 %).

Опыт 1. Подготовка фильтровальной бумаги

Два фильтра «синяя лента» диаметром 45 мм смочите 5 %-м раствором йодида калия, опуская фильтры в раствор пинцетом. Высушите фильтры на воздухе в чашке Петри.

Опыт 2. Получение первичной осадочной хроматограммы

В центр каждого высушенного фильтра нанесите пипеткой каплю анализируемой смеси катионов Ag^+, Hg^{2+} и Pb^{2+}, после её полного впитывания нанесите еще одну, дайте ей впитаться. Катионы анализируемой смеси вступают в реакцию с KI, которым пропитан фильтр, образуя осадочную хроматограмму, зоны которой имеют цвета осадков AgJ (жёлтый), HgJ_2 (оранжевый), PbJ_2 (ярко-желтый).

Полученные хроматограммы необходимо промыть дистиллированной водой. Для промывания хроматограмм нанесите на фильтры 2–3 капли дистиллированной воды, внося каждую последующую каплю после впитывания предыдущей до увеличения размера зон в два–три раза. Высушите обе осадочные хроматограммы, заполните табл. 1, составьте уравнения реакций образования осадков.

Таблица 1

Первичная хроматограмма смеси катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2 Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (края фильтра)		

Опыт 3. Получение проявленной осадочной хроматограммы

Анализируя первичную хроматограмму, легко определить катионы Hg^{2+} (оранжевая зона в центре) и Pb^{2+} (ярко-желтая зона по периферии). Бледно-желтая окраска AgJ либо видна плохо (из-за маскировки оранжевым HgJ_2 и ярко-желтым PbJ_2), либо не видна совсем. Для того, чтобы явно видеть зону серебра, первичную хроматограмму на одном из фильтров необходимо проявить.

Для проявления хроматограммы внесите в центр фильтра каплю раствора NaOH. При этом йодид свинца растворится в NaOH с образованием бесцветного плюмбита натрия Na_2PbO_2, йодид ртути останется неизменным, бледно-жёлтое пятно йодида серебра постепенно почернеет вследствие превращения гидроксида серебра (I) в оксид серебра (I), который затем разложится до свободного серебра.

Заполните табл. 2, составьте уравнения всех протекающих при проявке первичной хроматограммы реакций.

Таблица 2

Вторичная хроматограмма смеси катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (край фильтра)		

По результатам работы сделайте вывод об эффективности метода бумажной хроматографии для дробного открытия катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+} при их совместном присутствии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какие процессы лежат в основе хроматографического анализа?

2. Вычислите ПР йодида свинца (II), если известно, что растворимость его равна 0,03 г на 0,1 кг воды.

3. Выпадет ли осадок при взаимодействии равных объемов растворов $AgNO_3$ и KI, если концентрации обоих растворов 0,001 моль/л, а произведение растворимости йодида серебра ПР (AgI) =$8{,}3 \cdot 10^{-17}$.

4. В избытке йодида калия осадок йодида ртути (II) растворяется без изменения степеней окисления элементов с образованием комплексного соединения тетрайодомеркурата калия. Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.

5. Оксид серебра (I) неустойчив на воздухе, поэтому он используется не в чистом виде, а в аммиачном растворе (реактив Толленса). При взаимодействии гидроксида аммония и оксида серебра (I) образуется гидроксид диамминсеребра (I). Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.

6. Дайте определения терминам «элюент», «сорбент», «элюат», «подвижная фаза», «неподвижная фаза», «собрция», «десорбция».

Лабораторная работа № 5

ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ

Цель работы: с помощью качественных реакций определить. какая соль находится в каждой пробирке.

Ход работы

В двенадцати пронумерованных пробирках находятся следующие растворы солей:

Раствор бесцветный	**Раствор может быть окрашенным**
Хлорид аммония	Сульфат меди (II)
Хлорид кальция	Хлорид кобальта (II)
Сульфат марганца (II)	Хлорид никеля (II)
Сульфат железа (II)	Хлорид хрома (III)
Хлорид цинка	Хлорид железа (III)
Хлорид алюминия	
Нитрат свинца (II)	

После получения у преподавателя нескольких пробирок (по вариантам 3–6 шт.,) составьте в тетради таблицу для записи результатов анализа:

Качественный анализ растворов, номер (№) (запишите номера пробирок)

Испытуемый раствор	Добавленный реагент	Наблюдение	Предполагаемый состав	Вывод
Опыт № 1 «Открытие окрашенных ионов»				
№ 13	отсуствует	Раствор розовый	Ионы Co^{2+}	
№ 13	NaOH	Выпал синий осадок, при добавлении избытка щелочи стал розовым	CoOHCl $Co(OH)_2$	В пробирке был $CoCl_2$
Опыт № 2 «Действие щелочей»				
№ 14				

Опыт 1. Открытие окрашенных ионов

Опишите внешний вид растворов, сделайте предположения, какие растворы могут быть в каждой из пробирок, занесите их в таблицу. Наиболее вероятные предположения (для окрашенных растворов) проверьте с помощью соответствующих качественных реакций, взяв для анализа небольшую порцию испытуемого раствора. Составьте уравнения реакций, сделайте выводы.

Опыт 2. Действие щелочей на испытуемые растворы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором щёлочи, добавляя его по каплям. Занесите в таблицу аналитический сигнал: выделился запах аммиака, выпал неизменяющийся осадок, выпал осадок, растворимый в избытке щёлочи или темнеющий на воздухе. Обратите внимание, что гидроксид свинца $Pb(OH)_2$ проявляет амфотерные свойства, растворяясь в избытке щелочи с образованием плюмбита Na_2PbO_2, а светло-бежевый гидроксид марганца $Mn(OH)_2$ постепенно окисляется кислородом воздуха, что выглядит как потемнение раствора на границе с воздухом:

$$2\,Mn(OH)_2 + O_2 \rightarrow 2\,MnO_2\downarrow + 2\,H_2O.$$

Эту реакцию можно сделать более наглядной, ускорив процесс окисления с помощью перекиси водорода:

$$Mn(OH)_2 + H_2O_2 \rightarrow MnO_2\downarrow + 2\,H_2O.$$

Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций, для ионов Mn^{2+} кроме реакции с H_2O_2 можно использовать

ОВР с окислением марганца до розовых перманганат-ионов висмутатом натрия в сильнокислой среде:

$$2MnSO_4+5NaBiO_3+16HNO_3 \rightarrow$$

$$2HMnO_4+5Bi(NO_3)_3+NaNO_3+2Na_2SO_4+7H_2O.$$

Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 3. Действие раствора аммиака на испытуемые пробы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором аммиака. Занесите в таблицу аналитический сигнал. Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 4. Открытие неокрашенных ионов

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), проведите качественный анализ на катионы, которые остались не открытыми. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»

1. Две соли окрашивают пламя в фиолетовый цвет. Одна из них бесцветна, и при лёгком нагревании её с концентрированной серной кислотой отгоняется жидкость, в которой растворяется медь; последнее превращение сопровождается выделением бурого газа. При добавлении к раствору второй соли раствора серной кислоты жёлтая окраска раствора изменяется на оранжевую, а при нейтрализации полученного раствора щёлочью восстанавливается первоначальный цвет. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

2. В двух сосудах находятся растворы неизвестных веществ. При добавлении к раствору первого вещества хлорида бария выпадает осадок белого цвета, нерастворимый в воде и кислотах. Осадок белого цвета выпадает также и при добавлении раствора нитрата серебра к пробе, отобранной из второго сосуда. При нагревании пробы первого раствора с гидроксидом натрия выделяется газ с резким запахом. При взаимодействии второго раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Напишите уравнения описанных реакций.

3. Действием концентрированной серной кислоты на белые кристаллы при нагревании получен газ. При пропускании этого газа через раствор нитрата серебра выпал белый творожистый осадок. Кристаллы окрашивают пламя спиртовки в жёлтый цвет. Какая соль была взята для реакции? Приведите её формулу и название. Запишите уравнения реакций, описанных в тексте.

4. Порошкообразное вещество белого цвета окрашивает пламя горелки в оранжево-красный цвет. При действии соляной кислоты «вскипает» с выделением тяжёлого газа без цвета и запаха. Это вещество способно растворяться в воде при одновременном пропускании избытка углекислого газа. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

5. Некоторое кристаллическое вещество, окрашивающее пламя в жёлтый цвет, хорошо растворяется в воде. При добавлении к этому раствору нитрата серебра выпадает жёлтый осадок, не растворимый в разбавленной азотной кислоте. При действии на исходный раствор бромной воды образуется коричневое окрашивание. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

6. Для определения качественного состава белый, нерастворимый в воде порошок с зеленоватым оттенком подвергли

термическому разложению, в результате которого образовалось два оксида. Один из них — порошок чёрного цвета, при добавлении к которому раствора серной кислоты и последующем нагревании образовался раствор голубого цвета. Про другой известно, что это газ тяжелее воздуха, без цвета и запаха, играющий важную роль в процессе фотосинтеза. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

7. Для проведения исследования бесцветные кристаллы соли, которые при непродолжительном нахождении на воздухе приобрели голубой цвет, нагрели до выделение бурого газа и образование чёрного порошка. При пропускании над нагретым полученным порошком водорода наблюдалось появление красного налёта простого вещества — металла. Известно, что металл, образующий катион, входит в состав многих сплавов, например бронзы. Запишите химическую формулу и название исследованной соли. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования его свойств.

8. Для изучения состава соли был взят раствор, который разделили на две части. К первой части этого раствора добавили хлорид натрия, в результате чего выпал белый осадок. При добавлении ко второй части раствора цинковой стружки образовались серые хлопья металла, катионы которого обладают дезинфицирующим свойством. Известно, что выданная соль

используется для изготовления зеркал и в фотографии, а её анион является составной частью многих минеральных удобрений. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

9. Для изучения состава соли были взяты белые кристаллы хорошо растворимого в воде вещества, которое используется в хлебопечении и кондитерской промышленности в качестве разрыхлителя теста. В результате процесса термического разложения выданной соли образовались три вещества, два из которых при обычных условиях являются газами. При нагревании соли с гидроксидом натрия образуется газ, водный раствор которого используется в медицине под названием нашатырный спирт. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

10. Для установления качественного состава была изучена соль тяжёлого металла, оксид которого используется в производстве хрустального стекла. При термическом разложении соли образуется оксид этого металла и два газообразных вещества: одно из них — газ бурого цвета, а другое — важнейший компонент воздуха. При приливании к раствору выданной соли раствора йодида калия выпадает осадок ярко-жёлтого цвета. Запишите

химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

11. Для определения качественного состава неизвестной соли азотной кислоты исследовали белое кристаллическое вещество. Это вещество при нагревании полностью разлагается без образования сухого остатка. При действии горячего раствора гидроксида натрия выделяется бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

12. В химической лаборатории хранится склянка с кристаллическим веществом белого цвета. При действии на него гидроксида натрия выделяется лёгкий, бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. При действии на него сильной кислоты выделяется бесцветный газ без запаха, вызывающий покраснение раствора лакмуса. При приливании к раствору этого вещества раствора гидроксида кальция выделяется нерастворимый в воде осадок. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

13. Кристаллическое вещество оранжевого цвета при нагревании значительно увеличивается в объёме за счёт выделения бесцветного газа и образует твёрдое вещество тёмно-зелёного

цвета. Выделившийся газ взаимодействует с литием даже при комнатной температуре. Продукт этой реакции гидролизуется водой с образованием газа с резким запахом, способного восстановить медь из её оксида. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

14. Для исследования свойств неизвестного вещества его концентрированный раствор разделили на две части. В пробирку с одной частью раствора поместили медную проволоку. При этом наблюдалось выделение бурого газа и растворение меди. При добавлении к другой части раствора силиката натрия наблюдалось образование бесцветного студенистого осадка. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

15. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали раствор голубого цвета. При добавлении горячего раствора сильной кислоты выделился газ с резким запахом жжёной резины, окрашивающий лакмус в красный цвет. При добавлении раствора аммиака сначала выпал голубой осадок, который затем растворился в избытке аммиака с образованием фиолетового раствора. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

16. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её раствор желтоватого цвета. При добавлении раствора сильной кислоты появился резкий запах уксуса. При добавлении роданида аммония раствор приобрёл кроваво-красную окраску. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

17. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её бесцветный раствор. При добавлении раствора разбавленной серной кислоты выделился газ с запахом тухлых яиц и выпал белый осадок, не растворимый в кислотах. При взаимодействии порции исходного раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

18. Для определения качественного состава было выдано кристаллическое вещество — средняя соль многоосновной кислоты, катион которой не является ионом металла. При взаимодействии данного вещества с гидроксидом натрия выделяется газ с резким раздражающим запахом, а при приливании к раствору выданного вещества раствора нитрата серебра выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

19. Для определения качественного состава студентам было выдано бесцветное кристаллическое вещество — соль. К одной части раствора исследуемой соли прилили раствор нитрата серебра, в результате чего выпал осадок жёлтого цвета. А при добавлении к другой части раствора карбоната натрия выпал белый осадок. Известно, что катион этой соли образован щёлочно-земельным металлом, входящим в состав костной ткани человека. Анион этой соли состоит из атомов химического элемента, образующего простое вещество, спиртовой раствор которого используется в качестве дезинфицирующего средства. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

20. При определении качественного состава неизвестного кристаллического вещества белого цвета было установлено, что его раствор взаимодействует с раствором гидроксида калия с образованием осадка. А при добавлении к раствору исследуемого вещества раствора нитрата бария выпадает осадок белого цвета, не растворимый в кислотах. Известно, что катион металла, входящий в состав данного соединения, входит в состав хлорофилла. Этот металл ранее применялся также в фотографии для получения вспышки. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеев В. Н. Качественный химический полумикроанализ. М.: Химия. 1973. 584 с.

Глинка Н. Л. Общая химия: учебник / под ред. В. А. Попкова, А. В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Гринвуд Н., Эрншо А. Химия элементов (в 2 томах): учебник. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний». 2015. 1280 с.

Карапетьянц М. Х., Дракин С. И. Общая и неорганическая химия: учебник. 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Крешков А. П. Основы аналитической химии. Ч. 1. Теоретические основы. Качественный анализ. М.: Химия. 1970. 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……3
Лабораторная работа № 1. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА……6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ……9
Лабораторная работа № 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+}, Ni^{2+} И Cu^{2+}……10
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ……14
Лабораторная работа № 3. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}……15
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ……18
Лабораторная работа № 4. РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^{+}, Pb^{2+}, Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ ……19
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ……22
Лабораторная работа № 5. ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ……23
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»……26
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……34

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

РУКОВОДСТВО ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ХИМИЯ

Специальность

21.05.04 Горное дело
Специализация №3 ***«Открытые горные работы»***

форма обучения: очная, заочная

квалификация выпускника: **Горный инженер (специалист)**

Автор: И. А. Низова, Н. А. Зайцева

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Степени окисления элементов. Окислители и восстановители..... ..3

2. Классификация окислительно-восстановительных реакций.... 5

3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса.....7

4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).....10

5. Направление протекания окислительно-восстановительных реакций.....19

Список литературы.....17

Окислительно-восстановительными реакциями (ОВР) называют реакции, протекающие с изменением степени окисления элементов.

1. Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.

Степень окисления – условный заряд атома, рассчитанный из предположения, что все связи в соединении ионные.

Правила вычисления степени окисления:

1. Сумма степеней окисления всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов, составляющих сложный ион – заряду иона.

2. Степень окисления атома в простом веществе равна нулю.

3. Некоторые элементы имеют в соединениях постоянную степень окисления:

Фтор – только –1

Щелочные металлы (Na, K, Li, Rb, Cs) – только +1

Щелочноземельные металлы (Ca, Sr, Ba), Zn, Mg, Be - только +2

Алюминий – только +3.

4. Водород почти во всех соединениях имеет степень окисления +1. Исключение составляют гидриды металлов (NaH, CaH_2 и др.), где степень окисления водорода отрицательна (–1). Кислород почти во всех соединениях имеет степень окисления –2. Исключение составляют фторид кислорода OF_2, (степень окисления кислорода +1) и пероксиды H_2O_2, Na_2O_2 и т.д. (степень окисления кислорода –1).

5. Максимальная положительная степень окисления элемента обычно совпадает с номером его группы в периодической системе. Максимальная отрицательная степень окисления элемента равна максимальной положительной степени окисления минус восемь. Исключение составляют фтор, кислород, железо: их высшая степень окисления выражается числом, значение которого ниже, чем номер группы, к которой они относятся. У элементов подгруппы меди, наоборот, высшая степень окисления больше единицы, хотя они и относятся к I группе.

Во время ОВР происходит обмен электронами: окислитель присоединяет электроны (сам при этом восстанавливается), восстановитель отдает электроны

(сам при этом окисляется). Окисление всегда сопровождается восстановлением и наоборот. Число электронов, отдаваемых восстановителем, всегда равно числу электронов, принимаемых окислителем.

Важнейшими окислителями и восстановителями могут быть как простые, так и сложные вещества. Так как окислитель содержит в своем составе элемент, понижающий степень окисления, а восстановитель содержит элемент, степень окисления которого повышается в ходе реакции, окислителями могут быть прежде всего соединения высших ступеней окисления, а восстановителями - низших степеней окисления, присущих данному элементу.

Из простых веществ сильными окислителями являются неметаллы верхней части VI и VII групп периодической системы, за счёт высокой электроотрицательности их атомов. Сильнее всего окислительные свойства выражены у фтора F_2, но в практике чаще пользуются в качестве окислителей кислородом O_2, озоном O_3, хлором Cl_2 и бромом Br_2. К простым веществам – восстановителям относятся водород H_2, углерод C и металлы, из которых на практике чаще применяют алюминий, магний, натрий и цинк.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие окислители: перманганат калия $KMnO_4$; дихромат калия $K_2Cr_2O_7$; растворы азотной кислоты HNO_3 различных концентраций; концентрированная серная кислота H_2SO_4; пероксид (перекись) водорода; оксиды марганца (IV) MnO_2, и свинца (IV) PbO_2; смесь концентрированных азотной и соляной кислот (1:3, «царская водка), хлорная кислота $HClO_4$.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие восстановители: иодид калия KI; сульфит натрия Na_2SO_3; сульфид натрия Na_2S и сероводород H_2S; хлорид олова $SnCl_2$, монооксид углерода (угарный газ) аммиак NH_3.

Некоторые из этих веществ проявляют как окислительные, так и восстановительные свойства в зависимости от ОВР: CO, H_2O_2, MnO_2, так как содержат элемент в промежуточной степени окисления.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Определите степени окисления всех элементов, входящих в состав следующих веществ:

Номер варианта	Вещества	Номер варианта	Вещества
1	MnO_2, CH_4 , Cl_2, $KMnO_4$	11	HF, Zn, H_3PO_4, NH_4Cl
2	H_2O_2, H_2SO_4, I_2, $K_2Cr_2O_7$	12	H_2SO_3, NaH_2SbO_3, Au, $ZnCl_2$
3	NaH, F_2, K_2HPO_4, N_2H_4	13	NH_4HS, P, C_6H_6, $Ba(ClO_4)_2$
4	OF_2, C_2H_6, O_2, K_2MnO_4	14	$NaNO_2$, $Ca(HS)_2$, Ag, PH_3
5	CaH_2, C_2H_4, Br_2, $Fe_2(SO_4)_3$	15	$BaCO_3$, AsH_3, Ca, Na_3SbO_4
6	PbO_2, C_2H_2, O_3, $MnOHNO_3$	16	HNO_3, Xe, $KClO_4$, NH_4OH
7	Na_2O_2, N_2, H_2O, K_2SiO_3	17	$Sn(OH)_2$, $CuCl_2$, K_2S, Mn
8	H_2S, Mg, Na_3SbO_3, $Cr(OH)_3$	18	Al_2S_3, Na_2SO_3, NaClO, Se
9	Na_2S, NH_3, H_2, $KHCO_3$	19	$NaClO_2$, Al_4C_3, He, $Bi(NO_3)_3$,
10	AlP, CO, HCl, NH_4NO_3	20	$NaHSO_3$, Si, Na_3AsO_3, $Cr(OH)_3$

2. В каких из перечисленных соединений хлор может проявлять только окислительные свойства: NaCl, NaClO, HCl, $KClO_3$, $NaClO_4$, Cl_2O_7, $HClO_2$?

3. В каких из перечисленных соединений азот может проявлять только восстановительные свойства: $NaNO_2$, NO, N_2O_3, N_2H_4, N_2O, HNO_3, N_2O_5, NH_4NO_3, NH_3, NH_4Cl?

4. В каких из перечисленных соединений сера может быть как окислителем, так и восстановителем: H_2SO_4, $Ca(HS)_2$, H_2S, Na_2SO_3, Na_2S, SO_2, $Na_2S_2O_3$, SO_3, SO?

2. Классификация окислительно–восстановительных реакций

Окислительно-восстановительные реакции обычно разделяют на три типа: межмолекулярные, внутримолекулярные и реакции диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления). Иногда в эту классификацию добавляют четрветрый тип – реакции конпропорционирования.

1) Межмолекулярные реакции протекают с изменением степени окисления атомов, которые находятся в различных молекулах. Например:

$$2\ Al + Fe_2O_3 \xrightarrow{t^\circ} Al_2O_3 + 2\ Fe,$$

$$C + 4\ HNO_{3(конц)} = CO_2\uparrow + 4\ NO_2\uparrow + 2\ H_2O.$$

2) К внутримолекулярным реакциям относятся такие реакции, в которых окислитель и восстановитель входят в состав одной и той же молекулы, например:

$$2Cu(NO_3)_2 \xrightarrow{t^\circ} 2CuO + 4NO_2 + O_2\uparrow$$

$$2\ KNO_3 \xrightarrow{t^\circ} 2\ KNO_2 + O_2\uparrow.$$

3) В реакциях диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления) один и тот же элемент является и окислителем, и восстановителем:

$$Cl_2 + 2\ KOH \xrightarrow{\text{на холоду}} KCl + KClO + H_2O,$$

$$2\ NO_2 + 2\ NaOH \rightarrow NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O.$$

4) В реакциях конпропорционирования один и тот же химический элемент, имеющий разные степени окисления, в результате приводится к единой степени окисления:

$$NH_4NO_3 \rightarrow N_2O + 2H_2O$$

$$NH_4NO_2 \rightarrow N_2 + 2H_2O$$

Вопросы для самостоятельной работы

1. Какие из перечисленных веществ могут вступать в реакции диспропорционирования: HNO_3, HNO_2, H_2SO_4, NH_4NO_3, Br_2, H_2O_2, CaH_2?

2. Приведите пример реакции межмолекулярного конпропорционирования.

3. Является ли реакция разложения перманганата калия реакцией диспропорционирования? Реакцией конпропорционирования?

$$2\ KMnO_4 \xrightarrow{t^\circ} K_2MnO_4 + MnO_2 + 2O_2\uparrow$$

3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса

Для составления уравнений ОВР используются два метода: метод электронного баланса и метод полуреакций (электронно-ионного баланса). При использовании любого из этих методов прежде всего необходимо определить окислитель и восстановитель, рассчитав степени окисления всех элементов в левой и правой частях уравнения. Затем записать отдельно процесс окисления и процесс восстановления, соблюдая принцип электронного баланса: число электронов, отданных восстановителем, должно быть равно числу электронов, принятых окислителем.

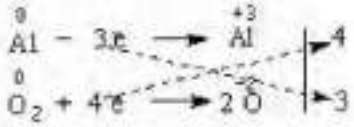
Метод электронного баланса универсален, он позволяет определить коэффициенты реакциях, протекающих как в растворах, так и без растворителя, в веществах в любых агрегатных состояниях. Он удобен для написания реакций термического разложения, взаимодействия двух простых веществ

Пример 1. $Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3$

Определим степени окисления:

$$\overset{0}{Al} + \overset{0}{O_2} = \overset{+3\ -2}{Al_2O_3}$$

Алюминий отдает электроны (приобретает положительную степень окисления), а кислород – принимает электроны (приобретает отрицательную степень окисления). Чтобы получить степень окисления +3, атом алюминия должен отдать 3 электрона. Молекула кислорода, чтобы превратиться в кислородные атомы со степенью окисления –2, должна принять 4 электрона:



Чтобы количество отданных и принятых электронов выровнялось, первое уравнение надо умножить на 4, а второе – на 3. Для этого достаточно переместить числа отданных и принятых электронов против верхней и нижней строчки так, как показано на схеме вверху.

Если теперь в уравнении перед восстановителем (Al) мы поставим найденный нами коэффициент 4, а перед окислителем (O_2) – найденный нами коэффициент 3, то количество отданных и принятых электронов выравнивается и становится равным 12. Электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции Al_2O_3 необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$4Al + 3O_2 = 2Al_2O_3$$

Пример 2. $(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t^o} N_2 + Cr_2O_3 + H_2O$

Определим степени окисления:

$$\overset{-3+1}{(NH_4)_2}\ \overset{+6}{Cr_2}\ \overset{-2}{O_7} = \overset{0}{N_2} + \overset{+3}{Cr_2}\overset{-2}{O_3} + \overset{+1}{H_2}\overset{-2}{O}$$

Азот отдаёт электроны, хром получает.

$$2N^{-3} - 6\bar{e} = N_2^0$$
$$2Cr^{+6} + 6\bar{e} = 2\ Cr^{+3}$$

Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции H_2O необходим коэффициент 4. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t^o} N_2\uparrow + Cr_2O_3 + 4\ H_2O$$

Пример 3. $Hg(NO_3)_2 \rightarrow Hg + NO_2 + O_2$

Определим степени окисления:

$$\overset{+2}{Hg}\ \ \overset{+5}{(N}\ \overset{-2}{O_3)_2} = \overset{0}{Hg} + \overset{+4}{N}\overset{-2}{O_2} + \overset{0}{O_2}$$

Кислород отдаёт электроны, ртуть и азот получают, здесь вместо привычных двух участников обмена электронами их сразу три:

$$2O^{-2} - 4\bar{e} = O_2^0$$
$$2N^{+5} + 1\ \bar{e} = 2\ N^{+4}$$
$$Hg^{+2} + 2\ \bar{e} = Hg^0$$

Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции NO_2 необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$Hg(NO_3)_2 \rightarrow Hg + 2NO_2 + O_2$$

Задания для самостоятельной работы

1. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций разложения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$Mn(NO_3)_2 \rightarrow MnO_2 + NO_2$	11	$BaO_2 \rightarrow BaO + O_2$
2	$K_2MnO_4 \rightarrow K_3MnO_4\ MnO_2 + O_2$	12	$AgNO_3 \rightarrow Ag + NO_2 + O_2$
3	$Zn(NO_3)_2 \rightarrow ZnO + NO_2 + O_2$	13	$FeSO_4 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2 + SO_3$
4	$K_2Cr_2O_7 \rightarrow O_2 + Cr_2O_3 + K_2CrO_4$	14	$KClO_4 \rightarrow KCl + O_2$
5	$Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe_2O_3 + NO_2 + O_2$	15	$CdSO_3 \rightarrow CdSO_4 + CdS$
6	$KMnO_4 \rightarrow K_2MnO_4 + MnO_2 + O_2$	16	$HNO_3 \rightarrow H_2O + NO_2 + O_2$
7	$Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe_2O_3 + NO_2 + O_2$	17	$NaClO_2 \rightarrow NaClO_3 + NaCl$
8	$HNO_2 \rightarrow NO + NO_2 + H_2O$	18	$KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$
9	$Co(NO_3)_2 \rightarrow CoO + NO_2 + O_2$	19	$SnSO_4 \rightarrow SnO_2 + SO_2$
10	$LiNO_3 \rightarrow Li_2O + NO_2 + O_2$	20	$Ni(NO_3)_2 \rightarrow Ni(NO_2)_2 + O_2$

2. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций замещения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$Fe_2O_3 + C \rightarrow CO_2 + Fe$	11	$Zn + AgNO_3 \rightarrow Zn(NO_3)_2 + Ag$
2	$KBr + Cl_2 \rightarrow KCl + Br_2$	12	$Al_2O_3 + Mg \rightarrow MgO + Al$
3	$Fe_2O_3 + H_2 \rightarrow H_2O + Fe$	13	$MnO_2 + Al \rightarrow Al_2O_3 + Mn$
4	$Al + H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2$	14	$H_2S + Br_2 \rightarrow S + HBr$
5	$O_2 + HI \rightarrow H_2O + I_2$	15	$CuCl_2 + Cr \rightarrow Cu + CrCl_3$
6	$Al + CuSO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + Cu$	16	$Mg + SiO_2 \rightarrow MgO + Si$
7	$Ca + H_2O \rightarrow H_2 + Ca(OH)$	17	$NaI + Cl_2 \rightarrow NaCl + I_2$
8	$TiO_2 + Mg \rightarrow MgO + Ti$	18	$Na + H_2O \rightarrow H_2 + NaOH$
9	$Al + FeO \rightarrow Al_2O_3 + Fe$	19	$KClO_3 + I_2 \rightarrow KIO_3 + Cl_2$
10	$KI + Br_2 \rightarrow KBr + I_2$	20	$Al + H_2O \rightarrow Al(OH)_3 + H_2$

4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).

Метод полуреакций применим преимущественно для реакций в растворах, зато он позволяет определить коэффициенты не только у окислителя и восстановителя, но и вещества, определяющего среду раствора (кислота, щёлочь, вода), и более удобен для тех реакций, где участвуют органические молекулы. От метода электронного баланса он отличается тем, что окисление и восстановление записывают не для отдельных атомов, а для частиц, реально присуствующих в растворе: катионов, анионов, молекул. Сильные электролиты записываются в виде ионов, слабые электролиты, газы, нерастворимые вещества – в виде молекул. Для материального баланса по кислороду и водороду используются ионы H^+ или OH^- и молекулы воды. При использовании этого метода, кроме алгоритма составления полуреакций, необходимо придерживаться нескольких правил:

1. В кислой среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов OH^- . Уравнивание осуществляется за счет ионов H^+ и молекул воды.
2. В щелочной среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов H^+. Уравнивание осуществляется за счет ионов OH^- и молекул воды.
3. В нейтральной среде ни ионов H^+, ни OH^-в левой части быть не должно. Однако в правой части среди продуктов реакции они могут появиться.

Алгоритм подбора коэффициентов в уравнениях ОВР методом ионно-электронного баланса:

1. Составить молекулярную схему реакции с указанием исходных веществ и продуктов реакции.

2. Составить полную ионно-молекулярную схему реакции, записывая слабые электролиты, малорастворимые, нерастворимые и газообразные вещества в молекулярном виде, а сильные электролиты – в ионном.

3. Исключив из ионно-молекулярной схемы ионы, не изменяющиеся в результате реакции (без учета их количества), переписать схему в кратком ионно-молекулярном виде.

4. Отметить элементы, изменяющие в результате реакции степень окисления; найти окислитель, восстановитель, продукты восстановления, окисления.

5. Составить схемы полуреакций окисления и восстановления, для этого:

а) указать восстановитель и продукт окисления, окислитель и продукт восстановления;

б) уравнять число атомов каждого элемента в левой и правой частях полуреакций (выполнить баланс по элементам) в последовательности: элемент, изменяющий степень окисления, кислород, другие элементы; при этом следует помнить, что в водных растворах в реакциях могут участвовать молекулы H_2O, ионы H^+ или OH^- в зависимости от характера среды:

Процесс	Кислая среда	Нейтральная среда	Щелочная среда
Связывание избытка кислорода	$O^{-2}+2H^+ =H_2O$	$O^{-2}+H_2O=2OH^-$	$O^{-2}+H_2O=2OH^-$
Восполнение недостатка кислорода	$H_2O= O^{-2}+2H^+$	$H_2O = O^{-2}+2H^+$	$2OH^-=O^{-2}+H_2O$

в) уравнять суммарное число зарядов в обеих частях полуреакций; для этого прибавить или отнять в левой части полуреакций необходимое число электронов (баланс по зарядам).

6. Найти наименьшее общее кратное (НОК) для числа отданных и полученных электронов.

7. Найти основные коэффициенты при каждой полуреакции. Для этого полученное в п.6 число (НОК) разделить на число электронов, фигурирующих в данной полуреакции.

8. Умножить полуреакции на полученные основные коэффициенты, сложить их между собой: левую часть с левой, правую – с правой (получить ионно-молекулярное уравнение реакции). При необходимости "привести подобные" ионы с учетом взаимодействия между ионами водорода и гидроксид-ионами: $H^+ + OH^- = H_2O$.

9. Расставить коэффициенты в молекулярном уравнении реакции.

10. Провести проверку по частицам, не участвующим в ОВР, исключенным из полной ионно-молекулярной схемы (п.3). При необходимости коэффициенты для них находят подбором.

11. Провести окончательную проверку по кислороду.

Пример 3. В кислой среде:

$K_2Cr_2O_7 + KJ + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + J_2 + H_2O + K_2SO_4$

$3 \quad 2J^- - 2\bar{e} = J_2$

$1 \quad Cr_2O_7^{2-} + 6\bar{e} + 14H^+ = 2Cr^{+3} + 7H_2O$

Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$K_2Cr_2O_7 + 6KJ + 7H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + 3J_2 + 7H_2O + 4K_2SO_4$

Пример 4. В щелочной среде:

$KCrO_2 + KClO_4 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KCl + H_2O$

$8 \quad CrO_2^- - 3\bar{e} + 4OH^- \rightarrow CrO_4^{2-} + 2H_2O$

$3 \quad ClO_4^- + 8\bar{e} + 4H_2O \rightarrow Cl^- + 8OH^-$

Суммарное молекулярное уравнение реакции

$8KCrO_2 + 3KClO_4 + 8KOH \rightarrow 8K_2CrO_4 + 3KCl + 4H_2O$

Пример 5. В нейтральной среде:

$KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$

$3 \quad Mn - 2\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4H^+$

$2 \quad MnO_4 + 3\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4OH^-$

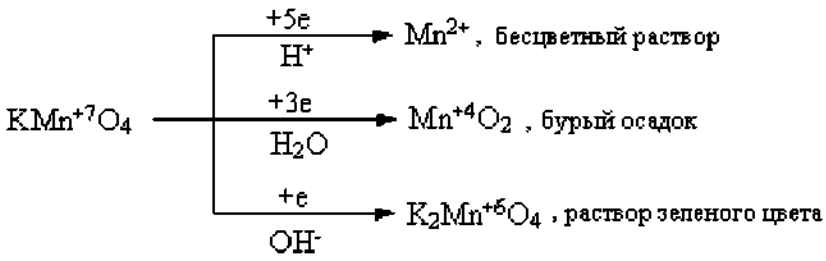
Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$2KMnO_4 + 3MnSO_4 + 2H_2O = 5MnO_2 + K_2SO_4 + 2H_2SO_4$

Примеры некоторых часто используемых ОВР:

1) Окислительно-восстановительные реакции с участием перманганата калия

В зависимости от среды (кислая, нейтральная, щелочная) перманганат калия, выступая в качестве окислителя, дает различные продукты восстановления:



Ниже приведены реакции $KMnO_4$ с сульфидом калия в качестве восстановителя в различных средах В этих реакциях продуктом окисления сульфид-иона является свободная сера. В щелочной среде молекулы КОН не принимают участие в реакции, а лишь определяют продукт восстановления перманганата калия.

$$5\ K_2S + 2\ KMnO_4 + 8\ H_2SO_4 = 5\ S\downarrow + 2\ MnSO_4 + 6\ K_2SO_4 + 8\ H_2O,$$

$$3\ K_2S + 2\ KMnO_4 + 4\ H_2O \rightarrow 2\ MnO_2\downarrow + 3\ S\downarrow + 8\ KOH,$$

$$K_2S + 2\ KMnO_4 \xrightarrow{-(KOH)} 2\ K_2MnO_4 + S\downarrow.$$

2) Окислительно-восстановительные реакции с участием дихромата калия

В кислой среде дихромат калия является сильным окислителем. Смесь $K_2Cr_2O_7$ и концентрированной H_2SO_4 (хромпик, хромовая смесь) широко используется в лабораторной практике в качестве окислителя. Взаимодействуя с восстановителем одна молекула дихромата калия принимает шесть электронов, образуя соединения трехвалентного хрома:

$$6\ FeSO_4 + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 = 3\ Fe_2(SO_4)_3 + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 7\ H_2O;$$

$$6\ KI + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 = 3\ I_2\downarrow + Cr_2(SO_4)_3 + 4\ K_2SO_4 + 7\ H_2O.$$

3) Окислительно-восстановительные реакции с участием пероксида водорода

Пероксид водорода и нитрит калия проявляют преимущественно окислительные свойства:

$$H_2S + H_2O_2 = S\downarrow + 2\ H_2O,$$

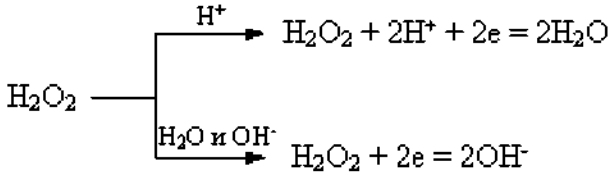
$$2\ KI + 2\ KNO_2 + 2\ H_2SO_4 = I_2\downarrow + 2\ K_2SO_4 + H_2O,$$

Однако, при взаимодействии с сильными окислителями (такими как, например, $KMnO_4$), пероксид водорода и нитрит калия выступают в качестве восстановитеей:

$$5\ H_2O_2 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 = 5\ O_2 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 8\ H_2O,$$

$$5\ KNO_2 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 = 5\ KNO_3 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 3\ H_2O.$$

Пероксид водорода в зависимости от среды восстанавливается по-разному:



При этом в результате реакций образуется вода или гидроксид-ионы:

$$2\ FeSO_4 + H_2O_2 + H_2SO_4 = Fe_2(SO_4)_3 + 2\ H_2O,$$

$$2\ KI + H_2O_2 = I_2\downarrow + 2\ KOH.$$

Задания для самостоятельной работы

Расставьте коэффициенты уравнениях методом полуреакций. Укажите окислитель и восстановитель.

Вариант 1.

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $Br_2 + KOH \rightarrow KBr + KBrO_3 + H_2O$

3) $K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 + H_2O_2 \rightarrow O_2\uparrow + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$

4) $C_3H_6 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + C_2H_6(OH)_2 + KOH$

Вариант 2

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + S\downarrow + H_2O$

2) $S + KOH \rightarrow K_2S + K_2SO_3 + H_2O.$

3) $BaS + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + S\downarrow + NO_2\uparrow + H_2O$

4) $CH_2{=}C(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3(CO)CH_3 + H_2O + CO_2\uparrow$

Вариант 3

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + H_2S\uparrow + H_2O$

2) $NO_2 + NaOH \rightarrow NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O$

3) $CrCl_3 + Cl_2 + H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + HCl$

4) $CH_3C{=}C(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3(CO)CH_3 + H_2O + CH_3COOH$

Вариант 4

1) $Al + H_2SO_{4(конц., гор.)} \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2S\uparrow + H_2O$

2) $AuCl_3 + H_2O_2 + KOH \rightarrow Au + H_2O + O_2\uparrow + KCl$

3) $KMnO_4 + Fe(OH)_2 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + Fe(OH)_3\downarrow + KOH$

4) $C_5H_{10} + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O + C_2H_5COOH + CH_3COOH$

Вариант 5

1) $Ag + H_2SO_{4(конц., гор.)} \rightarrow Ag_2SO_4\downarrow + SO_2\uparrow + 2H_2O$

2) $NH_4HS + HNO_{3(конц.)} \rightarrow S\downarrow + 2NO_2\uparrow + NH_4NO_3 + 2H_2O$

3) $MnSO_4 + H_2O_2 + KOH \rightarrow MnO_2\downarrow + K_2SO_4 + H_2O$

4) $C_6H_{12} + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O + C_2H_5COOH$

Вариант 6

1) $Bi + H_2SO_4 \rightarrow Bi_2(SO_4)_3 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $CuS + HNO_3 \rightarrow NO_2\uparrow + CuSO_4 + H_2O$

3) $C + H_2SO_{4(конц.)} + K_2Cr_2O_{7(конц.)} \rightarrow CO_2\uparrow + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$

4) $HCOH + NaOH + I_2 \rightarrow HCOONa + NaI + H_2O$

Вариант 7

1) $Ag + HNO_{3(разб.)} \rightarrow AgNO_3 + NO\uparrow + H_2O$

2) $Cr_2(SO_4)_3 + Br_2 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KBr + K_2SO_4 + H_2O$

3) $Br_2 + S + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + HBr$

4) $CH_3C{\equiv}CCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3COOH + H_2O$

Вариант 8

1) $Ba + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + N_2O\uparrow + H_2O$

2) $MnO_2 + HCl \rightarrow MnCl_2 + H_2O + Cl_2\uparrow$

3) $As_2O_3 + NaOH + NaNO_3 \rightarrow Na_3AsO_4 + NaNO_2 + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + KMnO_4 \rightarrow C_6H_5COOK + KOH + MnO_2\downarrow + H_2O$

Вариант -9

1) $Be + HNO_{3(разб., гор.)} \rightarrow Be(NO_3)_2 + NO\uparrow + H_2O$

2) $P + H_2SO_4 \rightarrow H_3PO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $Bi(NO_3)_3 + NaClO + NaOH_{(конц.)} \rightarrow NaBiO_3\downarrow + NaNO_3 + NaCl + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}C_2H_5 + KMnO_4 \rightarrow C_6H_5COOK + K_2CO_3 + MnO_2 + H_2O$

Вариант 10

1) $Cd + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Cd(NO_3)_2 + NO_2\uparrow + 2H_2O$

2) $AlBr_{3(тверд.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + Br_2 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $AsH_3 + NaOH_{(разб.)} + NaClO \rightarrow Na_3AsO_4 + NaCl + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O$

Вариант 11

1) $Ca + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Ca(NO_3)_2 + N_2O\uparrow + H_2O$

2) $NH_4I_{(тверд.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow I_2\downarrow + H_2S\uparrow + H_2O + NH_4HSO_4$

3) $Bi(OH)_3 + KOH_{(конц.)} + KMnO_4 \rightarrow KBiO_3\downarrow + K_2MnO_4 + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O + CO_2\uparrow$

Вариант 12

1) $Ba + HNO_{3(оч.\ разб.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + NH_4NO_3 + H_2O$

2) $Au_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Au\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $HBrO_3 + H_2O + S \rightarrow HBr + H_2SO_4$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + K_2Cr_2O_4 + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O$

Вариант 13

1) $Bi + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Bi(NO_3)_3 + NO\uparrow + H_2O$

2) $PbO_2 + HCl \rightarrow PbCl_2 + Cl_2 + H_2O$

3) $AsH_3 + H_2O + AgNO_3 \rightarrow As_2O_3\downarrow + Ag\downarrow + HNO_3$

4) $CH_3{\equiv}CCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3COOH + H_2O + CO_2$

Вариант 14

1) $Cd + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Cd(NO_3)_2 + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $C_2N_2 + KOH \rightarrow KCN + KCNO + H_2O$

3) $H_2SO_3 + I_2 + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + HI$

4) $C_4H_8 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O + C_2H_5COOH$

Вариант 15

1) $Cu + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $AlP + HNO_{3(конц.,\ гор.)} \rightarrow Al(NO_3)_3 + H_3PO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $Br_2 + SO_2 + H_2O \rightarrow HBr + H_2SO_4$

4) $C_2H_4 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O$

Вариант 16

1) $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + NO + H_2O$

2) $H_2Cr_2O_7 + H_2O_2 \rightarrow H_2CrO_6 + H_2O.$

3) $Si + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2\uparrow$

4) $C_2H_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O$

Вариант 17

1) $As + H_2SO_{4(конц.,\ гор.)} \rightarrow As_2O_3\downarrow + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $B_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow H_3BO_3\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $SiH_4 + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2\uparrow$

4) $C_6H_5\text{-}CH(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + C_6H_5COOK + K_2CO_3 + KOH$

Вариант 18

1) $Fe + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow Fe_2(SO_4)_3 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $I_2 + H_2O_2 \rightarrow HIO_3 + H_2O$

3) $B + KOH + H_2O \rightarrow KBO_2 + H_2\uparrow$

4) $C_3H_4 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_2(COOH)_2 + H_2O$

Вариант 19

1) $As + HNO_{3(конц.)} \rightarrow H_3AsO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $K_2C_2O_4 + H_2SO_4 \rightarrow KHSO_4 + CO\uparrow + CO_2\uparrow + H_2O$

3) $Pb(CH_3COOH)_2 + CaOCl_2 + H_2O \rightarrow PbO_2\downarrow + CaCl_2 + CH_3COOH$

4) $CH_3COCH_3 + I_2 + NaOH \rightarrow CHI_3 + CH_3COONa + NaI + H_2O$

Вариант 20

1) $C + HNO_{3(конц., гор.)} \rightarrow CO_2\uparrow + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $HBr_{(конц.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow Br_2 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $AgNO_3 + NaOH + H_2O_2 \rightarrow Ag\downarrow + NaNO_3 + H_2O + O_2\uparrow$

4) $KMnO_4 + (COOH)_2 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + CO_2\uparrow + K_2SO_4 + H_2O$

Дополнительные уравнения

1. $Au_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Au\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$
2. $As_2S_3 + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow As_2O_3\downarrow + SO_2\uparrow + H_2O$
3. $HNO_3 + Cu_2S \rightarrow NO_2\uparrow + H_2O + CuSO_4 + Cu(NO_3)_2$
4. $SiC + NaOH + O_2 \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2O + Na_2CO_3$
5. $Bi(NO_3)_3 + Na_2O_2 + NaOH \rightarrow NaBiO_3 + NaNO_2 + H_2O + O_2$
6. $AgCN + HNO_{3(конц., гор.)} \rightarrow AgNO_3 + NO_2\uparrow + NH_4NO_3 + CO_2\uparrow$
7. $Al + NaOH + 6H_2O \rightarrow Na[Al(OH)_4] + H_2$
8. $Au + HCl + HNO_3 \rightarrow H[AuCl_4] + NO + H_2O$
9. $[Co(H_2O)_6]^{2+} + NH_3 + O_2 + H^+ \rightarrow [Co(NH_3)_6]^{3+} + H_2O.$
10. $Au + NaCN + H_2O + O_2 \rightarrow Na[Au(CN)_2] + NaOH$
11. $Pt + HNO_3 + HCl \rightarrow H_2[PtCl_6] + NO + H_2O$
12. $Na[Au(CN)_2] + Zn \rightarrow Na_2[Zn(CN)_4] + Au$
13. $Fe + C_6H_5COONa + H_2O + O_2 \rightarrow [Fe(C_6H_5COOH)_6](OH)_3 + NaOH$

Направление протекания окислительно-восстановительных реакций

Направление протекания ОВР в водном растворе устанавливается в стандартных условиях по значениям **стандартных потенциалов** φ° полуреакций восстановления:

Окисленная форма + ne^- → Восстановленная форма

Окислительно-восстановительные реакции протекают самопроизвольно, если разность стандартных электродных потенциалов окислителя и восстановителя, или э.д.с. окислительно-восстановительной реакции $\Delta E > 0$.

Стандартные условия протекания реакции: температура 298,15 К, давление в системе при отсутствии газообразных реагентов или продуктов 1 атмосфера (101325 Па), парциальное давление каждого газообразного реагента или продукта при их наличии 1 атмосфера. Стандартная концентрация каждой окисленной и восстановленной формы в растворе 1 моль/л. Стандартные потенциалы измеряют по отношению к стандартному водородному электроду, потенциал которого условно принят равным нулю.

Если значение φ° для окислительно-восстановительной пары, отрицательное, например

$Zn^{2+} + 2\,e^- \rightarrow Zn$; φ° = – 0,763 В

то реакция, в которой Zn^{2+} – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется отрицательным значением разности стандартных потенциалов соответствующих пар.

$Zn^{2+} + H_{2(г)} \rightarrow Zn + 2\,H^+_{(р)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = -0{,}763 - (0) = -0{,}763$ В.

Направление ОВР определяет окислитель, у которого значение электродного потенциала больше. На практике самопроизвольно осуществляется обратный процесс: $Zn + 2\,H^+_{(р)} \rightarrow Zn^{2+} + H_{2(г)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = 0 - (-0{,}763) = +0{,}763$ В

Для положительных значений φ°, например пары Cu^{2+} / Cu

$Cu^{2+} + 2\,e^- = Cu$; φ° = + 0,338 В

реакция

$Cu^{2+} + H_{2(г)} = Cu + 2\,H^+_{(р)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = +0{,}338 - (0) = +0{,}338$ В

где 2 $H^+_{(р)}$ – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется положительным значением разности потенциалов, и может протекать самопроизвольно.

Пример 1. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции

$2NaCl + Fe_2(SO_4)_3 \leftrightarrow 2FeSO_4 + Cl_2 + Na_2SO_4$

Запишем уравнения электронного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции :

$Cl_2 + 2e^- = 2Cl^-$, $\varphi_1^\circ = 1{,}36$ В;

$Fe^{3+} + e^- = Fe^{2+}$, $\varphi_2^\circ = 0{,}77$ В .

Поскольку $\varphi_1^\circ > \varphi_2^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем - ион Fe^{2+}; рассматриваемая реакция будет протекать так:

$2FeSO_4 + Cl_2 + Na_2SO_4 \rightarrow 2NaCl + Fe_2(SO_4)_3$

Пример 2. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции

$K_2Cr_2O_7 + 14HCl \leftrightarrow 2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O$

Запишем уравнения электронно-ионного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции:

$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$ $\varphi^o_1 = +1{,}33$ В

$Cl_2 + 2e = 2Cl^-$ $\varphi^o_2 = +1{,}36$ В

Поскольку $\varphi_2^\circ > \varphi_1^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – бихромат-ион; рассматриваемая реакция будет протекать так::

$2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + 14HCl$

В примере 1 стандартные электродные потенциалы взаимодействующих электрохимических систем существенно различались, так что направление протекания процесса однозначно определялось значениями φ° при любых концентрациях реагирующих веществ. В тех случаях, когда сравниваемые

значения φ° близки (разность не более 0,3 В), направление протекания процесса может изменяться в зависимости от концентраций участников реакции (пример 2).

Величина окислительно-восстановительного потенциала в условиях, отличающихся от стандартных, определяется уравнением Нернста:

$$\varphi = \varphi^{\theta} + \frac{RT}{nF} \cdot \ln \frac{[Ox]}{[\mathrm{Re}\, d]},$$

где φ – окислительно-восстановительный потенциал в данных условиях, В;

φ^{θ} – стандартный окислительно-восстановительный потенциал, В;

R – универсальная газовая постоянная (8.314 Дж/(моль·К));

T – абсолютная температура, K;

n – число электронов, принимающих участие в потенциалопределяющей полуреакции;

F – постоянная Фарадея (F = 96484.56 Кл/моль);

[Ox]– концентрация окисленной формы ионов;

[Red]– концентрация восстановленной формы ионов.

Концентрация твердой фазы принимается за единицу.

Для стандартной температуры 298 К и с переходом от натурального логарифма к десятичному уравнение Нернста будет иметь вид

$$\varphi = \varphi^{\theta} + \frac{0{,}059}{n} \cdot \lg \frac{[Ox]}{[\mathrm{Re}\, d]},$$

Пример 3. Определить направление возможного самопроизвольного протекания реакции

$$2Hg + 2Ag^{+} \leftrightarrow 2Ag + Hg_2^{2+}$$

при стандартной температуре и следующих концентрациях ионов:

а) $[Ag^{+}] = 10^{-4}$ моль/л , $[Hg_2^{2+}] = 10^{-1}$моль/л;

б) $[Ag^{+}] = 10^{-1}$моль/л , $[Hg_2^{2+}] = 10^{-4}$моль/л.

Выпишем значения стандартных электродных потенциалов взаимодействующих электрохимических систем:

$Hg_2^{2+} + 2e^{-} = 2Hg$, $\varphi_1^{\circ} = 0{,}79$ В;

$Ag^{+} + e^{-} = Ag$, $\varphi_2^{\circ} = 0{,}80$ В.

По уравнению Нернста вычислим значения электродных потенциалов при указанных в условиях задачи концентрациях.

а) $\varphi_1 = \varphi_1^\circ + 0{,}059/2 \cdot \lg [Hg_2^{2+}] = 0{,}79 + 0{,}030 \lg 10^{-1} = 0{,}79 - 0{,}03 = 0{,}76$ В;

$\varphi_2 = \varphi_2^\circ + 0{,}059 \cdot \lg [Ag^+] = 0{,}80 + 0{,}059 \lg 10^{-4} = 0{,}80 - 0{,}24 = 0{,}56$ В.

В данном случае $\varphi_1 > \varphi_2$, реакция будет протекать справа налево.

б) $\varphi_1 = 0{,}79 + 0{,}030 \cdot \lg 10^{-4} = 0{,}79 - 0{,}12 = 0{,}67$ В;

$\varphi_2 = 0{,}80 + 0{,}059 \cdot \lg 10^{-1} = 0{,}80 - 0{,}06 = 0{,}74$ В.

Теперь $\varphi_1 < \varphi_2$, и реакция протекает слева направо.

Зависимость окислительной способности некоторых веществ от кислотности среды так же определяется уравнением Нернста. Например, для полуреакции

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e \rightarrow Mn^{2+} + 4\,H_2O$$

окислительно-восстановительный потенциал можно вычислить по формуле

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0{,}059}{5} \cdot \lg \frac{[MnO_4^-] \cdot [H^+]^8}{[Mn^{2+}]}, \text{ или}$$

$$\varphi = 1{,}507 + 0{,}012 \cdot \lg \frac{[MnO_4^-]}{[Mn^{2+}]} - 0{,}095 pH$$

Потенциалы процесса зависит от pH среды и будет тем больше, чем кислее раствор. Зависимость окислительного потенциала $KMnO_4$ от концентрации ионов водорода пользуются для фракционного окисления анионов галогенидов до свободных галогенов. При pH от 5 до 6 перманганат окисляет только йодиды до йода (не действуя на бромиды и хлориды), при pH = 3 окисляются бромиды, и только при значительно более высокой кислотности окисляются хлориды.

Задания для самостоятельной работы

Обоснуйте возможность самопроизвольного протекания реакций №1 вашего варианта на стр. 16-19, используя Приложение.

Приложение

Таблица 1

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E^0	Элемент	Реакция	E^0
Ag	α -$Ag_2S + 2\bar{e} = 2Ag + S^{2-}$	-0,70	B	$BF_4^- + 3e = B + 4F^-$	-1,04
	$Ag(CN)_2^- + \bar{e} = Ag + 2CN^-$	-0,29		$H_3BO_3 + 3H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,869
	$AgI + \bar{e} = Ag + I^-$	-0,152		$BO_3^{3-} + 6H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,165
	$AgCN + \bar{e} = Ag + CN^-$	-0,04	Ba	$Ba^{2+} + 2e = Ba$	-2,905
	$Ag(S_2O_3)_2^{3-} + \bar{e} = Ag + 2S_2O_3^{2-}$	0,01	Be	$Be^{2+} + 2e = Be$	-1,847
	$AgBr + \bar{e} = Ag + Br^-$	0,071		$Be(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-1,820
	$AgCl + \bar{e} = Ag + Cl^-$	0,222		$BeO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-0,909
	$Ag_2O + H_2O + 2\bar{e} = 2Ag + 2OH^-$	0,344	Bi	$Bi_2O_3 + 3H_2O + 6e = 2Bi + 6OH^-$	-0,46
	$Ag(NH_3)_2^+ + \bar{e} = Ag + 2NH_3$	0,373		$BiOCl + 2H^+ + 3e = Bi + Cl^- + H_2O$	0,16
	$Ag_2CrO_4 + 2\bar{e} = 2Ag + CrO_4^{2-}$	0,446		$Bi^{3+} + 3e = Bi$	0,215
	$Ag_2C_2O_4 + 2\bar{e} = 2Ag + C_2O_4^{2-}$	0,472		$BiO^+ + 2H^+ + 3e = Bi + H_2O$	0,32
	$AgBrO_3 + \bar{e} = Ag + BrO_3^-$	0,55		$Bi_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Bi + 3H_2O$	0,371
	$2AgO + H_2O + 2\bar{e} = Ag_2O + 2OH^-$	0,60		$NaBiO_3(т) + 6H^+ + 2e = Bi^{3+} + Na^+ + 3H_2O$	1,6 - 1,808
	$Ag^+ + \bar{e} = Ag$	0,799	Br	$2BrO^- + 2H_2O + 2e = Br_2 + 4OH^-$	0,45
	$Ag_2O + 2H^+ + 2\bar{e} = 2Ag + H_2O$	1,173		$2BrO_3^- + 6H_2O + 10e = Br_2 + 12OH^-$	0,50
	$2AgO + 2H^+ + 2\bar{e} = Ag_2O + H_2O$	1,398		$BrO_3^- + 2H_2O + 4e = BrO^- + 4OH^-$	0,54
Al	$AlO_2^- + 2H_2O + 3\bar{e} = Al + 4OH^-$	-2,35		$BrO_3^- + 3H_2O + 6e = Br^- + 6OH^-$	0,61
	$Al(OH)_3 + 3\bar{e} = Al + 3OH^-$	-2,31		$BrO^- + H_2O + 2e = Br^- + 2OH^-$	0,76
	$AlF_6^{3-} + 3\bar{e} = Al + 6F^-$	-2,07		$Br_3^- + 2e = 3Br^-$	1,05
	$Al^{3+} + 3e = Al$	-1,663		$Br_2(ж) + 2e = 2Br^-$	1,065
	$Al(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Al + 3H_2O$	-1,471		$BrO_3^- + 6H^+ + 6e = Br^- + 3H_2O$	1,44
	$AlO_2^- + 4H^+ + 3e = Al + 2H_2O$	-1,262		$2BrO_3^- + 12H^+ + 10e = Br_2 + 6H_2O$	1,52
As	$As + 3H^+ + 3e = AsH_3$	-0,60		$2HBrO + 2H^+ + 2e = Br_2 + 2H_2O$	1,59
	$HAsO_2 + 3H^+ + 3e = As + 2H_2O$	0,248	C	$HCOO^- + 2H_2O + 2e = HCHO + 3OH^-$	-1,07
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = HAsO_2 + 2H_2O$	0,559		$2CO_2 + 2H^+ + 2e = H_2C_2O_4$	-0,49
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = H_3AsO_3 + H_2O$	0,58		$CO_2 + 2H^+ + 2e = HCOOH$	-0,20
Au	$Au(CN)_2^- + e = Au + 2CN^-$	-0,61		$C(графит) + 4H^+ + 4e = CH_4$	-0,132
	$AuBr_4^- + 2e = AuBr_2^- + 2Br^-$	0,802		$CO_2 + 2H^+ + 2e = CO + H_2O$	-0,12
	$AuCl_4^- + 2e = AuCl_2^- + 2\ Cl^-$	0,926		$HCOOH + 2H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	-0,01
	$AuBr_2^- + e = Au + 2Br^-$	0,959		$HCOOH + 4H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,145
	$AuCl_2^- + 2e = Au + 2Cl^-$	1,15		$HCOO^- + 3H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	0,167
	$Au^{3+} + 2e = Au^+$	1,401		$CH_3CHO + 2H^+ + 2e = C_2H_5OH$	0,19
	$Au^{3+} + 3e = Au$	1,498		$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = HCHO + 2H_2O$	0,197
	$Au^+ + 3e = Au$	1,692		$HCOO^- + 5H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,199
Элемент	Реакция	E^0	Элемент	Реакция	E^0

C	$CO_3^{2-} + 8H^+ + 6e = CH_3OH + 2H_2O$	0,209	Co	$Co(OH)_2 + 2e = Co + 2OH^-$	-0,73
	$CO_3^{2-} + 3H^+ + 2e = HCOO^- + H_2O$	0,227		$CoCO_3 + 2e = Co + CO_3^{2-}$	-0,64
	$HCHO + 2H^+ + 2e = CH_3OH$	0,232		$Co(NH_3)_6^{2+} + 2e = Co + 6NH_3$	-0,42
	$2CO_3^{2-} + 4H^+ + 2e = C_2O_4^{2-} + 2H_2O$	0,441		$Co^{2+} + 2e = Co$	-0,277
	$C_2H_5OH + 2H^+ + 2e = C_2H_6 + H_2O$	0,46		$Co(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Co + 2H_2O$	0,095
	$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = C(\text{графит}) + 3H_2O$	0,475		$Co(NH_3)_6^{3+} + e = Co(NH_3)_6^{2+}$	0,1
	$CO + 6H^+ + 6e = CH_4 + H_2O$	0,497		$CoO + 2H^+ + 2e = Co + H_2O$	0,166
	$CH_3OH + 2H^+ + 2e = CH_4 + H_2O$	0,59		$Co(OH)_3 + e = Co(OH)_2 + OH^-$	0,17
Ca	$Ca^{2+} + 2e = Ca$	-2,866		$Co^{3+} + 3e = Co$	0,33
Cd	$CdS + 2e = Cd + S^{2-}$	-1,175		$Co^{3+} + e = Co^{2+}$	1,38 - 1,842
	$Cd(CN)_4^{2-} + 2e = Cd + 4CN^-$	-1,09	Cr	$Cr(OH)_2 + 2e = Cr + 2OH^-$	-1,4
	$Cd(OH)_2 + 2e = Cd + 2OH^-$	-0,81		$Cr(OH)_3 + 3e = Cr + 3OH^-$	-1,3
	$Cd(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cd + 4NH_3$	-0,61		$CrO_2^- + 2H_2O + 3e = Cr + 4OH^-$	-1,2
	$Cd^{2+} + 2e = Cd$	-0,403		$Cr^{2+} + 2e = Cr$	-0,913
	$Cd(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cd + 2H_2O$	0,005		$Cr^{3+} + 3e = Cr$	-0,744
	$CdO + 2H^+ + 2e = Cd + H_2O$	0,063		$Cr(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Cr + 3H_2O$	-0,654
Ce	$Ce^{3+} + 3e = Ce$	-2,48		$Cr^{3+} + e = Cr^{2+}$	-0,407
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M H_2SO_4)	1,44		$CrO_4^{2-} + 4H_2O + 3e = Cr(OH)_3 + 5OH^-$	-0,13
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M HNO_3)	1,61		$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 12e = 2Cr + 7H_2O$	0,294
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M $HClO_4$)	1,70		$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Cr + 4H_2O$	0,366
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$	1,77		$CrO_4^{2-} + 4H^+ + 3e = CrO_2^- + 2H_2O$	0,945
Cl	$ClO_4^- + H_2O + 2e = ClO_3^- + 2OH^-$	0,36		$CrO_2^- + 4H^+ + e = Cr^{2+} + 2H_2O$	1,188
	$2ClO^- + 2H_2O + 2e = Cl_2 + 4OH^-$	0,40		$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$	1,333
	$ClO_4^- + H_2O + 8e = Cl^- + 8OH^-$	0,56		$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 3e = Cr^{3+} + 4H_2O$	1,477
	$ClO_3^- + 3H_2O + 6e = Cl^- + 6OH^-$	0,63	Cs	$Cs^+ + e = Cs$	-2,923
	$ClO_2 + 2H_2O + 5e = Cl^- + 4OH^-$	0,85	Cu	$Cu_2S + 2e = 2Cu + S^{2-}$	-0,89
	$ClO^- + H_2O + 2e = Cl^- + 2OH^-$	0,88		$CuS + 2e = Cu + S^{2-}$	-0,71
	$ClO_3^- + 2H^+ + e = ClO_2 + H_2O$	1,15		$Cu(CN)_2^- + e = Cu + 2CN^-$	-0,43
	$ClO_4^- + 2H^+ + 2e = ClO_3^- + H_2O$	1,189		$Cu_2O + H_2O + 2e = 2Cu + 2OH^-$	-0,36
	$ClO_2 + 4H^+ + 4e = 2HCl + H_2O$	1,351		$Cu(OH)_2 + 2e = Cu + 2OH^-$	-0,22
	$Cl_2 + 2e = 2Cl^-$	1,3595		$CuI + e = Cu + I^-$	-0,185
	$ClO_4^- + 8H^+ + 8e = Cl^- + 4H_2O$	1,38		$Cu(NH_3)_2^+ + e = Cu + 2NH_3$	-0,12
	$2ClO_4^- + 16H^+ + 14e = Cl_2 + 8H_2O$	1,39		$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu + 4NH_3$	-0,07
	$ClO_2 + 5H^+ + 5e = HCl + 2H_2O$	1,436		$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu(NH_3)_2^+ + 2NH_3$	-0,01
	$ClO_3^- + 6H^+ + 6e = Cl^- + 3H_2O$	1,451		$CuI_2^- + e = Cu + 2I^-$	0,00
	$2ClO_3^- + 12H^+ + 10e = Cl_2 + 6H_2O$	1,47		$CuBr + e = Cu + Br^-$	0,03
	$HClO + H^+ + 2e = Cl^- + H_2O$	1,494		$CuCl + e = Cu + Cl^-$	0,137
	$ClO_2 + 4H^+ + 5e = Cl^- + 2H_2O$	1,51		$Cu^{2+} + e = Cu^+$	0,153
	$2ClO_2 + 8H^+ + 8e = Cl_2 + 4H_2O$	1,549		$CuCl_2^- + e = Cu + 2Cl^-$	0,177
	$HClO_2 + 3H^+ + 4e = Cl^- + 2H_2O$	1,57		$2Cu^{2+} + H_2O + 2e = Cu_2O + 2H^+$	0,203
	$2HClO + 2H^+ + 2e = Cl_2 + 2H_2O$	1,63		$Cu^{2+} + 2e = Cu$	0,345
	$2HClO_2 + 6H^+ + 6e = Cl_2 + 4H_2O$	1,64		$Cu^{2+} + 2Cl^- + e = CuCl_2^-$	0,463
Co	β -$CoS + 2e = Co + S^{2-}$	-1,07		$Cu^+ + e = Cu$	0,520
	α -$CoS + 2e = Co + S^{2-}$	-0,90		$Cu^{2+} + Cl^- + e = CuCl$	0,538
Cu	$CuO + 2H^+ + 2e = Cu + H_2O$	0,570	Hg	$HgBr_4^{2-} + 2e = Hg + 4Br^-$	0,21

	$Cu(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cu + 2H_2O$	0,609		$Hg_2Cl_2 + 2K^+ + 2e = 2Hg + 2KCl$ (тв)	0,2415
	$Cu^{2+} + Br^- + e = CuBr$	0,640		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$	0,268
	$2CuO + 2H^+ + 2e = Cu_2O + H_2O$	0,669		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$ (1M KCl)	0,28
	$Cu^{2+} + I^- + e = CuI$	0,86		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$ (0,1M KCl)	0,334
	$Cu^{2+} + 2CN^- + e = Cu(CN)_2$	1,12		$HgCl_4^{2-} + 2e = Hg + 4Cl^-$	0,48
Dy	$Dy^{3+} + 3e = Dy$	-2,353		$Hg_2SO_4 + 2e = 2Hg + SO_4^{2-}$	0,6151
Eu	$Eu^{2+} + 2e = Eu$	-3,395		$Hg_2^{2+} + 2e = 2Hg$	0,788
	$Eu^{3+} + e = Eu^{2+}$	-0,429		$Hg^{2+} + 2e = Hg$	0,850
F	$F_2O + 2H^+ + 4e = 2F^- + H_2O$	2,1		$2Hg^{2+} + 2e = Hg_2^{2+}$	0,920
	$F_2 + 2e = 2F^-$	2,87		$HgO + 2H^+ + 2e = Hg + H_2O$	0,926
Fe	$FeS + 2e = Fe + S^{2-}$	-0,95	Ho	$Ho^{3+} + 3e = Ho$	-2,319
	$Fe(OH)_2 + 2e = Fe + 2OH^-$	-0,877	I	$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,14
	$FeCO_3 + 2e = Fe + CO_3^{2-}$	-0,756		$2IO_3^- + 6H_2O + 10e = I_2 + 12OH^-$	0,21
	$Fe(OH)_3 + e = Fe(OH)_2 + OH^-$	-0,56		$IO_3^- + 3H_2O + 6e = I^- + 6OH^-$	0,25
	$Fe^{2+} + 2e = Fe$	-0,440		$2IO^- + H_2O + 2e = I_2 + 4OH^-$	0,45
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 8e = 3Fe + 4H_2O$	-0,085		$IO^- + H_2O + 2e = I^- + 2OH^-$	0,49
	$Fe_2O_3 + H_2O + 2H^+ + 2e = 2Fe(OH)_2$	-0,057		$I_2 + 2e = 2I^-$	0,536
	$Fe_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Fe + 3H_2O$	-0,051		$I_3^- + 2e = 3I^-$	0,545
	$Fe(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Fe + 2H_2O$	-0,047		$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,56
	$Fe^{3+} + 3e = Fe$	-0,037		$HIO + H^+ + 2e = I^- + H_2O$	0,99
	$Fe(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Fe + 3H_2O$	0,059		$2ICl_2^- + 2e = I_2 + 4Cl^-$	1,06
	$Fe(OH)_3 + H^+ + e = Fe(OH)_2 + H_2O$	0,271		$IO_3^- + 6H^+ + 6e = I^- + 3H_2O$	1,085
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$	0,356		$IO_3^- + 5H^+ + 4e = HIO + 2H_2O$	1,14
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M H_2SO_4)	0,68		$2IO_3^- + 12H^+ + 10e = I_2 + 6H_2O$	1,19
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M HCl)	0,70		$2HIO + 2H^+ + 2e = I_2 + 2H_2O$	1,45
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$ (1M HCl)	0,71		$H_5IO_6 + H^+ + 2e = IO_3^- + 3H_2O$	1,60
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$	0,771	Ir	$IrO_2 + 4H^+ + 4e = Ir + H_2O$	0,93
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 2e = 3Fe^{2+} + 4H_2O$	0,980		$Ir^{3+} + 3e = Ir$	1,15
Ga	$Ga^{3+} + 3e = Ga$	-0,53	K	$K^+ + e = K$	-2,924
Gd	$Gd^{3+} + 3e = Gd$	-2,397	La	$La^{3+} + 3e = La$	-2,522
Ge	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 2e = Ge^{2+} + 3H_2O$	-0,363	Li	$Li^+ + e = Li$	-3,045
	$GeO_2 + 4H^+ + 4e = Ge + 2H_2O$	-0,15	Mg	$Mg(OH)_2 + 2e = Mg + 2OH^-$	-2,69
	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 4e = Ge + 3H_2O$	-0,13		$Mg^{2+} + 2e = Mg$	-2,363
	$Ge^{2+} + 2e = Ge$	0,000		$Mg(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mg + 2H_2O$	-1,862
H	$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$	-0,828	Mn	$MnCO_3 + 2e = Mn + CO_3^{2-}$	-1,48
	$2H^+ + 2e = H_2$	0,0000		$Mn^{2+} + 2e = Mn$	-1,18
	$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776		$Mn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mn + 2H_2O$	-0,727
Hf	$Hf^{4+} + 4e = Hf$	-1,70		$MnO_4^- + e = MnO_4^{2-}$	0,564
	$HfO_2 + 4H^+ + 4e = Hf + 2H_2O$	-1,57		$MnO_4^- + 2H_2O + 3e = MnO_2 + 4OH^-$	0,60
Hg	$HgS + 2e = Hg + S^{2-}$	-0,69		$MnO_2 + 4H^+ + 2e = Mn^{2+} + 2H_2O$	1,228
	$Hg(CN)_4^{2-} + 2e = Hg + 4CN^-$	-0,37		$Mn_2O_3 + 6H^+ + 2e = 2Mn^{2+} + 3H_2O$	1,443
	$Hg_2I_2 + 2e = 2Hg + 2I^-$	-0,041		$MnO_4^- + 8H^+ + 5e = Mn^{2+} + 4H_2O$	1,507
	$HgI_4^{2-} + 2e = Hg + 4I^-$	-0,04		$Mn^{3+} + e = Mn^{2+}$ (8M H_2SO_4)	1,509
	HgO(красная) + H_2O + 2e = Hg + $2OH^-$	0,098		$MnO_4^- + 4H^+ + 3e = MnO_2 + 2H_2O$	1,692
	$Hg_2Br_2 + 2e = 2Hg + 2Br^-$	0,140		$MnO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MnO_2 + 2H_2O$	2,257
Mo	$H_2MoO_4 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	-1,091	Nd	$Nd^{3+} + 3e = Nd$	-2,431

	$MoO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = Mo + 8OH^-$	-1,05	Ni	γ-NiS + 2e = Ni + S^{2-}	-1,04
	$Mo^{3+} + 3e = Mo$	-0,200		α-NiS + 2e = Ni + S^{2-}	-0,83
	$MoO_2 + 4H^+ + 4e = Mo + 2H_2O$	-0,072		$Ni(OH)_2 + 2e = Ni + 2OH^-$	-0,72
	$MoO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Mo + 4H_2O$	0,154		$Ni(NH_3)_6^{2+} + 2e = Ni + 6NH_3$	-0,49
	$MoO_3 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + H_2O$	0,320		$NiCO_3 + 2e = Ni + CO_3^{2-}$	-0,45
	$MoO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	0,606		$Ni^{2+} + 2e = Ni$	-0,25
N	$3N_2 + 2\bar{e} = 2N_3^-$	-3,4		$Ni(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Ni + 2H_2O$	0,110
	$3N_2 + 2H^+ + 2\bar{e} = 2HN_3$	-3,1		$NiO + 2H^+ + 2e = Ni + H_2O$	0,116
	$N_2 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_2OH + 2OH^-$	-3,04		$NiO_2 + 4H^+ + 2e = Ni^{2+} + 2H_2O$	1,68
	$N_2 + 4H_2O + 4\bar{e} = N_2H_4 + 4OH^-$	-1,16	O	$O_2 + 2H_2O + 4e = 4OH^-$	0,401
	$N_2 + 8H_2O + 6\bar{e} = 2NH_4OH + 6OH^-$	-0,74		$O_2 + 2H^+ + 2e = H_2O_2$	0,682
	$NO_2^- + H_2O + \bar{e} = NO + 2OH^-$	-0,46		$H_2O_2 + 2e = 3OH^-$	0,88
	$NO_2^- + 6H_2O + 6\bar{e} = NH_4OH + 7OH^-$	-0,15		$O_2 + 4H^+ + 4e = 2H_2O$	1,229
	$NO_3^- + 2H_2O + 3\bar{e} = NO + 4OH^-$	-0,14		$O_3 + H_2O + 3e = O_2 + 2OH^-$	1,24
	$NO_3^- + 7H_2O + 8\bar{e} = NH_4OH + 9OH^-$	-0,12		$O_3 + 6H^+ + 6e = 3H_2O$	1,511
	$NO_3^- + H_2O + 2\bar{e} = NO_2^- + 2OH^-$	0,01		$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776
	$N_2 + 6H^+ + 6\bar{e} = 2NH_3$	0,057		$O_3 + 2H^+ + 2e = O_2 + H_2O$	2,07
	$N_2H_4 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_4OH + 2OH^-$	0,1	Os	$OsO_2 + 2H_2O + 4e = Os + 4OH^-$	-0,15
	$N_2 + 8H^+ + 6\bar{e} = 2NH_4^+$	0,275		$OsCl_6^{3-} + e = Os^{2+} + 6Cl^-$	0,4
	$2NO_2^- + 4H_2O + 6\bar{e} = N_2 + 8OH^-$	0,41		$OsO_4 + 8H^+ + 8e = Os + 4H_2O$	0,85
	$NH_2OH + 2H_2O + 2\bar{e} = NH_4OH^- + 2OH^-$	0,42		$OsCl_6^{2-} + e = OsCl_6^{3-}$	0,85
	$2NO_2 + 4H_2O + 8e = N_2 + 8OH^-$	0,53		$Os^{2+} + 2e = Os$	0,85
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,78		$OsO_4 + 4H^+ + 4e = OsO_2 + 2H_2O$	0,96
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,80	P	$H_2PO_2^- + e = P + 2OH^-$	-2,05
	$2NO + 2H_2O + 4e = N_2 + 4OH^-$	0,85		$HPO_3^{2-} + 2H_2O + 2e = H_2PO_2^- + 3OH^-$	-1,57
	$HNO_2 + 7H^+ + 6e = NH_4^+ + 2H_2O$	0,864		$PO_4^{3-} + 2H_2O + 2e = HPO_3^{2-} + 3OH^-$	-1,12
	$NO_3^- + 10H^+ + 8e = NH_4^+ + 3H_2O$	0,87		$2H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_4P_2O_6 + 2H_2O$	-0,94
	$2NO_2 + 2e = 2NO_2^-$	0,88		$P + 3H_2O + 3e = PH_3 + 3OH^-$	-0,89
	$N_2O + H_2O + 2e = N_2 + 2OH^-$	0,94		$H_3PO_2 + H^+ + e = P + 2H_2O$	-0,51
	$NO_3^- + 3H^+ + 2e = HNO_2 + 2H_2O$	0,94		$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(бел) + 3H_2O$	-0,502
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,957		$H_3PO_3 + 3H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,96		$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(кр) + 3H_2O$	-0,454
	$HNO_2 + H^+ + e = NO + H_2O$	1,00		$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(бел) + 4H_2O$	-0,411
	$NO_2 + 2H^+ + 2e = NO + H_2O$	1,03		$H_3PO_4 + 4H^+ + 4e = H_3PO_2 + 2H_2O$	-0,39
	$NO_2 + H^+ + e = HNO_2$	1,09		$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(кр) + 4H_2O$	-0,383
	$2NO_3^- + 10H^+ + 8e = N_2O + 5H_2O$	1,116		$H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_3PO_3 + H_2O$	-0,276
	$2NO_3^- + 12H^+ + 10e = N_2 + 6H_2O$	1,246		$H_3PO_3 + 2H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$2HNO_2 + 4H^+ + 4e = N_2O + 3H_2O$	1,297		$P + 3H^+ + 3e = PH_3$	0,06
	$2NO_2 + 8H^+ + 8e = N_2 + 4H_2O$	1,36		$H_4P_2O_6 + 2H^+ + 2e = 2H_3PO_3$	0,38
	$2HNO_2 + 6H^+ + 6e = N_2 + 4H_2O$	1,45	Pb	$PbS + 2e = Pb + S^{2-}$	-0,93
	$2NO + 4H^+ + 4e = N_2 + 2H_2O$	1,678		$PbO + H_2O + 2e = Pb + 2OH^-$	-0,58
	$N_2O + 2H^+ + 2e = N_2 + H_2O$	1,766		$PbCO_3 + 2e = Pb + CO_3^{2-}$	-0,506
Na	$Na^+ + e = Na$	-2,714		$PbI_2 + 2e = Pb + 2I^-$	0,365
Pb	$PbSO_4 + 2e = Pb + SO_4^{2-}$	-0,3563	S	$S + 2H^+ + 2e = H_2S$	0,141

	$PbF_2 + 2e = Pb + 2F^-$	-0,350		$SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SO_3 + H_2O$	0,17
	$PbBr_2 + 2e = Pb + 2Br^-$	-0,280		$SO_3^{2-} + 6H^+ + 6e = S^{2-} + 3H_2O$	0,231
	$PbCl_2 + 2e = Pb + 2Cl^-$	-0,268		$2SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = S_2O_3^{2-} + 5H_2O$	0,29
	$Pb^{2+} + 2e = Pb$	-0,126		$SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = H_2S + 4H_2O$	0,311
	$PbO_3^{2-} + H_2O + 2e = PbO_2^{2-} + 2OH^-$	0,2		$SO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = S + 4H_2O$	0,357
	$PbO + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,248		$2H_2SO_3 + 2H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,40
	$Pb(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,277		$H_2SO_3 + 4H^+ + 4e = S + 3H_2O$	0,449
	$PbO_2 + H_2O + 2e = PbO + 2OH^-$	0,28		$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 4e = 2S + 3H_2O$	0,5
	$Pb_3O_4 + 2H^+ + 2e = 3PbO + H_2O$	0,972		$2SO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,705
	$PbO_2 + 4H^+ + 2e = Pb^{2+} + 2H_2O$	1,449-1,455		$S_2O_8^{2-} + 2e = 2SO_4^{2-}$	2,01
	$PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = PbSO_4 + 2H_2O$	1,685	Sb	$SbO_2^- + 2H_2O + 3e = Sb + 4OH^-$	-0,675
	$Pb^{4+} + 2e = Pb^{2+}$	1,694		$Sb + 3H^+ + 3e = SbH_3$	-0,51
Pd	$Pd(OH)_2 + 2e = Pd + 2OH^-$	0,07		$SbO_3^- + H_2O + 2e = SbO_2^- + 2OH^-$	-0,43
	$PdI_6^{2-} + 2e = PdI_4^{2-} + 2I^-$	0,623		$Sb_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Sb + 3H_2O$	0,152
	$PdCl_4^{2-} + 2e = Pd + 4Cl^-$	0,623		$SbO^+ + 2H^+ + 3e = Sb + H_2O$	0,212
	$PdO + 2H^+ + 2e = Pd + H_2O$	0,896		$SbO_3^- + 2H^+ + 3e = SbO_2^- + H_2O$	0,353
	$PdCl_6^{2-} + 4e = Pd + 6Cl^-$	0,96		$SbO_2^- + 4H^+ + 3e = Sb + 2H_2O$	0,446
	$Pd^{2+} + 2e = Pd$	0,987		$Sb_2O_5 + 6H^+ + 4e = 2SbO^+ + 3H_2O$	0,581
	$PdBr_6^{2-} + 2e = PdBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,993		$Sb_2O_5 + 4H^+ + 4e = Sb_2O_3 + 2H_2O$	0,671
	$PdO_2 + 2H^+ + 2e = PdO + H_2O$	1,283	Sc	$Sc^{3+} + 3e = Sc$	-2,077
	$PdCl_6^{2-} + 2e = PdCl_4^{2-} + 2Cl^-$	1,288	Se	$Se + 2e = Se^{2-}$	-0,92
Pt	$PtS + 2e = Pt + S^{2-}$	-0,95		$Se + 2H^+ + 2e = H_2Se$	-0,40
	$PtS_2 + 2e = PtS + S^{2-}$	-0,64		$SeO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Se + 6OH^-$	-0,366
	$Pt(OH)_2 + 2e = Pt + 2OH^-$	0,15		$SeO_4^{2-} + H_2O + 2e = SeO_3^{2-} + 2OH^-$	0,05
	$PtI_6^{2-} + 2e = PtI_4^{2-} + 2I^-$	0,393		$H_2SeO_3 + 4H^+ + 4e = Se + 3H_2O$	0,741
	$PtBr_4^{2-} + 2e = Pt + 4Br^-$	0,58		$SeO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SeO_3 + H_2O$	1,15
	$PtBr_6^{2-} + 2e = PtBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,59	Si	$SiO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Si + 6OH^-$	-1,7
	$PtCl_6^{2-} + 2e = PtCl_4^{2-} + 2Cl^-$	0,720		$SiF_6^{2-} + 4e = Si + 6F^-$	-1,2
	$PtCl_4^{2-} + 2e = Pt + 4Cl^-$	0,73		$SiO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = Si + 3H_2O$	-0,455
	$Pt(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pt + 2H_2O$	0,980		$Si + 4H^+ + 4e = SiH_4$	0,102
	$PtO_2 + 2H^+ + 2e = Pt(OH)_2$	1,045	Sn	$SnS + 2e = Sn + S^{2-}$	-0,94
	$Pt^{2+} + 2e = Pt$	1,188		$Sn(OH)_6^{2-} + 2e = HSnO_2^- + H_2O + 3OH^-$	-0,93
Ra	$Ra^{2+} + 2e = Ra$	-2,925		$HSnO_2^- + H_2O + 2e = Sn + 3OH^-$	-0,91
Rb	$Rb^+ + e = Rb$	-2,925		$SnF_6^{2-} + 4e = Sn + 6F^-$	-0,25
	$SO_4^{2-} + H_2O + 2e = SO_3^{2-} + 2OH^-$	-0,93		$Sn^{2+} + 2e = Sn$	-0,136
	$2SO_4^{2-} + 5H_2O + 8e = S_2O_3^{2-} + 10OH^-$	-0,76		$SnO_2 + 2H^+ + 2e = SnO + H_2O$	-0,108
	$SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S + 6OH^-$	-0,66		$SnO_2 + 4H^+ + 4e = Sn + 2H_2O$	-0,106
	$2SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S_2O_3^{2-} + 6OH^-$	-0,58		$SnO + 2H^+ + 2e = Sn + H_2O$	-0,104
	$S_2^{2-} + 2e = 2S^{2-}$	-0,524		$Sn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Sn + 2H_2O$	-0,091
S	$S + 2e = S^{2-}$	-0,48		$SnCl_6^{2-} + 2e = SnCl_4^{2+} + 2Cl^-$	0,14
	$2S + 2e = S_2^{2-}$	-0,476		$Sn^{4+} + 2e = Sn^{2+}$	0,151
	$S + H^+ + 2e = HS^-$	-0,065	Sr	$Sr^{2+} + 2e = Sr$	-2,888
	$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 8e = 2S^{2-} + 3H_2O$	-0,006	Te	$Te + 2e = Te^{2-}$	-1,14
	$S_4O_6^{2-} + 2e = 2S_2O_3^{2-}$	0,08		$Te + 2H^+ + 2e = H_2Te$	-0,72
	$SO_4^{2-} + 8H^+ + 8e = S^{2-} + 4H_2O$	0,149		$TeO_3^{2-} + 2H_2O + 4e = Te + 6OH^-$	-0,57
	$TeO_2 + 4H^+ + 4e = Te + 2H_2O$	0,529		$V^{2+} + 2e = V$	-1,175

	$TeO_4^{2-} + 2H^+ + 2e = TeO_3^{2-} + H_2O$	0,892		$V^{3+} + e = V^{2+}$	-0,255
	$H_xTeO_6 + 2H^+ + 2e = TeO_2 + 4H_2O$	1,02		$VO_2^+ + 4H^+ + 5e = V + 2H_2O$	-0,25
Ti	$Ti^{3+} + 2e = Ti$	-1,63		$VO_2^{2+} + e = VO^+$	-0,044
	$TiO + 2H^+ + 2e = Ti + H_2O$	-1,306		$VO_2^+ + 4H^+ + 3e = V^{2+} + 2H_2O$	0,360
	$TiF_6^{2-} + 4e = Ti + 6F^-$	-1,19	V	$V_2O_5 + 6H^+ + 2e = 2VO^{2+} + 3H_2O$	0,958
	$TiO_2 + 4H^+ + 4e = Ti + 2H_2O$	-0,86		$VO_2^+ + 2H^+ + e = VO^{2+} + H_2O$	1,004
	TiO_2(рутил) $+ H^+ + 4e = Ti^{3+} + 2H_2O$	-0,666		$VO_4^{3-} + 6H^+ + 2e = VO^+ + 3H_2O$	1,256
	TiO_2(рутил) $+ 2H^+ + 4e = Ti^{2+} + 2H_2O$	-0,502		$H_2VO_4^- + 4H^+ + e = VO^{2+} + 3H_2O$	1,314
	$Ti^{3+} + e = Ti^{2+}$	-0,368		$WO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = W + 8OH^-$	-1,05
	$Ti^{4+} + e = Ti^{3+}$ (5M H_3PO_4)	-0,15	W	$WO_2 + 4H^+ + 4e = W + 2H_2O$	-0,119
	$TiO^{2+} + 2H^+ + 2e = Ti^{2+} + H_2O$	-0,135		$WO_3 + 6H^+ + 6e = W + 3H_2O$	-0,09
	$TiO^{2+} + 2H^+ + e = Ti^{3+} + H_2O$	0,10		$W_2O_5 + 2H^+ + 2e = 2WO_2 + H_2O$	-0,031
Tl	$Tl_2S + 2e = 2Tl + S^{2-}$	-0,93		$2WO_3 + 2H^+ + 2e = W_2O_5 + H_2O$	-0,029
	$TlI + e = Tl + I^-$	-0,753		$WO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = W + 4H_2O$	0,049
	$TlBr + e = Tl + Br^-$	-0,658		$2WO_3^{2-} + 6H^+ + 2e = W_2O_5 + 3H_2O$	0,801
	$TlCl + e = Tl + Cl^-$	-0,557		$ZnS + 2e = Zn + S^{2-}$	-1,405
	$TlOH + e = Tl + OH^-$	-0,344	Zn	$Zn(CN)_4^{2-} + 2e = Zn + 4CN^-$	-1,26
	$Tl^+ + e = Tl$	-0,3363		$Zn(OH)_2 + 2e = Zn + 2OH^-$	-1,245
	$Tl(OH)_3 + 2e = TlOH + 2OH^-$	-0,05		$Zn(OH)_4^{2-} + 2e = Zn + 4OH^-$	-1,22
	$Tl_2O_3 + 3H_2O + 4e = 2Tl^+ + 6OH^-$	0,02		$ZnO_2^{2-} + 2H_2O + 2e = Zn + 4OH^-$	-1,216
	$TlOH + H^+ + e = Tl + H_2O$	0,778		$ZnCO_3 + 2e = Zn + CO_3^{2-}$	-1,06
	$Tl^{3+} + 2e = Tl^+$	1,252		$Zn(NH_3)_4^{2+} + 2e = Zn + 4NH_3$	-1,04
U	$UO_2 + 2H_2O + 4e = U + 4OH^-$	-2,39		$Zn^{2+} - 2e = Zn$	-0,763
	$U^{3+} + 3e = U$	-1,798		$ZnO_2^{2-} + 4H^+ - 2e = Zn + 2H_2O$	0,441
	$U^{4+} + e = U^{3+}$	-0,607		$ZrO^{2+} + 2H^+ + 4e = Zr + H_2O$	-1,570
	$UO_2^{2+} - UO_2^+$	0,05	Zr	$ZrO_2 + 4H^+ + 4e - Zr + 2H_2O$	-1,553
	$UO_2^{2+} + 4H^+ + 2e = U^{4+} + 2H_2O$	0,334		$Zr^{4+} + 4e = Zr$	-1,539
	$UO_2^+ + 4H^+ + e = U^{4+} + 2H_2O$	0,62			

Список литературы

Коровин М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия.: учебник 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Глинка Н.Л. Общая химия.: учебник / под ред. В.А. Попкова, А.В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Глинка Н.Л. Общая химия. Задачи и упражнения: учебно-практическое пособие. Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2014. 240 с.

Хомченко И.Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. Изд-во «Новая волна», 2011. 256 с.

Учебное издание

Наталья Анатольевна Зайцева, Ирина Альбертовна Низова

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие

Редактор изд-ва

Компьютерная верстка Н.А.*Зайцевой*

Подписано в печать .Бумага писчая. Формат 60×84 1/16.
Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.
Печ. л. Уч.-изд. л. 1,0 .Тираж 100 .Заказ

Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой геологии,
поисков и разведки месторождений
полезных ископаемых
_____ В.А. Душин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.Б.1.14 ГЕОЛОГИЯ

для обучающихся специальности

21.05.04 Горное дело

Специализация №3

Открытые горные работы

форма обучения: очная, заочная

Авторы: Макаров А.Б., профессор, д.г.-м.н., Малюгин А.А., доцент, к.г.-м.н

Екатеринбург

Самостоятельная работа студентов в рамках учебного процесса играет важную роль в изучении дисциплины «Геология», поскольку основными объектами труда горных инженеров являются месторождения полезных ископаемых. Поэтому в процессе обучения у студентов формируются, как навыки в области геологии в целом, так и представления о месторождения полезных ископаемых как геологических объектах, возникающих в процессах формирования и развития земной коры. Главные задачи профессиональной деятельности – разработка месторождений полезных ископаемых, могут быть успешно решены при условии овладения студентом современных представлений о геологии, геологических и физико-химических условиях формирования месторождений, особенностями геолого-промышленной оценки. В процессе самостоятельной работы студент получает представление об особенностях проявления геологических процессов, типа месторождений с которыми он будет сталкиваться в процессе своей будущей практической деятельности, и сравнивать с ними конкретные объекты. Для этого в рамках самостоятельной работы в первую очередь следует обратить внимание на изучение имеющегося на кафедре каменного материала, характеризующего большую часть типов промышленных месторождений.

Основное содержание дисциплины и объемы самостоятельной работы по разделам дисциплины приведены в таблице

№№ тем	Содержание	Часы по СРС
1	Изучение минералов и горных пород	10
2	Форма и условия залегания рудных тел	2
3	Структуры и текстуры руд	14
4	Изучение генетических и промышленных типов месторождений полезных ископаемых	10
5	Разведка месторождений	9
6	Подготовка к экзамену	27

Методические указания по организации самостоятельного изучения дисциплины

1. Освоение лекционного курса

Лекции по дисциплине «Геология» дают главный материал, как по теории, так и по практике в области геологических наук, генезиса и геолого-промышленных типов месторождений полезных ископаемых, разведки месторождений. Современные проблемы, рассматриваемые в данной дисциплине, обусловлены как появлением новых теоретических представлений о геологии в целом, так и месторождений, их новых

промышленных типов, методов и способов разведки. Это требует после прослушивания лекций обращаться к рекомендуемой литературе для более глубокой проработки соответствующей темы, детального рассмотрения основных терминов, проблемных вопросов и подходов к их решению, а также изучения дополнительного материала по теме для последующего выполнения лабораторных заданий.

После прослушивания лекции необходимо:

- внимательно просмотреть конспект лекции и (используя поля) сделать необходимые пояснения к сокращениям, аббревиатурам, терминам и т.п.;
- используя рекомендованную литературу уяснить проблемные вопросы и подходы к их решению;
- в письменном виде сформулировать вопросы, которые следует задать преподавателю для окончательного усвоения темы лекции;
- следует взять за правило – выполнять работу с конспектом лекций в тот же день, когда лекция прослушана и в памяти еще осталась часть ее содержания.

2. Подготовка, выполнение и оформление практических занятий

Практические занятия расширяют область знаний в изучаемой дисциплине и показывают применение теоретической части в практике исследований, позволяют самостоятельно оперировать знаниями в решении практических задач.

Наиболее важным в этом плане является изучение и закрепление знаний о минералах и горных породах, вещественном составе минерального сырья по методическим указаниям, имеющимся на кафедре ГПР МПИ. Последующим этапом закрепления теоретического материала является изучение новых разрабатываемых месторождений в рамках существующих геолого-промышленных типов и генетической классификации МПИ и методов их разведки.

Особое внимание при изучении курса «Геология» следует обратить на работу с научной литературой по данной проблематике.

Чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнения в решении практических задач, подготовка к занятиям проводятся по прочитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных разделов лекционного курса. Они вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности. В рамках программы изучения дисциплины «Геология» предусматривается следующая тематика практических работ.

Тема 1. Изучение минералов и горных пород.

Цель практических работ – изучить основные классы минералов, обращая внимание на главные рудные минералы и горные породы – магматические, осадочные, метаморфические. Дополнительное их изучение рекомендуется проводить в Уральском геологическом музее.

Тема 2. Форма и условия залегания рудных тел.

Цель практических работ – ознакомиться с принципами определения формы рудных тел, изучить геологические разрезы, определить формы рудных тел на реальных геологических разрезах и найти их место в квалификационной таблице; по геологической обстановке на разрезе определить главные факторы, обусловившие форму и место локализации полезного ископаемого.

Места локализации рудных тел и, соответственно, их форма определяется рядом геологических факторов, в частности, условиям образования (эндогенными, экзогенными, или метаморфогенными). Как следствие, при изучении геологических разрезов месторождений, после определения формы рудного тела следует внимательно ознакомиться с геологической обстановкой и попытаться определить, какой из геологических факторов является определяющим: сингенетичность или эпигенетичность руд: отложения или замещения и др.

При выполнении работы следует иметь в виду, что форма природных геологических тел в большинстве случаев далека от идеальной, и при определении названия подбирается наиболее близкий эталон – идеальное геологическое тело.

Тема 3. Структуры и текстуры руд

Цель занятий – ознакомиться с основными структурами и текстурами руд, описать особенности минералогического состава и текстур руд различного генезиса. При изучении образцов необходимо, прежде всего, определить рудные минералы, текстуры, определить тип месторождения по типоморфным текстурам. Для этого используются таблицы «Типы текстур руд» по С.А. Вахромееву (1979).

Тема 4. Изучение генетических типов месторождений полезных ископаемых

Цель практических работ – изучение теоретического и имеющегося в учебных коллекциях каменного материала, изучить парагенетические ассоциации минералов руд, описать имеющиеся в коллекциях образцы руд и определить их место согласно генетической классификации месторождений полезных ископаемых (по В.Ф. Рудницкому, «Основы учения о полезных ископаемых», стр. 46).

Последовательность изучения генетических типов МПИ рекомендуется следующим образом:

1). Повторение теоретического материала по лекции, учебным пособиям, консультации с преподавателем, просмотр дополнительной литературы из рекомендованного списка.

2). Самостоятельная работа по дополнительному изучению образцов руд из учебных коллекций кафедры.

3). Изучение примеров месторождений данного класса по литературным данным.

4). Проверка усвоения материала по «Вопросам и заданиям для самопроверки» (В.Ф. Рудницкий, «Основы учения о полезных ископаемых», стр. 233-245).

Тема 5. Разведка месторождений.

Проработка материала по теме проводится по методическим указаниям к лабораторным работам кафедры ГПР МПИ.

3. Рекомендации по работе с литературой

Изучение учебной и научной литературы является основным видом самостоятельной работы, которая сопровождает весь процесс изучения любой дисциплины. Организацию этой работы следует строить, используя следующие рекомендации:

1. Составить перечень книг, с которыми следует познакомиться, ориентируясь на источники, содержащие необходимый материал.

2. Систематизировать перечень источников (для экзамена, для написания исследовательских работ.

3. Зафиксировать выходные данные по каждой книге.

4. Установить для себя, какие книги (или какие главы книги) следует прочитать более внимательно, а какие – просмотреть. При этом целесообразно проконсультироваться с преподавателем.

5. Все прочитанные книги, учебники и статьи рекомендуется конспектировать с указанием основных идей автора, наиболее ярких цитат (с указанием страниц источника).

6. На собственных книгах допускается делать на полях краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте – это позволяет экономить время и быстро находить «избранные» места в разных книгах.

7. Рекомендуется широко использовать интернет-источники и базы геологической литературы.

4. Подготовка к экзамену

На экзамене будут оценены полученные в процессе обучения знания (примерный перечень рассматриваемых на экзамене вопросов приведен ниже).

1. Геология, объект и предмет геологии, основные этапы развития и достижения российской геологии
2. Солнечная система и гипотезы ее происхождения
3. Физические свойства Земли (сила тяжести, плотность, магнетизм, упругие свойства)
4. Модели внутреннего строения Земли
5. Состав и строение земной коры
6. Геохронология и стратиграфия
7. Геосинклинали и платформы
8. Тектонические движения, складки и их типы
9. Разрывные нарушения, их элементы и типы
10. Землетрясения, их классификация и прогноз
11. Магматизм, классификация магматических пород
12. Минералы и их классификация
13. Метаморфизм, фации метаморфических пород
14. Выветривание горных пород, типы выветривания
15. Геологическая деятельность ветра
16. Геологическая деятельность ледников
17. Геологическая деятельность поверхностных текущих вод
18. Геологическая деятельность моря
19. Подземные воды и их классификация
20. Понятие о полезных ископаемых и их месторождениях
21. Вещественный состав полезных ископаемых. Текстуры и структуры руд
22. Форма тел полезных ископаемых
23. Магматические месторождения и их примеры
24. Гидротермальные месторождения и их примеры
25. Осадочные месторождения полезных ископаемых
26. Метаморфогенные месторождения и их примеры
27. Принципы поисковых и разведочных работ, стадии геологоразведочных пород
28. Поиски месторождений полезных ископаемых и их методы
29. Задачи разведки месторождений полезных ископаемых и технические средства разведки

30. Опробование полезных ископаемых. Классификация и подсчет запасов месторождений

Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. В процессе подготовки к экзамену имеющиеся пробелы в знаниях, углубляются, систематизируются и упорядочиваются знания. На экзамене демонстрируются знания и навыки, приобретенные в процессе обучения по данной дисциплине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ, РЕКОМЕНДУЕМОЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ

Основная литература

№ п/п	Наименование	Кол-во экз.
1	Короновский Н.В., Старостин В.И., Авдонин В.В. Геология для горного дела. М.: Изд. Центр «Академия», 2007. 576с.	100
2	Попова О.М. Полезные ископаемые : Лабораторный практикум с основами теории. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ 2007. 97с.	10
3	Поленов Ю.А. Основы геологии: учебник / Ю.А. Поленов; Урал.гос.горный ун-т. 4-е издание, испр. доп. Екатеринбург: изд-во УГГУ, 2018. 338с.	50

Дополнительная литература

№ п/п	Наименование	Кол-во экз.
4	Геология и разведка месторождений полезных ископаемых: Учебник для вузов/ под ред. В.В.Ершова. М.: Недра, 1989 – 399с.	100
5	Рудницкий В.Ф. Основы учения о полезных ископаемых. Екатеринбург: 3-е изд. УГГУ, 2015. 238с.	100
6	Ершов В.В., Новиков А.А., Попова Г.Б. Основы геологии. М.: Недра,1986	электронная библиотека
7	Баранников А.Г., Никулина И.А., Хасанова Г.Г. Разведка и геолого-экономическая оценка месторождений полезных ископаемых: учебное пособие. УГГУ, 2018.184с.	50
8	Дворник Г.П. Горнопромышленная геология. Учебное пособие. УГГУ. 2018. 234с.	50

ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО - ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Все о геологии http://www.geo.web.ru

Единое окно доступа к образовательным ресурсам- Режим доступа: http://window.edu.ru

Геоинформмарк http://www.geoinform.ru

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «БЛОК-ДИАГРАММА»

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

Специальность – ***21.05.04 Горное дело***

Специализация № 3 – ***Открытые горные работы***

Квалификация выпускника: **горный инженер (специалист)**

Авторы: Бабич В.Н., Шангина Е.И.

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Эпюр выполняется на формате Al (594× 841) в масштабе 1:1000 и включает в себя решение следующих задач:

- построение линии выхода пласта на поверхность;
- построение прямого разреза (вкрест простирания);
- построение вертикальных профилей АВ, ВС, СД, ДА, определяемых сторонами заданного плана;
- построение линии среза пласта по горизонту 92,5;
- построение блок-диаграммы (ячеечной), ограниченного вертикальными профилями AB, BC, CD, DA и плоскостью нулевого уровня в аксонометрии с линией выхода пласта на поверхность.

Исходные параметры всех вариантов сведены в таблицу №1 и задаются следующим образом:

1. Месторождение ограничено двумя параллельными плоскостями - плоскостью кровли пласта (верхняя плоскость) и плоскостью подошвы (нижняя плоскость). Плоскость кровли пласта задаётся точкой **F**(x,y,z), азимутом падения α, интервалом **I** (масштабом падения плоскости), параметры которых представлены в табл. 1.

2. Горизонтальная мощность $\mathbf{H_r}$ пласта нужна для построения плоскости, называемой подошвой, которая также задана в табл. 1.

3. Построение блок-диаграммы осуществляется в стандартной аксонометрической проекции, указанной ее номером. В конце таблицы для каждой стандартной аксонометрической проекции этот номер присвоен. Пример выполнения графической работы представлен на рис. 7.

Построение линии выхода пласта на поверхность

Для нахождения линии пересечения плоскости с топографической поверхностью необходимо найти ряд общих точек, которые одновременно принадлежат плоскости и заданной поверхности. На плане топографическая поверхность задается изогипсами - плоскими линиями, параллельными горизонтальной плоскости проекций, каждая из которых имеет свою высотную отметку. Надо построить горизонтали плоскости кровли, имеющие такие же высотные отметки, что и изогипсы на плане.

Плоскость кровли задана точкой **F**, азимутом падения α и интервалом **I** (см. табл.1). Построив плоскость кровли на плане (задав ее масштабом заложения), находим линию пересечения плоскости кровли с топографической поверхностью. Точки, принадлежащие линии пересечения, получаются в ре –

зультате пересечения соответствующих изогипс и горизонталей плоскости кровли, т. е. имеющих одинаковые высотные отметки, если таковые имеются в пределах плана (рис. 1).

Найденные общие точки соединяют плавной кривой, которая будет являться линией пересечения плоскости и топографической поверхности.

Полученная линия кровли пласта обводится красным цветом.

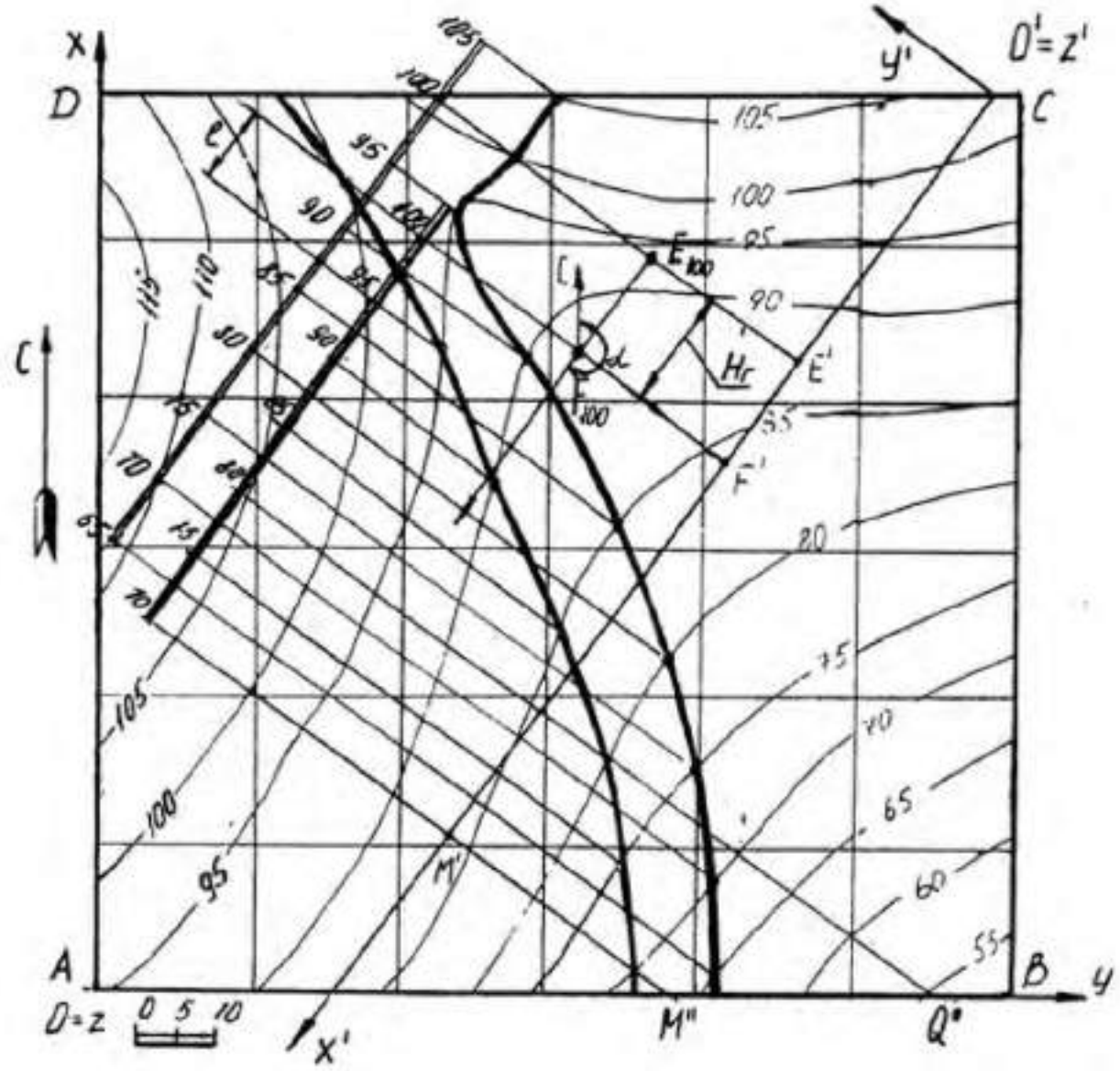


Рис 1

Пересечение плоскости подошвы пласта и топографической поверхности

Плоскость кровли пласта и плоскость подошвы пласта - две параллельные плоскости. Следовательно, на чертеже горизонтали этих плоскостей будут соответственно параллельны, масштабы заложения равны, направления падения их совпадают.

Горизонтальная мощность пласта определяется расстоянием между плоскостями кровли и подошвы пласта, измеряемое в горизонтальном направлении и в нашем случае равна $\mathbf{H}_г$ (см. табл.1). Следовательно, отложив от точки **F** расстояние, равное $\mathbf{H}_г$ по направлению восстания плоскости пласта (т. к. плоскость подошвы ниже плоскости кровли), получим точку **E** с такой же высотной отметкой, как и у точки **F** (рис.1). Направление и масштаб заложения подошвы пласта будут такими же, как и у кровли пласта. Плоскость подошвы пласта определяется точкой **E**, азимутом падения α и интервалом **I**.

Строят те горизонтали подошвы пласта, высотные отметки которых совпадают с высотными отметками изогипс. Находят общие точки, которые соединяют плавной кривой линией. Полученная линия подошвы пласта обводится синим цветом.

Полное построение линии выхода пласта на поверхность показано на рис.1.

Построение прямого разреза (вкрест простирания)

На плане выбирают вертикальную плоскость, перпендикулярную к горизонталям пласта (в удобном месте, как показано на рис. 1). Полученный разрез называется прямым или вкрест простирания.

Разрез ограничивается нулевой плоскостью, топографической поверхностью и прямыми пересечения плоскости прямого разреза с ближайшими вертикальными плоскостями, ограниченными прямоугольником ABCD.

Для построения прямого разреза вводят декартову систему координат x'O'y' на плане, где ось O'x' совпадает с плоскостью разреза, ось O'y' перпендикулярна к оси O'x' (по часовой стрелке), ось z' проецируется в точку (рис. 1).

Вертикальный прямой разрез будет определяться осью O'x' и осью O'z', где координата z' будет равна числовой отметке соответствующей изогипсы (рис. 2). Таким образом, получают построение вертикального прямого (вкрест простирания) разреза, на котором строят следы пласта.

Для построения следов пласта на разрезе вкрест простирания поступают так. По горизонтали переносят точку **F** на след плоскости вертикального

разреза – ось O'x' и любую из горизонталей (например, 70) – точки F' и M' (рис. 1). На профиле (рис. 2) через полученные точки F' и M' проводят перпендикуляры, на которых откладывают высотные отметки кровли пласта. Затем проводят прямую линию – след кровли пласта.

Подошва пласта отстоит от кровли пласта на расстоянии, равном горизонтальной мощности пласта и строится параллельно плоскости кровли (рис. 2 – профиль ограничен нижней плоскостью с отметкой 40).

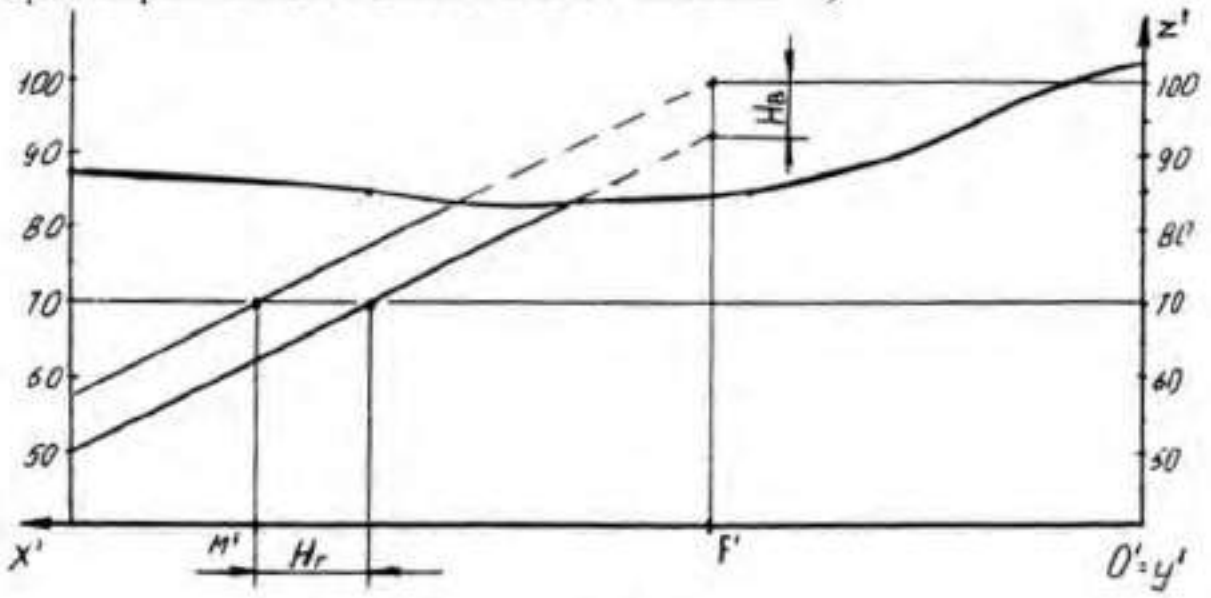


Рис. 2

Построение вертикальных профилей AB, BC, CD, DA выполняется аналогично. Пример построения вертикального профиля AB показан на рис. 3. Для построения подошвы от прямой следа плоскости кровли пласта откладывают вертикальную мощность $\mathbf{H_н}$, взятую с разреза вкрест простирания и проводят прямую, параллельную следу плоскости кровли.

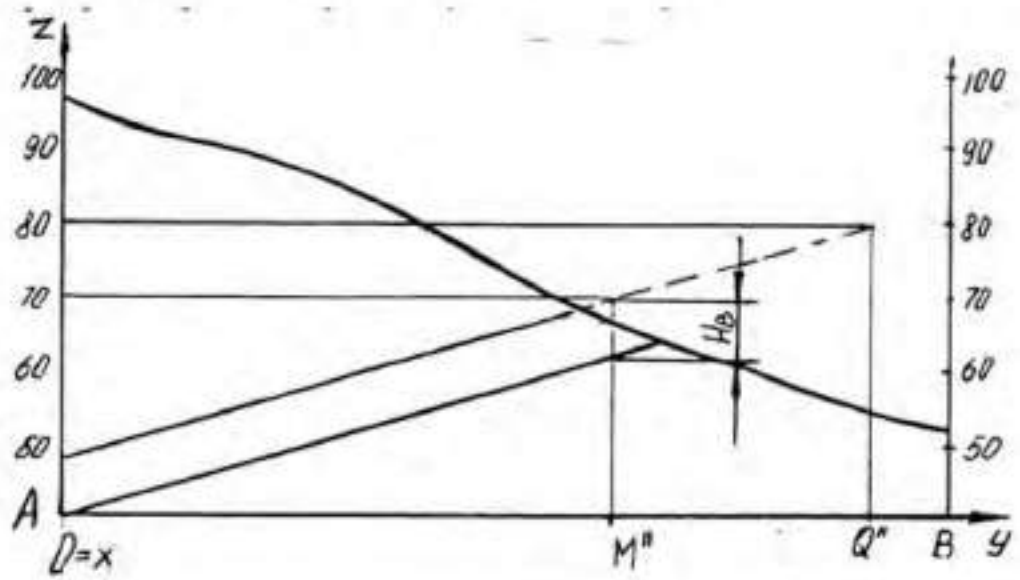


Рис. 3

Нахождение высотной отметки точки, не лежащей на изогипсе

Для построения высотной отметки точки а (рис. 4), не лежащей на изогипсе, поступают следующим образом:

- через точку А проводят кратчайшую прямую I II между изогипсами 50 и 60;

- из точки пересечения с изогипсой 60 проводят прямую под произвольным углом, на которой откладывают отрезок, равный разности высотных отметок (т. е. 10) в заданном масштабе – точка II';

- соединяют полученную точку II' с точкой II, имеющей отметку 50 и с помощью подобных треугольников переносят точку А на прямую I II', которую называют «высотной шкалой».

Таким образом точка А имеет высотную отметку 57.

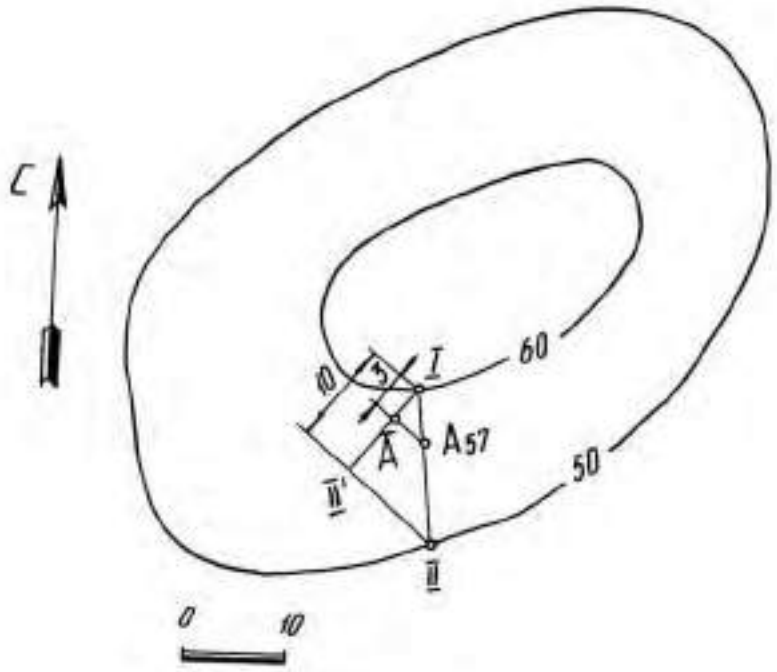
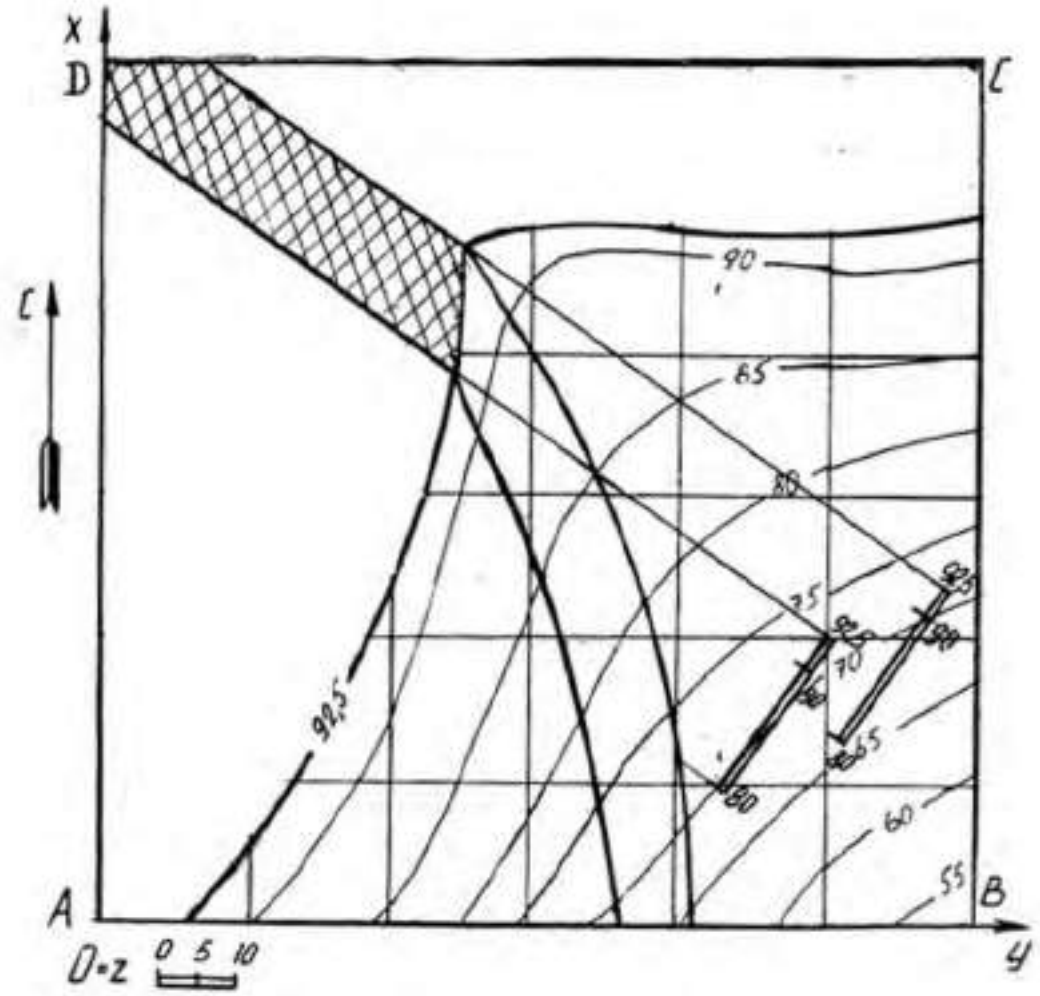


Рис. 4

Построение плана среза по горизонту 92,5

Для построения плана среза воспользуемся умением находить высотные отметки точек, не лежащих на изогипсах, который был рассмотрен ранее.

Количество точек, необходимых для построения изогипсы 92,5, определяется самостоятельно в зависимости от конфигурации рядом лежащих изогипс. План среза по горизонту 92,5 показан на рис. 5.



Построение блок диаграммы части месторождения, ограниченного вертикальными профилями AB, BC, CD, DA и плоскостью нулевого уровня в аксонометрии с линией выхода пласта на поверхность

Блок диаграммой будем называть аксонометрическую проекцию части земной коры, ограниченную четырьмя вертикальными плоскостями, горизонтальной плоскостью (например, с отметкой ноль) и топографической поверхностью. Блок диаграмма строится ячеечная, т. е. заданный план разбивается на квадраты, размеры которых 250×250. Затем построения осуществляются по следующему алгоритму.

Алгоритм построения:

- на план наносим декартову систему координат, у которой ось X совпадает с AD, ось Y совпадает с DC, ось Z совпадает с точкой D;

- строим декартову систему координат в указанной аксонометрической проекции (прямоугольная изометрия, прямоугольная диметрия, косоугольная фронтальная диметрия, косоугольная горизонтальная изометрия - военная пер-

спектива, косоугольная фронтальная изометрия – кавальерная проекция) согласно ГОСТ 2.317 – 69;

- построение осуществляется по координатам тех точек, которые имеют точные высотные отметки, с учетом коэффициентов искажения по координатным осям. Пример построения показан на рис. 6.

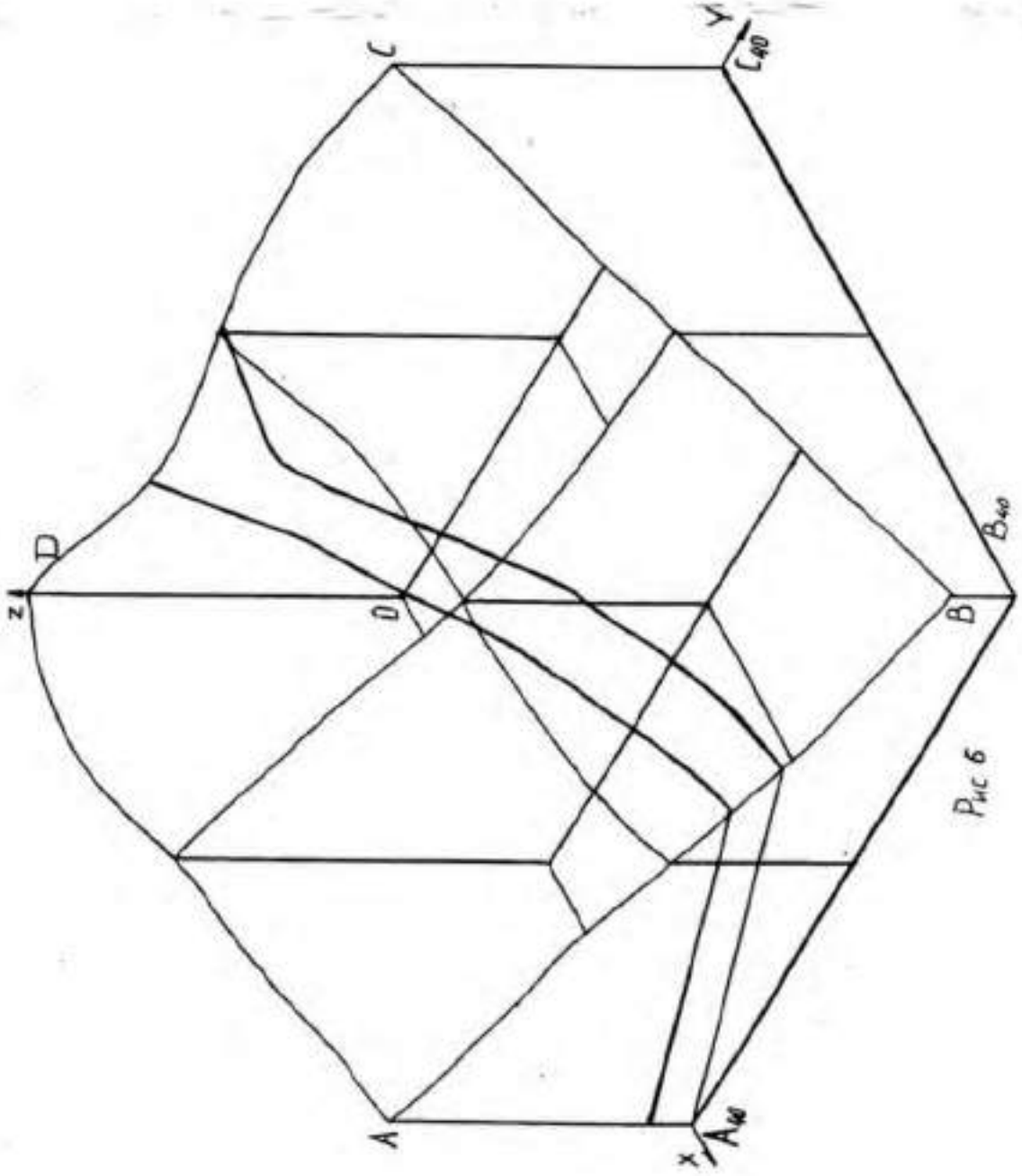


Рис 6

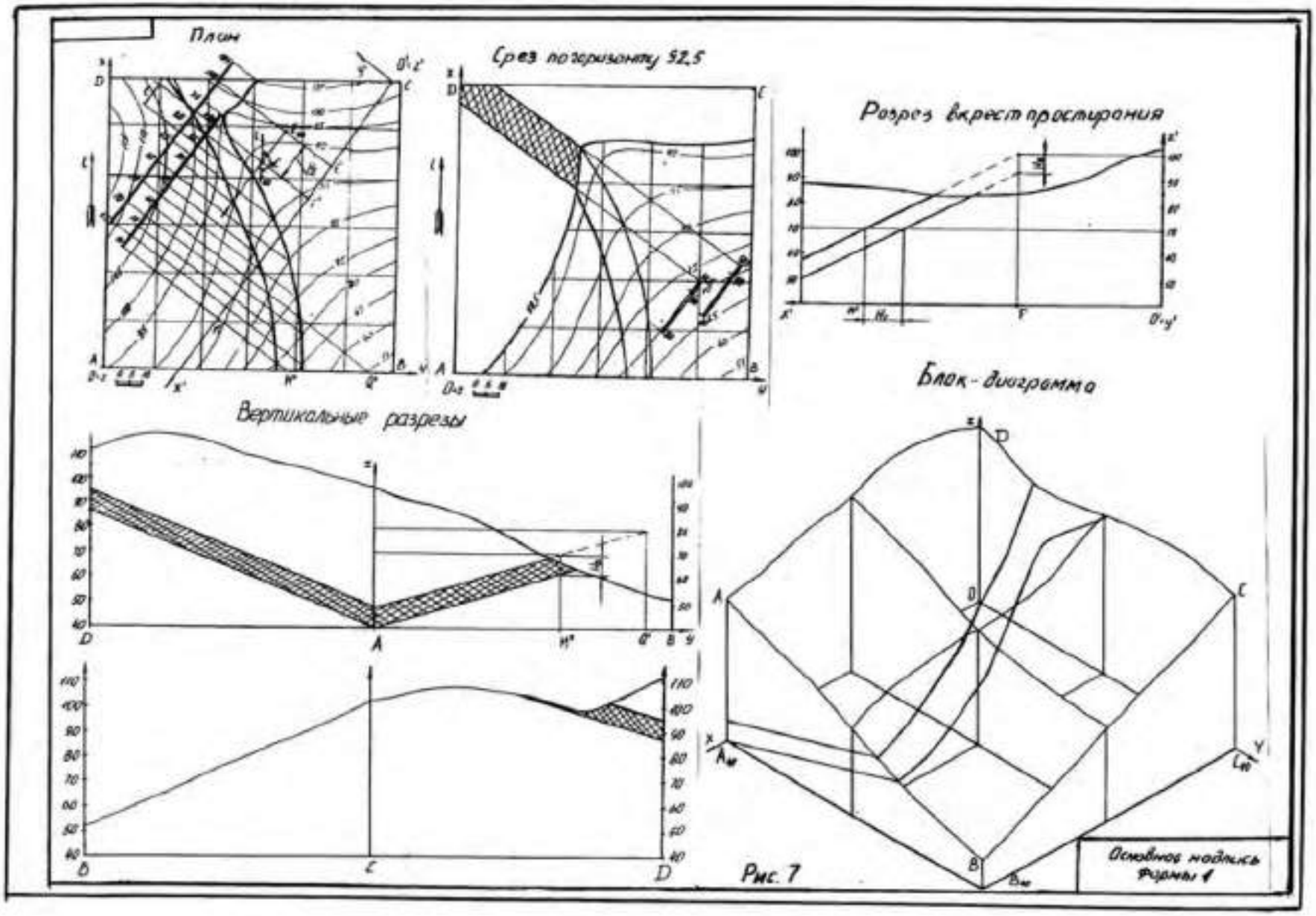

План
Срез по горизонту 52,5
Разрез вкрест простирания
Вертикальные разрезы
Блок-диаграмма
Основная надпись формы 1

Рис. 7

Таблица 1

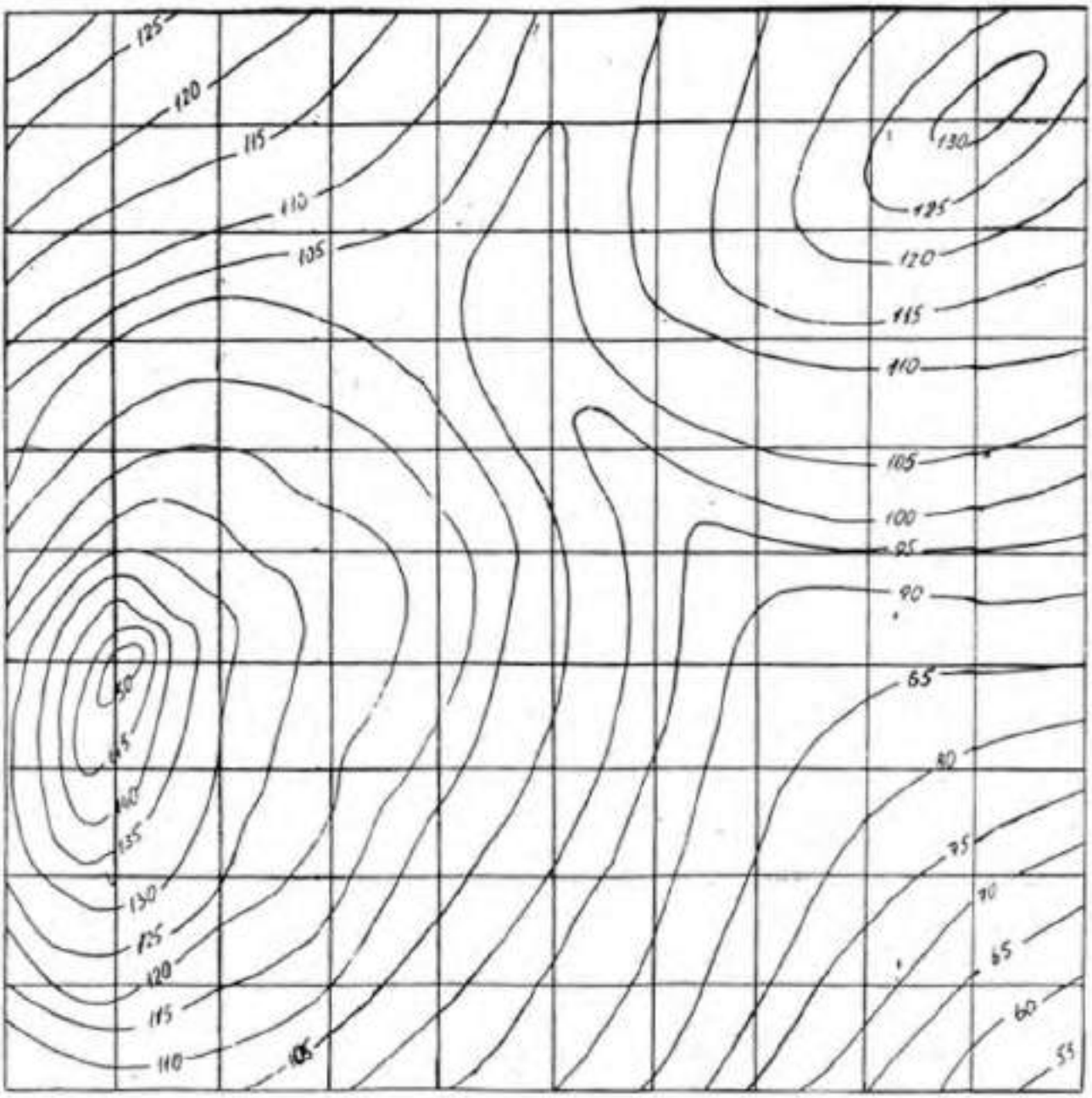
Номер варианта	Точка **F**			Азимут падения α°	Интервал плоскости кровли **l**, мм	Горизонтальная мощность $\mathbf{H_г}$, мм	Вид аксонометрии
	x	**y**	**z**				
1	2	3	4	5	6	7	8
1	46	10	120	210	20	180	1
2	20	85	110	170	20	75	2
3	67	40	100	210	20	30	3
4	78	25	120	190	20	50	4
5	98	110	105	80	20	30	5
6	40	135	105	30	20	15	1
7	60	60	85	225	20	45	2
8	38	105	100	135	14	17	3
9	46	10	120	210	20	155	4
10	20	85	110	170	20	95	5
11	67	40	100	210	20	100	1
12	78	25	120	190	20	85	2
13	98	100	105	80	20	15	3
14	40	135	105	30	20	45	4
15	60	60	85	225	20	65	5
16	38	105	100	135	14	31	1
17	55	40	95	190	20	70	2
18	46	10	120	210	20	135	3
19	20	85	110	170	20	110	4
20	67	40	100	210	20	125	5
21	78	25	120	190	20	105	1
22	135	20	120	260	20	135	2
23	20	110	115	30	20	30	3
24	98	35	80	225	20	45	4
25	38	105	100	135	14	60	5
26	46	10	120	210	20	115	1
27	115	135	130	170	20	20	2
28	27	42	100	210	20	75	3
29	115	135	130	170	20	50	4
30	97	95	115	210	20	70	5
31	135	20	120	260	20	145	1
32	58	177	80	135	14	31	2
33	27	42	100	210	20	95	3
34	115	135	130	170	20	65	4
35	97	95	115	210	20	95	5

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
36	58	177	80	135	14	42	1
37	27	42	100	210	20	115	2
38	98	35	80	225	20	25	3
39	58	177	80	135	14	68	4
40	27	42	100	210	20	140	5

1 - прямоугольная изометрия (изометрия)
2 - прямоугольная диметрия (диметрия)
3 – косоугольная фронтальная диметрия (кабинетная проекция)
4 - косоугольная фронтальная изометрия (кавальерная проекция)
5 - косоугольная горизонтальная изометрия (военная перспектива)

ПЛАН ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ



СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В. Н., Шангина Е. И. Начертательная геометрия в проекциях с числовыми отметками: Учебное пособие.- Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 1999. – 152 с.
2. Горная графическая документация. – Издание стандартов, 1983. – 200 с.
3. Ломоносов Г. Г. Инженерная графика. – М.: Недра, 1984. – 287 с.
4. Русскевич Н. Л. Начертательная геометрия. – Киев: «Вища школа», 1978. – 312 с.
5. Тарасов Б. Ф. Методы изображения в транспортном строительстве. – Ленинград: Стройиздат, 1987. – 248 с.

Бабич Владимир Николаевич
Шангина Елена Игоревна

Методическое пособие
по выполнению индивидуальной графической
работы «Блок-диаграмма» по дисциплине
«Начертательная геометрия. Инженерная графика»
для студентов направления 553200 –
«Геология и разведка полезных ископаемых»

2-е издание, стереотипное

Корректура кафедры инженерной графики

Подписано в печать 17.10.2003 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/8
Печ. л. 0,9 Уч. - изд. 0,83. Тираж 100 экз. Заказ №128

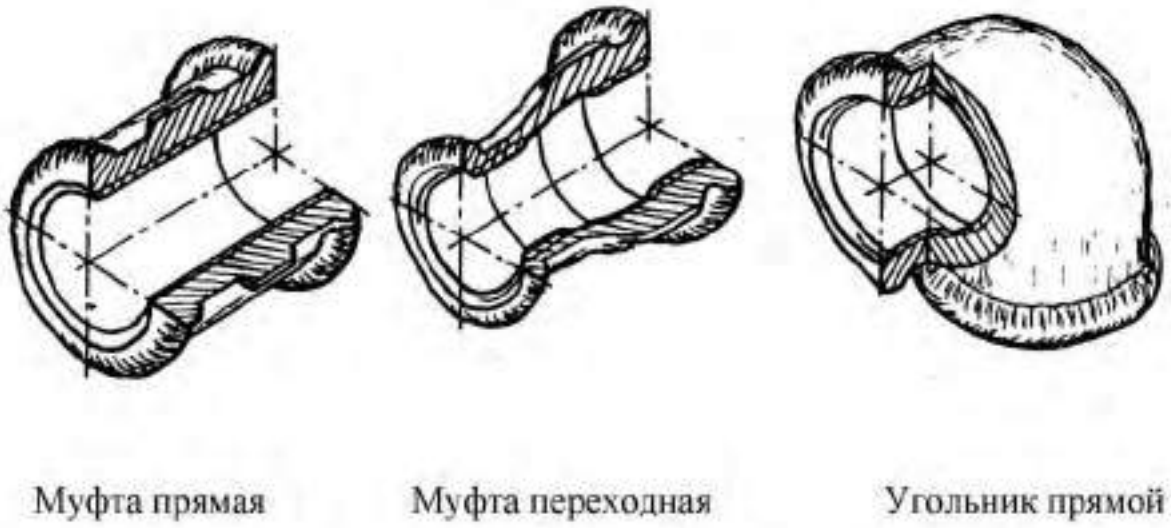
Лаборатория педагогики
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральская государственная горно-геологическая академия
Лаборатория множительной техники

Содержание

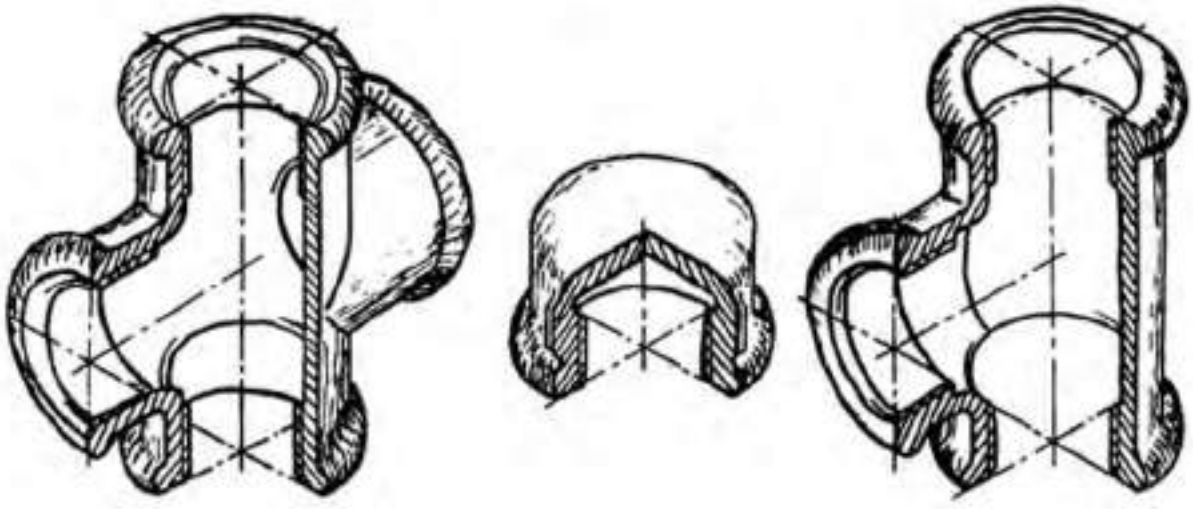
ВВЕДЕНИЕ	4
1.ТРУБНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ РЕЗЬБА	5
2. КОНСТРУКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СОЕДИНИТЕЛЬНЫХ ЧАСТЕЙ	9
3. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «ИЗОБРАЖЕНИЕ ТРУБНЫХ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ»	10
4. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ	12
4.1. Соединение труб муфтами	12
4.1.1. Соединение труб прямой муфтой	12
4.1.2. Соединение труб переходной муфтой	17
4.2. Соединение труб угольниками, прямыми тройниками и прямыми крестами	19
4.3. Перекрытие труб колпаком	23
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	26

ВВЕДЕНИЕ

В промышленности трубы, имеющие на концах наружную резьбу, соединяются соединительными частями (фитингами), которые имеют резьбу в отверстиях. Виды резьбовых трубных соединений определяются условиями их работы. В обычных трубопроводах с нормальным давлением (в системах отопления, вентиляции, газификации, водоснабжения) чаще всего имеют место соединения труб деталями с трубной цилиндрической резьбой.



Муфта прямая Муфта переходная Угольник прямой



Крест прямой Колпак Тройник прямой

Рис. 1. Соединительные части (фитинги)

Соединительные части - фитинги (рис. 1) – позволяют соединить сразу несколько труб, устраивать ответвления под разными углами, переходы с одного диаметра на другой и т. д. Фитинги изготавливают из ковкого чугуна для условных проходов от 8 до 150 мм. Для придания фитингам из ковкого чугуна необходимой жесткости их снабжают по краям буртиками, а муфты для обеспечения лучшего захвата газовым ключом – несколькими ребрами, расположенными на боковой поверхности по направлению образующих.

1. ТРУБНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ РЕЗЬБА

Профиль трубной цилиндрической резьбы – равнобедренный треугольник с углом α=55°, вершины и впадины профиля закруглены, а в соединении между вершинами и впадинами наружной и внутренней резьбы отсутствуют зазоры. Трубная резьба разработана в дюймовой системе (1 дюйм = 1″=25,4 мм).

Шаг трубной резьбы задают косвенным способом: указывают число ниток резьбы, укладывающихся на 1″. Это число ниток стандартизовано в пределах от 28 до 11.

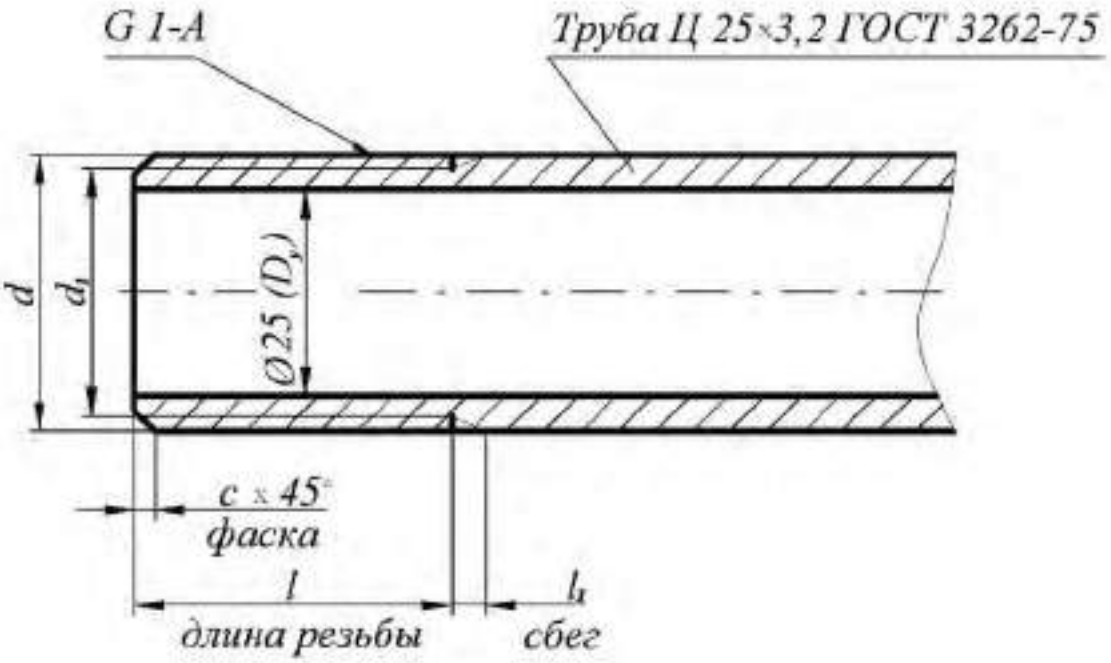


Рис. 2. Изображение трубы

Обозначение размера трубной резьбы имеет особенность, которая заключается в том, что размер задается не наружным диаметром трубы, на которой нарезается резьба, а величиной внутреннего диаметра трубы. Объяснение этой условности состоит в том, что конструктивный расчет трубопроводов ведется по условным проходам трубопроводов, арматуры и соединительных частей.

Например, трубная резьба в 1″ нарезается на трубе, которая имеет внутренний диаметр, равный 25 мм; размер же наружного диаметра всегда больше диаметра в свету на две толщины стенки трубы (рис. 2). По этой причине обозначение резьбы располагают на полке-выноске, которая заканчивается стрелкой, опирающейся на контур трубной резьбы.

Условное обозначение резьбы состоит из буквы *G*, обозначения размера резьбы и класса точности среднего диаметра. Условное обозначение для левой резьбы дополняется буквами *LH*, например,

G 1½ - *B* – трубная цилиндрическая резьба 1½″ класса точности *B*,

G 1½ - *LH* - *B* – то же для левой резьбы.

Длину свинчивания указывают в миллиметрах после обозначения класса точности: *G* 1½ - В –40.

В обозначении трубы указывают условный проход, толщину стенки, другие данные (точность изготовления, покрытие, длину, наличие резьбы и муфты) и номер стандарта, например:

Труба 20×2,8–2000 ГОСТ 3262-75 – труба обыкновенная неоцинкованная без муфты, без резьбы с D_y =20 мм.

Для вычерчивания трубы и соединительных частей используют размеры, предусмотренные ГОСТ 3262-75 и ГОСТ 6357-81 (табл. 1), а также ГОСТ 10549-63 (табл. 2).

Для труб бесшовных горяче- и холоднодеформированных, для толстостенных труб (ГОСТ 8734-75, 8732-78, 9940-81) выполняют рабочие чертежи, на которых указывают длину трубы, условный проход, длину резьбы и величину сбега резьбы.

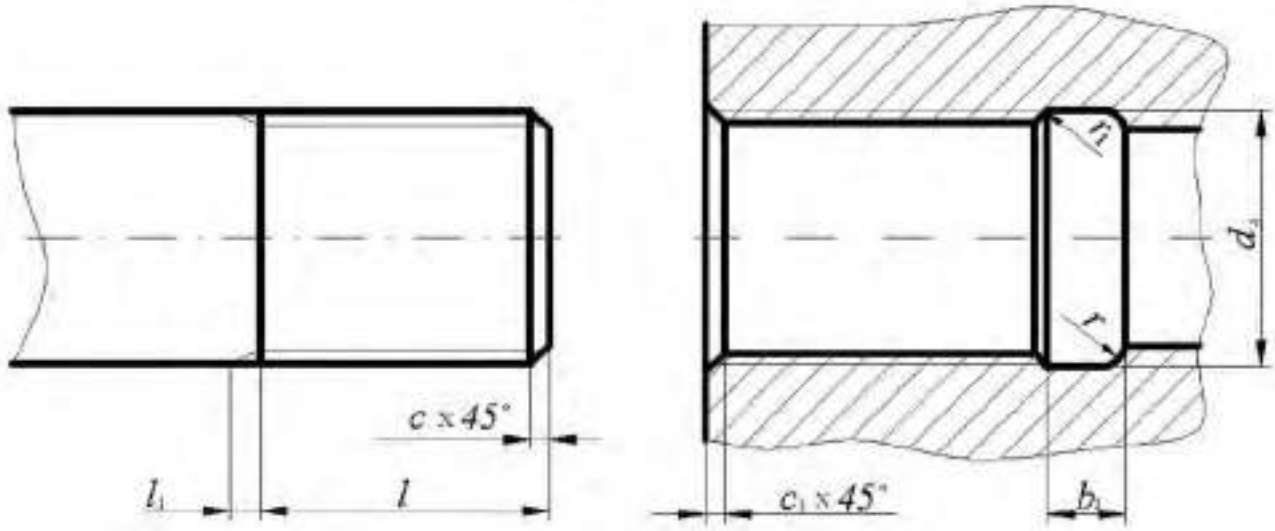
Таблица 1

Резьба трубная цилиндрическая ГОСТ 6357-81

Обозначение размера резьбы		Шаг, мм P	Диаметр резьбы, мм		Толщина стенки труб, мм
D_y, мм	в дюймах		наружный $d=D$	внутренний $d_1=D_1$	
6	1/8	0,907	9,728	8,566	2,0
8	¼	1,337	13,157	11,445	2,2
10	3/8		16,662	14,950	2,2
15	½	1,814	20,955	18,631	2,8
20	¾		26,441	24,117	2,8
25	1	2,304	33,249	30,291	3,2
32	1 ¼		41,910	38,952	3,2
40	1 ½		47,803	44,845	3,5
50	2		59,614	56,656	3,5
65	2 ½		75,184	72,226	4,0
80	3		87,884	84,926	4,0
90	3 ½		100,330	97,372	4,0
100	4		113,030	110,072	4,5

Таблица 2

Размеры сбегов, проточек и фасок для трубной цилиндрической резьбы



D_y, мм	l_1, мм	l, мм		c, мм	b_1, мм	r, мм	r_1, мм	d_4, мм	c_1, мм
		длинной	короткой						
1/8	1,6	-	-	1,0	4	1,0	0,5	10,5	1,0
1/4	2,4	-	-	1,6	5	1,6		13,5	
3/8		-	-					17,0	
1/2	3,2	14	9,0	2,0	8	2,0	1,0	21,5	1,6
3/4		16	10,5					27,0	
1	4,1	18	11,0	2,5	10	3,0		34,0	
1 1/4		20	13,0					43,0	
1 1/2		22	15,0					48,5	
2		24	17,0					60,5	
2 1/2		27	19,5					76,0	
3		30	22,0					89,0	
3 1/2		33	26,0					101,0	
4		36	30,0					114,0	

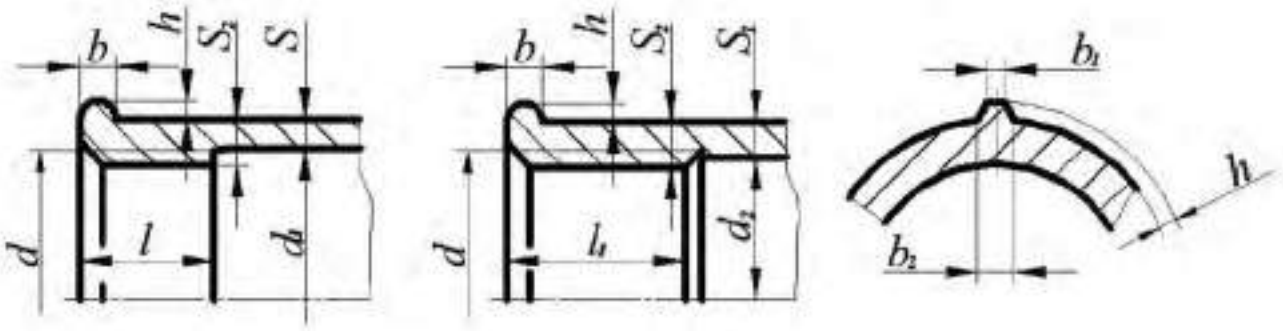
2. КОНСТРУКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СОЕДИНИТЕЛЬНЫХ ЧАСТЕЙ

На чертежах трубных соединений, выполняемых как конструктивные чертежи, вычерчиваются все элементы соединительных частей и контргаек (если их ставят) – буртики, фаски, ребра, размеры которых для изделий из ковкого чугуна устанавливает ГОСТ 8945-75.

Таблица 3

Конструктивные размеры соединительных частей, мм

Вариант 1 Вариант 2



Обозначение	Резьба d	l (не менее)	l_1 (не менее)	d_1	d_2	S	S_1	S_2	S_3	b	b_1	b_2	h
$G1/4$	13,16	9,0	9,0	13,5	12,5	2,5	3,0	3,5	3,5	3,0	2,0	3,5	2,0
$G3/8$	16,66	10,0	11,0	17,0	16,0	2,5	3,0	3,5	3,5	3,0	2,0	3,5	2,0
$G1/2$	20,96	12,0	14,0	21,5	20,0	2,8	3,5	4,2	4,2	3,5	2,0	4,0	2,0
$G3/4$	26,44	13,5	16,0	27,0	25,5	3,0	3,5	4,4	4,2	4,0	2,0	4,0	2,5
$G1$	33,25	15,0	19,0	34,0	32,0	3,3	4,0	5,2	4,8	4,0	2,5	4,5	2,5
$G1\frac{1}{4}$	41,91	17,0	21,0	42,5	40,5	3,6	4,0	5,4	4,8	4,0	2,5	5,0	3,0
$G1\frac{1}{2}$	47,81	19,0	21,0	48,5	46,5	4,0	4,0	5,8	4,8	4,0	3,0	5,0	3,0
$G2$	59,62	21,0	24,0	68,5	58,5	4,5	4,5	6,4	5,4	5,0	3,0	6,0	3,5
$G2\frac{1}{2}$	75,19	23,5	27,0	76,0	74,0	4,5	4,5	6,4	5,4	5,0	3,5	6,5	3,5
$G3$	87,89	26,0	30,0	89,0	87,0	4,5	4,5	6,5	6,0	6,0	4,0	7,0	4,0
$G4$	113,0	39,0	39,5	115	112	5,5	5,5	8,0	7,0	7,0	5,0	8,5	4,5

ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «ИЗОБРАЖЕНИЕ ТРУБНЫХ СОЕДИНЕНИЙ»

3.1. Цель задания

Целью задания является изучение правил выполнения трубных резьбовых соединений, условное изображение и обозначение трубной цилиндрической резьбы, конструктивных элементов соединительных частей. При выполнении задания студент должен приобрести навыки общения с Государственными стандартами по данной теме.

3.2. Содержание задания

Задание выполняется карандашом на формате А4 в масштабе, выбранном в соответствии с ГОСТ 2.302-68.

Вычертить соединение труб в двух видах с необходимыми разрезами и нанести размеры согласно стандартам.

Выполнить изображение конца трубы и указать ее конструктивные размеры.

Составить спецификацию.

Таблица 4

Варианты задания

Номер варианта	Соединительная часть	Диаметр условного прохода, мм
1	Угольник	8
2	Крест	80
3	Муфта	40×20
4	Колпак, исполнение 2	80
5	Муфта	50
6	Крест	50
7	Тройник	40
8	Тройник	50
9	Угольник	40
10	Колпак, исполнение 2	65
11	Угольник	20
12	Тройник	25
13	Крест	32
14	Колпак, исполнение 1	20
15	Муфта прямая короткая	15

Продолжение табл. 4

Номер варианта	Соединительная часть	Диаметр условного прохода, мм
16	Муфта прямая длинная	25
17	Муфта переходная	65×32
18	Тройник	50
19	Крест	65
20	Колпак, исполнение 1	15
21	Муфта прямая короткая	32
22	Муфта прямая длинная	20
23	Угольник	10
24	Муфта переходная	80×40
25	Крест	50
26	Колпак, исполнение 2	10
27	Муфта прямая короткая	80
28	Муфта прямая длинная	15
29	Угольник	15
30	Тройник	80
31	Муфта переходная	40×20
32	Колпак, исполнение 1	8
33	Муфта прямая короткая	25
34	Муфта прямая длинная	10
35	Муфта переходная	50×30
36	Тройник	15
37	Крест	20
38	Угольник	32
39	Угольник	20
40	Угольник	80
41	Угольник	15
42	Колпак, исполнение 1	50
43	Крест	25
44	Муфта переходная	32×20
45	Муфта	15
46	Угольник	32
47	Тройник	65
48	Крест	65
49	Колпак, исполнение 1	32
50	Муфта прямая длинная	32

4. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Изображение трубных резьбовых соединений – это выполнение сборочного чертежа первой сложности. Правила выполнения сборочного чертежа регламентирует ГОСТГОСТ 2.109-73, составление спецификации - ГОСТ 2.302-68, а основную надпись - ГОСТ 2.104-68.

4.1. Соединение труб муфтами

При соединении муфтой ось труб располагают параллельно основной надписи чертежа. Конструкцию соединения показывают в разрезе плоскостью, проходящей через оси труб и фитинга, допускается соединять части вида и разреза. В разрезе показывают только ту часть резьбы фитинга, которая не закрыта резьбой трубы. Второе изображение обычно представляет собой сечение плоскостью, перпендикулярной одной из труб.

Необходимо иметь в виду, что для полностью завинченной трубы за торец соединительной части выходит только сбег резьбы.

Для демонтажа трубного соединения, например, при ремонтных работах, на конце одной из труб нарезают более длинную резьбу – сгон.

Длину сгона рассчитывают так, чтобы можно было свинтить контргайку, муфту и иметь еще запас резьбы 5…7 мм.

Размеры всех деталей трубного соединения зависят от диаметра условного прохода свинчиваемых труб.

Если диаметр отверстия трубы неизвестен, то его можно определить из таблицы размеров трубной цилиндрической резьбы (ГОСТ 6357-81, табл. 1), измерив внутренний диаметр резьбы муфты.

4.1.1. Соединение труб прямой муфтой

Например, необходимо по индивидуальному варианту вычертить прямую муфту, имея деталь, но, не зная диаметра условного прохода.

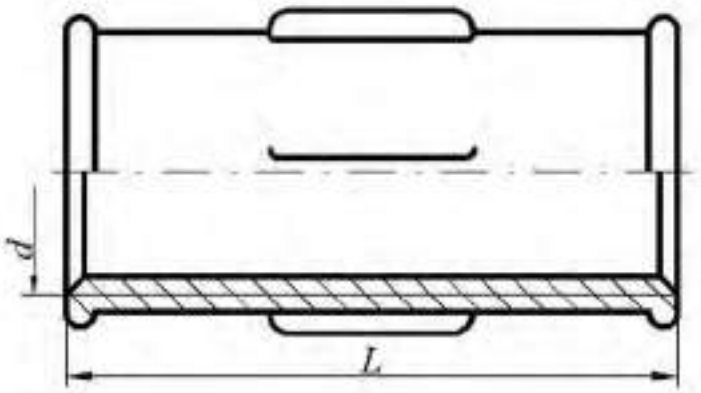
Штангенциркулем измеряется внутренний диаметр резьбы и по табл. 1 определяется диаметр условного прохода соединяемых труб и обозначение резьбы: $D_1 \approx 45$ мм. $D_{1\text{табл.}} = 4{,}845$ мм $\rightarrow D_y = 40$ мм – G 1½.

2. Измеряется длина муфты, L=43 мм.

Для определения названия муфты (короткая или длинная) обращаются к Государственным стандартам (табл. 5).

Таблица 5

Муфты прямые



Резьба	Муфты короткие ГОСТ 8954-75		Муфты длинные ГОСТ 8955-75	
	L, мм	Число ребер	*L*, мм	Число ребер
G⅛-B	22	2	27	2
G⅜-B	24	2	30	2
G½-B	28	2	36	2
G¾-B	31	2	39	2
G1-B	35	4	45	4
G1¼-B	39	4	50	4
G1½-B	43	4	55	4
G2-B	47	6	65	4
G2½-B	53	6	74	6
G3-B	59	6	80	6
G4-B	84	6	94	6

Примеры условных обозначений:

1. Прямая короткая муфта с D_y =40 мм:

   Муфта короткая 40 ГОСТ 8954 - 75.

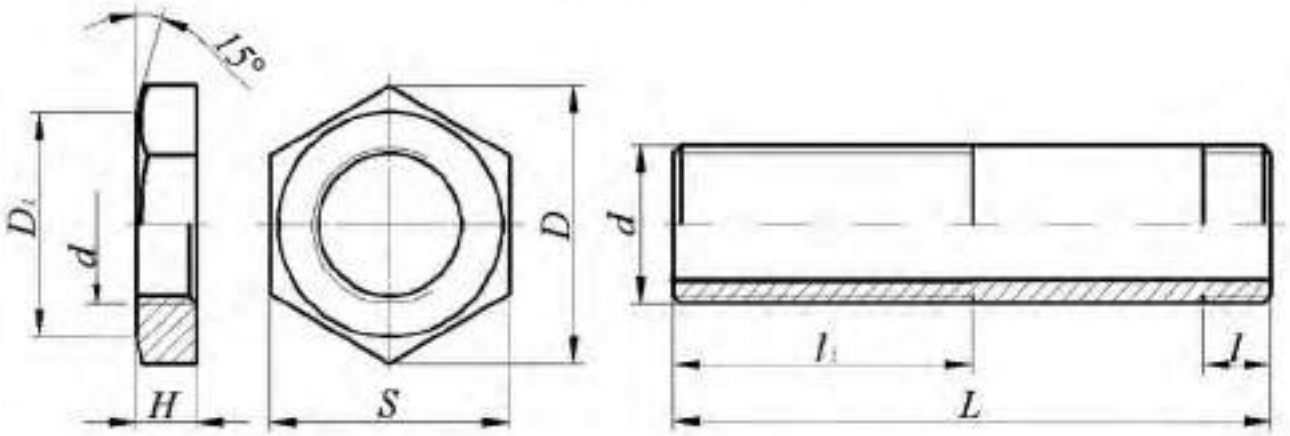
2. Прямая длинная муфта с D_y =40 мм и цинковым покрытием исполнения 1: Муфта длинная 1-Ц-40 ГОСТ 8955 – 75.

Муфта с резьбой G 1½, имеющая длину 43 мм, является короткой, считаем, что она выполнена с цинковым покрытием, следовательно, ее обозначение: Муфта короткая Ц-40 ГОСТ 8954 - 75.

3. Для вычерчивания муфты используют данные из табл. 1, 2, 3.
   1) Наружный диаметр резьбы d=47,803 мм
   2) Фаска с=1,6 мм
   3) Толщина стенки муфты S_2=5,8 мм
   4) Высота буртика b=4,0 мм
   5) Количество ребер жесткости равно 4
   6) Размеры ребер жесткости и буртика: h=3,0 мм; b_1=3,0 мм; b_2=5,0 мм.
4. Для вычерчивания ввинчиваемой трубы используют данные табл. 1 и табл. 2: «Труба Ц-40×3,5 ГОСТ 3262-75» имеет размеры:
   1) Наружный диаметр трубы d=47,803 мм
   2) Внутренний диаметр резьбы d_1=44,845 мм
   3) Длина резьбы l=15 мм
   4) Длина сбега резьбы l_1=4,1 мм
   5) Фаска с=2,5 мм
5. С другой стороны муфты ввинчивается сгон, размеры которого предусмотрены ГОСТ 8969-75, на которой навинчена контргайка (ГОСТ 8961-75, табл. 6).
6. По размерам, указанным в таблицах, для резьбы G 1½ вычерчиваются детали в сборе. При выполнении сборочного чертежа соединения фаски, сбеги на деталях не изображаются, каждой детали присваивают номер позиции, который размещают на полке-выноске, заканчивающейся точкой. На сборочном чертеже обязательно указывают установочные размеры: размер резьбы, диаметр условного прохода. Допускается указывать в качестве справочных размеры деталей, определяющих характер сопряжения: длину муфты и др.

Таблица 6

Контргайки и сгоны



Резьба	Контргайки ГОСТ 8961-75				Сгоны ГОСТ 8969-75		
	H, мм	*S*, мм	*D*, мм	D_1, мм	*l*, мм	l_1, мм	*L*, мм
G¼-B	6	22	25,4	20	7,0	38	80
G⅜-B	7	27	31,2	25	8,0	42	90
G½-B	8	32	36,9	30	9,0	40	110
G¾-B	9	36	41,6	33	10,5	45	110
G1-B	10	46	53,1	43	11,0	50	130
G1¼-B	11	55	63,5	52	13,0	53	130
G1½-B	12	60	69,3	56	15,0	60	150
G2-B	13	75	86,5	70	17,0	65	150
G2½-B	16	95	110,0	90	19,5	75	170
G3-B	19	105	121,0	100	22,0	85	180
G4-B	21	135	156,0	128	-	-	-

Примеры условных обозначений:

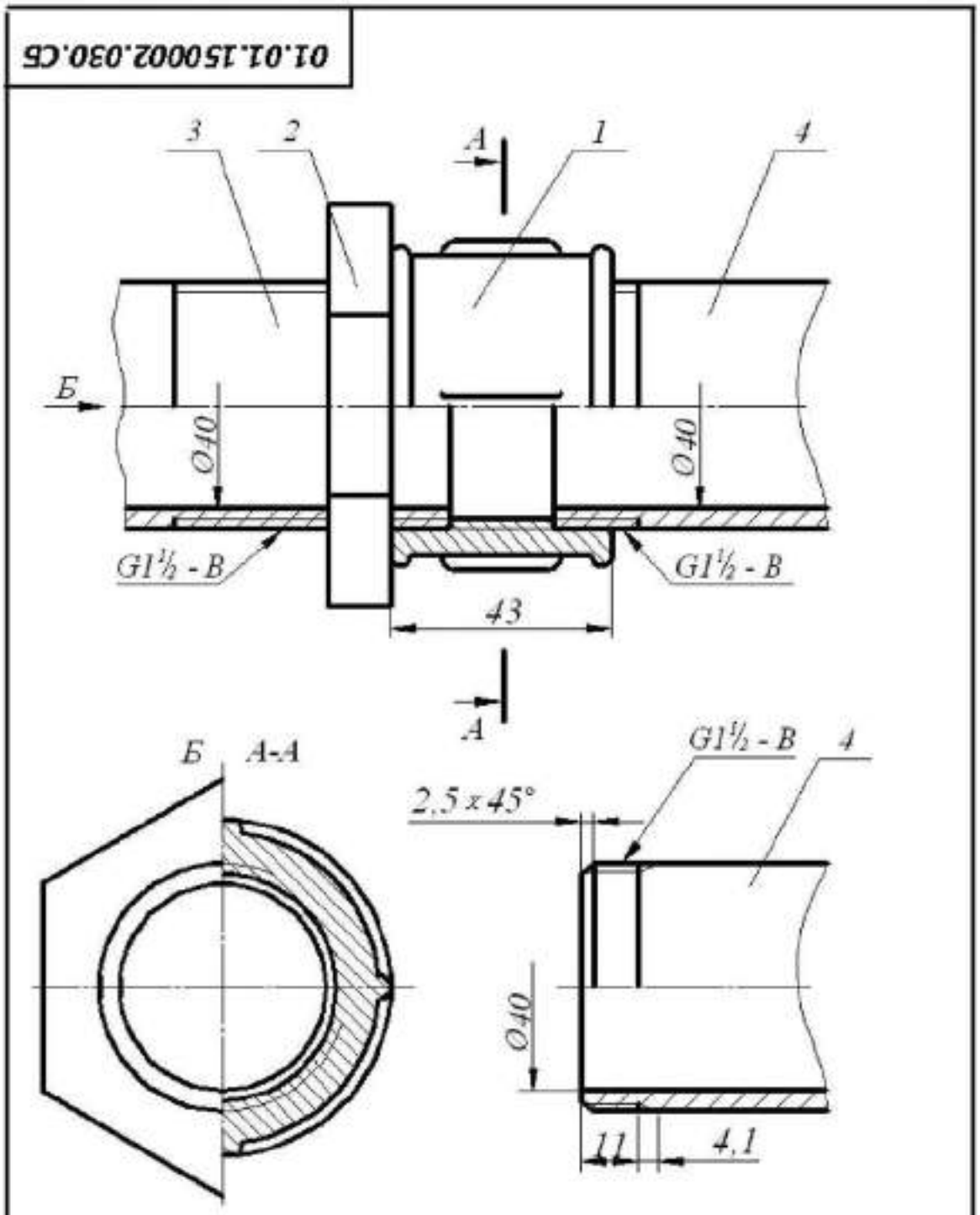
1. Контргайка без покрытия с D_y=40 мм:

   Контргайка 40 ГОСТ 8961-75

2. Сгон с цинковым покрытием с D_y=40 мм

   Сгон Ц-40 ГОСТ 8969-75

Пример выполнения сборочного чертежа соединения труб муфтой показан на рис. 3.



Пример выполнения спецификации
по ГОСТ 2.108-68 на рис. 9

Основная надпись форма 1 ГОСТ 2.104-68

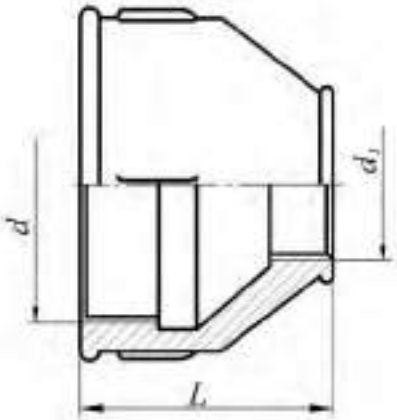
Рис. 3. Соединение труб муфтой

4.1.2. Соединение труб переходной муфтой

Муфты переходные соединяют трубы с различными диаметрами условного прохода (ГОСТ 8957-75, табл. 7).

Таблица 7

Переходные муфты по ГОСТ 8957-75, мм



Условный проход $D_y \times D_{1y}$	L	Число ребер	Условный проход $D_y \times D_{1y}$	L	Число ребер
10×8	30	2	40×25	55	4
15×8	36	2	40×32	55	4
15×10	36	2	50×15	65	6
20×8	39	2	50×20	65	6
20×10	39	2	50×25	65	6
20×15	39	2	50×32	65	6
25×10	45	4	50×40	65	6
25×15	45	4	65×32	74	6
25×20	45	4	65×40	74	6
32×10	50	4	65×50	74	6
32×15	50	4	80×40	80	6
32×20	50	4	80×50	80	6
32×25	50	4	80×65	80	6
40×15	55	4	100×50	94	6
40×20	55	4	100×65	94	6

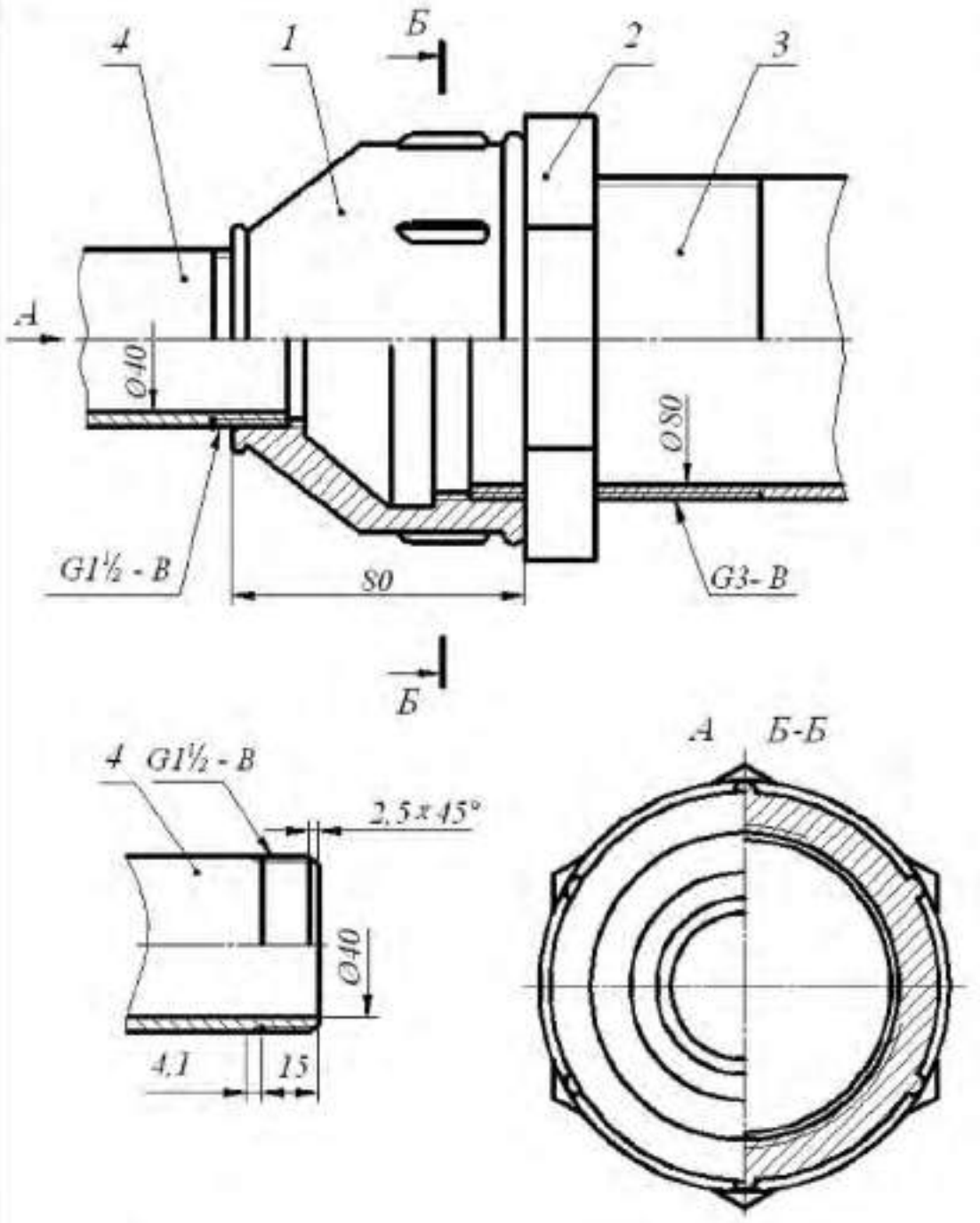
Примеры условных обозначений:

3. Муфта переходная без покрытия с D_y=15 мм на D_y=40 мм:

   Муфта 40×15 ГОСТ 8957-75

4. Муфта переходная с цинковым покрытием:

   Муфта Ц 40×15 ГОСТ 8957-75



Спецификация выполняется по ГОСТ 2.108-68

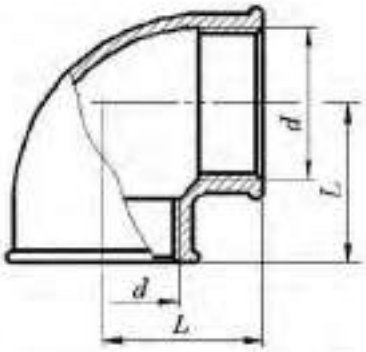
Основная надпись форма 1 ГОСТ 2.104-68

Рис. 4. Соединение труб переходной муфтой

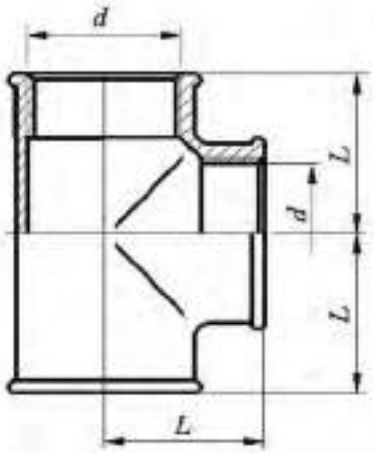
4.2. Соединения труб угольниками, прямыми тройниками и прямыми крестами

Прямые тройники, кресты и угольники в системах отопления, водо- и газопроводах служат для изменения направления потока жидкости или газа.

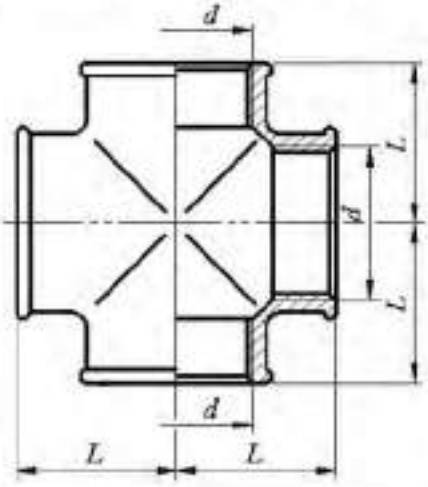
Проходные угольники (ГОСТ 8947-75)



Прямые тройники (ГОСТ 8948-75)



Прямые кресты (ГОСТ 8951-75)

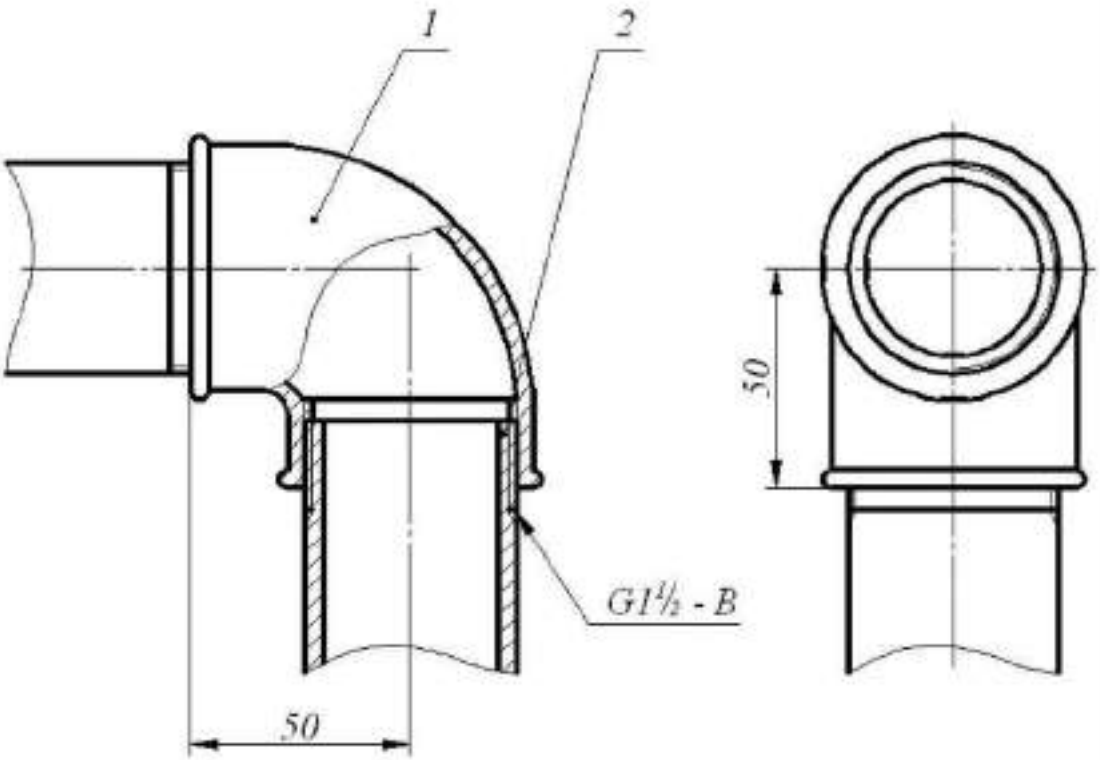


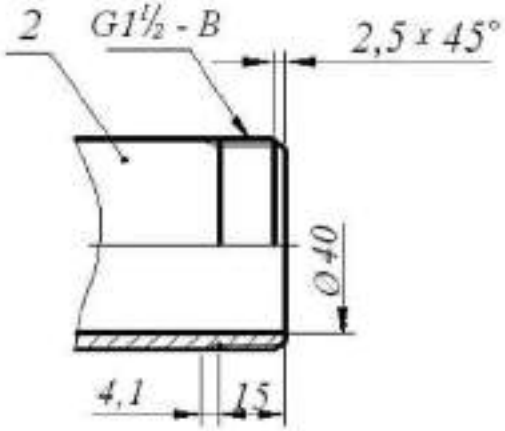
Условный проход $D_y \times D_{1y}$	Резьба	L, мм
8	*G¼-B*	21
10	*G⅜-B*	25
15	*G½-B*	28
20	*G¾-B*	33
25	*G1-B*	38
32	*G1¼-B*	45
40	*G1½-B*	50
50	*G2-B*	58
65	*G2½-B*	69
80	*G3-B*	78
100	*G4-B*	96

Примеры условных обозначений:

1. Проходной угольник с углом 90° исполнения 1 с цинковым покрытием с D_y=20 мм:

   Угольник 90°-1-Ц-200 ГОСТ 8946-75;
2. Тройник 40 ГОСТ 8948-75;
3. Крест Ц-32 ГОСТ 8951-75.

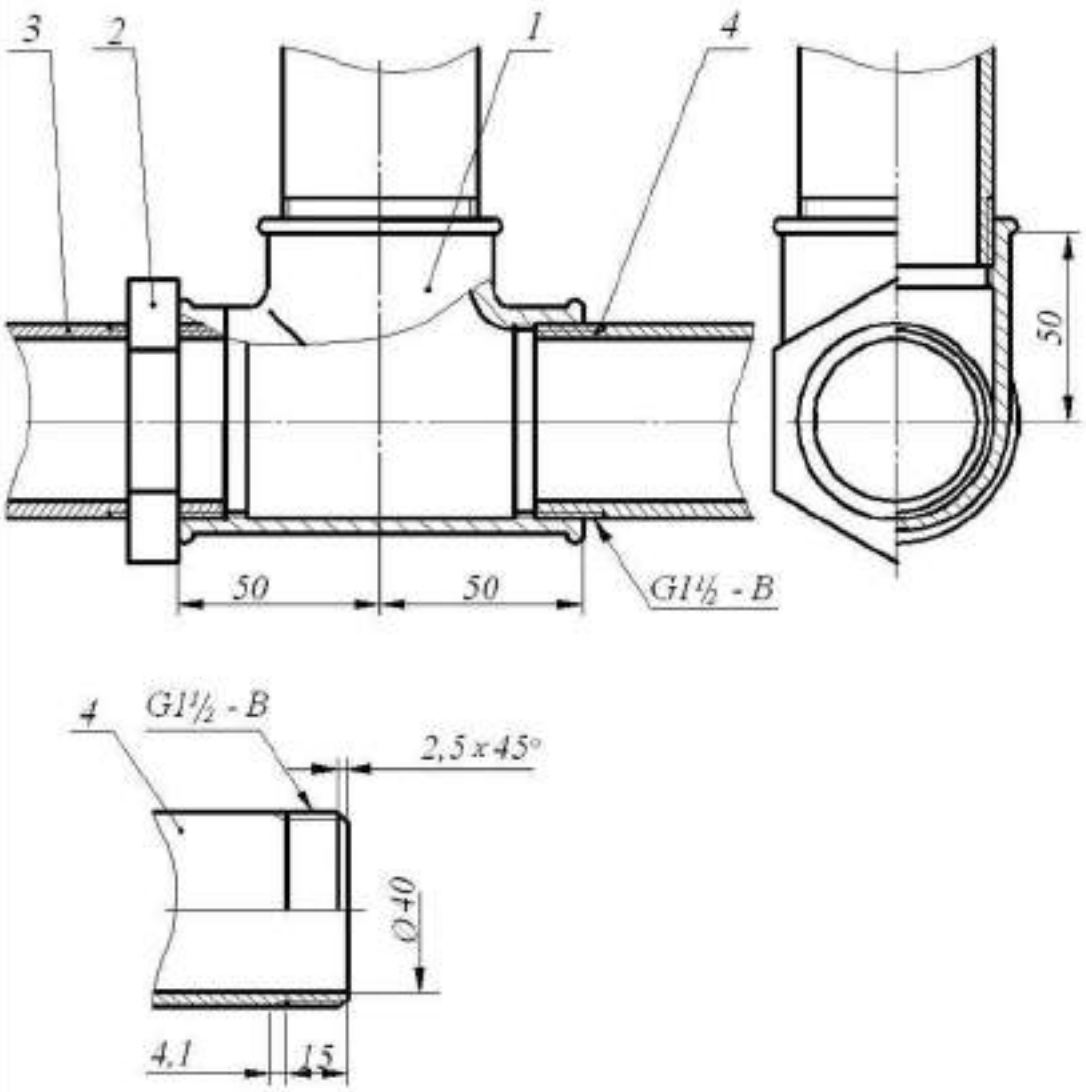




Спецификация выполняется по ГОСТ 2.108-68

Основная надпись форма 1 ГОСТ 2.104-68

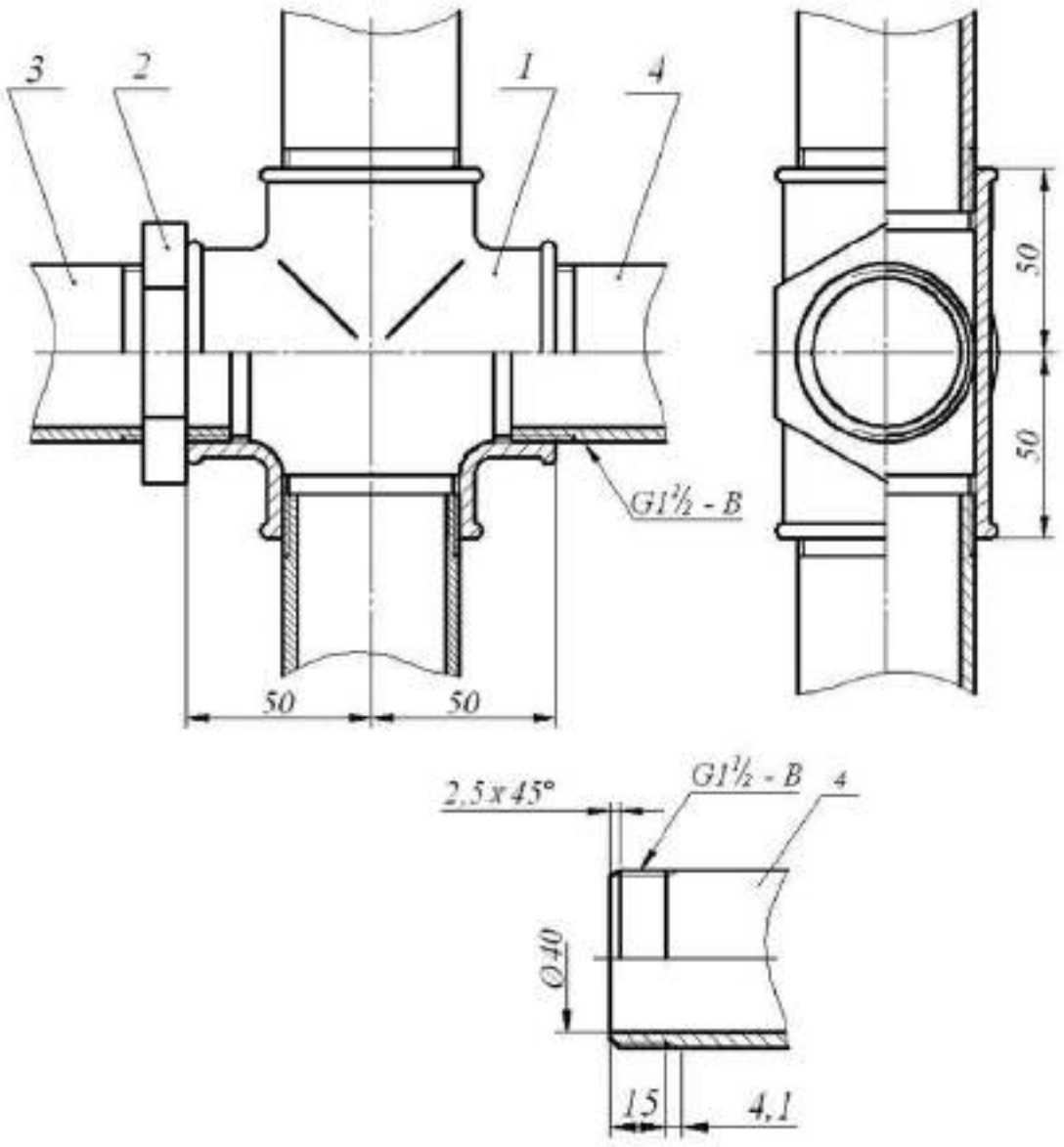
Рис. 5. Соединение труб проходным угольником



Спецификация выполняется по ГОСТ 2.108-68

Основная надпись форма 1 ГОСТ 2.104-68

Рис. 6. Соединение труб прямым тройником



Спецификация выполняется по ГОСТ 2.108-68

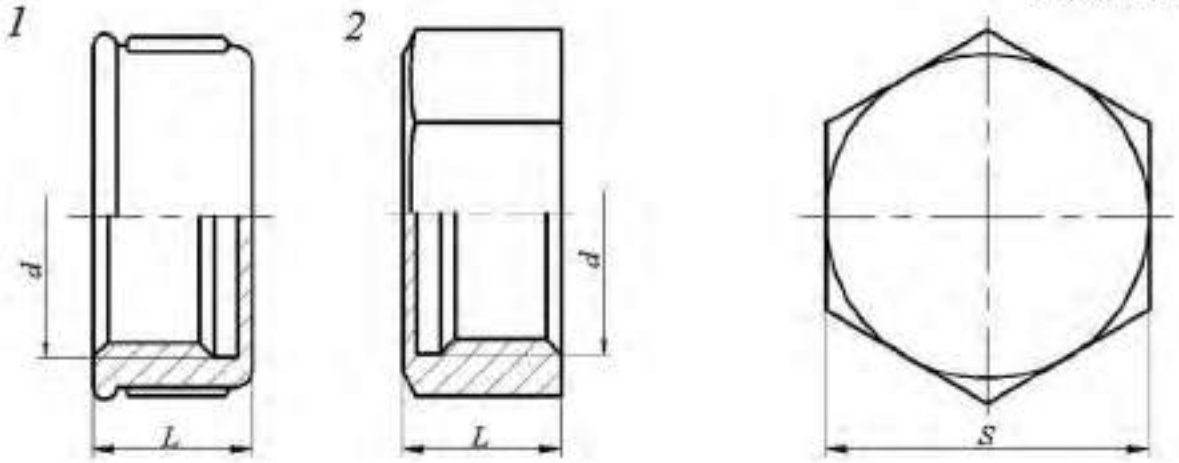
Основная надпись форма 1 ГОСТ 2.104-68

Рис. 7. Соединение труб прямым крестом

4.3. Перекрытие трубы колпаком

Для перекрытия трубы используют колпаки двух исполнений: с ребрами жесткости и с корпусом, имеющим форму шестигранной призмы под гаечный ключ. размеры проточек трубной цилиндрической резьбы определены ГОСТ 10549-80 (табл. 2).

Таблица 9



Условный проход	L		Число ребер	S
	Исполнение			
	1	2		
8	15	15	2	10
10	17	17	2	22
15	19	19	2	27
20	22	22	2	32
25	24	24	4	41
32	27	27	4	50
40	27	27	4	55
50	32	32	6	70
65	-	35	-	85
80	-	38	-	100

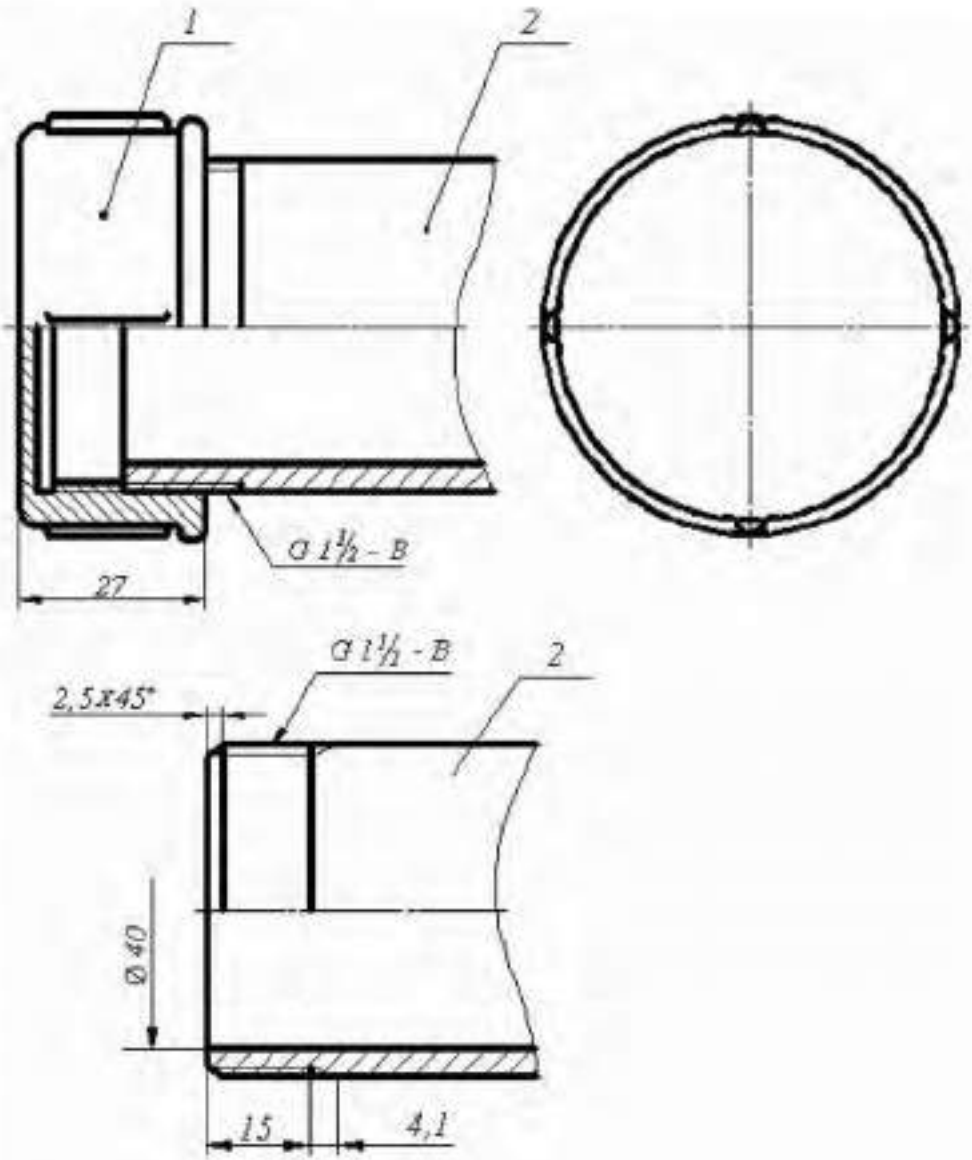
Примеры условных обозначений:

1. Колпак исполнения 2 без покрытия с D_y=40 мм:

   Колпак 2-40 ГОСТ 8962-75

2. Колпак исполнения 1 с цинковым покрытием с D_y=40 мм:

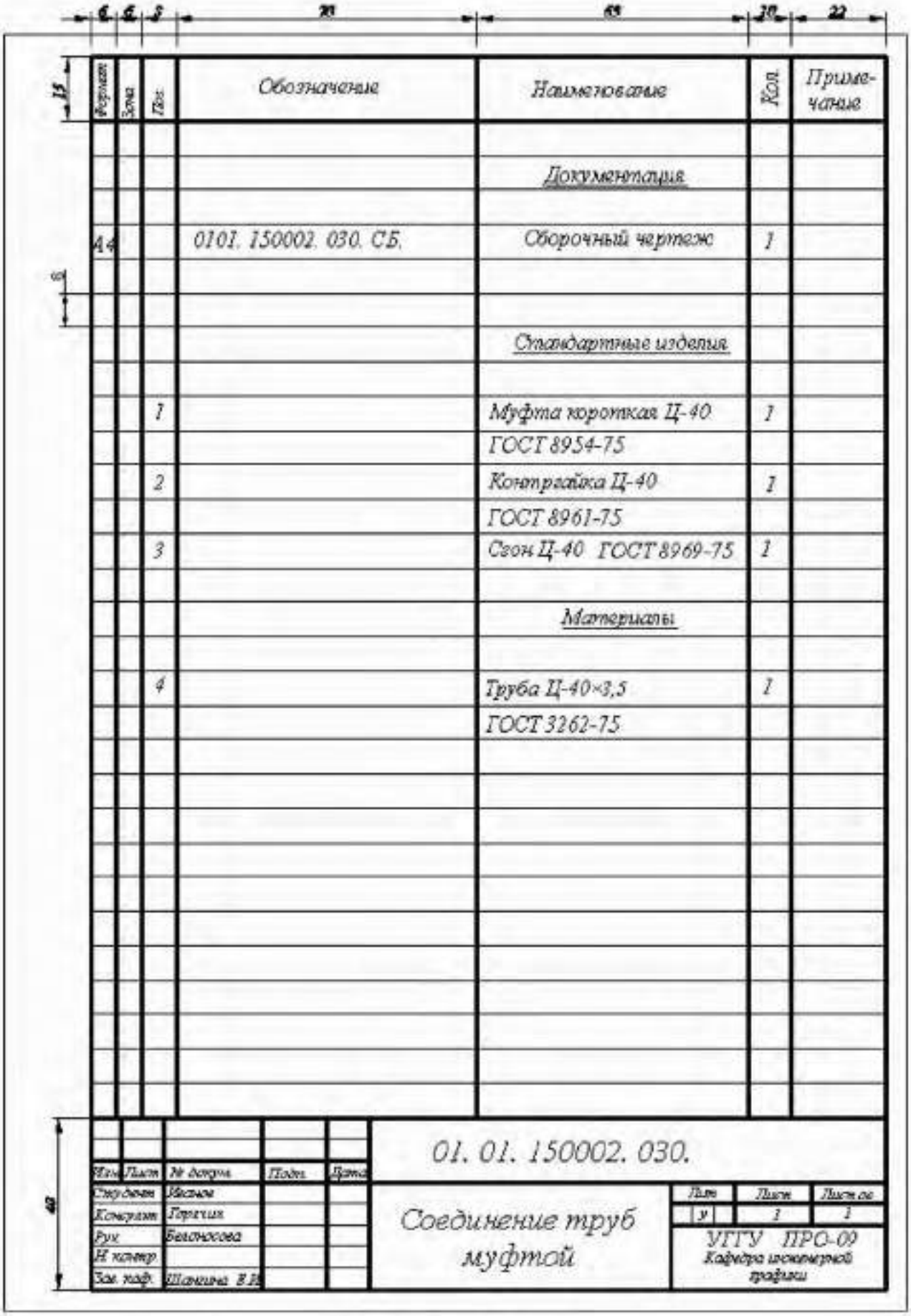
   Колпак 1-Ц-40 ГОСТ 8962-75



Спецификация выполняется по ГОСТ 2.108-68

Основная надпись форма 1 ГОСТ 2.104-68

Рис. 8. Перекрытие трубы колпаком



Формат	Зона	Поз.	Обозначение	Наименование	Кол.	Примечание
				Документация		
А4			0101. 150002. 030. СБ.	Сборочный чертеж	1	
				Стандартные изделия		
		1		Муфта короткая Ц-40	1	
				ГОСТ 8954-75		
		2		Контргайка Ц-40	1	
				ГОСТ 8961-75		
		3		Сгон Ц-40 ГОСТ 8969-75	1	
				Материалы		
		4		Труба Ц-40×3,5	1	
				ГОСТ 3262-75		

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	01. 01. 150002. 030.		
Студент		Иванов			Соединение труб муфтой	Лит.	Лист.	Листов 1
Консульт.		Горячих				У	1	
Рук.		Белоногова				УГТУ ПРС-09 Кафедра инженерной графики		
Н. контр.								
Зав. каф.		Шангина В.В.						

Рис. 9. Спецификация

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Анурьев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя. В 3 т. Т. 1. - 9-е изд., перераб. и доп. Под ред. И. Н. Жестковой. – М.: Машиностроение, - 2006 – 928 с. ил.

2. ГОСТ 27148-86. Выход резьбы, сбеги, недорезы, проточки. Размеры. Переиздание 23.06.2009

3. Резьбы. – М.: Изд. стандартов, 2000.

4 Талалай П. Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 256 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

5. Чекмарев А. А., Осипов В. К. Справочник по машиностроительному черчению: учебное пособие. – М.: высшая школа, 2008 – 493 с.

6 Федоренко В. А., Шошин А. И. Справочник по машиностроительному черчению. – изд. Альянс, 16-е изд., переработанное, 2007. – 416 с.

Дополнительная литература

7 Басва Г. Г. Условности машиностроительного черчения. Методическая разработка. Свердловский горный институт. – Свердловск, 1976.

8 Попова Г.Н., Алексеев С.Ю. Машиностроительное черчение. Справочник. – М.: Машиностроение, 1994

Учебное издание

Белоносова Ирина Борисовна

Методическое пособие
по курсу «Инженерная графика»
по теме «Условности машиностроительного черчения»
для студентов всех спецнальностей»
«Изображение трубных резьбовых соединений»

4-е издание, стереотипное

Редактор *Л. Н. Авдеева*

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60 ‹84 1/8. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 1,3 Уч. - изд. л. 1,11. Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет

Минобрнауки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»

Е. И. Шангина
Г.А. Шангин

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издание второе, дополненное, исправленное

Екатеринбург

УДК 514.18
Ш 20

Рецензенты: *Денисов М. А.* профессор, д-р техн. наук кафедры «Инженерная графика» Уральского федерального университета
Савельев Ю. А. канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерная графика» Уральского государственного университета путей сообщения.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета

Шангина Е. И., Шангин Г. А.
Ш 20 Инженерная графика. Задачи и решения. Изд. 2-е дополн., исправл. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2015. – 153 с.: ил.

Рассматриваются задачи, которые студенты должны уметь решать в курсе «Инженерная графика». Отличие этого задачника от существующих в том, что для всех задач даны достаточно подробные решения и описаны алгоритмы решения. Уровень задач – от самых простых до комплексных.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Горное дело» и «Прикладная геология», может быть полезно преподавателям и аспирантам, занимающимся вопросами приложений начертательной геометрии и инженерной графики.

УДК 514.18

©Уральская гос. горно-геолог. академия, 2006
© Уральский государственный горный университет, 2015
© Шангина Е. И., 2006
© Шангина Е. И., Шангин Г. А., 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начертательная геометрия занимается решением пространственных геометрических задач на плоском чертеже. Стереометрические (трёхмерные) объекты обсуждаются в ней с помощью планиметрических (двумерных) изображений этих объектов, проекций. Правила построения таких чертежей очень важны для понимания начертательной геометрии, поскольку они обеспечивают возможность решать пространственные задачи на плоском чертеже (модели). Правила сопоставления оригинала и плоской модели реализуются обратимостью чертежа, а именно данному оригиналу должен соответствовать вполне определённый чертёж, и, наоборот, чертежу соответствует определённый оригинал.

Решая задачу по начертательной геометрии, приходится всё время переводить с языка оригиналов, натуры, языка стереометрии на язык чертежа, изображений язык планиметрии, и наоборот, то есть по изображениям уметь представлять оригинал, а зная что-то об оригинале, понять, как он интерпретируется в изображении. Таким образом, прочитав текст условия задачи, следует уяснить суть стереометрической задачи, задачи о трёхмерных оригиналах, изображённых на этом двумерном чертеже. Затем нужно «увидеть» решение этой пространственной задачи (забыв на время о чертеже), то есть записать (на бумаге или в голове) план её решения (алгоритм). Лишь после этого можно приступать к выполнению чертежа, то есть начинать реализацию этих операций на чертеже.

Количество задач, решаемых способами начертательной геометрии, неизмеримо богаче, чем то, что здесь изложено. Однако данное учебное пособие – это попытка показать некоторые методы, способы и алгоритмы, которые используются начертательной геометрией при решении задач.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам за замечания и советы, направленные на улучшение содержания данной книги. Автор также выражает глубокую признательность В. А. Пекличу за предоставленные материалы.

I. ПРЯМАЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ. ГРАДУИРОВАНИЕ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

I.1. На заданной прямой $A_{25}B_{80}$ построить точку $C_?$, отстоящую от основной плоскости проекций на ***50*** (по масштабу чертежа). Прямая задана точками ***A(20,15,25), B(50,70,80).***

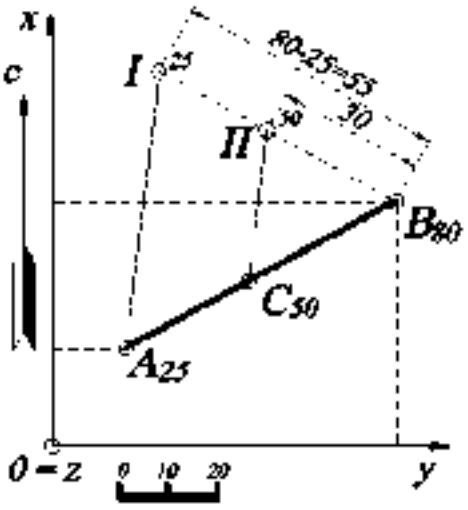


Рис. 1

Решение (рис. 1). Для нахождения точки $C_?$ необходимо на заданной прямой $A_{25}B_{80}$ найти точку с высотной отметкой ***50***. Для этого градуируют прямую $A_{25}B_{80}$. Через точку B_{80} проводят произвольную прямую $B_{80}I$ – шкалу высотных отметок, на которой откладывают разность высотных отметок A_{25} и B_{80}. Выбрав единичный масштаб ***1ед.=10*** (по масштабу чертежа), получают отрезок $B_{80}I=55$. Затем из точки ***II*** проводят отрезок прямой, параллельный отрезку прямой $A_{25}I$, и получают (на основании подобных треугольников) искомую точку C_{50}.

I.2. Найти натуральную величину отрезка прямой $A_{23}B_{66}$ и угол его наклона σ к основной плоскости проекций ***H***. Прямая задана точками ***A(20,15,23), B(50,70,80).***

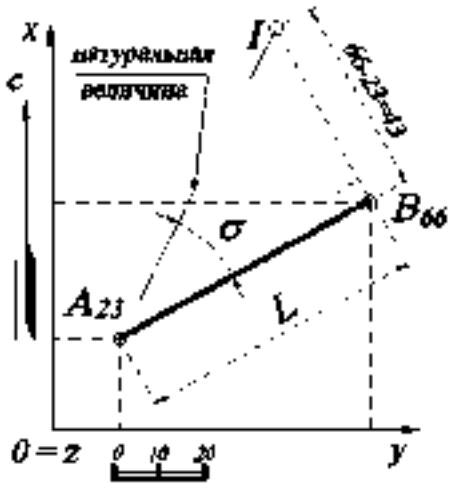


Рис. 2.

Решение (рис. 2). Для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения $A_{23}B_{66}$ в данном случае используют метод прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция этого отрезка ***I*** (заложение), а другим катетом – разность координат Δz (числовых отметок) концов отрезка, отстоящих от основ-

ной плоскости проекций *H*. Гипотенузой такого прямоугольного треугольника является натуральная величина этого отрезка. Поэтому на прямой $B_{46}1$, перпендикулярной $A_{23}B_{46}$, откладывают разницу (в заданном линейном масштабе) координат концов отрезка $\Delta z=43$, гипотенуза $A_{23}1$ – натуральная величина, а угол между гипотенузой и проекцией отрезка прямой – угол наклона к плоскости проекций σ.

I.3. На отрезке прямой $A_{50}B_{10}$ найти точку $C_?$, делящую этот отрезок в отношении: *(AC):(CB)=2:3*. Прямая задана точкой *A(50;30;50)*, азимутом падения $\alpha=120^0$, углом падения $\sigma=30^0$.

Решение (рис. 3). На плане строится точка A_{50}, заданная координатами. Затем находят точку B_{10}, зная азимут падения и угол падения прямой. Заложение отрезка прямой $A_{50}B_{10}$ определяют на профиле. Строят профиль, задав ось x' параллельно проекции отрезка $A_{50}B_{10}$. На линиях проекционной связи откладывают (в масштабе чертежа) от оси x' координаты z (числовые отметки) точек A_{50} и B_{10}. Получают профиль прямой $A_{50}B_{10}$. Точка $C_?$ определяется с помощью градуирования (пропорционального деления на заданные части, см. пример *I.1*). Другими словами, из точки B_{10} (можно и из точки A_{50}) проводят произвольный отрезок $B_{10}1$ длиной *5ед. =50* (по масштабу чертежа), который делят в отношении *(I,II):(II,B10)=2:3*. Затем проводят отрезок прямой IIC_{34}, параллельный отрезку прямой $1A_{50}$, и находят точку C_{34}, высотную отметку которой определяют на профиле (также числовую отметку можно определять градуированием на плане).

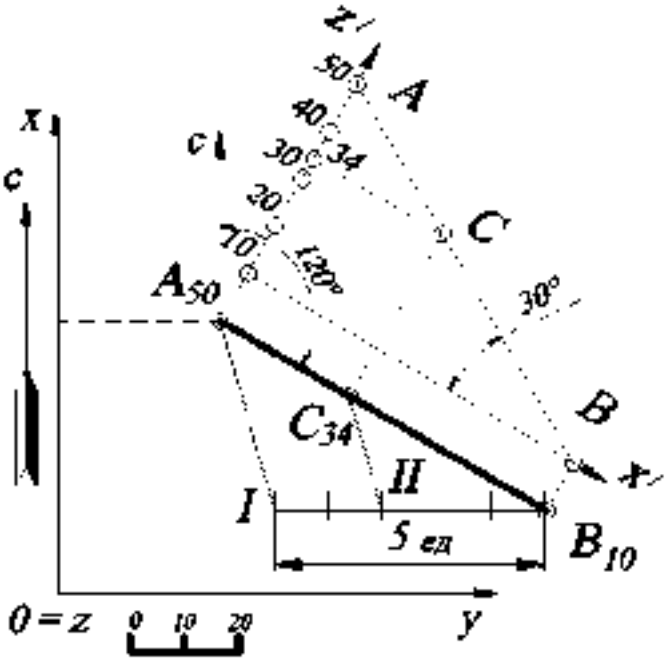


Рис. 3.

1.4. Построить отрезок прямой, симметричный отрезку заданной прямой $A_{10}B_{40}$ относительно: а) основной плоскости проекций ***H***, б) оси ***Ox***, в) оси ***Oy***, г) начала координат ***O***. Отрезок задан точками ***A(35,15,10)***, ***B(15,50,40)***.

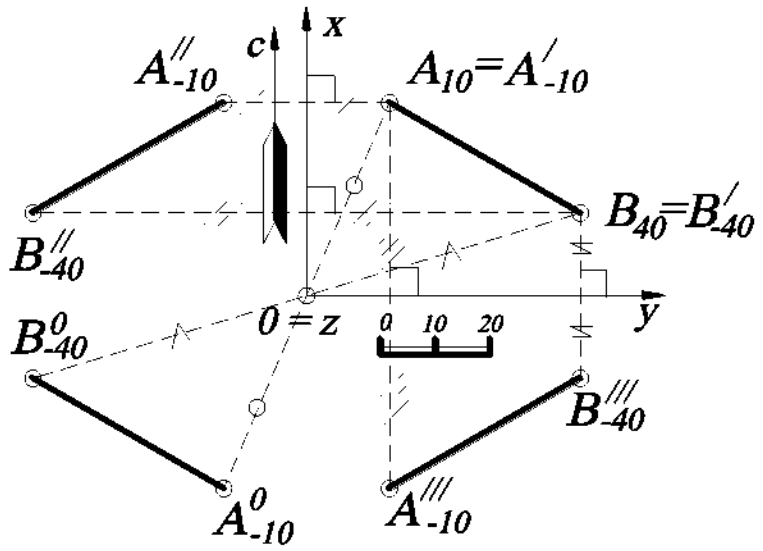


Рис. 4.

Решение (рис. 4). По координатам строят проекцию отрезка прямой $A_{10}B_{40}$. Затем находят образы заданного отрезка: а) относительно основной плоскости проекций ***H*** (плоскостная симметрия) – это проекция отрезка $A'_{-10}B'_{-40}$, совпадающая с проекцией заданного отрезка; б) относительно оси ***Ox*** (осевая симметрия) – из концов отрезка строятся вспомогательные прямые, перпендикулярные оси ***Ox***, на которых откладываются удвоенные отрезки, равные расстоянию от концов отрезка до оси ***Ox*** – это проекция отрезка $A''_{-10}B''_{-40}$; в) симметричный отрезок относительно оси ***Oy*** – $A'''_{-10}B'''_{-40}$ - строится по аналогии с осевой симметрией относительно ***Ox***; г) симметричный отрезок относительно начала отсчёта (центральная симметрия) с помощью вспомогательных прямых, проходящих через начало координат, на которых откладываются отрезки прямых, равные удвоенному расстоянию от концов заданного отрезка до начала координат ***O***. В этом случае получается проекция отрезка $A^0_{-10}B^0_{-10}$. Все полученные образы являются отображением заданного отрезка прямой $A_{10}B_{40}$.

1.5. На отрезке прямой $A_{10}B_{40}$ построить отрезок $A_{10}C_?$ заданной длины ***/AC/=40*** (по масштабу чертежа) и определить отметку точки $C_?$. Отрезок задан точками ***A(35,15,10)***, ***B(15,50,40)***.

Решение (рис. 5). Строят профиль параллельно заданной проекции прямой $A_{10}B_{40}$. В этом случае прямая $A_{10}B_{40}$ будет проецироваться на плоскость выбранного профиля в натуральную величину. Ось x' задают параллельно проекции отрезка $A_{10}B_{40}$. На линиях проекционной связи откладывают (в заданном масштабе) от оси x' координаты z (числовые отметки) точек A_{10} и B_{10}. Затем на профиле от точки A_{10} откладывают 40 единиц линейного масштаба и получают точку C с числовой отметкой 33. На плане точка C_{33} строится с помощью линий проекционной связи.

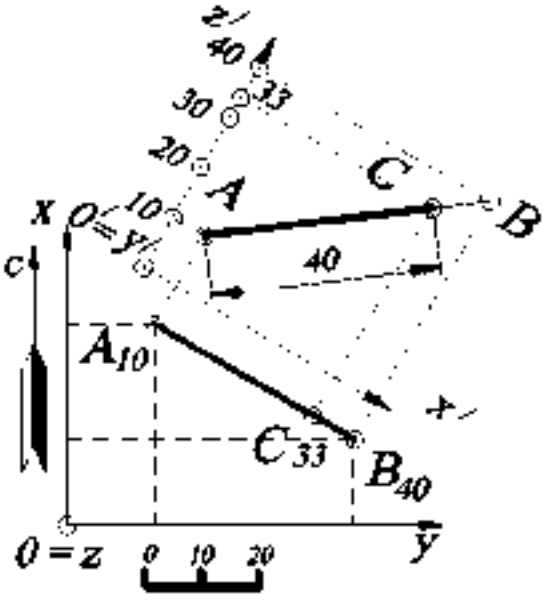


Рис. 5.

I.6. Найти расстояние от точки C_{20} до прямой $A_{40}B_{30}$. Проекции точек заданы координатами: $A(40,30,40)$, $B(20,70,30)$, $C(10,25,20)$.

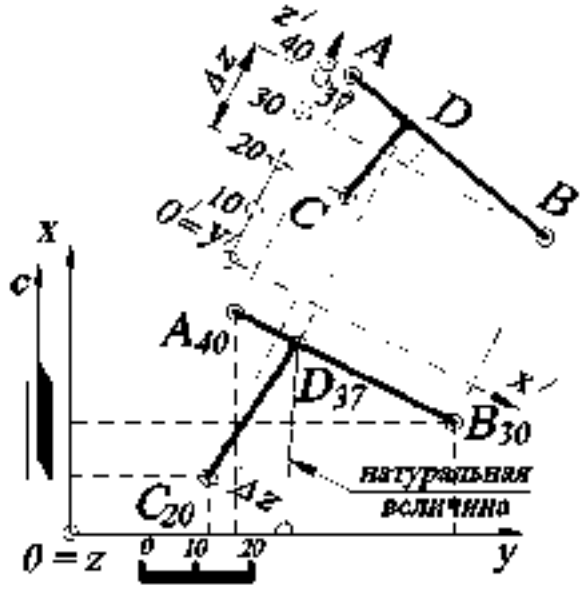


Рис 6

Решение (рис. 6). Расстояние от точки до прямой – это перпендикуляр, опущенный из точки C_{20} на прямую $A_{40}B_{30}$. Прямая $A_{40}B_{30}$ – прямая общего положения, следовательно, на плане прямой угол проецируется не в натуральную величину. Прямой угол проецируется без искажения в том случае, если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая ей не перпендикулярна (на основании теоремы о частном проецировании прямого угла). Поэтому строят профиль, плоскость которого параллельна прямой $A_{40}B_{30}$. На профиле строят прямую CD, перпендикулярную прямой AB. На плане

находят натуральную величину $C_{20}D_{37}$ методом прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция отрезка прямой $C_{20}D_{37}$, другим – разность числовых отметок $\Delta z=17$ (по масштабу чертежа), а гипотенуза – натуральная величина $|CD|$ (см. задачу 1.2).

1.7. Построить прямую $C_{20}D_?$, проходящую через точку C_{20} и параллельную прямой $A_{50}B_{10}$, длиной $|CD|=50$ (по масштабу чертежа). Проекции точек заданы следующими координатами: $A(40,25,50)$, $B(10,70,10)$, $C(60,45,20)$.

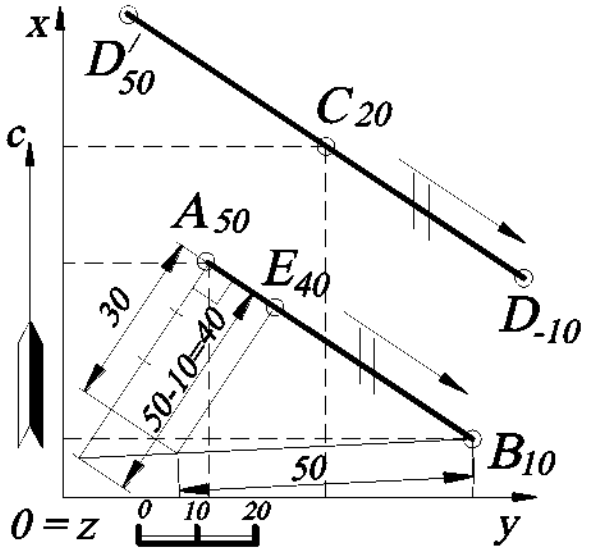


Рис. 7.

Решение (рис. 7). Поскольку проекции параллельных прямых параллельны, азимуты падения равны, заложения (интервалы) равны, то искомая прямая $C_{20}D_?$ будет параллельна заданной прямой $A_{50}B_{10}$. Заложение прямой $C_{20}D_?$ будет соответствовать заложению прямой $A_{50}B_{10}$, длиной 50. Следовательно, строится натуральная величина прямой $A_{50}B_{10}$ (методом прямоугольного треугольника, в соответствии с масштабом чертежа, 1 *ед.*$=10$). Отложив 50 (по линейному масштабу) от точки B_{10} (можно и от A_{50}) на натуральной величине прямой и перенеся её на проекцию $A_{50}B_{10}$ (используя подобие треугольников), получают точку F_{40}. Заложение прямой $C_{20}D_?=B_{10}E_{40}$, а отметка точки $D_?$ определяется в соответствии с разницей высотных отметок точек B_{10} и E_{40} ($40-10=30$). Задача имеет два решения, то есть две прямые – $C_{20}D'_{50}$ и $C_{20}D_{-10}$.

1.8. Построить проекции ромба $ABCD$, диагональ которого $|BD|=50$ (по масштабу) и лежит на прямой $M_{30}N_{30}$. Проекции точек заданы следующими координатами: $A(35,60,50)$, $M(40,20,30)$, $N(10,80,30)$.

Решение (рис. 8). Решение задачи основывается на свойстве ромба, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и в точке их пересечения делятся пополам. Поскольку $M_{30}N_{30}$ является горизонтальной прямой, то из точки A_{50} строится прямая, перпендикулярная прямой $M_{30}N_{30}$ (на основании теоремы о проецировании прямого угла), на которой откладывают удвоенное расстояние $A_{50}O_{30}$ (где O_{30} – точка пересечения осей ромба) и определяют проекцию точки C_{10} и её числовую отметку (см. задачу 1.4. – осевая симметрия). Затем от точки O_{30} (по разные стороны) на отрезке прямой $M_{30}N_{30}$ откладывают по *25* (в соответствии с масштабом чертежа), получая диагональ ромба $B_{30}D_{30}$. Точки A_{50}, B_{30}, C_{10} и D_{30} определяют вершины искомого ромба.

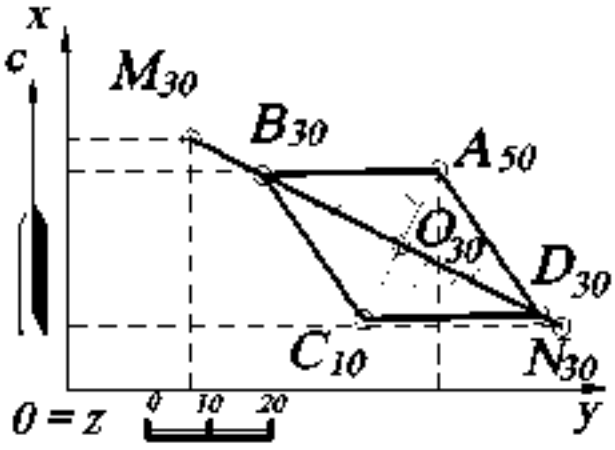


Рис. 8.

1.9. Отрезок прямой $A_{50}B_?$ имеет уклон *i=1:2*. Определить числовую отметку точки $B_?$. Проекции точек заданы следующими координатами: *A(15,17,50). B(50,65,?).*

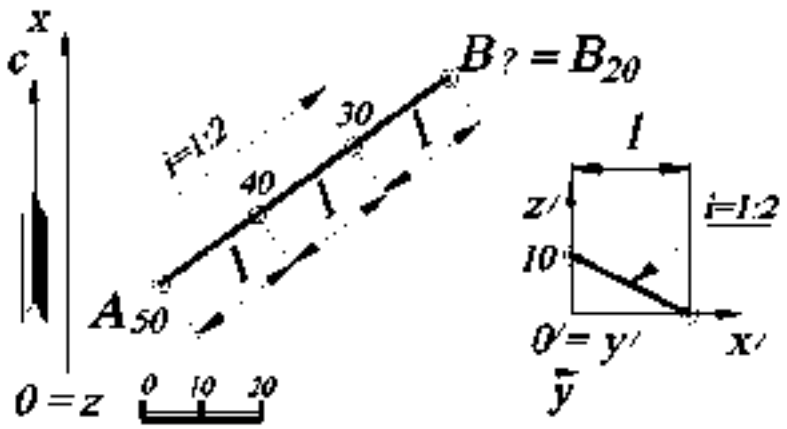


Рис. 9.

Решение (рис. 9). ***Уклон прямой*** – это отношение единичного отрезка к интервалу прямой или, другими словами, отношение противолежащего катета к прилежащему. Единичный отрезок определяется по линейному масштабу, тогда интервал в два раза больше единичного отрезка. Направление уклона указывает в сторону уменьшения числовых отметок, то есть точка ***B*** имеет отметку ***20***.

1.10. Построить проекции квадрата *ABCD*, диагональ которого принадлежит отрезку прямой $M_{50}N_{10}$, и дана проекция вершины A_{20}.

Решение (рис. 10). Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны и в точке их пересечения делятся пополам. Поскольку прямая $M_{50}N_{10}$ – прямая общего положения, то для задания проекции направления диагонали строят профиль и определяют точку O_{32} и точку C_{44} (см. задачу 1.6). Для нахождения натуральной величины половины диагонали квадрата $O_{32}A_{20}$ используют метод прямоугольного треугольника (см. задачу 1.2). На профиле откладывают натуральную величину полученной диагонали ***BD=26*** (по масштабу чертежа) и определяют отметки точек B_{20} и D_{44}, а затем в проекционной связи получают их на плане.

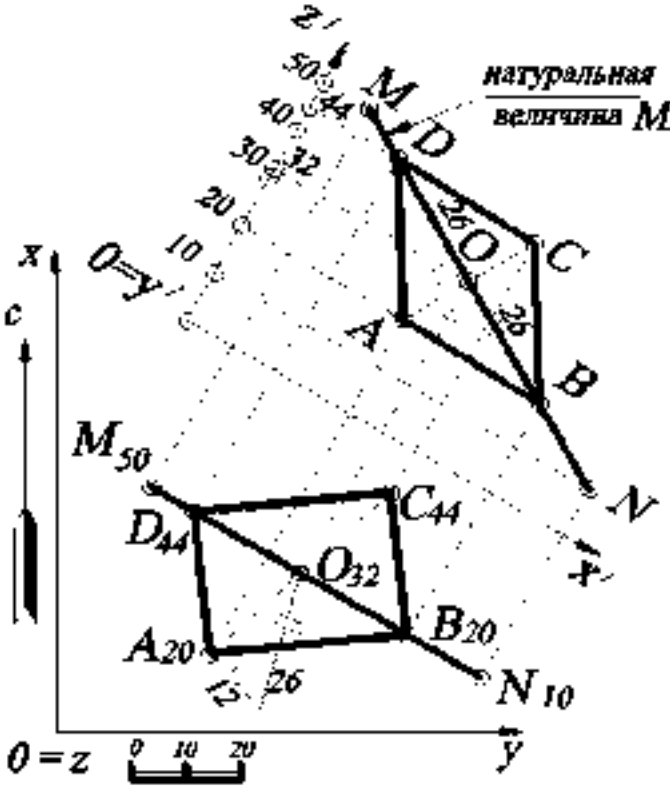


Рис. 10

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1. Разделить отрезок прямой общего положения $A_{10}B_{60}$ точкой $C_?$ в отношении $(A_{10}C_?):(C_?B_{60})=3:4$. Найти числовую отметку точки $C_?$. Проекции точек заданы координатами: ***A(20, 20, 10)***; ***B(45, 65, 60)***

1.2. Построить прямую, проходящую через заданную точку ***A(20, 20, 10)*** и пересекающую ось *z* под углом 30^0, длиной ***50 мм***.

1.3. Дана прямая *a*, заданная отрезком $C_{60}B_?$, где $B_?$ – точка пересечения с осью Oz. Определить числовую отметку точки $B_?$ и указать возможное количество

решений. Интервал прямой ***a*** равен *а)* ***10 мм***; *б)* ***20 мм***. Координаты точки ***C(45, 60, 60)***.

1.4. Построить прямую $A_{60}B_{?}$, пересекающую основную плоскость проекций ***xOy*** в точке $B_{?}$, азимут падения которой $\alpha=120^0$, угол падения $\sigma=30^0$. Найти натуральную величину этой прямой. Координаты точки ***A(40, 15, 60)***.

1.5. Найти точку пересечения $C_{?}$ прямой $A_{10}B_{50}$ с вертикальной плоскостью, проходящей через *а)* ось ***Ox*** (плоскость ***zOx***); *б)* ось ***Oy*** (плоскость ***zOy***). Проекции точек заданы координатами: ***A(55, 25, 10)***, ***B(10, 60, 50)***.

1.6. Через данную точку C_{60} провести прямую так, чтобы она пересекала заданную прямую $A_{10}B_{50}$ и была параллельна вертикальной плоскости, проходящей через *а)* ось ***Ox*** (плоскость ***zOx***); *б)* ось ***Oy*** (плоскость ***zOy***). Проекции точек заданы координатами: ***A(55, 25, 10)***, ***B(10, 80, 50)***, ***C (45, 60, 60)***.

1.7. Построить прямую, проходящую через точку ***A(60, 65, 40)*** и пересекающую ось ***Oy*** под углом 30^0.

1.8. Через данную точку C_{33} провести прямую $C_{33}D_{?}$, пересекающую заданную прямую $A_{10}B_{60}$ и параллельную основной плоскости проекций ***xOy***. Проекции точек заданы координатами: ***A(20, 20, 10)***; ***B(45, 65, 60)***, ***C(70, 30, 33)***.

1.9. Определить относительное положение двух прямых ***AB*** и ***CD***. Проекции точек заданы координатами: ***A(20, 20, 20)***, ***B(80, 90, 70)***, ***C(30, 70, 50)***, ***D(70, 10, 0)***. Определить натуральную величину $C_{50}D_{0}$.

1.10. Построить проекцию отрезка прямой $A_{?}D_{10}$, на которой лежат точки $B_{?}$ и C_{50}. Проекции точек заданы координатами: ***A(20, 20, ?)***, ***B(40, 55, ?)***, ***C(60, ?, 50)***, ***D(?, 115, 10)***. Определить натуральную величину $A_{?}D_{10}$.

1.11. Найти недостающие координаты точек прямой ***AB***, если известно, что точка ***C*** – след отрезка прямой ***AB*** с плоскостью проекций ***xOy*** (то есть точка пересечения прямой с плоскостью проекций ***xOy***). Определить натуральную величину прямой ***AB***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, ?, ?)***, ***B(65, 65, 50)***, ***C(50, 35, ?)***.

1.12. Через точку $M_?$, принадлежащую прямой ***AB***, построить горизонтальную прямую линию, которая пересекает две заданные параллельные прямые ***AB*** и ***CD*** на высоте ***55 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 15, 10)***, ***B(60, 65, 70)***, ***C(20, 15, 40)***.

1.13. Найти расстояние от точки C_{50} до прямой $A_{10}B_{70}$. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 15, 10)***, ***B(60, 65, 70)***, ***C(20, 35, 50)***.

1.14. Найти расстояние от точки M_0 до *а)* прямой ***AB***, *б)* прямой ***CD***. Проекции точек заданы координатами: ***M(40, 50, 0)***, ***A(50, 0, 50)***, ***B(10, 0, 10)***, ***C(0, 20, 20)***, ***D(0, 70, 70)***.

1.15. Через точку $M_?$, принадлежащую прямой ***AB***, построить горизонтальную прямую линию, которая пересекает две заданные пересекающиеся прямые ***AB*** и ***BC*** на высоте ***55 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(60, 65, 70)***, ***B(20, 15, 40)***, ***C(50, 90, 80)***.

1.16. Построить высоту ***CD*** треугольника $A_{10}B_{70}C_{50}$. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 15, 10)***, ***B(60, 65, 70)***, ***C(10, 40, 50)***.

1.17. Построить проекции параллелограмма, диагональю которого является отрезок $A_{40}C_{10}$, а вершина – точка B_{50}. Проекции точек заданы координатами: ***A(20, 15, 40)***, ***C(50, 90, 10)***, ***B(10, 75, 50)***.

1.18. Построить проекции ромба ***ABCD***, диагональю которого является отрезок $A_{60}C_{10}$, а вершина – точка $D_?$ принадлежит отрезку прямой $F_{50}E_0$. Проекции точек заданы координатами: ***A(50, 15, 60)***, ***C(80, 90, 10)***, ***F(35, 30, 50)***, ***E(30, 100, 0)***.

1.19. Построить треугольник, симметричный заданному треугольнику $A_{20}B_{40}C_{60}$, относительно *а)* стороны $A_{20}B_{40}$; *б)* стороны $B_{40}C_{60}$. Проекции точек заданы координатами: ***A(60, 30, 20)***, ***B(30, 80, 40)***, ***C(20, 40, 60)***.

1.20. Найти натуральную величину треугольника $A_{10}B_{30}C_{60}$. Проекции точек заданы координатами: ***A(30, 30, 10)***, ***B(10, 100, 30)***, ***C(80, 50, 60)***.

1.21. Достроить проекцию плоского четырёхугольника ***ABCD***, если известны координаты точек: ***A(55, 25, 10)***, ***B(15, 10, 30)***, ***C (10, 60, 50)***, ***D(60, ?, 30)***.

1.22. Найти линию пересечения плоскости треугольника $A_{10}B_{50}C_{60}$ с вертикальной плоскостью, проходящей через ось ***Ox***. Проекции точек заданы координатами: ***A(55, 25, 10), B(10, 60, 50), C (45, 60, 60)***.

1.23. Построить на отрезке прямой ***AB*** отрезок прямой ***AE***, равный отрезку прямой ***CD***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(20, 20, 20)***, ***B(50, 60, 70)***, ***C(30, 70, 30)***, ***D(40, 90, 10)***.

1.24. Построить квадрат ***ABCD*** по его диагонали ***AC***, если известно, что вторая его диагональ ***BD*** параллельна плоскости проекций ***xOy***. Проекции точек заданы следующими координатами ***A(30, 50, 50)***, ***C(60, 90, 10)***.

1.25. Построить точку $D_?$, симметричную точке C_{20} относительно прямой ***AB***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 30, 40)***; ***B(20, 70, 30)***; ***C(10, 25, 20)***. Определить расстояние от точки $D_?$ до прямой ***AB***.

1.26. Построить параллелограмм $ABC'D'$, симметричный параллелограмму ***ABCD*** относительно стороны ***AB***. Проекции точек заданы координатами: ***A(75, 25, 50)***, ***B(40, 75, 20)***, ***C(0, 65, 40)***, ***D(?, ?, ?)***.

1.27. Построить проекции прямоугольного треугольника ***ABC***, один катет ***AB*** которого известен, а вершина ***C*** лежит на прямой ***DE***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(70, 25, 50)***, ***B(80, 50, 50)***, ***D(20, 25, 10)***, ***E(70, 80, 50)***.

1.28. Построить прямоугольник ***ABCD***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(40, 30, 50)***, ***B(20, 60, 20)***, ***C(30, 90, ?)***.

1.29. Найти кратчайшее расстояние от точки ***A*** до точки ***B*** с пересечением плоскости проекций ***xOy*** в точке $C_?$. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(70, 25, 50)***, ***B(20, 70, 30)***.

1.30. Найти кратчайшее расстояние от точки ***A*** до точки ***B*** с пересечением сначала плоскости проекций ***xOy*** в точке $C_?$, а затем плоскости проекций ***xOz*** в точке $D_?$. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(70, 25, 50)***, ***B(20, 70, 30)***.

2. ПЛОСКОСТЬ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

2.1. Определить элементы залегания плоскости, заданной тремя неколлинейными точками A_3, B_2, C_0. Построить разрез в крест простирания, то есть вертикальная плоскость разреза должна проходить перпендикулярно горизонталям заданной плоскости (рис. 11).

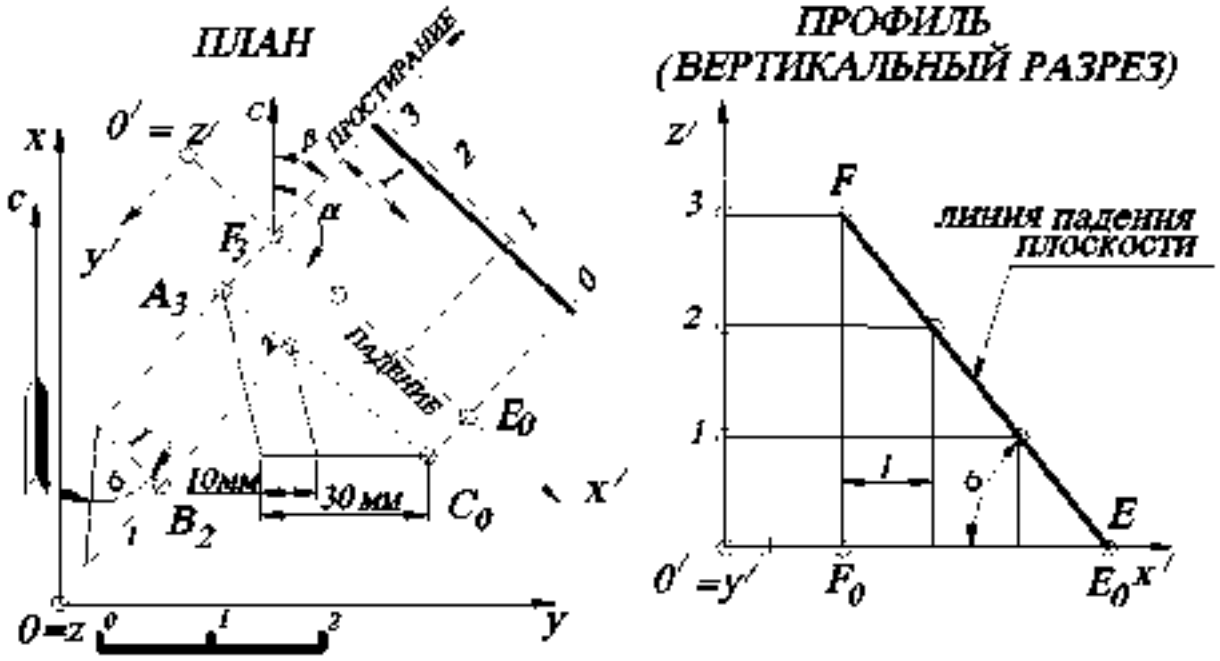


Рис. 11.

Алгоритм решения.

1. В заданной плоскости ($A_3B_2C_0$) на плане строят горизонталь *2-2*. Для этого необходимо проградуировать проекцию отрезка прямой A_3C_0 (см. задачу 1.1). Горизонталь с соседней целочисленной отметкой (*3-3*) будет параллельна горизонтали *2-2*. Кратчайшее расстояние между горизонталями *2-2* и *3-3* является интервалом заданной плоскости *l*. Перпендикулярно к проекциям горизонталей задают масштаб заложения.

2. Находят линию падения плоскости (линию наибольшего ската, являющуюся масштабом заложения), проекция которой перпендикулярна горизонталям плоскости.

3. Определяют азимуты падения и простирания. ***Азимут падения плоскости*** α – это угол, отсчитываемый по часовой стрелке (иногда говорят «правый угол») от северного направления меридиана до направления падения плоскости. ***Направление простирания*** определяется правым направлением горизонталей, если смотреть в сторону восстания плоскости. ***Азимут простирания*** β - это угол, отсчитываемый от северного направления меридиана по часовой стрелке до направления простирания. Причём угол между азимутом падения и азимутом простирания всегда равен 90^0.

4. Находят угол падения плоскости на разрезе вкрест простирания. ***Угол падения*** δ - это угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций H (основной плоскости проекций). Определяется углом наклона линии падения и её проекцией на плоскость проекций. Зная интервал и единицу линейного масштаба, на профиле определяют угол падения σ (можно определять на плане (см. рис.11), такое изображение называется наложенным сечением).

2.2. Через точку C_{50} провести в плоскости треугольника $A_0B_{80}C_{50}$ прямую n, уклон которой вдвое меньше уклона плоскости.

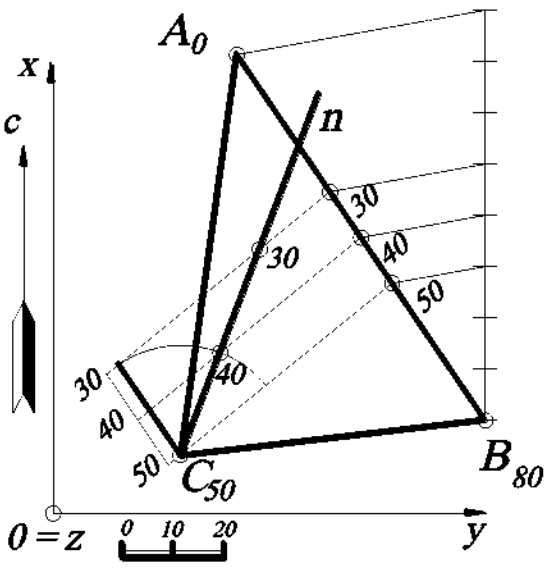


Рис. 12.

Решение (рис. 12). Строят горизонтали плоскости (см. задачу 2.1) $A_0B_{80}C_{50}$ с целыми отметками. Расстояние между проекциями соседних горизонталей – это интервал масштаба заложения плоскости. Строят окружность в точке C_{50} радиусом, равным удвоенному интервалу плоскости. Эта окружность изображает

основание конуса вращения с вершиной в точке C_{50}, высота которого равна ***10*** (в масштабе чертежа), то есть расположена в горизонтальной плоскости с отметкой ***40***. Уклон всех образующих конуса вдвое меньше уклона заданной плоскости, а две образующие, по которым конус пересекается с плоскостью $A_{60}B_{50}C_{40}$, – это две искомые прямые. Они проходят через точки пересечения окружности основания с ***40***-й горизонталью плоскости $A_{60}B_{50}C_{50}$ (показана одна параллель конуса).

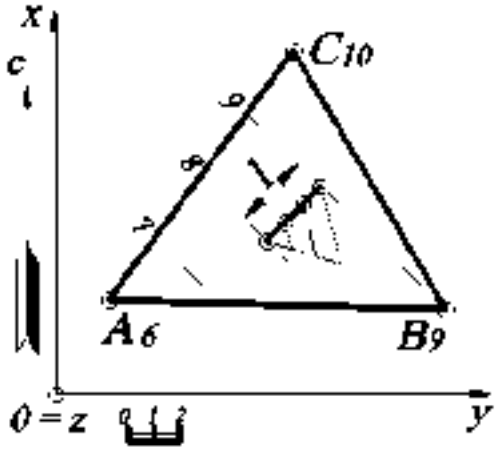


Рис. 13.

2.3. Плоскость $A_6B_9C_{10}$ имеет уклон ***i=1:3***. Определить масштаб чертежа.

Решение (рис. 13). Строят горизонтали плоскости и, разделив интервал между ними на три равные части (уклон плоскости равен *1:3*), получают единицу масштаба. Деление производят следующим образом: строят вспомогательную прямую, на которой откладывают три равных отрезка и с помощью подобных треугольников находят три равных отрезка на интервале плоскости. Масштаб чертежа показан на рис.13.

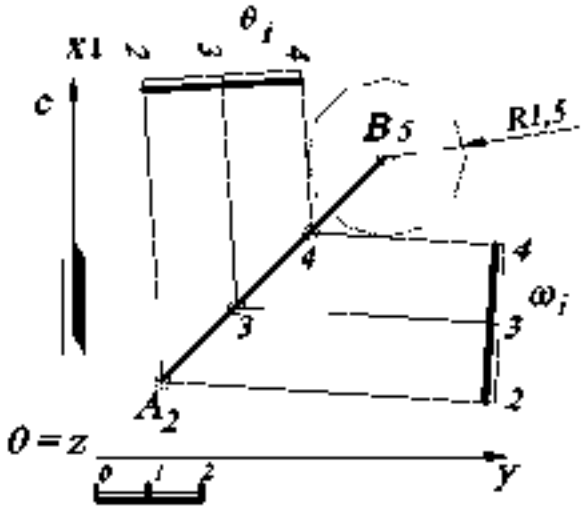


Рис. 14.

2.4. Через прямую A_2B_5 общего положения провести плоскость ω_i с уклоном ***i =1:1,5*** (рис. 14).

Решение. Градуируют прямую A_2B_5. Строят конус вращения с вершиной в точке B_5, вертикальной осью и окружностью основания, радиус которой равен *1,5* единицы линейного масштаба и которая расположена в горизонтальной плоскости с отметкой *4* (на *1* ниже точки B_5). Уклон любой образующей

конуса и уклон любой его касательной плоскости $i=1:1,5$. Поэтому две искомые плоскости ω_1 и θ_1 - это две касательные плоскости к конусу, проходящие через прямую A_2B_5.

2.5. Через точку E_5 провести плоскость P_1, параллельную прямым $A_{15}B_{10}$ и C_6D_3.

Решение (рис. 15). Градуируют прямые $A_{15}B_{10}$ и C_6D_3 (см. задачу 1.1) и через точку E_5 проводят прямые $m \| A_{15}B_{10}$ и $n \| C_6D_3$. Эти прямые задают искомую плоскость P_1.

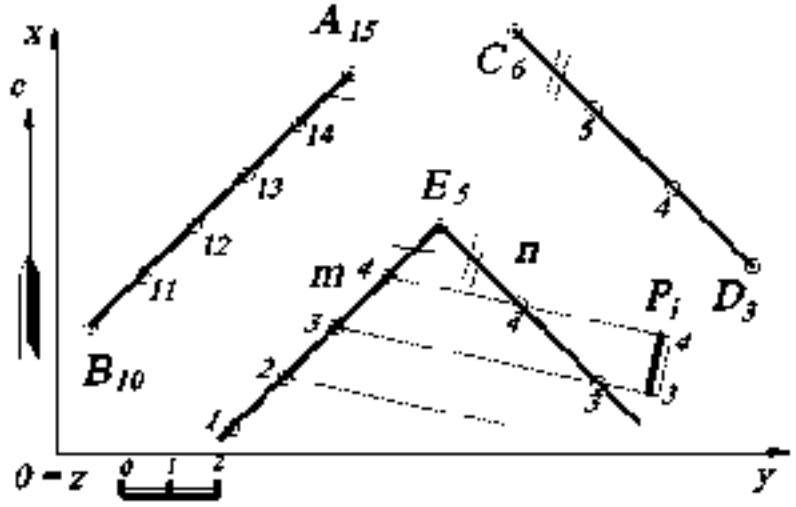


Рис. 15.

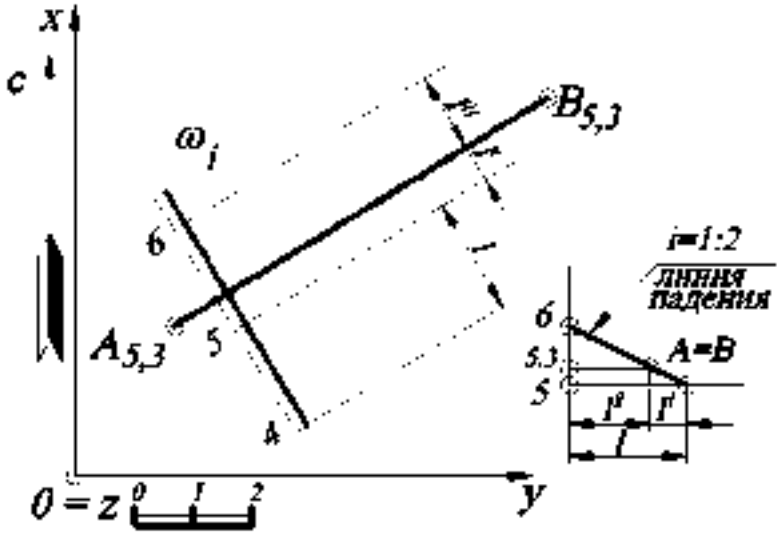


Рис. 16.

2.6. Через проекцию отрезка горизонтальной прямой $A_{5,3}B_{5,3}$ провести плоскость ω_1 с уклоном $i=1:2$ (рис. 16).

Решение. Проекция прямой $A_{5,3}B_{5,3}$ является проекцией горизонтали плоскости ω_1 с отметкой $5,3 - 5,3$, так как по условию задачи через неё проходит плоскость. Следовательно, перпендикулярно прямой $A_{5,3}B_{5,3}$ проводят масштаб заложения и градуируют его, зная интервал

l=1:i=2 единицы масштаба. Для этого строят профиль, на котором определяют расстояния *l'* и *l''* от горизонтали с числовой отметкой *5,3* (то есть прямой $A_{5,3}B_{5,3}$) до ближайших горизонталей с целочисленными значениями *5* и *6*. Масштаб заложения определяет искомую плоскость ω. Задача имеет два решения, так как вторая плоскость будет иметь противоположное направление падения.

2.7. Найти точку пересечения прямой A_1B_5 с плоскостью ω, заданной масштабом заложения ω_1 (рис. 17).

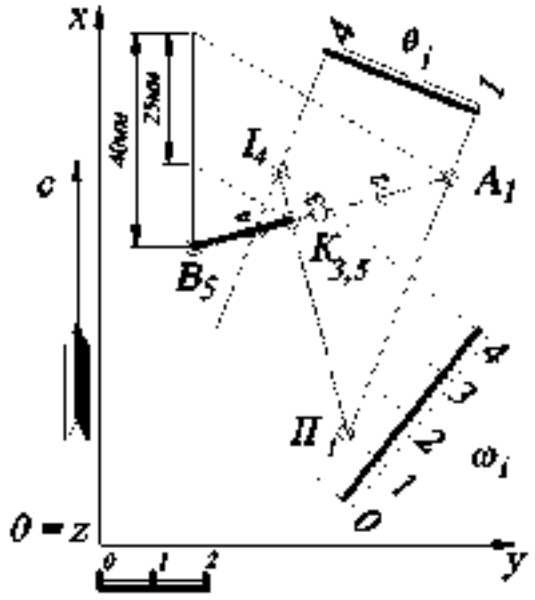


Рис. 17.

Решение. Через заданную прямую A_1B_5 проводят вспомогательную плоскость-посредник θ (на чертеже эта плоскость задана двумя горизонталями h_1 и h_4, см. признак принадлежности прямой к плоскости). Определяют пересечение посредника θ с заданной плоскостью ω – пересечение горизонталей с одинаковыми высотными отметками. Таким образом, находят точки *I* и *II*. Точки *I* и *II* определяют линию пересечения плоскости-посредника θ и заданной ω. Точка пересечения найденной прямой линии *I*, *II* с прямой A_1B_5 даёт искомую точку *K*.

Для нахождения высотной отметки точки *K* используют градуирование прямой A_1B_5. Из точки B_5 проводят прямую под произвольным углом. На этой прямой откладывают разность высотных отметок *A* и *B*, которая равна *4 ед.* (*1ед.=10 мм*). Затем через подобные треугольники находят числовую отметку искомой точки $K_{3,5}$. Точка *K* является точкой, в которой заданная прямая изменяет свою видимость, то есть те числовые отметки проекции прямой A_1B_5, которые

выше заданной проекции плоскости ω_i, там проекция прямой видима (и наоборот).

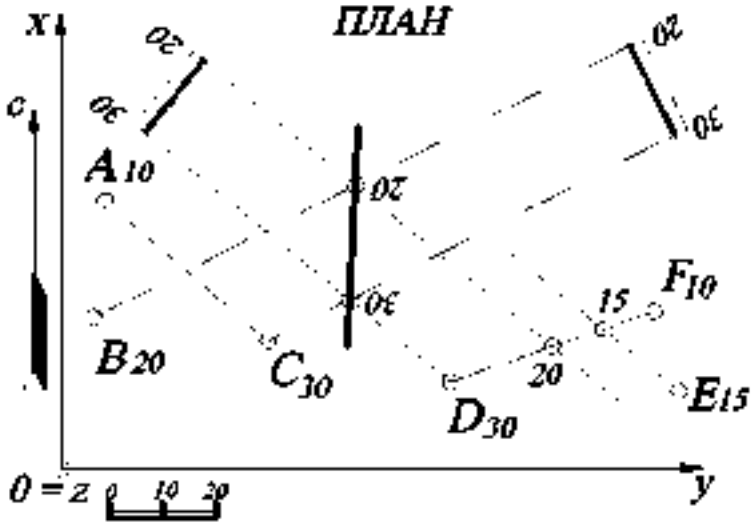


Рис. 18.

2.8. Найти линию пересечения заданных плоскостей $A_{10}B_{20}C_{30}$ и $D_{30}E_{15}F_{10}$.

Решение (рис. 18). В заданных плоскостях $A_{10}B_{20}C_{30}$ и $D_{30}E_{15}F_{10}$ находят направление горизонталей (см. рис 11). Затем находят точки пересечения горизонталей заданных плоскостей, имеющих одинаковые высотные отметки. Такими горизонталями являются ***30-30*** и ***20-20***. Их точки пересечения определяют прямую пересечения заданных плоскостей.

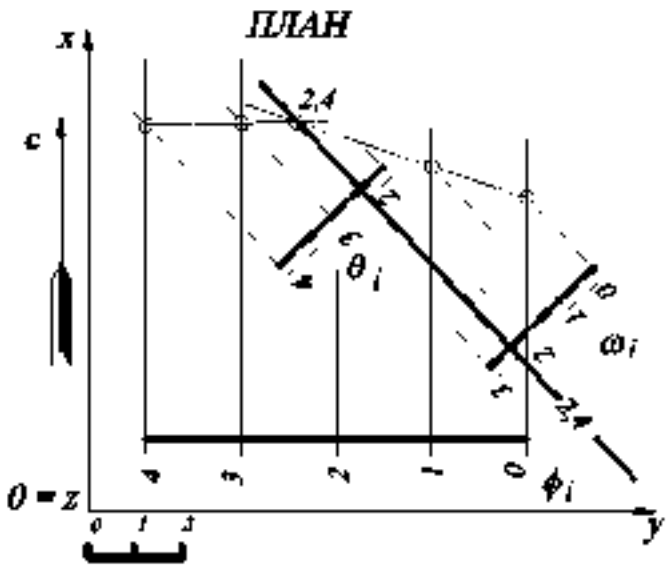


Рис. 19.

2.9. Найти линию пересечения заданных плоскостей θ и ω, азимуты падения которых одинаковы или отличаются друг от друга на 180^0 (рис. 19).

Решение. Одноимённые горизонтали плоскостей, использованные в задаче 2.8, здесь ничего не дают, поскольку горизонтали данных плоскостей параллельны. В этом случае линия пересечения плоскостей по направлению будет совпадать с направлением горизонталей, которые по условию задания параллельны между собой. Остаётся найти общую точку.

Алгоритм решения.

1. Вводят вспомогательную плоскость ϕ_1 общего положения.

2. Строят линию пересечения плоскости посредника ϕ_1 с заданной плоскостью θ_i, так же, как в задаче 2.8.

3. Строят линию пересечения плоскости посредника ϕ_1 с заданной плоскостью ω_i.

4. Найденные линии пересечения дают искомую точку с отметкой 2,4 (нахождение числовой отметки не показано, которое выполняется методом градуирования любой из прямых). Эта точка принадлежит всем трём плоскостям и является их общей точкой.

Подобную задачу можно решить с помощью построения профилей заданных плоскостей (рис. 20).

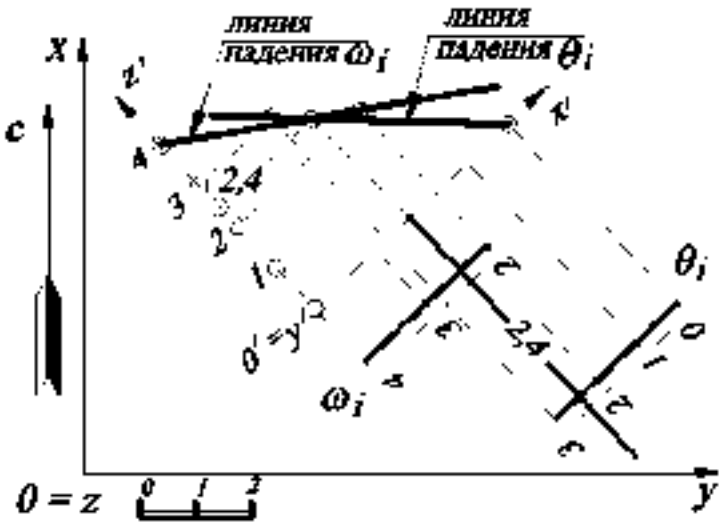


Рис. 20.

В этом случае задают профиль (удобнее в проекционной связи, см. рис. 20) перпендикулярно горизонталям заданных плоскостей. Для этого вводят локальную систему отсчёта $\theta x' y' z'$. На профиле строят линии падения (скатов) плоскостей θ_i и ω_i. Точка пересечения линий скатов заданных плоскостей определяет искомую точку, а направление искомой линии пересечения будет параллельно горизонталям плоскостей θ_i и ω_i.

2.10. Через точку A_3, принадлежащую плоскости ω, построить прямую A_3B_3, перпендикулярную этой плоскости ω. Плоскость ω задана масштабом заложения ω_i.

Решение (рис. 21) На плане проекция (заложение) искомой прямой A_3B_7, перпендикулярной плоскости, всегда перпендикулярна горизонталям плоскости (на основании теоремы о проецировании прямого угла).

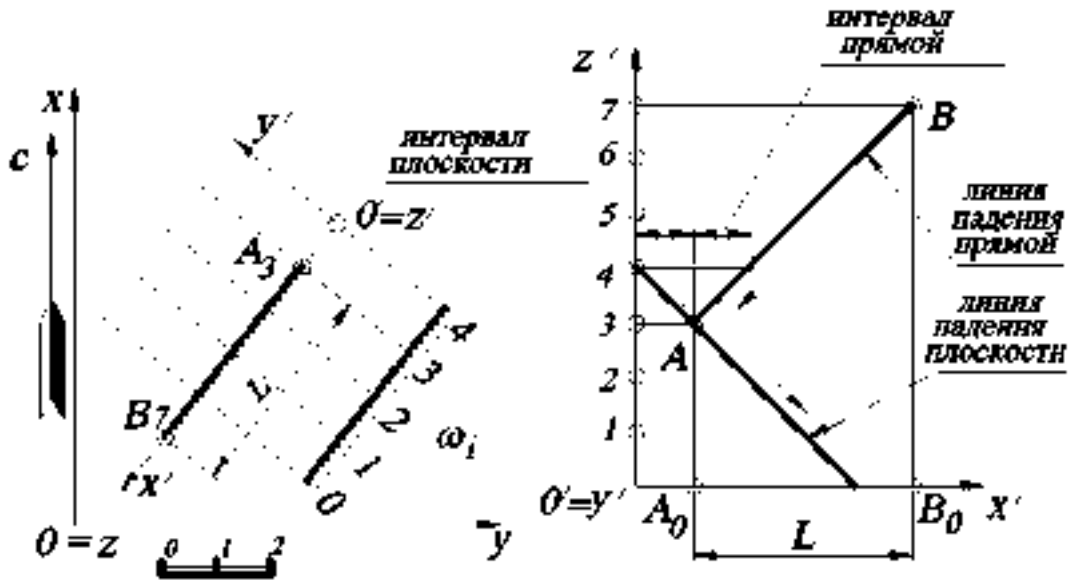


Рис 21.

Направления падения искомого перпендикуляра и заданной плоскости ω_1 противоположны, а интервал перпендикуляра определяется с помощью профиля, построением прямого угла к линии падения плоскости. Таким образом, определив на профиле интервал прямой и отложив его (на плане) на заложении прямой четыре раза в сторону восстания, получают точку B_7. Задача имеет два решения.

2.11. Определить расстояние от точки K_{10} до плоскости, заданной треугольником $A_{20}B_{30}C_{30}$.

Решение (рис. 22). Расстоянием от точки до плоскости будет служить натуральная величина перпендикуляра, опущенного из точки до плоскости. В этом случае используют следующий алгоритм решения задачи.

Алгоритм решения.

1. Строят перпендикуляр из точки к плоскости.

2. Находят точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью.

3. Определяют натуральную величину полученного отрезка.

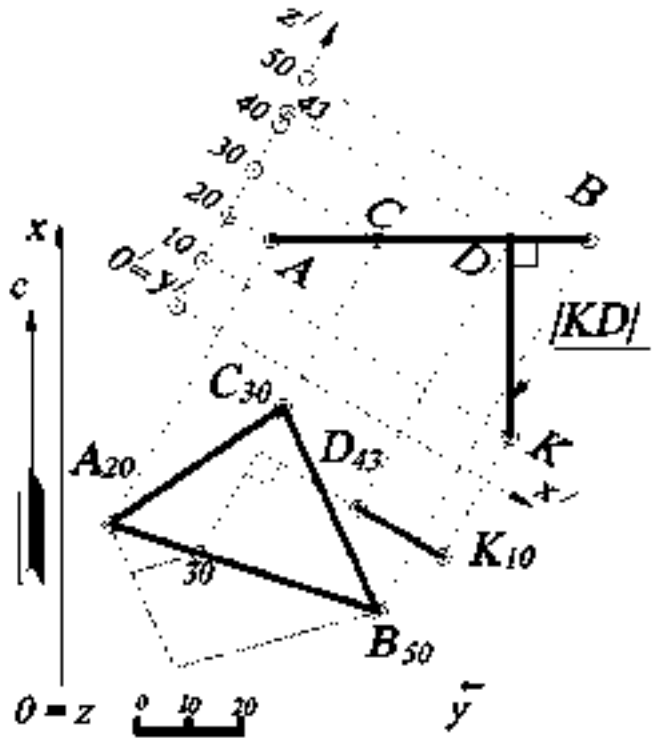


Рис. 22.

Эта задача может решаться только на плане (пользуясь вышеописанным алгоритмом), однако решение задачи упрощается, если использовать профиль. Поэтому в проекционной связи строят профиль плоскости $A_{20}B_{50}C_{30}$ (предварительно построив горизонтали плоскости, см. задачу 2.1), причём плоскость профиля задают перпендикулярно горизонталям плоскости $A_{20}B_{50}C_{30}$. Плоскость $A_{20}B_{50}C_{30}$ проецируется на профиле в отрезок прямой AB, а перпендикуляр KD из точки K_{10} – в отрезок прямой $KD \perp AB$, причём $|KD|$ – натуральная величина искомого расстояния.

2.12. Построить треугольник $A_{45}B_7C_7$, принадлежащий плоскости P_i, если известно, что стороны равны $|AB|=|AC|=40$ (по масштабу чертежа) и составляют угол 30^0 с основной плоскостью проекций H. Плоскость P_i задана точкой A_{45}, азимутом падения $\alpha=60^0$ и углом падения $\sigma=45^0$.

Решение (рис. 23). По исходным данным на плане задают плоскость P_i (см. задачу 2.1). Проекции сторон треугольника $A_{45}B_7$ и $A_{45}C_7$ определяются в результате пересечения прямого кругового конуса с вершиной в точке A_{45} (образующие которого наклонены к основной плоскости проекций под углом 30^0) и заданной плоскостью P_i. Поэтому на профиле задают проекцию прямого кругового конуса с вершиной в точке A_{45} , определяют радиус одной из параллелей конуса R (например, 30-й) и находят заложения сторон AB и AC. На плане строят окруж-

ность *30*-й горизонтали конуса радиуса *R* с центром в точке A_{45} и находят две образующие, по которым конус пересекает плоскость P_i, – это две искомые прямые. На этих прямых откладывают заложения сторон треугольника L_{AB} и L_{AC}. Задача имеет четыре решения, два из которых показано на рис. 23.

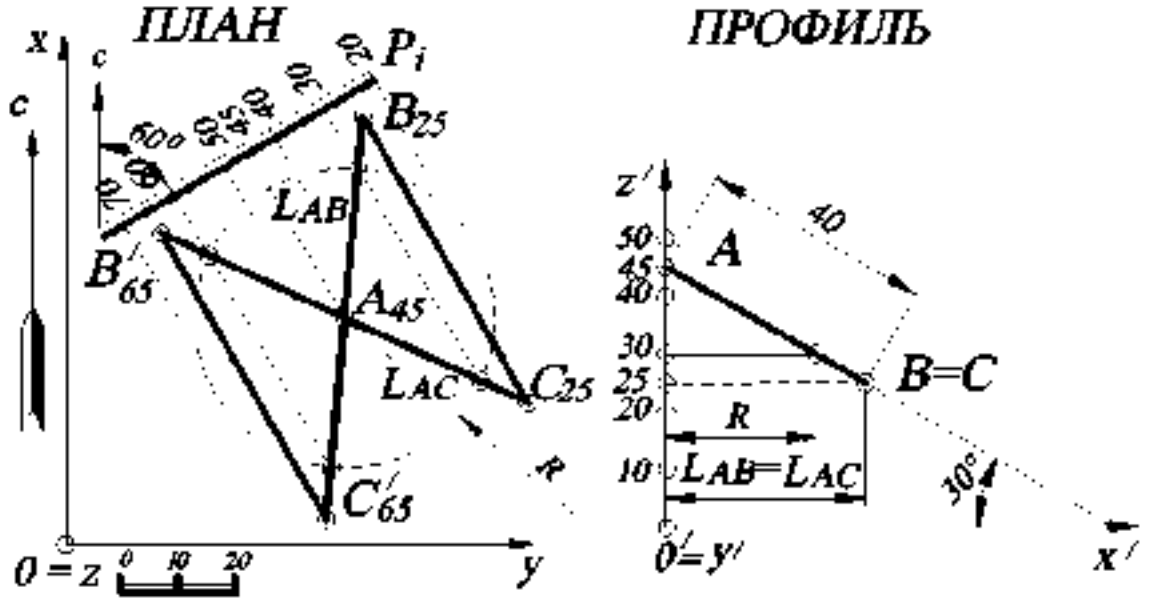


Рис. 23.

2.13. Построить треугольник $A_{40}B_?C_?$, принадлежащий плоскости P_i, если известно, что $|AB|=|BC|=|CA|=40$, сторона $A_{40}B_?$ параллельна основной плоскости проекций. Плоскость P_i задана точкой A_{40}, азимутом падения $\alpha=150^0$ и интервалом $I=10$.

Решение (рис. 24). На плане задают плоскость P_i (см. пример 2.1). Сторона $A_{40}B_?$ параллельна основной плоскости проекций H, следовательно, она принадлежит горизонтали заданной плоскости h_{40}, проецируется без искажения и отметка точки – B_{40}. Далее находят точку $C_?$, предполагая, что искомый треугольник лежит в горизонтальной плоскости с отметкой *40*. Поэтому строят равносторонний треугольник (засечками циркуля), лежащий в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций, и получают точку C'_{40}. Затем точку C'_{40} определяют в плоскости P_i. На профиле, повернув точку C' до совмещения с ли-

нией падения плоскости P_1 (плоскость профиля перпендикулярна горизонталям плоскости P_1), получают точку C с отметкой *15*. На плане точка C_{15} будет находиться на пересечении линии проекционной связи и серединного перпендикуляра к стороне $A_{40}B_{40}$, так как искомый треугольник $A_{40}B_{40}C_{15}$ – плавильный треугольник (все вершины лежат на серединных перпендикулярах к противоположным сторонам). Задача имеет четыре решения (так как точки B_7 и C_7 могут строится и в противоположные стороны).

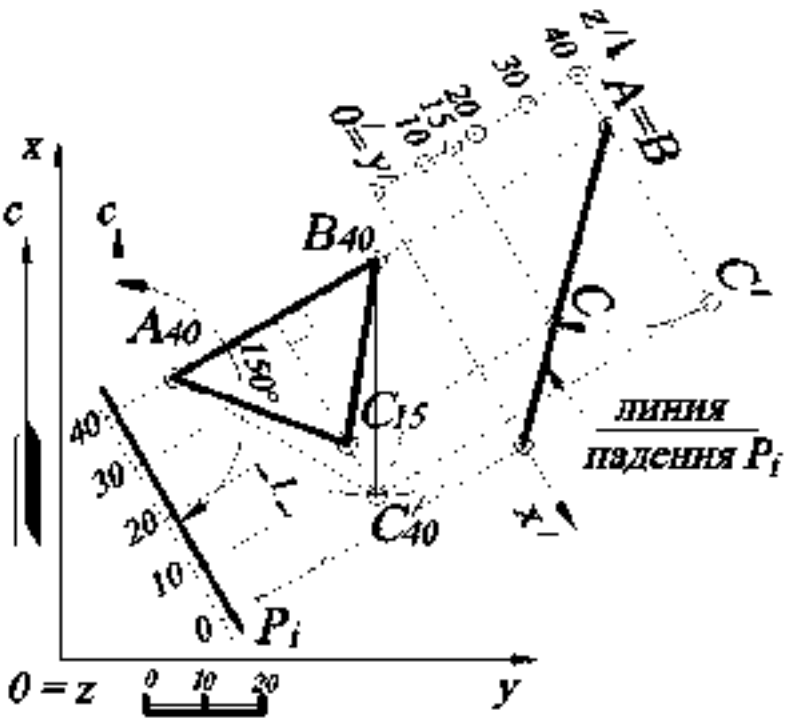


Рис 24.

2.14. Построить плоскость P_7, проходящую через точку K_{55} и параллельную плоскости треугольника $A_{30}B_{60}C_0$, и задать её масштабом заложения.

Решение (рис. 25). На чертеже горизонтали параллельных плоскостей параллельны, масштабы заложения (интервалы) одинаковы, направления падения совпадают. Следовательно, построив горизонтали плоскости $A_{30}B_{60}C_0$ и определив интервал l (см. задачу 2.1), строят масштаб заложения плоскости P_7, проходящей через точку K_{55} с соответствующими отметками горизонталей и интервалом, равным интервалу l, то есть от горизонтали h_{55} проводят с двух сторон параллельные линии на расстоянии $\frac{1}{2}l$.

2.15. Определить нормальную H, горизонтальную $H_Г$ и вертикальную $H_В$ мощности слоя, заданного двумя параллельными плоскостями θ_i и ω_i (рис. 26).

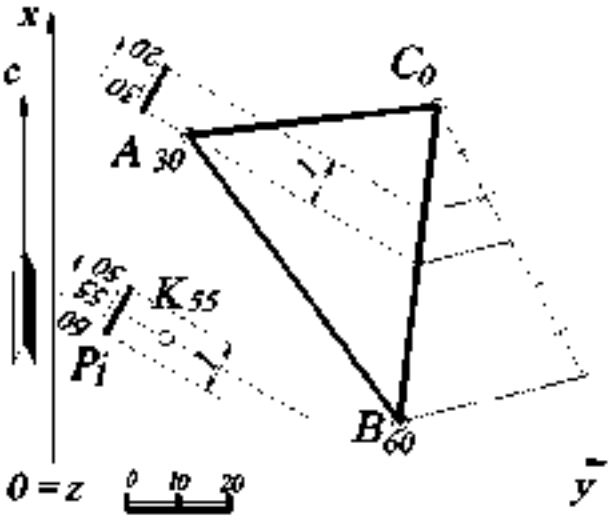


Рис. 25

Решение. Для этого строят прямой профиль, плоскость которого перпендикулярна горизонталям плоскости. Построение профиля показано на рис. 26. Выбирают локальную систему координат $0'x'y'z'$ на плане. Плоскость профиля определяют оси x' и z'. На профиле с помощью заложения прямой AB определяют линию падения плоскости θ, которая является плоскостью подошвы заданного слоя. Для построения кровли на профиле определяют точку C (с помощью заложения L), через которую проводят прямую, параллельную прямой AB.

Прямая, проходящая через точку C на профиле, является линией

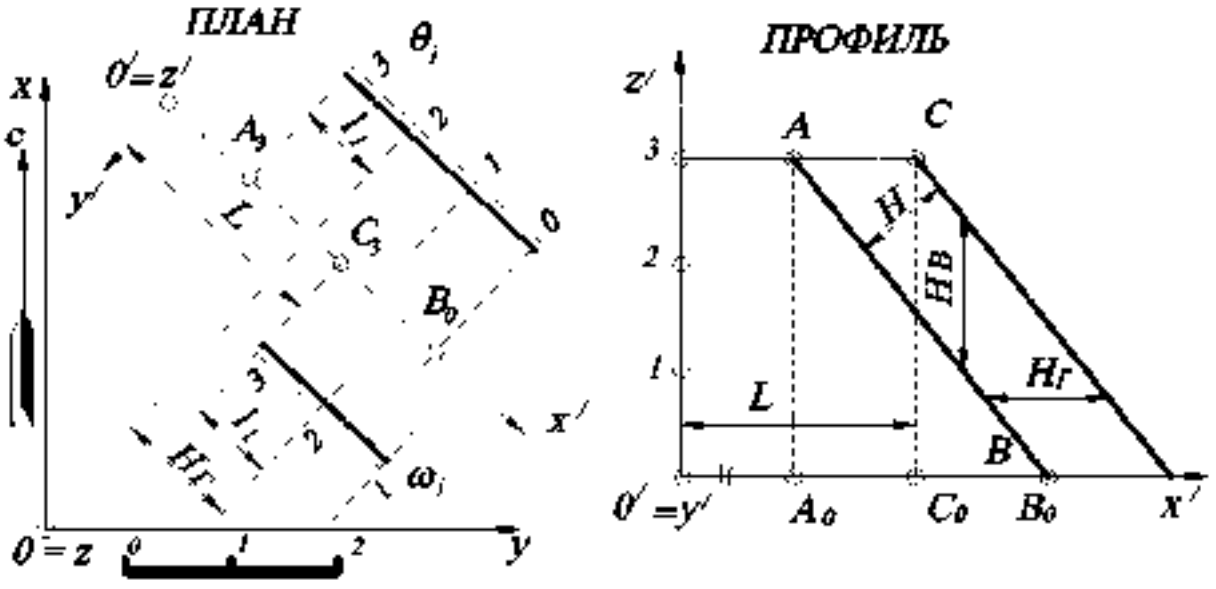


Рис 26.

падения плоскости кровли. Кратчайшее расстояние на прямом профиле между линией падения кровли и линией падения подошвы — нормальная мощность слоя

H. Расстояние на этом профиле от линии падения кровли до линии падения подошвы, измеренное по вертикали, – вертикальная мощность слоя H_B.

Расстояние на прямом профиле от линии падения кровли до линии падения подошвы, измеряемое в горизонтальном направлении, – горизонтальная мощность слоя $H_Г$. Горизонтальная мощность слоя измеряется параллельно основной плоскости проекций, поэтому эту мощность можно определить на плане, как расстояние между одноимёнными (с одинаковыми высотными отметками) горизонталями плоскостей θ_i и ω_i.

2.16. Построить плоскость, проходящую через точку K_{60} и перпендикулярную отрезку прямой $A_{40}B_0$. Плоскость задать масштабом заложения P_i.

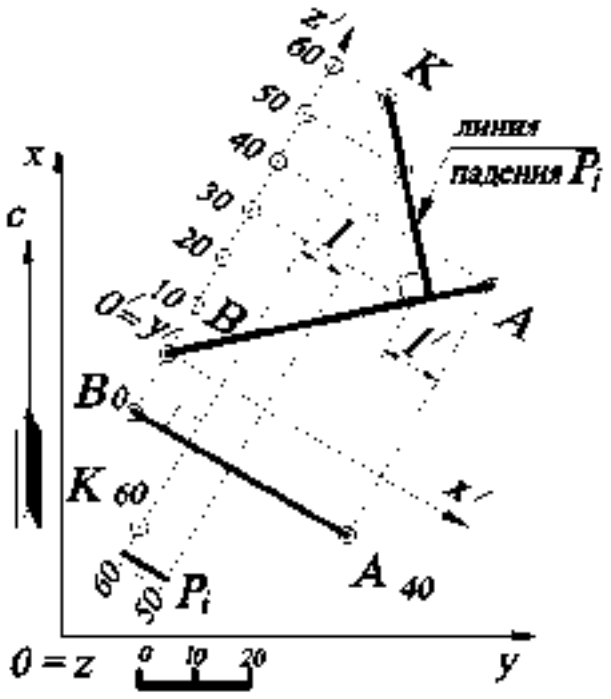


Рис. 27

Решение (рис. 27). Прямая, перпендикулярная плоскости, на чертеже изображается проекцией (заложением), перпендикулярным горизонталям плоскости (см. задачу 2.10). Следовательно, через точку K_{60} проводят прямую, перпендикулярную к заданной прямой $A_{40}B_0$, которая является горизонталью h_{60} искомой плоскости P_i, а интервал l определяется с помощью профиля.

2.17. Построить плоскость P_i, проходящую через отрезок прямой $A_{30}B_0$ и перпендикулярную плоскости Q_i. Плоскость Q_i задана точкой C_{60}, азимутом падения $\alpha=40^0$ и интервалом $l=15$.

Решение (рис. 28). Через произвольную точку заданной прямой $A_{30}B_0$ (например, точку B_0) проводят прямую n, перпендикулярную плоскости Q_i (так как если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти

плоскости взаимно перпендикулярны). Находят направление падения перпендикуляра n и интервал l (на профиле, см. задачу 2.10). Затем строят горизонтали плоскости P_i, соединяя одинаковые высотные отметки прямой $A_{30}B_0$ (проградуированной) и построенного перпендикуляра n.

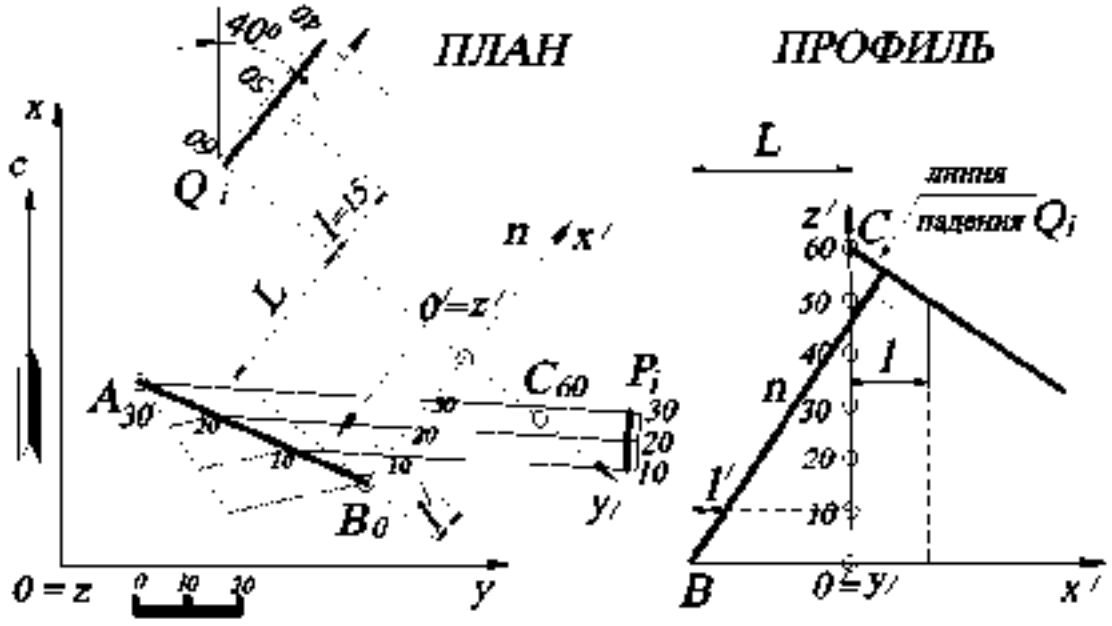


Рис. 28.

2.18. Из точки N_{50} построить отрезок прямой $N_{50}M_?$, параллельный заданным плоскостям $P_i(A_{10}B_{40}C_{20})$ и $Q_i(D_{50}E_0F_{10})$, длиной $|N_{50}M_?|=40$ (рис. 29).

Решение. Прямая, проходящая через заданную точку N_{50} и параллельная двум заданным плоскостям $P_i(A_{10}B_{40}C_{20})$ и $Q_i(D_{50}E_0F_{10})$, это прямая, параллельная линии пересечения этих плоскостей. Следовательно, находят прямую пересечения заданных плоскостей (предварительно построив их горизонтали, см. задачу 2.1) это прямая n. Параллельные прямые имеют одинаковые направления падения, равные интервалы, и их проекции параллельны. Поэтому, зная интервал l прямой n, можно построить профиль искомой прямой $|NM|=40$, определить заложение L этой прямой и отметку точки M, равную *28*. На плане строят проекцию прямой $N_{50}M_{28}$. Задача имеет два решения, так как можно построить сим-

метричную прямую $N_{50}M'_{72}$ относительно точки N_{50} (то есть с противоположной стороны от точки N_{50}). Отметка точки M'_{72} определяется арифметически: *50-28=22*, *50+22=72* (см. задачу 1.4).

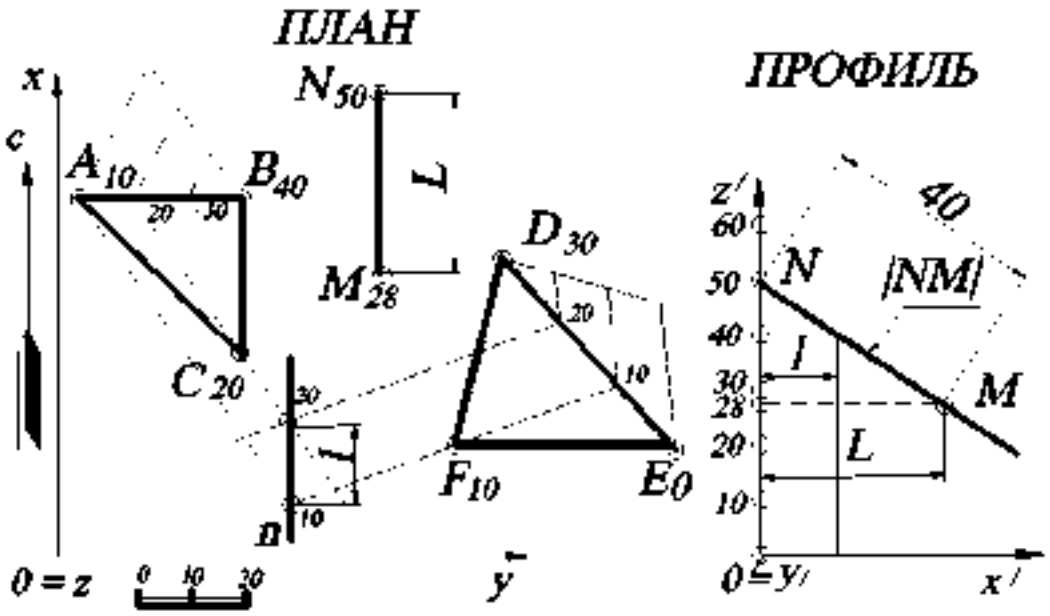


Рис. 29.

2.19. Через точку A_{50} провести плоскость P_i, перпендикулярную плоскости Q_i и параллельную прямой $B_{10}C_{60}$. Задать плоскость P_i масштабом заложения (рис. 30).

Решение. Задача имеет два условия: первое – плоскость P_i должна быть перпендикулярна заданной плоскости Q_i (известно, плоскости перпендикулярны, если в одной из них содержится перпендикуляр к другой плоскости). Второе условие – плоскость P_i должна быть параллельна заданной прямой $B_{10}C_{70}$ (известно, плоскость и прямая параллельны, если в плоскости содержится хотя бы одна прямая, параллельная заданной прямой). Следовательно, выполняют первое условие – строят прямую m, перпендикулярную заданной плоскости Q_i и проходящую через точку A_{50} (см. задачу 2.10). Затем строят прямую n, проходящую через точку A_{50} и параллельную заданной прямой $B_{10}C_{70}$ (см. пример 2.18). Две пересекающиеся прямые задают плоскость. Для задания плоскости P_i масштабом

заложения строят горизонтали плоскости, соединяя точки с одинаковыми высотными отметками на прямых m и n.

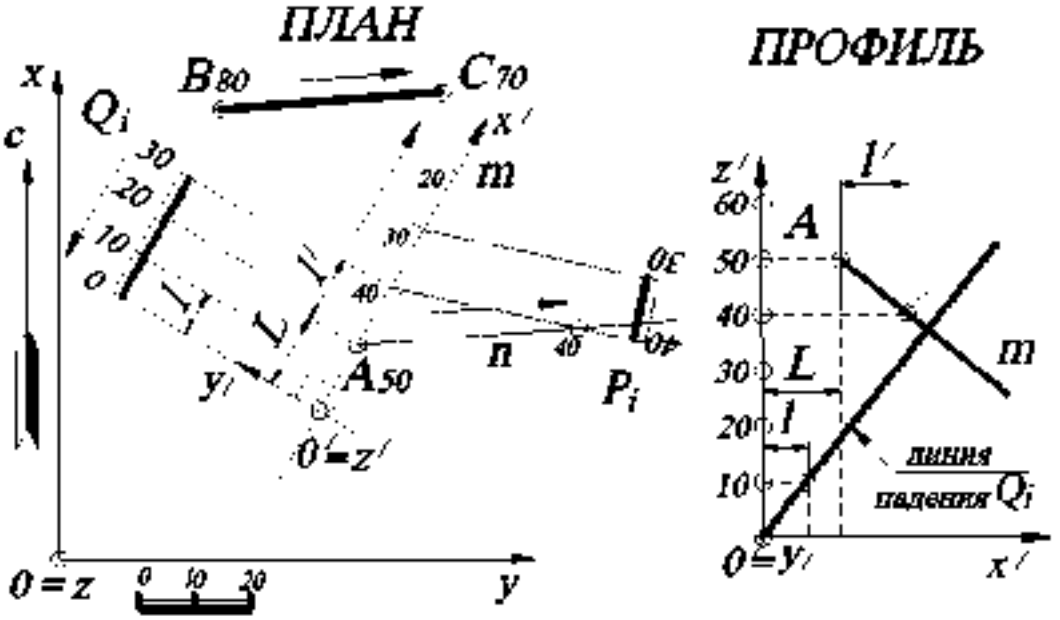


Рис. 30

2.20. Найти натуральную величину треугольника $A_3B_6C_6$ (рис. 31).

Решение. Треугольник $A_3B_6C_6$ будет проецироваться на некоторую плоскость проекций в натуральную величину, если треугольник $A_3B_6C_6$ будет параллелен этой плоскости проекций.

Заданный треугольник $A_3B_6C_6$ занимает общее положение. Плоскость общего положения нельзя сразу преобразовать в плоскость уровня, потому что новая плоскость проекций не будет перпендикулярна к основной плоскости проекций $0xy$. Это возможно лишь для проецирующей плоскости.

Поэтому первую новую плоскость проекций (профиль) $0'x'z'$ располагают перпендикулярно к заданному треугольнику $A_3B_6C_6$, то есть перпендикулярно к проекции горизонтали. Только в этом случае плоскость треугольника $A_3B_6C_6$ на профиле будет проецирующей. Следовательно, в плоскости треугольника $A_3B_6C_6$ строят горизонталь. На рис. 31 построена горизонталь h_3 с использованием градуирования отрезка прямой B_6C_6.

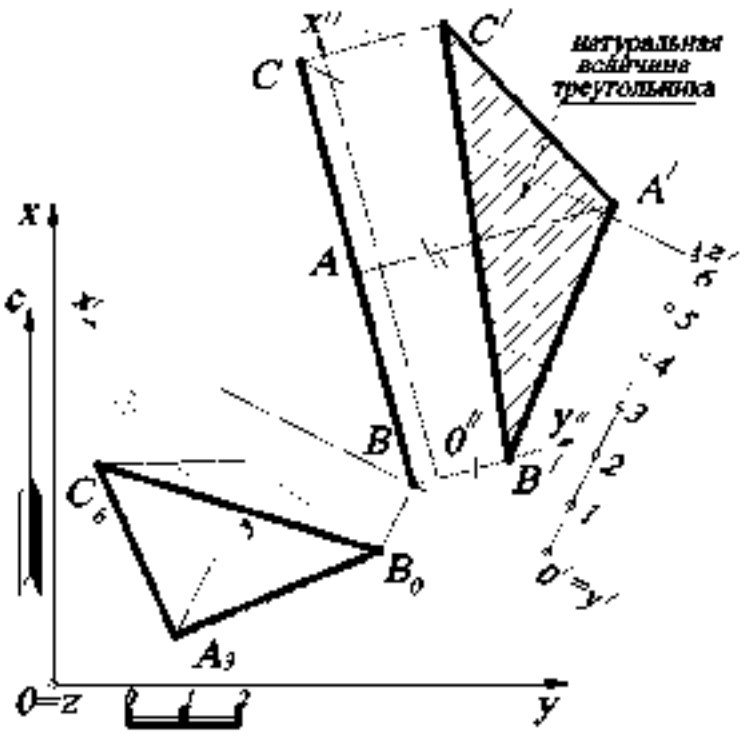


Рис 31.

Вторую новую плоскость проекций $\theta''x''y''$ располагают параллельно полученной на профиле проекции треугольника ABC (а следовательно, перпендикулярно к плоскости профиля $\theta'x'z$). Тогда треугольник ABC спроецируется на новую плоскость проекций $\theta''x''y''$ без искажения. Для выполнения этой замены на чертеже проводят (в произвольном месте) ось x'' параллельно профилю треугольника ABC. Затем строят линии проекционной связи из каждой точки профиля треугольника ABC (перпендикулярно к этой оси x'') и откладывают на них от оси x'' координаты y''_A, y''_B, y''_C.

Таким образом, используя проецирование на дополнительные плоскости проекций, можно преобразовать: плоскость общего положения – в проецирующую; проецирующую – в плоскость уровня и двумя последовательными преобразованиями плоскость общего положения – в плоскость уровня.

2.21. Найти натуральную величину двугранного угла между плоскостями $A_6B_2C_3$ и $A_6D_1C_3$.

Решение (рис. 32) Двугранный угол измеряется линейным углом, который получается при пересечении его граней плоскостью, перпендикулярной его ребру A_6C_3

Поэтому в данной задаче необходимо новую плоскость проекций выбрать так, чтобы отрезок прямой A_6C_3 на этой плоскости проекций стал проецирую-

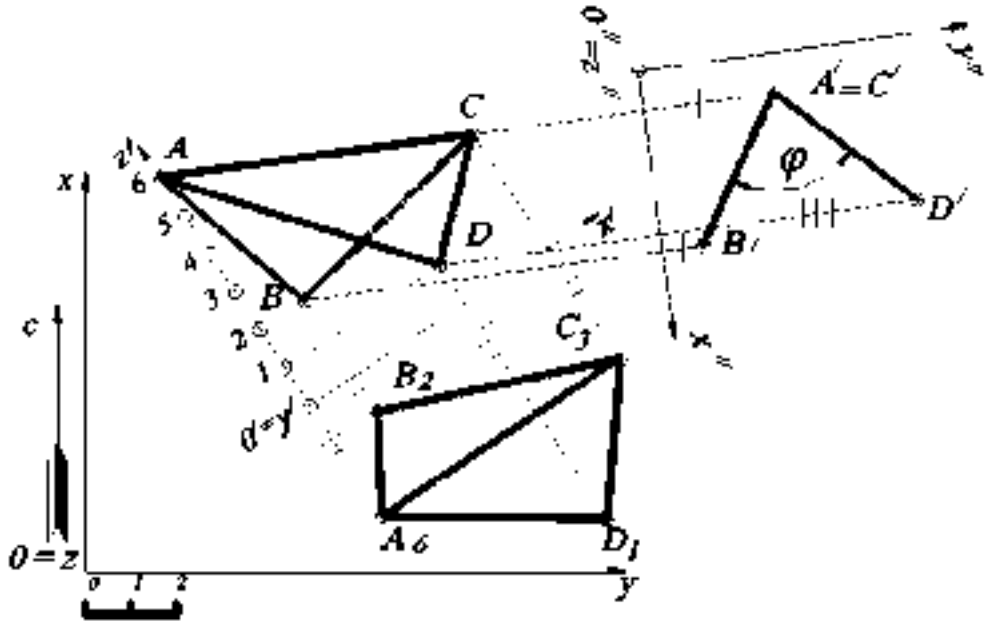


Рис. 32

щим. Отрезок прямой A_6C_3 задаёт прямую общего положения, а прямую общего положения нельзя сразу преобразовать в проецирующую, так как новая плоскость проекций, перпендикулярная к прямой общего положения, не будет перпендикулярна к заданной основной плоскости проекций $0xy$. Следовательно, сначала вводят новую плоскость проекций $0'x'z'$ (профиль), перпендикулярную $0xy$ и параллельную A_6C_3 – на чертеже ось x' параллельна A_6C_3. Затем плоскость профиля $0'x'z'$ заменяют на новую плоскость проекций $0''x''y''$. Прямая A_6C_3 по отношению к плоскости профиля $0'x'z'$ стала прямой уровня, а по отношению к $0''x''y''$ - проецирующей. Построения на новые плоскости проекций треугольников $A_6B_2C_3$ и $A_6D_1C_3$ выполняются по аналогии построениям предыдущей задачи. Угол φ - это искомый угол между плоскостями $A_6B_2C_3$ и $A_6D_1C_3$ (меньше 90^0).

2.22. Найти расстояние и угол между скрещивающимися прямыми A_6B_2 и C_6D_4 (рис. 33).

Решение. Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между параллельными им пересекающимися прямыми. Поэтому через точку D_4 проводят

прямую, параллельную A_0B_2. – на чертеже появляется её проекция D_1E_0. Искомый угол φ равен углу $\angle C_0D_1E_0$. Найти натуральную величину этого угла – это то же самое, что найти величину $\Delta C_0D_1E_0$. Это сделано точно так же, как в задаче 2.20. Строится плоскость профиля, перпендикулярная горизонтали треугольника $C_0D_1E_0$ (то есть $h_0 = C_0E_0$), а затем задаётся новая плоскость проекций $\theta''x''y''$, параллельная профилю треугольника CDE.

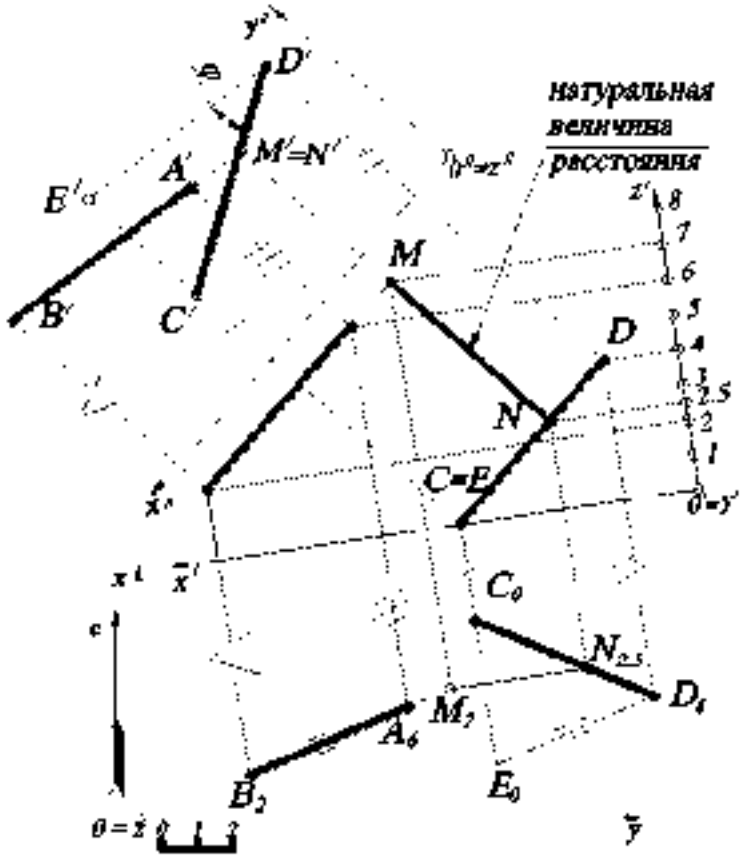


Рис. 33

Кроме того, общая точка $M=N$ проекций $A'B'$ и $C'D'$ - это проекция на $\theta''x''y''$ общего перпендикуляра MN прямых AB и CD, которым измеряется расстояние между ними. Поскольку $MN \perp \theta''x''y''$, то $MN \parallel \theta'x'z'$. Следовательно, MN проецируется на плоскость проекций $\theta'x'z'$ (профиль) в натуральную величину.

2.23. Определить числовую отметку точки C_2 данной проекции по заданному её совмещённому положению C_2 и заданной оси вращения A_2B_2.

Решение (рис. 34). Пусть A_2B_2 – горизонтальная ось, вокруг которой вращают точку $C_?$ и получают её совмещённое положение C_2 с горизонтальной плоскостью на высоте ***2***; $C_?$ – горизонтальная проекция точки, числовую отметку которой нужно найти. Точки C_2 и $C_?$ лежат на одном перпендикуляре к оси вращения A_2B_2, так как при вращении вокруг линии уровня точка $C_?$ перемещается по окружности, плоскость которой перпендикулярна A_2B_2. Точка $C_?$ может находиться ниже или выше отрезка A_2B_2, а их проекции будут совпадать. Однако числовые отметки точек будут отличаться на одинаковую разность по отношению к отрезку A_2B_2. Предположим, что точка $C_?$ находится выше A_2B_2. Тогда строится прямоугольный треугольник $C_?O_2I$, гипотенуза которого равна R – натуральной величине радиуса вращения точки $C_?$. Измерив величину катета $IC_?$, получают $IC_?=2$ (в соответствии с линейным масштабом). Затем арифметически прибавляют её к числовой отметке точки C_2, то есть $2+2=4$. Поэтому точка $C_?$ имеет числовую отметку, равную ***4***. В том случае, если точка $C_?$ находится ниже оси вращения A_2B_2 (по условию задания), тогда она имела бы отметку $C_{2-2}=C_0$.

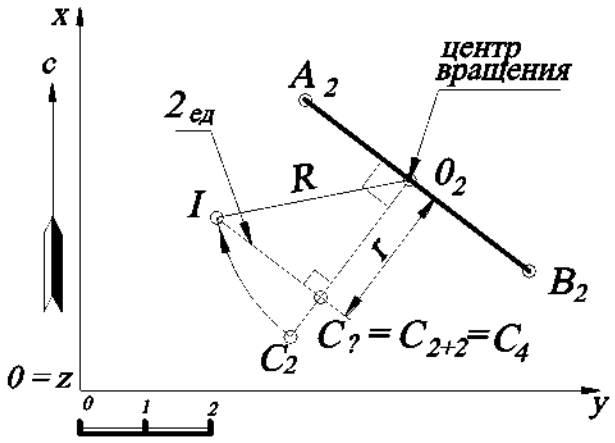


Рис. 34.

Таким образом, для того, чтобы определить числовую отметку точки по её совмещённому положению, строят прямоугольный треугольник с одним катетом, равным расстоянию от центра вращения до проекции точки; гипотенузой, равной натуральной величине радиуса вращения, проведённой из центра вращения. Тогда полученная длина второго катета этого прямоугольного треугольника будет являться числовой разностью между числовой отметкой искомой точки и числовой отметкой оси вращения.

2.24. Определить натуральную величину треугольника $A_6B_2C_{10}$, вращением вокруг горизонтали.

Решение (рис. 35). Через точку A_6 проводят горизонталь плоскости $A_6B_2C_{10}$.

Для этого находят на прямой B_2C_{10} точку, имеющую отметку $z=6$ (выполняется с помощью градуирования, на чертеже не показано). При вращении вокруг горизонтали h_6 точка B_2 и точка C_{10} перемещаются в пространстве по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения A_6D_6. Проекция радиуса вращения для точки B – B_2O_6, а для C – $C_{10}O'_6$. Находят натуральную величину радиуса вращения точки B_2 методом прямоугольного треугольника, а затем полученный отрезок совмещают с проекцией радиуса – точка B_6^2. Точку C_6^{10} можно определять аналогичным способом. Однако точка D_6 при вращении является неподвижной (так как принадлежит горизонтали h_6). Следовательно, прямая, соединяющая точки B_6^2 и D_6, в пересечении с прямой O'_6C_{10} определит точку C_6^{10}. Таким образом, треугольник $A_6B_6^2C_6^{10}$ будет являться натуральной величиной, так как параллелен основной плоскости проекций.

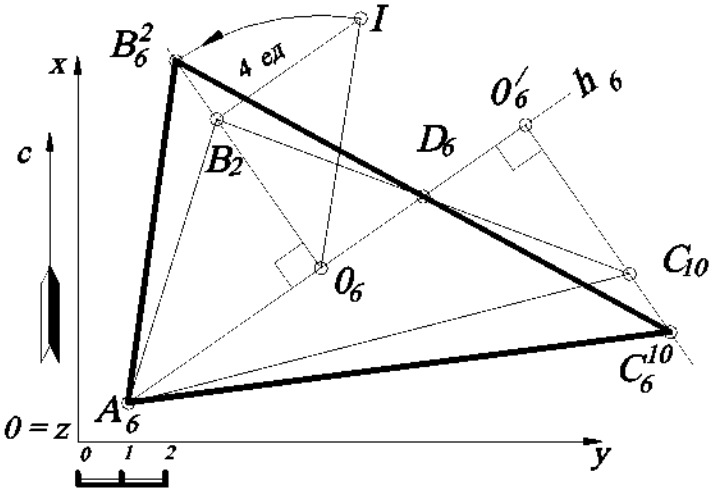


Рис. 35.

Второй вариант решения задачи – вращение треугольника $A_6B_2C_{10}$ с построением профиля, как показано на рис. 36. При этом плоскость профиля $0'x'z'$ задаётся перпендикулярно к горизонтали h_6. Тогда по отношению к плоскости профиля горизонталь h_6 будет являться проецирующей, а все точки треугольника будут перемещаться по окружностям, плоскости которых будут параллельны плоскости профиля (будут проецироваться на профиль в натуральную величину).

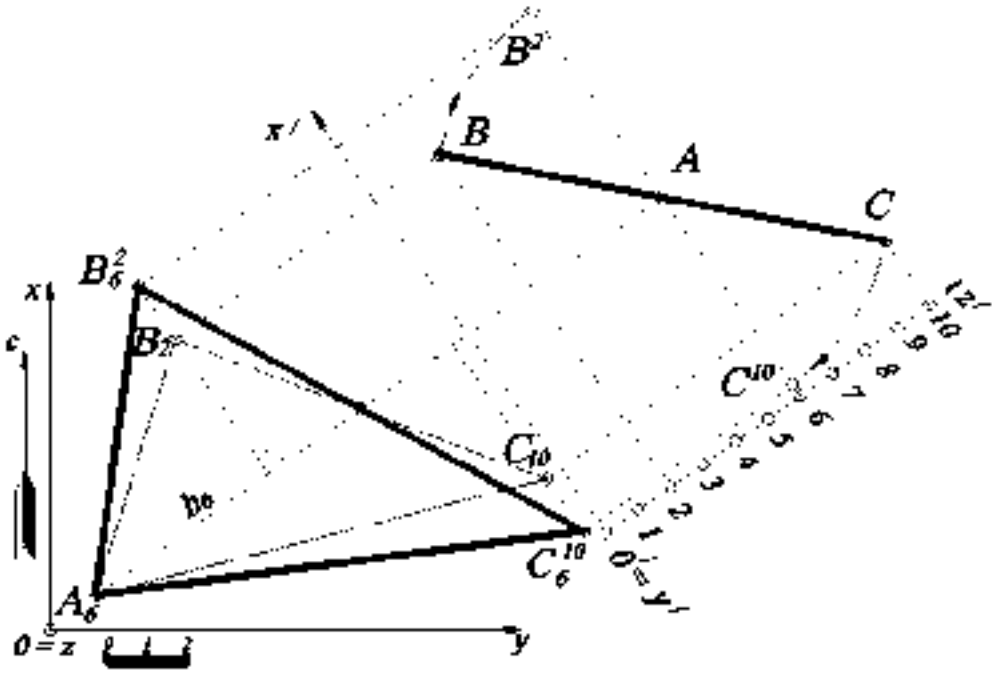


Рис. 36.

2.25. Найти угол наклона прямой A_2B_2 к плоскости общего положения P_i (рис. 37).

Решение. Угол наклона прямой к плоскости – это угол между заданной прямой и её проекцией на заданную плоскость.

Алгоритм решения.

1. Находят точку пересечения заданного отрезка прямой AB и плоскости P_i – точка C.

2. Из другого конца отрезка прямой AB (точки A) строят перпендикуляр m к заданной плоскости P_i и находят точку пересечения перпендикуляра m и заданной плоскости P_i – точка D.

3 Прямая CD является проекцией отрезка заданной прямой AB на плоскость P_i. Поэтому угол θ - угол между прямыми AC и CD – искомый.

Решение задачи упрощается при построении профиля. Точка C определяется на плане из условия принадлежности к отрезку прямой AB, а точка D строится вначале на профиле, а затем по проекционной связи на плане (см. перпендику-

лярность прямой и плоскости). Построив проекцию угла θ, определяют натуральную величину этого угла вращением вокруг любой горизонтали, например h_1.

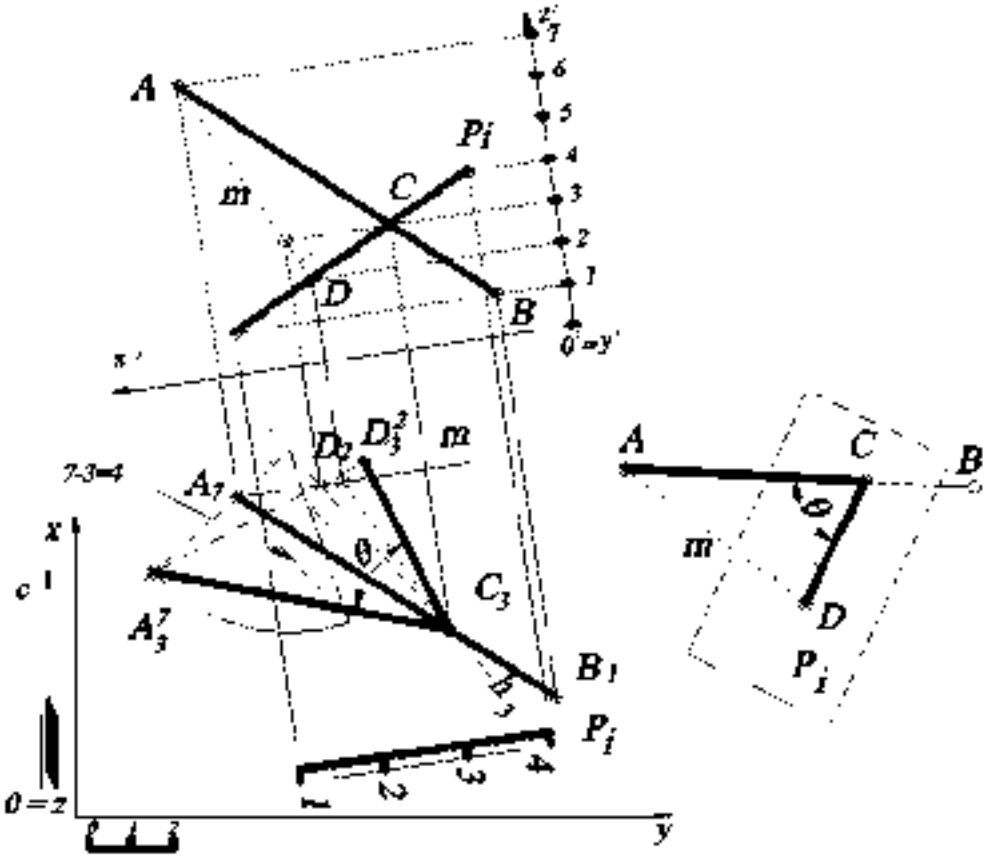


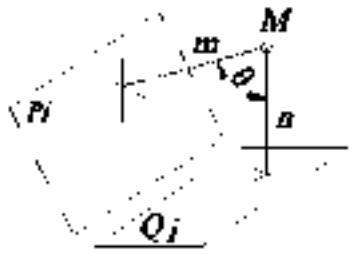
Рис 37

2.26. Найти двугранный угол между плоскостями P_i и Q_i. Эту задачу решим двумя способами.

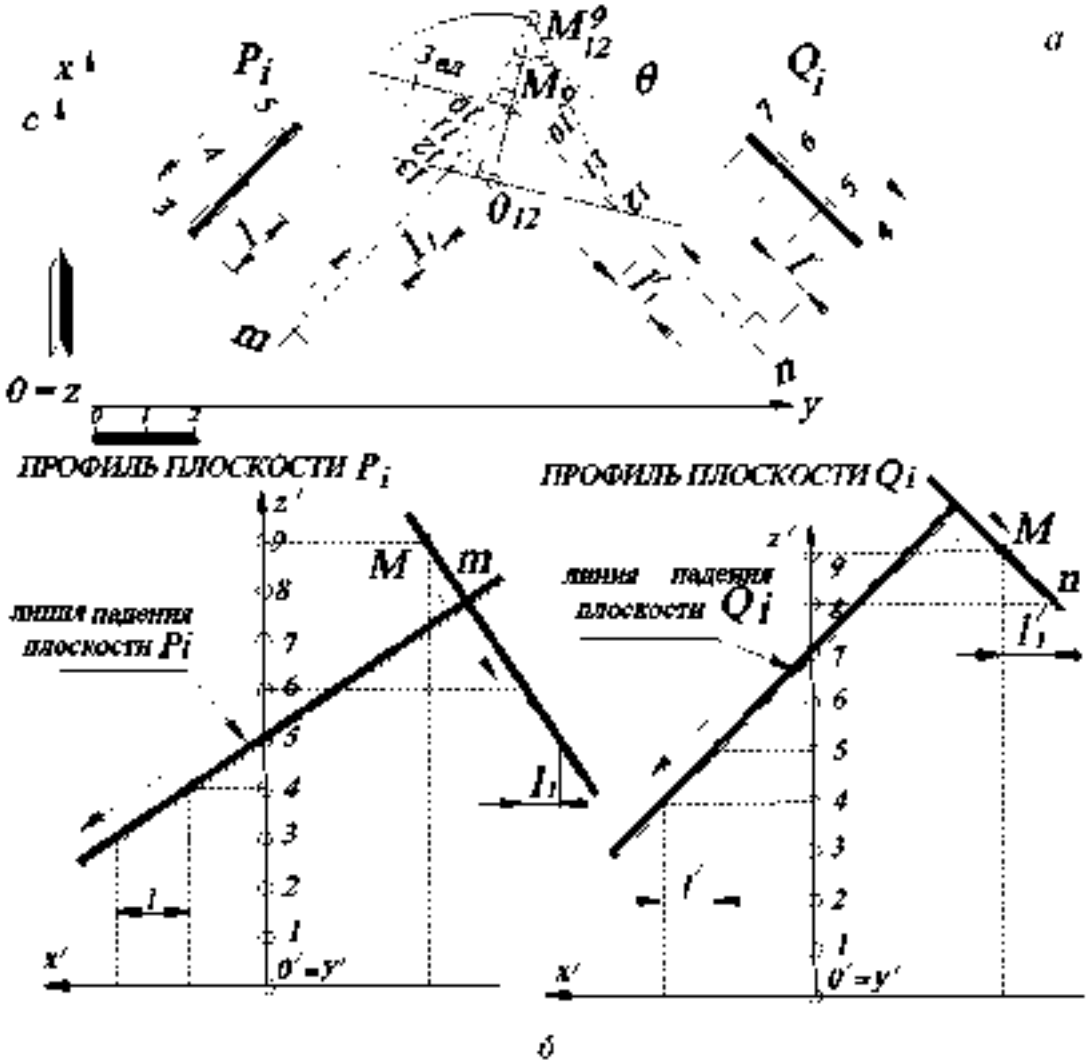
Решение I (рис. 38, *а*, *б*).

Для первого способа решения этой задачи используют следующий ***алгоритм*** (см. рис.38, *а*). Выбирают произвольную точку M, из которой строят прямые m и n, перпендикулярные плоскостям P_i и Q_i соответственно. Прямые m и n задают плоскость, перпендикулярную к двум заданным плоскостям. Угол θ определяет двугранный угол между заданными плоскостями.

На плане (см. рис. 38, *б*) плоскости P_i и Q_i заданы масштабами заложения. В соответствии с алгоритмом выбирают произвольную точку, например M_9, из которой



а



б

Рис. 38

строят проекции перпендикуляров m и n к заданным плоскостям соответственно. Проекции этих перпендикуляров на плане проецируются прямыми, перпендикулярными к проекциям горизонталей заданных плоскостей P_i и Q_i. Причём направление падения плоскости и направление падения перпендикуляра – противоположны. Для определения интервалов m и n строят профили перпендикуляров к линиям падения заданных плоскостей (см. рис. 38, *б*), то есть к линии падения плоскости проводят перпендикулярную прямую. Это можно сделать из лю-

бой точки, так как интервал перпендикуляра от этого не меняется. Затем на плане градуируют проекции m и n в соответствии с направлением падения. Проекции прямых m и n задают плоскость, перпендикулярную к двум заданным плоскостям P_i и Q_i. Угол при вершине M_9 определяет проекцию двугранного угла между заданными плоскостями P_i и Q_i. Далее находят натуральную величину угла θ вращением вокруг произвольной горизонтали, например *12*-й. Угол θ определяет двугранный угол между заданными плоскостями P_i и Q_i.

Решение 2 (рис. 39, *а*, *б*). Задача решается в соответствии со следующим ***алгоритмом*** (см. рис. 39, *а*).

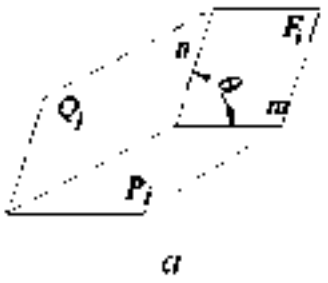
1. Находят линию пересечения a заданных плоскостей P_i и Q_i.
2. Строят плоскость F_i, перпендикулярную к линии пересечения плоскостей a.
3. Находят линии пересечения m и n заданных плоскостей P_i и Q_i с плоскостью F_i.
4. Угол между прямыми n и m является двугранным углом θ между заданными плоскостями P_i и Q_i.

Построение на чертеже выполняется следующим образом (см. рис. 39, *б*).

1. Плоскости P_i и Q_i заданы масштабами заложения. Проекция линии пересечения заданных плоскостей a задаётся парой точек – точек пересечения двух пар горизонталей плоскостей P_i и Q_i с одинаковыми высотными отметками (h_4–h_4 и h_5-h_5). Для удобства построения точка пересечения горизонталей с *5*-й высотной отметкой обозначена A_5.

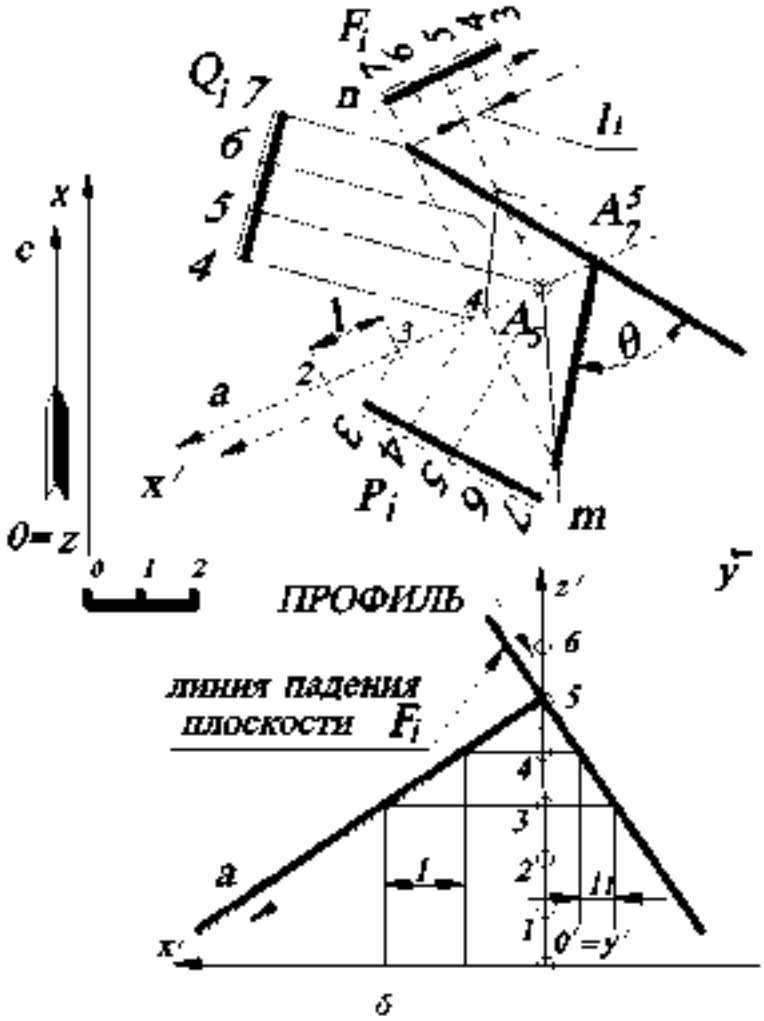
2. Через проекцию точки A_5 строят плоскость F_i, перпендикулярную прямой a. Следовательно, горизонтали этой плоскости будут перпендикулярны к заложению (проекции) прямой a (см. рис. 39, *а*), а масштаб заложения будет определяться построением профиля прямой a и перпендикулярной плоскости F_i, заданной на профиле линией падения. Интервал l_1 определяет горизонтали плоскости F_i с отметками *4*-й и *3*-й.

3. Находят линии пересечения заданных плоскостей P_i и Q_i и построенной плоскости $F_i - m$ и n соответственно. Пересечение горизонталей с одинаковыми высотными отметками задаёт прямые m и n.



а

4. Вращением точки A_5 вокруг любой горизонтали плоскости (например, вращением вокруг 7-й горизонтали) находят натуральную величину двугранного угла θ. Двугранный угол между плоскостями считается острым. Поэтому на рис. 39, *б* угол θ является смежным с построенным тупым углом.



б

Рис 39

2.27. Построить прямую E_4F_4, проходящую через точку E_4 и пересекающую две скрещивающиеся прямые A_1B_5 и C_6D_6.

Решение (рис. 40). Задача сводится к основной позиционной задаче начертательной геометрии (нахождение общих элементов прямой и плоскости).

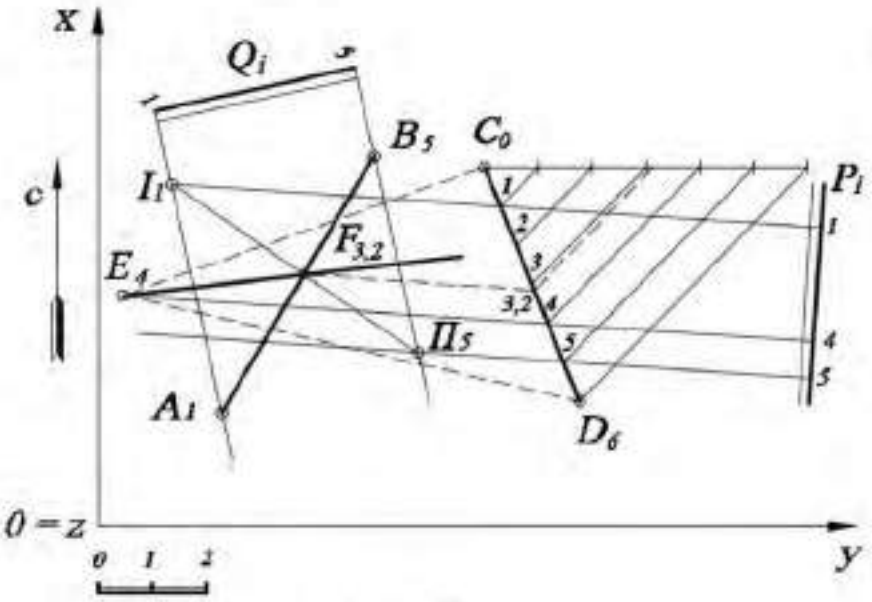


Рис. 40

Алгоритм

1. На прямую C_0D_6 (можно выбрать и другую прямую, то есть A_1B_5) и точку E_4 «натягивают» плоскость (на чертеже эта плоскость показана штриховыми линиями). Затем эту плоскость задают масштабом заложения P_i. Для этого градуируют отрезок прямой C_0D_6 и строят горизонтали плоскости P_i (на рис. 40 показана горизонталь с отметкой ***4***, которая задает направления всех горизонталей плоскости $E_4C_0D_6$, а также представлены горизонтали ***1*** и ***5***, параллельные горизонтали с отметкой ***4*** (для удобства построения точки пересечения прямой и плоскости), эти горизонтали соответствуют отметкам на концах отрезка прямой A_1B_5).

2. Находят точку пересечения прямой A_1B_5 с плоскостью P_i:

   а) через прямую A_1B_5 проводят вспомогательную плоскость-посредник Q_i, задавая ее параллельными горизонтальными прямыми линиями;

   б) находят пересечение плоскостей P_i и Q_i – прямая I_1II_5;

   в) находят точку пересечения прямой I_1II_5 и прямой A_1B_5 – точка $F_{3,2}$.

3. Прямая, соединяющая заданную точку E_4 и построенную точку $F_{3,2}$, будет искомой прямой.

2.28. Построить прямую m, пересекающую две скрещивающиеся прямые A_1B_5 и C_0D_6 и параллельную прямой $E_{10}D_{12}$.

Решение (рис. 41). Задача сводится к основной позиционной задаче начертательной геометрии (нахождение общих элементов прямой и плоскости).

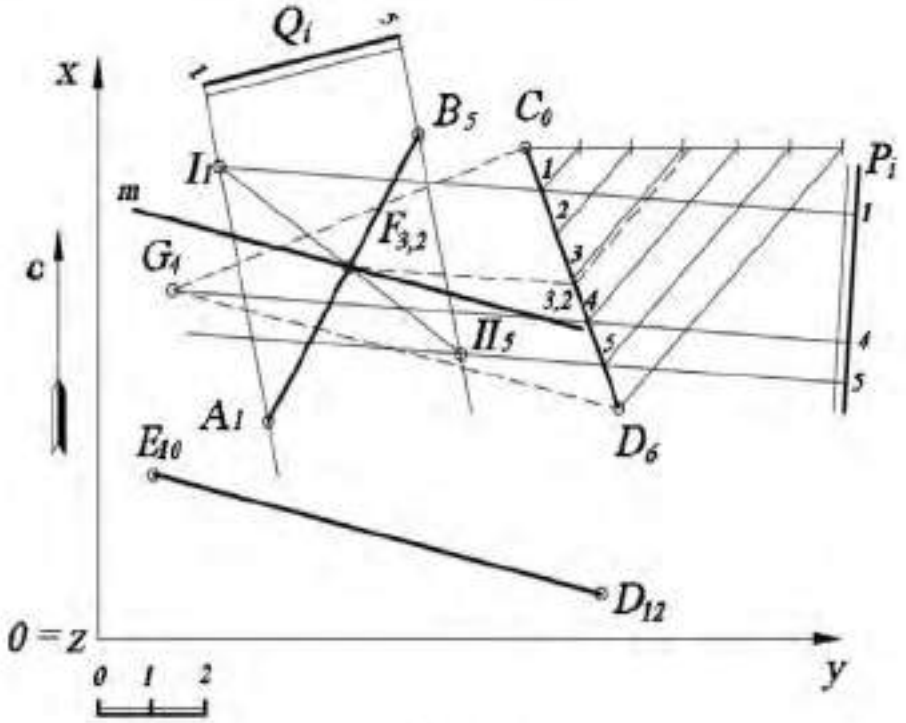


Рис. 41

Алгоритм.

1. Через C_0D_6 (можно выбрать и другую прямую, то есть A_1B_5) строят плоскость $C_0D_6G_4$, параллельную прямой $E_{10}D_{12}$, на основании признака параллельности прямой и плоскости (плоскость и прямая параллельны, если в плоскости найдется хотя бы одна прямая, параллельная заданной). Длина проекции прямой D_6G_4 и разница отметок (координат z) идентична прямой $E_{10}D_{12}$.
2. Плоскость $C_0D_6G_4$ задают масштабом заложения P_i. Для этого градуируют отрезок прямой C_0D_6 и строят горизонтали плоскости P_i (на рис. 41 показана горизонталь с отметкой *4*, которая задает направления всех горизонталей плоскости $E_4C_0D_6$, а также представлены горизонтали *1* и *5*, параллельные горизонтали с отметкой *4* и (для удобства построения точки пересечения прямой и плоскости), эти горизонтали соответствуют отметкам на концах отрезка прямой A_1B_5).

3. Находят точку пересечения прямой A_1B_5 с плоскостью P_i:

а) через прямую A_1B_5 проводят вспомогательную плоскость-посредник Q_i, задавая ее параллельными горизонтальными прямыми линиями;

б) находят пересечение плоскостей P_i и Q_i – прямая I_1II_5;

в) находят точку пересечения прямой I_1II_5 и прямой A_1B_5 – точка $F_{3,2}$.

4. Прямая m, проходящая через построенную точку $F_{3,2}$ и параллельная прямой $E_{10}D_{12}$, будет искомой прямой.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Достроить проекцию плоского пятиугольника ***ABCDE***, если известны координаты точек: ***A(55, 25, 10)***, ***B(15, 10, 30)***, ***C (10, 60, 50)***, ***D(60, ?, 30)***, ***E(?, 75, 40)***.

2.2. Построить проекцию точки D_{40}, принадлежащей плоскости треугольника $A_{10}B_{30}C_{60}$, если известны следующие координаты: ***A(20, 10, 10)***, ***B(10, 100, 30)***, ***C(90, 60, 60)***, ***D(30, ?, 40)***.

2.3. Определить числовые отметки концов отрезка прямой $D_?E_?$, принадлежащего плоскости треугольника ***ABC***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 5, 30)***, ***B(85, 50, 60)***, ***C(25, 80, 50)***, ***D(90, 30, ?)***, ***E(60, 100, ?)***.

2.4. Найти расстояние между параллельными прямыми ***AB*** и ***CD***. Проекции точек заданы координатами: ***A(60, 10, 70)***, ***B(100, 80, 30)***, ***C(20, 65, 50)***.

2.5. В плоскости, заданной прямой ***AB*** и точкой ***M***, построить равнобедренный прямоугольный треугольник ***ABC*** с катетами ***AB=BC***. Проекции точек заданы координатами: ***A(80, 40, 50)***, ***B(70, 65, 10)***, ***M(100, 60, 30)***.

2.6. В плоскости, заданной прямой ***AK*** и точкой ***M***, построить «египетский» прямоугольный треугольник ***ABC*** с гипотенузой ***AC=50***, ***BC=40*** и ***AB=30***, причём ***AB*** принадлежит ***AK***. Проекции точек заданы координатами: ***A(60, 10, 70)***, ***K(100, 80, 30)***, ***M(20, 60, 50)***.

2.7. В плоскости, заданной прямой ***AB*** и точкой ***M***, построить правильный шестиугольник ***ABCDEF***. Проекции точек заданы координатами: ***A(80, 40, 50)***, ***B(70, 65, 10)***, ***M(100, 60, 30)***.

2.8. Найти угол наклона плоскости, заданной треугольником ***ABC***, к вертикальной плоскости, проходящей через а) ось ***Ox***; б) ось ***Oy***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 5, 30)***, ***B(85, 50, 60)***, ***C(25, 80, 50)***.

2.9. Определить, лежат ли параллельные прямые ***AB***, ***CD*** и ***EF*** в одной плоскости. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 10, 70)***, ***B(80,80, 30)***, ***C(80, 10, 60)***, ***D(?,?,20)***, ***F(20, 65, 50)***, ***E(?,?,10)***.

2.10. Найти расстояние от точки D_0 до плоскости треугольника $A_{10}B_{30}C_{60}$. Проекции точек заданы координатами: ***A(20, 10, 10)***, ***B(10, 100, 30)***, ***C(90, 60, 60)***, ***D(30, 50, 0)***.

2.11. Построить линию пересечения плоскости P_i с основной плоскостью проекций ***xOy***, заданной двумя параллельными прямыми ***AB*** и ***CD***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 10, 70)***, ***B(80, 80, 30)***, ***C(80, 10, 60)***, ***D(?, ?, 20)***.

2.12. Построить линию пересечения плоскости P_i с основной плоскостью проекций ***xOy***, заданной двумя пересекающимися прямыми ***AB*** и ***BC***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 10, 70)***, ***B(80, 80, 30)***, ***C(20, 65, 50)***.

2.13. Построить точку пересечения прямой ***n*** с плоскостью P_i. Прямая ***n*** задана точкой ***B(60, 20, 10)***, азимутом падения $\alpha=225^0$ и интервалом ***l=20 мм***. Плоскость P_i задана точкой ***A(50, 30, 30)***, азимутом падения $\alpha=135^0$ и углом падения $\sigma=30^0$. Найти пересечение плоскости P_i с осями ***Ox*** и ***Oy***.

2.14. Построить точку пересечения прямой ***n*** с плоскостью P_i. Прямая ***n*** задана точкой ***B(60, 20, 10)***, азимутом падения $\alpha=315^0$ и интервалом ***l=20 мм***. Плоскость P_i задана точкой ***A(50, 30, 30)***, азимутом падения $\alpha=135^0$ и углом падения $\sigma=30^0$. Найти пересечение плоскости P_i с осями ***Ox*** и ***Oy***.

2.15. Через точку ***O(0, 0, 0)*** построить прямую, пересекающую прямую ***AB*** и ***CD***. Проекции точек заданы координатами: ***A(30, 60, 70)***, ***B(70, 20, 10)***, ***C(40, 10, 20)***, ***D(90, 80, 70).***

2.16. Через точку ***O(50, 100, 0)*** построить прямую, пересекающую прямые ***AB*** и ***CD***. Проекции точек заданы координатами: ***A(30, 60, 70)***, ***B(70, 20, 10)***, ***C(40, 10, 20)***, ***D(90, 80, 70)***.

2.17. Через точку K_{50} построить плоскость P_i , перпендикулярную плоскости треугольника ***ABC*** и параллельную прямой ***FE***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***K(90, 100, 50)***, ***A(80, 50, 20)***, ***B(60, 110, 70)***, ***C(40, 60, 10)***, ***F(100, 10, 30)***, ***E(70, 30, 0)***.

2.18. Определить угол наклона прямой ***ED*** к плоскости треугольника ***ABC***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(80, 20, 20)***, ***B(140, 40, 100)***, ***C(70, 60, 60)***, ***E(80, 110, 10)***, ***D(50, 100, 50)***.

2.19. Из точки ***N(40, 30, 70)*** построить отрезок прямой ***NM***, параллельный двум заданным плоскостям ***ABC*** и ***DEF***, длиной ***50 мм***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(120, 40, 50)***, ***B(115, 0, 10)***, ***C(90, 40, 20)***, ***D(135, 85, 60)***, ***E(135, 115, 20)***, ***F(15, 110, 0)***.

2.20. Из точки ***N(40, 30, 70)*** построить прямую ***NM***, параллельную двум заданным плоскостям ***ABC*** и P_i, длиной ***40 мм***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(120, 40, 50)***, ***B(115, 0, 10)***, ***C(90, 40, 20)***. Плоскость P_i проходит через точку ***D(135, 85, 60)***, имеет азимут падения 120^0 и интервал ***l=10***.

2.21. Найти двугранный угол между двумя заданными плоскостями ***ABC*** и ***DEF***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(120, 40, 50)***, ***B(115, 0, 10)***, ***C(90, 40, 20)***, ***D(135, 85, 60)***, ***E(135, 115, 20)***, ***F(15, 110, 0)***.

2.22. Построить плоскость P_i, проходящую через прямую ***AB*** и перпендикулярную плоскости Q_i. Плоскость P_i задать масштабом заложения. Координаты точек отрезка прямой – ***A(10, 20, 30)***, ***B(40, 50, 0)***. Плоскость Q_i проходит через точку ***C(50, 60, 110)***, имеет азимут падения 110^0 и уклон $i = 1:2$.

2.23. Построить высоту треугольника ***ABC*** из вершины ***C***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 10, 70)***, ***B(80, 80, 30)***, ***C(20, 65, 50)***.

2.24. Найти центр и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ***ABC***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 10, 70)***, ***B(80, 80, 30)***, ***C(20, 65, 50)***.

2.25. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник ***ABC***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 10, 70)***, ***B(80, 80, 30)***, ***C(20, 65, 50)***.

2.26. Найти расстояние между параллельными плоскостями P_i и Q_i. Плоскость P_i задана тремя точками – ***A(40, 10, 70)***, ***B(80, 80, 30)***, ***C(20, 65, 50)***, а плоскость Q_i проходит через точку ***D(110, 65, 50)***.

2.27. Построить плоскость Q_i, параллельную данной плоскости P_i***(ABC)*** и удалённую от неё на расстояние ***d=30 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(40, 10, 70)***, ***B(80, 80, 30)***, ***C(20, 65, 50)***.

2.28. Построить прямую ***n***, пересекающую две скрещивающиеся прямые ***AB*** и ***CD*** и параллельную ***EF***. Прямую ***n*** задать парой точек. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(75, 40, 30)***, ***B(35, 70, 60)***, ***C(85, 65, 50)***, ***D(45, 105, 20)***, ***E(10, 35, 80)***, ***F(25, 100, 50)***.

2.29. Определить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми ***AB*** и ***CD***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(75, 40, 30)***, ***B(35, 70, 60)***, ***C(85, 65, 50)***, ***D(45, 105, 20)***.

2.30. Построить прямую, пересекающую данные прямые ***AB*** и ***CD*** и параллельную оси ***Oy***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(75, 40, 30)***, ***B(35, 70, 60)***, ***C(85, 65, 50)***, ***D(45, 105, 20)***.

3. МНОГОГРАННИКИ

3.1. Построить тетраэдр, поставленный на горизонтальную плоскость проекций xOy по заданному ребру, равному *45* (по масштабу чертежа).*

Решение (рис. 42). Построение тетраэдра начинают с построения на горизонтальной плоскости проекций xOy основания тетраэдра $A_0B_0C_0$ – правильного треугольника с заданной стороной. Затем для определения проекции вершины тетраэдра совмещают его боковые грани с горизонтальной плоскостью проекций xOy, приняв за оси вращения соответствующие стороны основания тетраэдра. Совмещение граней представится в виде трёх одинаковых равносторонних треугольников $A_0S'B_0$, $B_0S''C_0$, $C_0S'''A_0$. При этом точки S', S'' и S''' – это совмещения одной и той же точки – вершины тетраэдра $S_?$. Затем поднимают боковые грани тетраэдра до тех пор, пока точки S', S'' и S''' не сольются в одну $S_?$. При этом горизонтальные проекции точек S', S'' и S''' будут перемещаться по перпендикулярам n, m, k к осям вращения A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0, и поэтому горизонтальная проекция вершины $S_?$ будет находиться в точке пересечения всех трёх перпендикуляров.

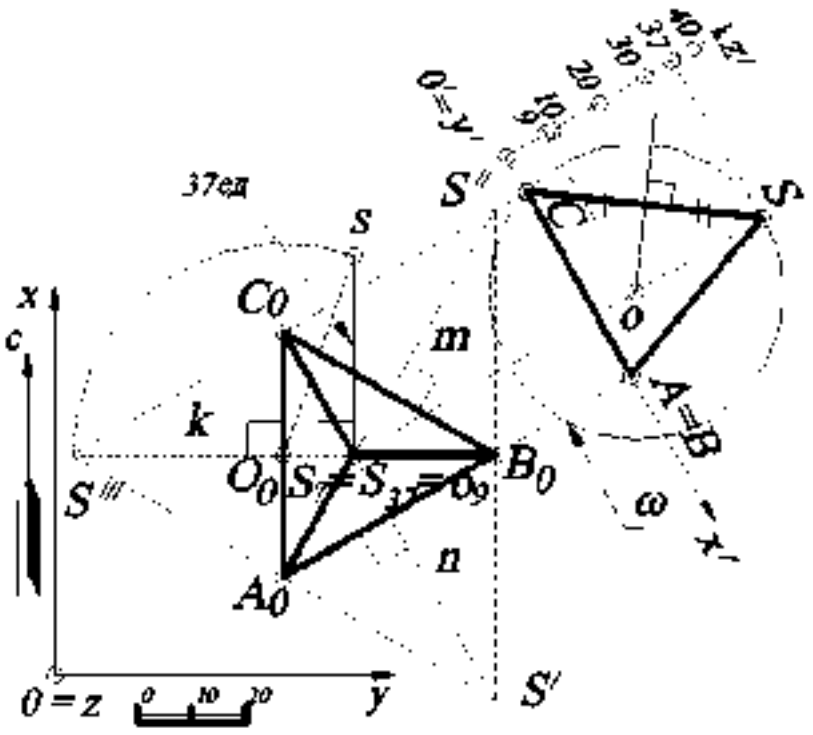


Рис. 42.

* Построения могут выполняться аналогично, если необходимо построить неправильную пирамиду по произвольным шести ребрам

По найденной таким образом горизонтальной проекции вершины $S_?$ и её совмещению (например, S''') остаётся определить числовую отметку точки $S_?$. Искомая числовая отметка или расстояние от горизонтальной плоскости проекций xOy (по заданию основания тетраэдра) равно катету $S_?s$ прямоугольного треугольника $S_?sO_0$, построенного по гипотенузе O_0S''' и катету $S_?O_0$ (см. рис. 34).

Проекция описанной сферы ω строится из условия: все точки тетраэдра принадлежат поверхности сферы. Ребро SC параллельно плоскости профиля. Следовательно, проекция описанной сферы (на профиле) будет проходить через точки S, C и точки им симметричные относительно высоты тетраэдра (так как точка C принадлежит параллели описанной сферы и на этом профиле будет принадлежать очерку этой сферы). Построив серединный перпендикуляр к профилю отрезка SC, находят проекцию центра o описанной сферы ω. Горизонтальная проекция описанной сферы определяется радиусом $oS=oC$ и центром o_9. Вследствие того, что описанная сфера ω на плане будет изображаться в виде окружности такого же радиуса, как и на профиле и для того чтобы не затенять построения тетраэдра на плане, проекция описанной сферы на плане не проведена.

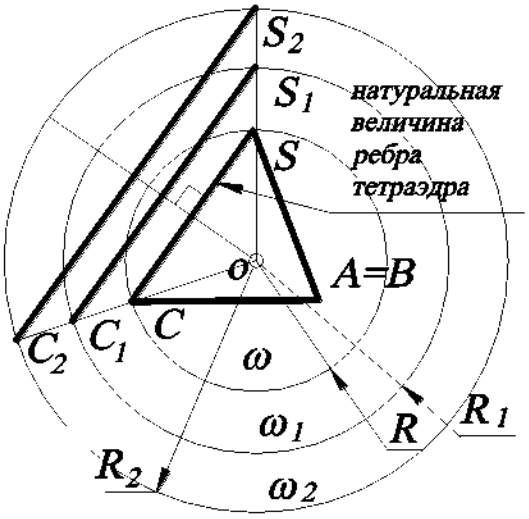


Рис. 43.

Что касается зависимости между радиусом описанной сферы и длиной ребра тетраэдра, то это будет величина постоянная. Другими словами, построив один раз сферу, описанную вокруг тетраэдра с заданной величиной ребра, и пользуясь пропорциональностью, можно графически определить радиус любой другой сферы, описанной вокруг тетраэдра, и величину его ребра. Такая зависимость справедлива для всех тел Платона. На рис. 43 построена графическая зависимость длины

ребра тетраэдра от радиуса описанной сферы: $\frac{SC}{R} = \frac{S_1C_1}{R_1} = \frac{S_2C_2}{R_2} = const$, то есть из точки o строятся прямые, проходящие через точки C и S и в пересечении с произвольными окружностями ω_1 и ω_2 - проекциями описанных сфер – определяются ребра S_1C_1, S_2C_2.

3.2. Построить гексаэдр (куб) с величиной ребра *40* (по масштабу чертежа).

Решение (рис. 44). В этом случае гексаэдр стоит одной своей гранью $A_0B_0C_0D_0$ на основной плоскости проекций xOy. Грань $A_0B_0C_0D_0$ будет проецироваться на эту плоскость проекций в виде квадрата со стороной *40*. Длина ребра гексаэдра соответствует числовым отметкам верхнего основания $E_{40}F_{40}K_{40}L_{40}$, проекция которого будет совпадать с проекцией $A_0B_0C_0D_0$.

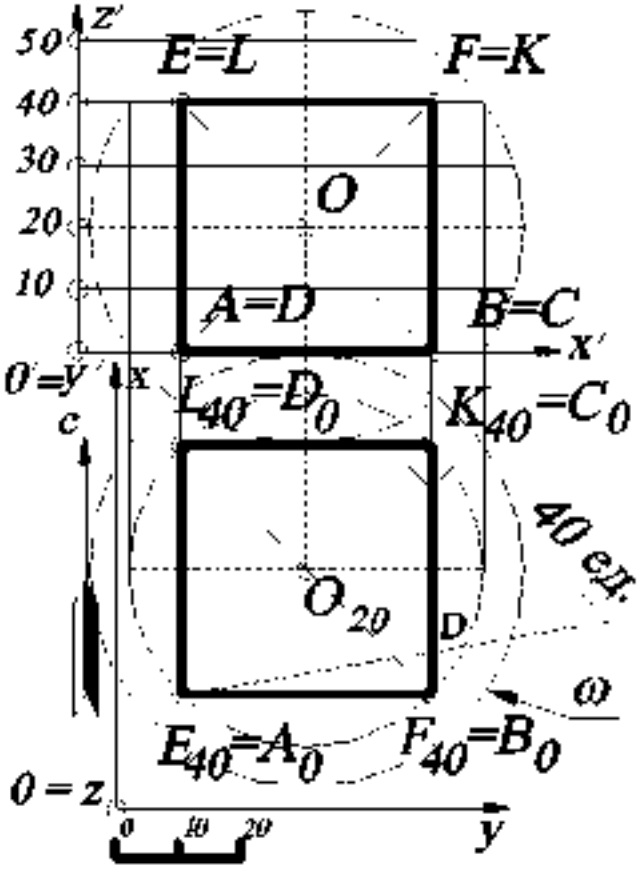


Рис. 44.

Центр описанной сферы ω будет находиться на пересечении диагоналей гексаэдра точка O_{20}, а длина любой диагонали будет являться диаметром D описанной сферы. Все диагонали гексаэдра проецируются на горизонтальную плоскость проекций xOy с искажением, следовательно, на плане находят натуральную величину любой диагонали, например C_0E_{40}, методом прямоугольного треугольника. Полученная величина D является диаметром описанной сферы ω.

3.3. Построить октаэдр с величиной ребра *42* (по масштабу чертежа).

Решение (рис. 45). Октаэдр состоит из восьми равносторонних треугольников, соединённых по четыре около каждой вершины. Отсюда видно, что октаэдр (правильный восьмигранник) может быть рассмотрен как две четырехугольные пирамиды – ***EABCD*** и ***FABCD*** (***E***, ***F*** – вершины этих пирамид), сложенные своими квадратными основаниями ***ABCD*** вместе. На этом основании построение октаэдра начинается с построения упомянутого выше квадрата со стороной *42* как основания пирамид.

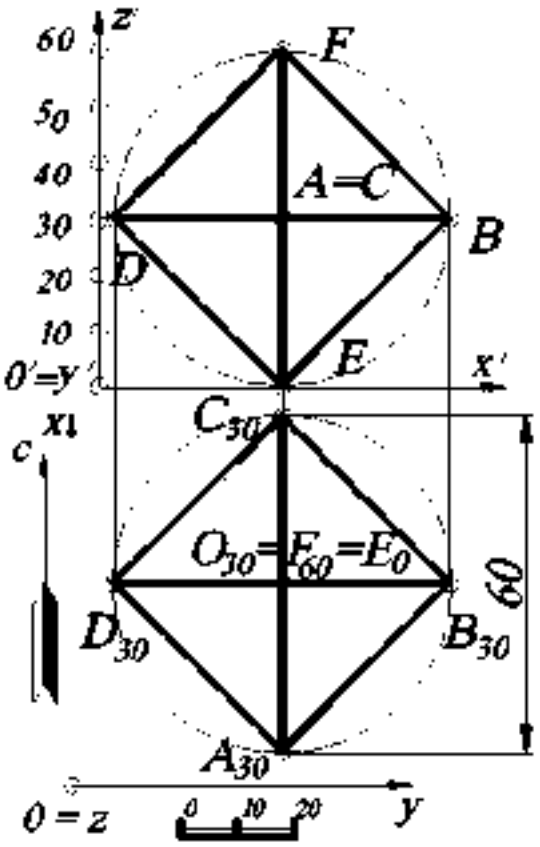


Рис. 45.

В простейшем случае, когда диагональ октаэдра, соединяющая обе вершины пирамид, вертикальна, плоскость квадрата параллельна горизонтальной плоскости проекций и, следовательно, проецируется на неё в натуральную величину, а на профиле – по прямой, параллельной оси z'. А потому, вычертив на горизонтальной плоскости квадрат $A_{30}B_{30}C_{30}D_{30}$, сторона которого равна ребру октаэдра, и соединив его центр O_{30}, в котором проецируются вершины ***E*** и ***F*** пирамид, с вершинами ***ABCD***, находят горизонтальную проекцию октаэдра. Для определения числовых отметок точек ***E*** и ***F*** заметим, что все диагонали октаэдра равны между собой и что квадрат ***ABCD*** делит вертикальную диагональ пополам. Поэтому, измерив длину диагонали, например $A_{30}C_{30}$, которая равна *60*, получают числовые отметки точек E_0 и F_{60}. Причём длина диагонали (и её проекции в этом случае) равна диаметру сферы, описанной вокруг этого октаэдра.

3.4. Построить правильный пятиугольник со стороной ***50*** (по масштабу чертежа).

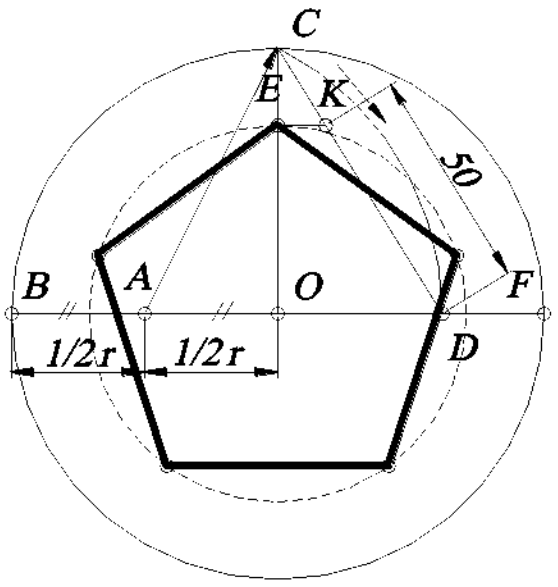


Рис. 46.

Решение (рис. 46). Для этого пользуются правилом «золотого сечения». Проводят произвольную окружность с радиусом, равным ***OB***, и делят этот радиус пополам, получая точку ***A***. Из точки ***A*** радиусом, равным ***AC***, проводят дугу окружности, которая пересечет горизонтальную прямую ***OF*** в точке ***D***. Таким образом, разделили отрезок ***BD*** в отношении «золотого сечения», где ***AD*** – «большая» часть, а ***BA*** – «меньшая». Точку ***D*** соединяют с точкой ***C*** прямой линией. Отрезок прямой ***DC*** будет являться шкалой, на которой откладывают заданную сторону правильного пятиугольника. В данной задаче на ***DC*** откладывают отрезок, равный ***50***, и получают точку ***K***. Из точки ***K*** проводят отрезок, параллельный отрезку ***OD***, который пересечёт вертикальную ось ***OC*** в точке ***E*** – вершине правильного пятиугольника. Отрезок ***OE*** будет являться радиусом описанной окружности искомого пятиугольника. Остальные вершины пятиугольника находят, откладывая циркулем по построенной окружности отрезки (хорды), равные ***50***.

3.5. Построить икосаэдр с величиной ребра ***47*** (по масштабу чертежа).

Решение (рис. 47). Икосаэдр образован двадцатью равносторонними треугольниками, соединёнными по пяти около каждой вершины и, следовательно, расположенными так, что икосаэдр может быть рассматриваемым как многогранник, состоящий из двух пятиугольных пирамид ***ACDEFG*** и ***BHJKLM*** (где ***A*** и ***B*** – вершины этих пирамид) и промежуточного многогранника, ограниченного с боков десятью равными треугольниками. Пирамиды ***ACDEFG*** и ***BHJKLM*** имеют в основании два равных и параллельных пятиугольника ***CDEFG*** и

HJKLM. Причём вершины этих оснований расположены так, что вершины верхнего основания ***HJKLM*** находятся напротив середин сторон нижнего основания ***CDEFG***. Поэтому, чтобы построить по заданному ребру икосаэдр, где отрезок прямой ***AB*** соединяет вершины верхней и нижней пирамид, перпендикулярен основной плоскости проекций ***xOy***, и, следовательно, пятиугольные основания ***CDEFG*** и ***HJKLM*** параллельны этой плоскости проекций, а вершина ***A*** принадлежит этой плоскости проекций (то есть имеет отметку ***0***), поступают следующим образом.

На плане чертят по заданному ребру (см. рис. 46) два правильных пятиугольника ***CDEFG*** и ***HJKLM*** так, чтобы точки ***C, D, E, F, G, H, J, K, L, M*** делили окружность, описанную около них, на десять равных частей. Тогда точки ***CDEFG*** и ***HJKLM*** представят горизонтальные проекции оснований как нижней пирамиды, так и верхней, а также промежуточного многоугольника, где центр ***O*** – это середина отрезка прямой ***AB***. Полученные точки последовательно соединяют между собой, как показано на рис. 47.

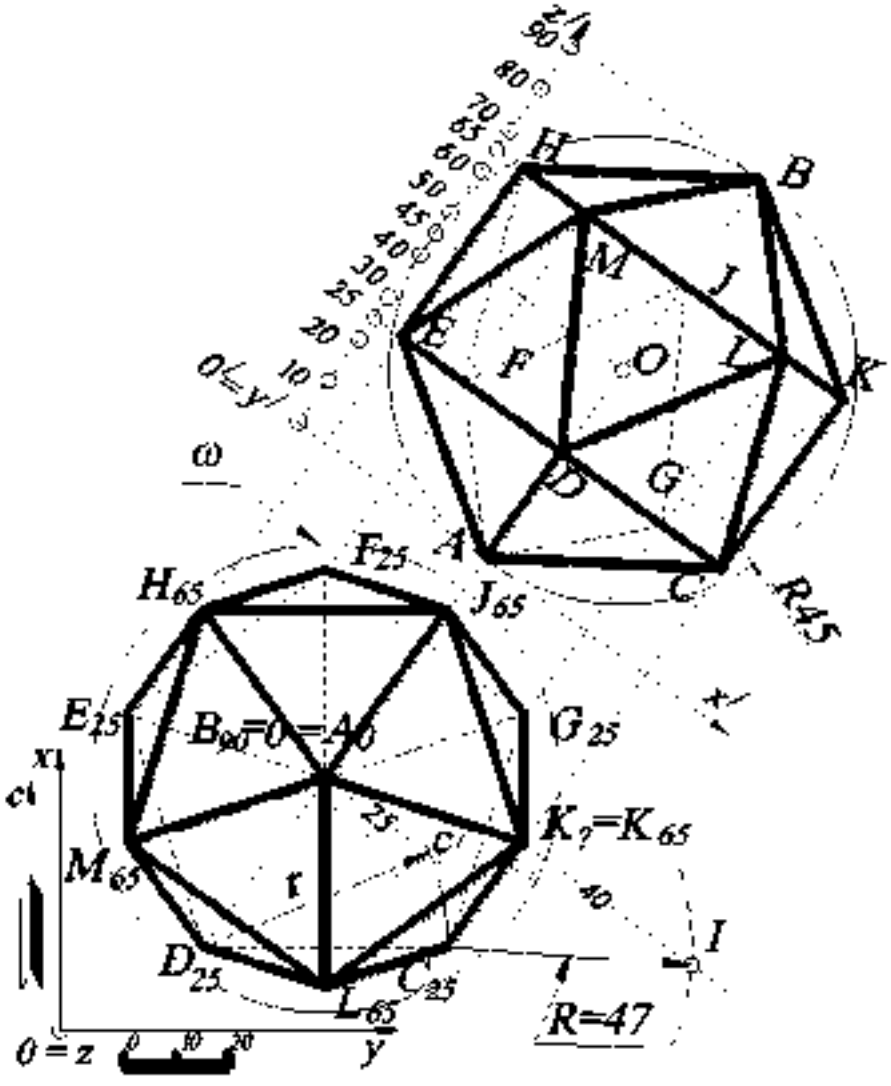


Рис. 47.

Чтобы найти числовые отметки полученных проекций вершин икосаэдра, достаточно найти высоту h обеих пирамид (они равны) и высоту h_1 промежуточного многогранника, так как основание нижней пирамиды ***CDEFG*** параллельно основной плоскости проекций ***xOy*** и находится от неё на расстоянии высоты пирамиды h. Основание верхней пирамиды ***HJKLM*** также параллельно основной плоскости проекций и находится от неё на расстоянии $h+h_1$, а вершина ***B*** – $h+h_1+h$. Высота h пирамиды равна катету прямоугольного треугольника, в котором гипотенузой является ребро пирамиды, а другим катетом – расстояние от основания высоты пирамиды до одной из вершин основания пирамиды. Поэтому строят прямоугольный треугольник, в котором один катет равен A_0D. Затем в точке A_0 восстанавливают перпендикуляр к A_0D, на котором делают засечку циркулем, равным гипотенузе – натуральной величине ребра пирамиды $r=47$. Катет прямоугольного треугольника A_0c' равен h. Измерив расстояние $A_0c'=25$ (по масштабу чертежа), получают числовые отметки точек ***C***, ***D***, ***E***, ***F***, ***G***, равные 25.

Остаётся найти высоту h_1 промежуточного многогранника. Для этого достаточно найти высоту одной из вершин верхнего его основания ***HJKLM***, например, вершины $K_?$, над плоскостью проекций ***xOy***, так как это основание параллельно основной плоскости проекций. С этой целью используют метод прямоугольного треугольника, то есть определяют разность координат $\Delta z=h_1$ (числовых отметок) концов отрезка, например, отрезка (ребра) $C_{25}K_?$, а именно строят прямоугольный треугольник $C_{25}K_?I$, в котором один катет равен $C_{25}K_?$. Затем в точке $K_?$ восстанавливают перпендикуляр $K_?I$, на котором делают засечку циркулем, равным гипотенузе – ребру $R=47$ (по масштабу чертежа).

Искомая высота точки $K_?$ над основной плоскостью проекций определится как катет $K_?I$ прямоугольного треугольника $C_{25}K_?I$, построенного по катету $C_{25}K_?$ и гипотенузе $R=47$. А потому, измерив расстояние $K_?I=40=h_1$ (в соответствии с линейным масштабом), получают отметку точки $K_?$, равную $h_1+h=25+40=65$. Все точки основания верхней пирамиды ***HJKLM*** также будут иметь числовые отмет-

ки, равные *65*, так как это основание параллельно основной плоскости проекций *xOy*.

Вершина *B* будет иметь числовую отметку $h+h_1+h=25+40+25=90$. Наконец, диаметр описанной сферы ω икосаэдра $|AB|=90$, центр *O* которой будет лежать на середине этого отрезка.

3.6. Построить додекаэдр с величиной ребра *33*.

Решение (рис. 48). Додекаэдр (правильный двенадцатигранник) образован двенадцатью правильными пятиугольниками, соединёнными по три около каждой вершины, и расположены так, что противоположные грани многогранника лежат в плоскостях, параллельных друг другу, и симметричны относительно центра додекаэдра.

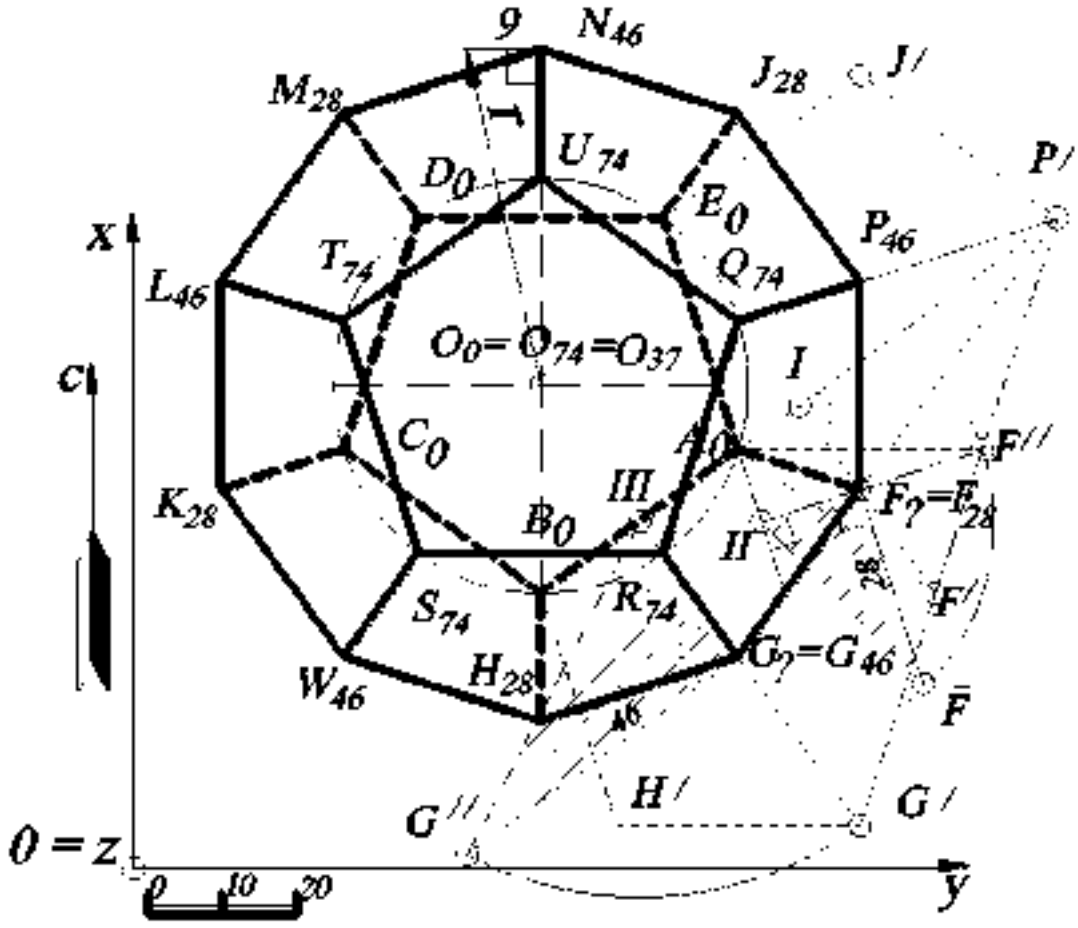


Рис 48

Построение выполняется следующим образом. Предположим, что додекаэдр одной из своих граней ***ABCDE*** поставлен на основную плоскость проекций ***xOy***. В таком случае вычерчивают на основной плоскости проекций правильный пятиугольник $A_0B_0C_0D_0E_0$ – основание додекаэдра. Чтобы определить проекции боковых вершин додекаэдра и их числовые отметки, совмещают с плоскостью проекций ***xOy*** две смежные грани, прилегающие к основанию $A_0B_0C_0D_0E_0$, вращая их около ребра A_0B_0 и A_0E_0. Совмещение этих граней представится в виде двух правильных пятиугольников – $B_0H'G'F'A_0$ и $A_0F''P'J'E_0$, причём легко видеть, что точки F' и F'' - это прообразы для совмещения одной и той же точки – вершины $F_?$. Вращая грани, поднимают их в первоначальное положение и находят проекции точек F', F'', G'. На плане проекции этих точек будут при восстановлении граней перемещаться по перпендикулярам к осям вращения A_0B_0 и A_0E_0. Следовательно, горизонтальная проекция вершины $F_?$ будет находиться на пересечении перпендикуляров IF' и IIF'', по которым перемещаются точки F' и F''.

Что касается числовой отметки точки $F_?$, то она будет находиться на высоте от основной плоскости проекций ***xOy***, которая определится по величине катета $F_?\overline{F}$ в прямоугольном треугольнике $IIIF_?\overline{F}$ (см. рис. 34). Другими словами, длина катета $F_?\overline{F}$ равна ***28*** (по построению), а ось вращения A_0E_0 занимает нулевую отметку, тогда точка $F_?= F_{0+28}=F_{28}$.

Чтобы найти числовую отметку точки $G_?$ по совмещению G', то можно увидеть на рис. 46, что прямая $F'G'$ пересекает ось вращения A_0B_0 в точке P', и, следовательно, горизонтальная проекция точки G' должна находиться одновременно и на горизонтальной проекции $P'F$ прямой $F'P'$ и на перпендикуляре $IIIG'$ к оси вращения A_0B_0, то есть в точке их пересечения $G_?$. По известным точкам $G_?$ и G' (см. рис. 34) определяют числовую отметку точки $G_?$, как катет $G_?G''$ прямоугольного треугольника $G_?G''III$, построенного по катету $IIIG_?$ и гипотенузе $IIIG''=G_?G'$. Поэтому, измерив расстояние $G_?G''$ (в соответствии с линейным масштабом), получают числовую отметку точки $G_?=G_{46}$.

Таким же образом можно было бы поступать для определения проекций всех остальных вершин додекаэдра. Однако вследствие правильности многогранника все его вершины, подобные ***F*** и ***G***, расположены одинаковым образом относительно основной плоскости проекций и симметрично относительно оси додекаэдра, проведённой через центры обоих оснований ***ABCDE*** и ***RSTUQ***. Следовательно, вершина ***F*** и точки ***H***, ***K***, ***M***, ***J*** лежат на одном и том же расстоянии от основной плоскости проекций и симметрично расположены относительно центра окружности, описанной около основания ***ABCDE***. На этом же основании горизонтальные проекции ***F, H***, ***K***, ***M***, ***J*** образуют вершины правильного пятиугольника, имеющего общую проекцию центра с основанием ***ABCDE***, и одну из вершин в точке ***F***. Числовые отметки точек ***H***, ***K***, ***M***, ***J*** равны числовой отметке точки ***F***, так как проекция пятиугольника ***FHKMJ*** параллельна основной плоскости проекций.

На этом же основании горизонтальные проекции ***G***, ***W***, ***L***, ***N***, ***P*** образуют вершины правильного пятиугольника, имеющего общую проекцию центра с основанием ***ABCDE***, и одну из вершин в точке ***G***. Следовательно, вершины ***W***, ***L***, ***N***, ***P*** имеют числовые отметки такие же, как у вершины ***G***, то есть ***46***.

Наконец, верхняя грань ***RSTUQ***, параллельная основной плоскости проекций, имеет горизонтальной проекцией правильный пятиугольник, вписанный в одинаковую окружность, что и пятиугольник ***ABCDE***, и притом так, что вершины обоих многоугольников разделяют окружность на десять равных частей. В силу симметричности додекаэдра числовые отметки грани ***RSTUQ*** определяются арифметическим прибавлением разности числовых отметок грани $F_{28}H_{28}K_{28}M_{28}J_{28}$ и грани $A_0B_0C_0D_0E_0$ к числовым отметкам грани $G_{46}W_{46}L_{46}N_{46}P_{46}$, то есть ***28-0=28***, ***28+46=74***, и получают грань с отметками $R_{74}S_{74}T_{74}U_{74}Q_{74}$.

Центр описанной вокруг додекаэдра сферы лежит на середине оси O_0O_{74}, то есть в точке O_{37}. Все вершины додекаэдра принадлежат поверхности сферы. Поэтому проекцией радиуса описанной сферы будет отрезок, соединяющий центр O_{37} с любой её вершиной, например N_{46}. Натуральную величину радиуса ***r*** опи-

санной сферы определяют методом прямоугольного треугольника, как показано на рис. 48 (проекция описанной сферы на чертеже не показана из-за множества линий основных построений додекаэдра).

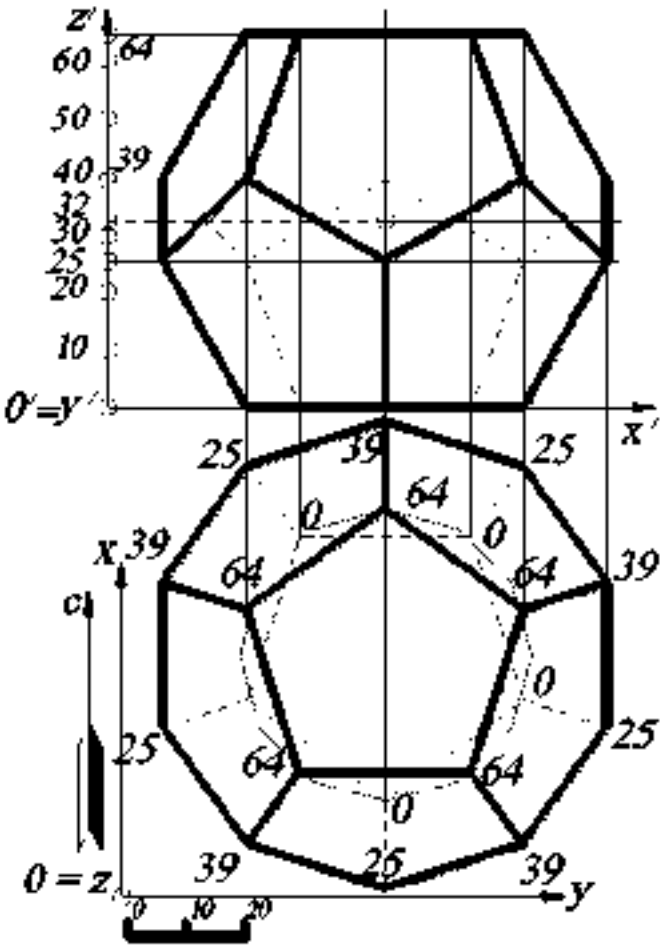


Рис. 49.

На рис. 49 показано построение профиля додекаэдра. Задаётся система координатных осей $O'x'y'z'$ (ось y' будет проецироваться в точку, совпадающую с O'), и по линиям проекционной связи строят вершины додекаэдра в соответствии с их числовыми отметками. Затем все полученные вершины соединяются отрезками прямых с учётом видимости рёбер додекаэдра.

3.7. Найти точки пересечения пирамиды *ABCD* с плоскостью ω_i.

Решение (рис. 50). Построение выполняется следующим образом. Градуируют сторону *SA* и строят горизонтали h_1, h_2, h_3, принадлежащие плоскости грани *SAC*. Находят линию пересечения

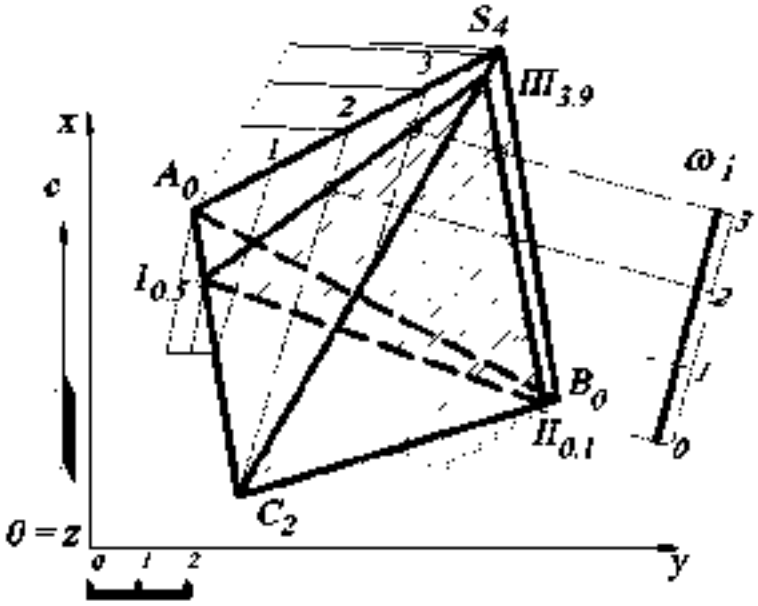


Рис. 50.

грани ***SAC*** и заданной плоскости ω_i, как пересечение пары горизонталей с одинаковыми числовыми отметками (см. задачу 2.8.). В пересечении пар горизонталей с отметками ***2*** и с отметками ***3*** получаются две точки, которые задают линию пересечения (***I, III***) грани ***SAC*** и заданной плоскости ω_i.

Аналогично строят линию пересечения грани ***SCB*** с заданной плоскостью ω_i, в результате имеют линию пересечения (***II, III***). Грань ***ACB*** с заданной плоскостью ω_i пересекается по прямой (***I, II***), так как построенные точки ***I*** и ***II*** принадлежат рёбрам этой грани, и поэтому дополнительные построения здесь выполнять необязательно. Построенный треугольник является сечением пирамиды ***SABC*** заданной плоскостью ω_i. Определяют видимость этого треугольника и числовые отметки его вершин ***I***, ***II*** и ***III*** (с помощью градуирования).

3.8. Найти точки пересечения пирамиды ***SABC*** с прямой ***DE***.

Решение (рис. 51). Построение точек пересечения многогранника с прямой линией связано с основной позиционной задачей. ***Алгоритм*** выполняется в следующей последовательности.

1. Через заданную прямую проводится вспомогательная плоскость-посредник (таких плоскостей можно провести пучок ∞^1).
2. Строится фигура сечения (см. пример на рис. 50). Затем определяются точки пересечения (с числовыми отметками) заданной прямой со сторонами фигуры сечения.
3. Определяют видимость прямой.

Через заданную прямую D_3E_1 проводят вспомогательную плоскость-посредник ω_i, в сечении которой с заданным многогранником будет треугольник $I_{0,5}II_{0,1}III_{3,9}$. Полученное сечение $I_{0,5}II_{0,1}III_{3,9}$ пересечет заданную прямую D_3E_1 в точках ***F*** и ***K***, отметки которых определяются градуированием отрезка прямой D_3E_1.

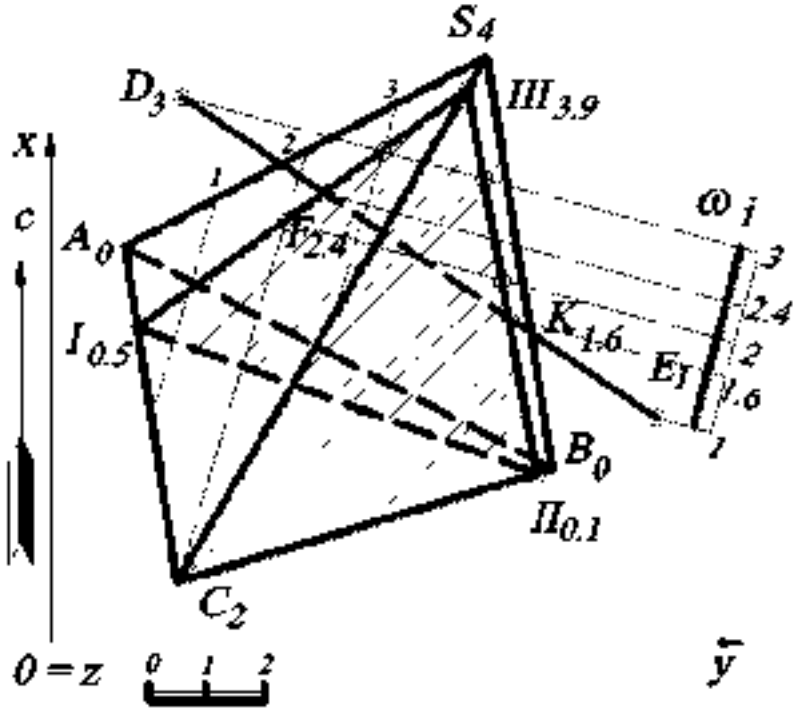


Рис. 51.

Видимость отрезка прямой D_3E_1 определяется по конкурирующим точкам. Другими словами, находят точки, принадлежащие поверхности многогранника и прямой D_3E_1, проекции которых совпадают, и определяют их числовые отметки с помощью градуирования. Точка будет видимой, числовая отметка которой больше (в зависимости от этого, определяется видимость многогранника или прямой). На рис. 51 проекция прямой D_3E_1 и проекция ребра S_4C_2 пересекаются. Однако ребро S_4C_2 находится выше, чем прямая D_3E_1, значит, прямая D_3E_1 является невидимой, а в точках пересечения с многогранником $F_{2,4}$ и $K_{1,6}$ видимость её меняется на противоположную.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Построить пересечение прямой EF с пирамидой $ABCD$. Проекции точек заданы следующими координатами: $A(140, 120, 40)$, $B(90, 30, 0)$, $C(40, 20, 20)$, $D(20, 130, 0)$; $E(70, 15, 10)$, $F(100, 150, 40)$.

3.2. Построить сечение поверхности пирамиды ***SABCD*** плоскостью ***MLN***. Проекции точек заданы координатами: ***S(135, 120, 150) A(55, 15, 20), B(95, 180, 70), C(20, 160, 30), D(20, 25, 0) M(160, 55, 110), L(145, 30, 90), N(145, 55, 100)***.

3.3. Построить проекцию прямой призмы, нижнее основание которой $A_{20}B_{20}C_{50}$, а высота равна ***60 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(65, 55, 20), B(35, 90, 20), C(80, 90, 50)***.

3.4. Поставить на плоскость $K_0L_{60}M_{30}$ треугольную пирамиду ***SABC***, в основании которой лежит правильный треугольник $A_?B_?C_?$, если известен центр ***O(35, ?, 40)*** и радиус описанной окружности основания ***R=25 мм***, высота пирамиды ***h=70 мм***. Вершины $A_?$ и $C_?$ принадлежат горизонтали плоскости $K_0L_{60}M_{30}$. Плоскость $K_0L_{60}M_{30}$ задана координатами точек: ***K(65, 15, 0), L(65, 105, 60), M(5, 60, 30)***.

3.5. Построить проекцию пирамиды, нижнее основание которой $A_{20}B_{20}C_{50}$, вершина $S_?$ лежит на прямой, перпендикулярной основанию, проходящей через точку C_{50} и $S_?C_{50}$=***60 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(65, 55, 20), B(35, 90, 20), C(80, 90, 50)***.

3.6. Поставить на плоскость $K_0L_{60}M_{30}$ прямую треугольную призму, в основании которой лежит правильный треугольник $A_?B_?C_?$, если известен центр ***O(35, ?, 40)*** и радиус описанной окружности основания ***R=25 мм***, высота призмы OO'=***70 мм***. Верхнее основание параллельно нижнему и проходит через точку ***O'(35, 40, ?)***. Вершины $A_?$ и $C_?$ принадлежат горизонтали плоскости $K_0L_{60}M_{30}$. Плоскость $K_0L_{60}M_{30}$ задана координатами точек: ***K(65, 15, 0), L(65, 105, 60), M(5, 60, 30)***.

3.7. Поставить на плоскость $K_0L_{60}M_{30}$ треугольную пирамиду ***SADC***, в основании которой лежит правильный треугольник $A_{35}B_?C_?$, если известен центр описанной окружности основания ***O(35, ?, 40)*** и точка ***A(55, ?, 35)***. Высота пирамиды $S_?O_{40}$=***70 мм***. Плоскость $K_0L_{60}M_{30}$ задана координатами точек: ***K(65, 15, 0), L(65, 105, 60), M(5, 60, 30)***.

3.8. Построить прямую призму, основания которой – параллельные треугольники $A_{55}B_{50}C_{30}$ и $A'_1B'_1C'_2$, а высота призмы $h=70$ *мм*. Призма стоит на плоскости $K_0L_{60}M_{30}$. Проекции вершин нижнего основания призмы заданы следующими координатами: *A(60, ?, 55), B(15, ?, 50), C(50, ?, 30)*. Плоскость $K_0L_{60}M_{30}$ задана координатами точек: *K(65, 15, 0), L(65, 105, 60), M(5, 60, 30)*.

3.9. Построить проекции пирамиды по заданному основанию $A_0B_0C_0$ и натуральным величинам трёх её рёбер: *SA=60 мм, SB=50 мм, SC=70 мм*. Основание пирамиды задано координатами точек: *A(70, 20, 0), B(40, 50, 0), C(75, 70, 0)*.

3.10. Построить сечение пирамиды $S_{70}A_0B_0C_0D_0E_0$ плоскостью $K_0M_{60}L_{40}$ и найти натуральную величину фигуры сечения. Плоскость $K_0M_{60}L_{40}$ задана координатами точек *K(55, 5, 0), M(20, 55, 60), L(5, 25, 40)* Пирамида задана координатами точек: *S(60, 60, 70), A(50, 35, 0), B(80, 35, 0), C(90, 60, 0), D(70, 75, 0), E(35, 70, 0)*.

4. ПОВЕРХНОСТИ

4.1. Построить наклонный эллиптический цилиндр, заданный осью (отрезок прямой M_1K_3) и вертикальным сечением (окружность с радиусом $r=25$).

Решение (рис. 52). Наклонный эллиптический цилиндр на чертеже в проекциях с числовыми отметками может задаваться однопараметрическим семейством эллипсов с числовыми отметками, а также этот цилиндр может определяться осью и вертикальным сечением, являющимся окружностью.

Ось наклонного цилиндра задается отрезком прямой M_1K_3. Через точку M_1 строят вертикальное сечение, перпендикулярное на плане к оси цилиндра, и вводят новую систему координат $O'x'y'z'$ для профиля. На профиле строят окружность заданного радиуса $r=25$ (в соответствии с линейным масштабом), которая является вертикальным сечением наклонного эллиптического цилиндра.

На профиле (вертикальном сечении) проводят горизонтальные линии, расстояние между которыми в масштабе равно единичным высотным превышениям. Другими словами, на профиле находят верхнюю образующую цилиндра, высот-

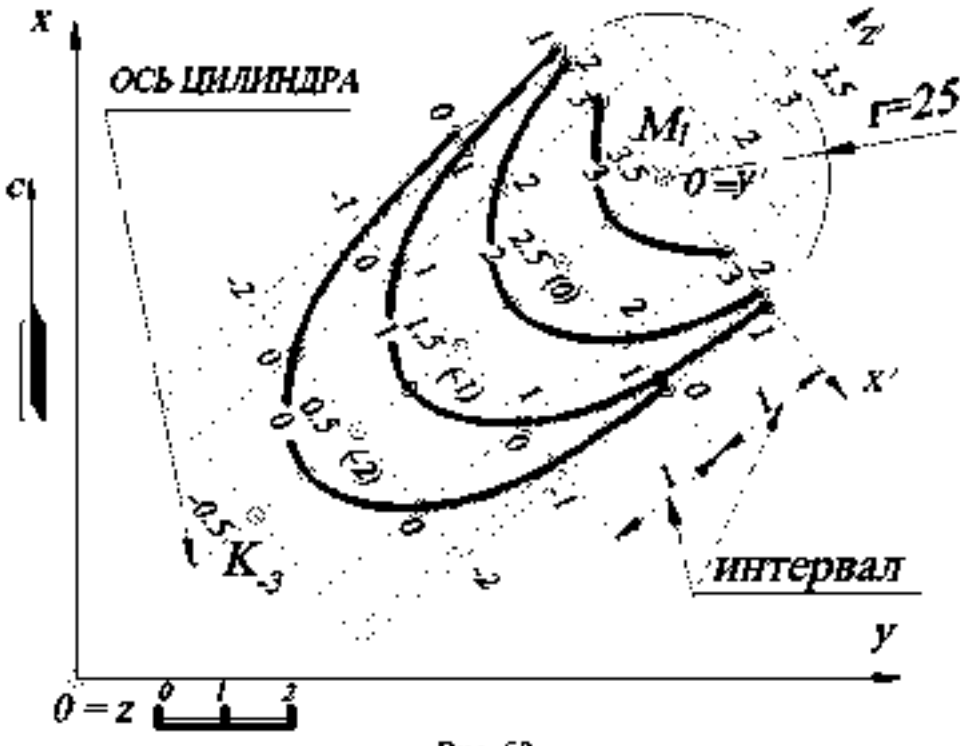


Рис. 52

ная отметка которой равна *3.5*, и ещё две образующие, высотные отметки которых на профиле равны *3* и *2*. На плане масштабы заложения этих образующих будут такими же, как и масштабы заложения оси цилиндра *l*, так как по условию задания они параллельны друг другу, а их высотные отметки будут определяться пропорционально с помощью профиля.

Крайние очерковые образующие будут иметь высотные отметки, одинаковые с высотными отметками оси, так как они лежат в одной плоскости и, как было уже сказано, параллельны друг другу. Для точности построения эллипсов градуируют ещё две образующие, высотные отметки которых на профиле равны *2*.

Для построения эллипса с высотной отметкой, например *1*, необходимо на всех проградуированных образующих цилиндра найти точки с высотной отметкой *1* и соединить их плавной кривой. Семейство (однопараметрическое) построенных эллипсов задаст на плане наклонный эллиптический цилиндр, а эллипс с высотной отметкой *0* – сечение этого цилиндра горизонтальной плоскостью проекций *H*.

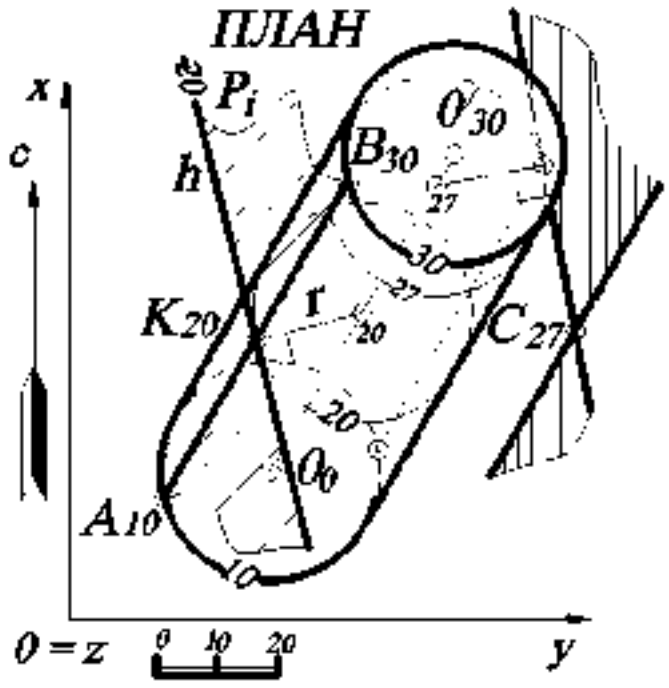


Рис. 53.

4.2. Построить касательную плоскость P_1 к поверхности наклонного цилиндра, проходящую через точку K_{20}. Точка K_{20} принадлежит поверхности цилиндра.

Решение (рис. 53). Касательная плоскость в обыкновенной (регулярной) точке *K* определена однозначно касательными в этой точке к любым двум кривым, расположенным на поверхности и пересекающимся в этой точке *K*. Следовательно, через точку K_{20} проводят образующую цилиндра $A_{10}B_{30}$, которая будет являться общей для цилиндра и

искомой касательной плоскости P_i. Известно, что радиус основания (параллели) цилиндра r, проведённый в точке касания, является нормалью к поверхности цилиндра, и задача сводится к построению плоскости, перпендикулярной к радиусу параллели цилиндра, проходящей через точку K_{20}. Поэтому проводят через точку K_{20} горизонталь h_{20}, перпендикулярную к радиусу цилиндра r, так как эта горизонталь проходит через точку с числовой отметкой *20*, то она будет иметь числовую отметку *20*. Таким образом, построив две пересекающиеся прямые h_{20} и $A_{10}B_{10}$, задают плоскость, касательную к цилиндру.

В том случае, если точка не принадлежит поверхности цилиндра, – C_{27}, то построения выполняют следующим образом. Строят параллель цилиндра с той же числовой отметкой, что и у заданной точки C_{27}, проградуировав ось цилиндра (на рис. 53 градуирование не показано), строят из точки C_{27} касательную к этой параллели и прямую, параллельную оси цилиндра.

4.3. Построить точки пересечения прямой $A_{10}B_{40}$ с поверхностью цилиндра.

Решение (рис. 54). Построение точек пересечения прямой линии с поверхностью

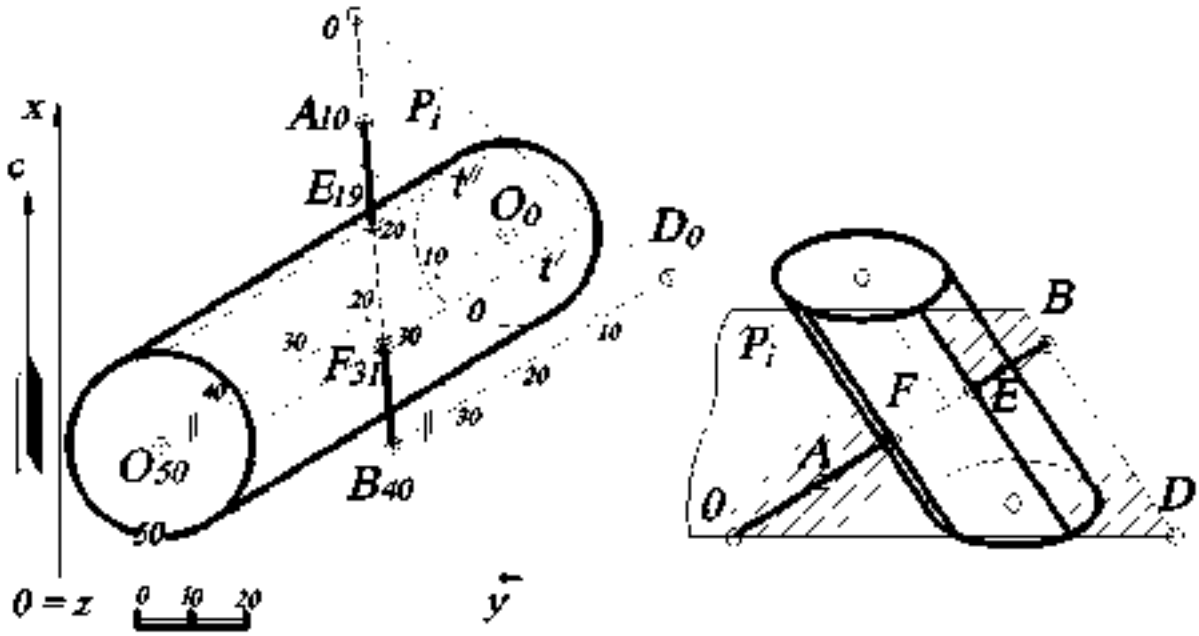


Рис. 54

цилиндра осуществляется при помощи вспомогательной плоскости. При этом вспомогательную плоскость нужно выбирать так, чтобы она, проходя через дан-

ную прямую, пересекала бы поверхность цилиндра по прямым линиям, то есть эта плоскость должна быть параллельна образующим цилиндра (в том случае, если задан конус, то плоскость должна проходить через его вершину).

Таким образом, через прямую $A_{10}B_{40}$ проводят плоскость P_i, которая пересекала бы поверхность цилиндра по его образующим. Плоскость P_i будет являться плоскостью общего положения, так как образующие цилиндра – это прямые общего положения. Для построения плоскости P_i на прямой $A_{10}B_{40}$ выбирают произвольную точку, например B_{40}, и строят прямую $B_{40}D_0$, параллельную оси O_0O_{50} цилиндра. На основании свойства параллельности прямых интервал прямой $B_{40}D_0$ равен интервалу оси цилиндра (или интервалу образующей). Затем на прямой $A_{10}B_{40}$ находят точку с отметкой 0, определив интервал прямой $A_{10}B_{40}$ (на чертеже градуирование $A_{10}B_{40}$ не показано). Пересекающиеся прямые $A_{10}B_{40}$ и $B_{40}D_0$ будут определять плоскость P_i, параллельную оси цилиндра и пересекающую его поверхность по образующим t' и t''. Точки пересечения E_{19} и F_{31} прямой $A_{10}B_{40}$ с этими образующими будут искомыми точками встречи прямой с поверхностью цилиндра. Числовые отметки точек E_{19} и F_{31} определяются градуированием отрезка прямой $A_{10}B_{40}$ (на чертеже градуирование не показано).

4.4. Построить сечение сферы плоскостью общего положения ω_i.

Решение (рис. 55). Для нахождения сечения сферы плоскостью общего положения строится профиль $O'x'y'z'$, плоскость $O'x'z'$ которого перпендикулярна горизонталям заданной плоскости ω_i. В этом случае заданная плоскость общего положения на этом профиле будет проецирующей. Поэтому вводится новая декартова система координат, причем ось x' перпендикулярна горизонталям плоскости ω_i, ось z' выбирается вертикально и перпендикулярно к оси x', а ось y' совпадает с началом отсчета O'. Для решения этой задачи профиль удобнее строить в проекционной связи, как показано на рис. 55. На профиле плоскость ω_i будет изображаться в виде прямой, совпадающей с линией падения плоскости, сфера –

в виде окружности. На профиле находят общие точки плоскости и сферы и с помощью линий проекционной связи переносят на план (точка c_{26} – это точка пересечения осей эллипса, построение которой показано на рис. 55). Большая ось эллипса, проходящая через точку c_{26}, пересекает очерк сферы в двух точках. Точки, принадлежащие экватору сферы, будут являться точками изменения видимости сечения.

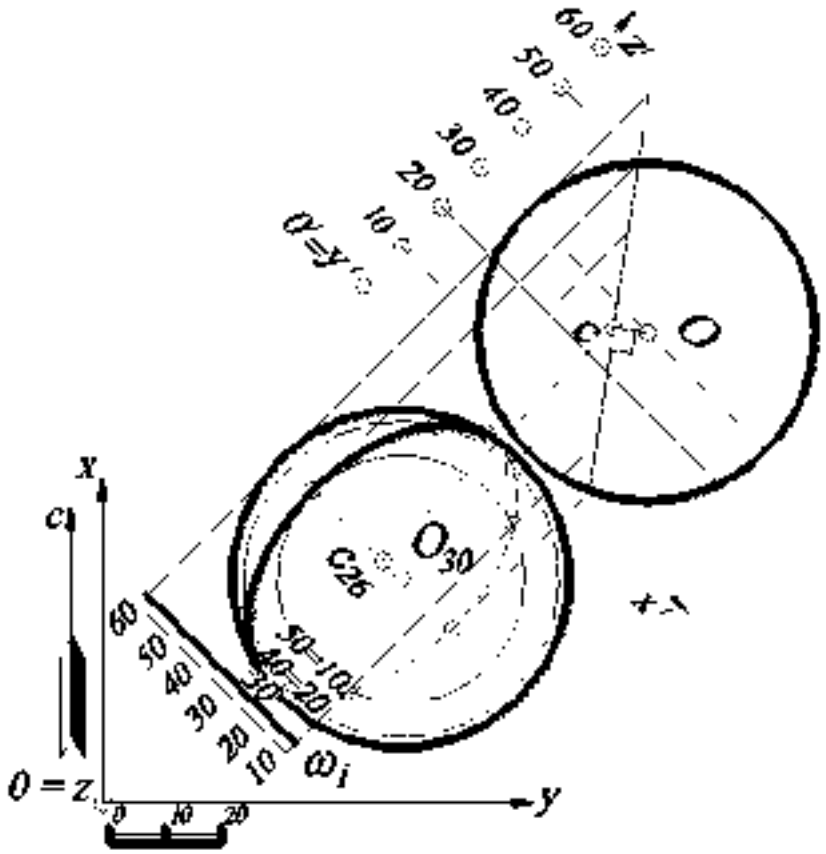


Рис. 55

4.5. Найти точки (точку) пересечения прямой $F_{10}E_{60}$ общего положения с поверхностью сферы.

Решение (рис. 56). ***Алгоритм*** этой задачи связан с основной позиционной задачей (нахождение точки пересечения прямой с плоскостью):

1. Через прямую проводят вспомогательную плоскость-посредник.

2. Находят пересечение вспомогательной плоскости-посредника со сферой (окружность).

3. Определяют точки пересечения (вместе с их высотными отметками) полученного сечения с заданной прямой.

4. Определяют видимость заданной прямой.

На чертеже в проекциях с числовыми отметками этот алгоритм реализуется следующим образом. Через прямую $E_{60}F_{10}$ проводят вертикальную плоскость-

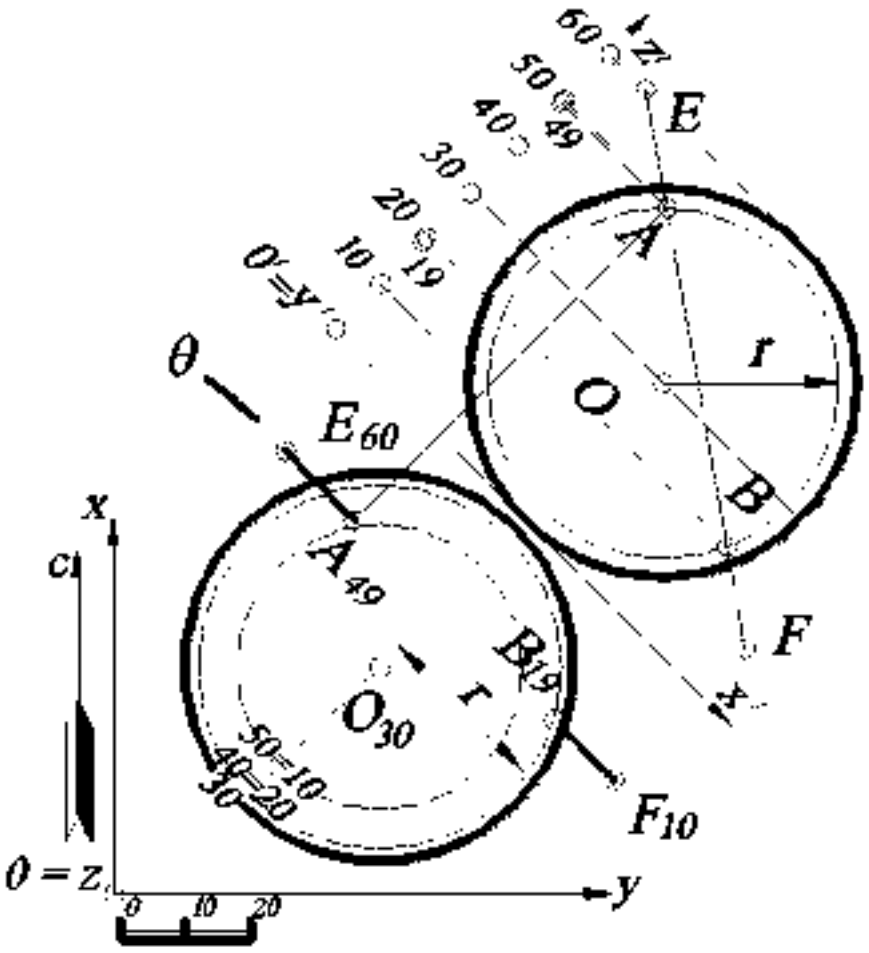


Рис. 56

посредник θ. Затем строится профиль $Ox'y'z'$ (новая декартова система координат) так, чтобы ось x' была параллельна проекции (заложению) прямой $E_{60}F_{10}$, так как в этом случае сечение сферы радиуса r на этот профиль спроецируется без искажения, а прямая изобразится в виде прямой AB. На профиле определяются общие точки сечения и заданной прямой – A_{49} и B_{10}, которые потом с помощью линий проекционной связи переносятся на план. Видимость прямой $E_{60}F_{10}$ определяют относительно поверхности сферы, то есть если поверхность сферы видима, то прямая невидима (и наоборот).

4.6. Построить сечение прямого кругового конуса плоскостью общего положения θ_i, не проходящей через вершину конуса.

Решение (рис. 57, 58, 59, 60). Прямой круговой конус задаётся на плане горизонтальными сечениями (или параллелями), расстояния между которыми определяется расстоянием – интервалом конуса l_K. При пересечении конуса плоскостью общего положения θ_i, не проходящей через вершину конуса, возможны четыре варианта.

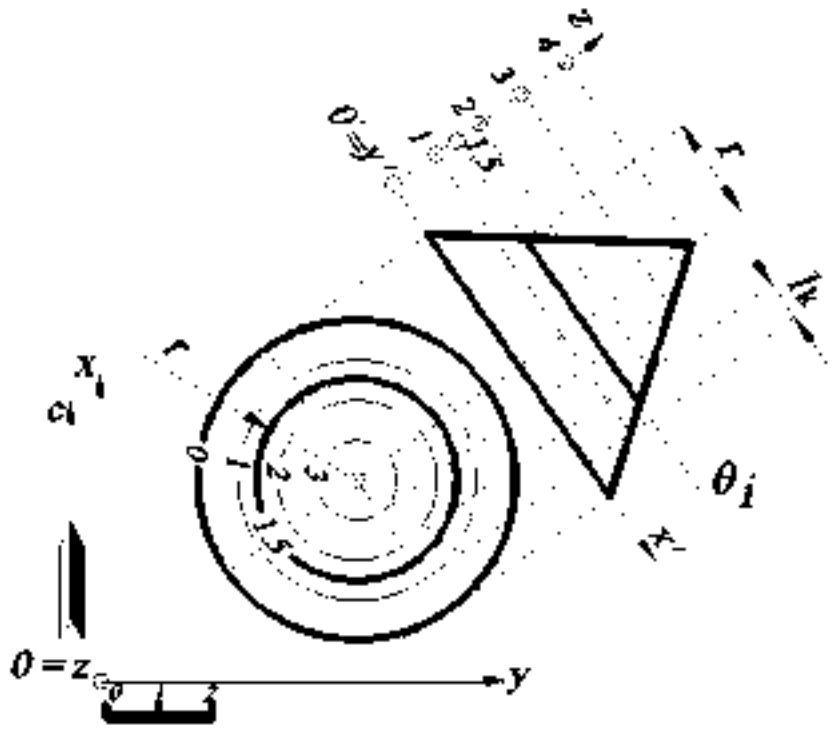


Рис. 57

*1. **Окружность,*** когда секущая плоскость перпендикулярна оси вращения конуса. Если на чертеже интервал (масштаб заложения) секущей плоскости равен бесконечности, то есть секущая плоскость θ_i параллельна основной плоскости проекций H, то в сечении получается окружность (все точки окружности имеют одну и ту же высотную отметку, например *1,5* (см. рис. 57).

*2. **Эллипс** (**или его часть**),* когда секущая плоскость θ_i пересекает все образующие одной полы конуса (или могут пересекать), но не перпендикулярна оси конуса. На чертеже в проекциях с числовыми отметками если интервал (масштаб заложения) секущей плоскости l_θ будет больше интервала (масштаба заложения) образующей поверхности заданного конуса l_k, $l_\theta > l_k$, то в сечении получается эллипс или его часть (см. рис. 58). Для построения эллипса на плане используют

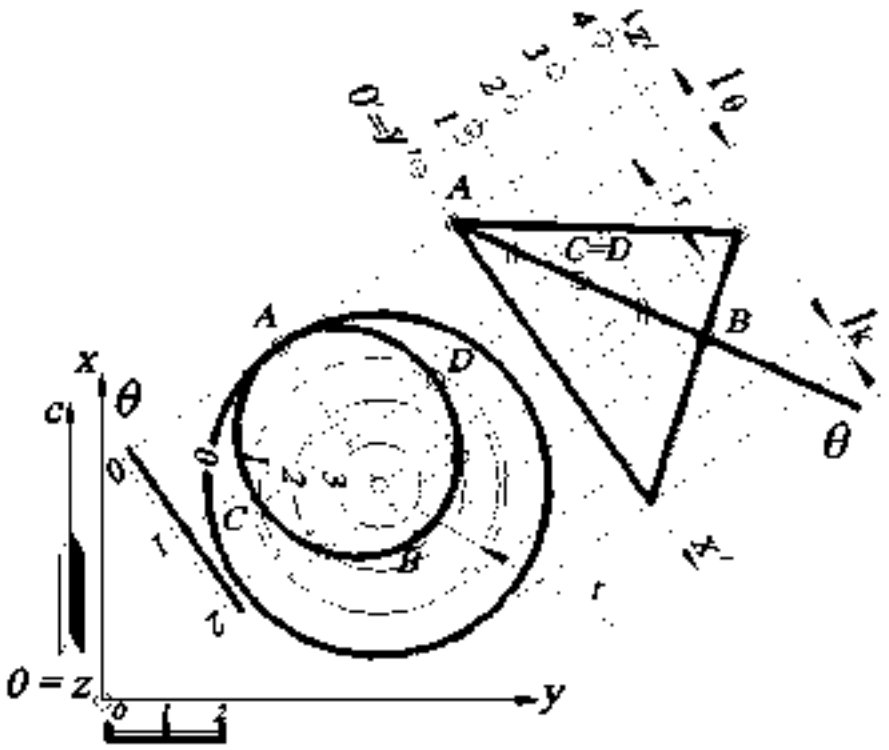


Рис. 58.

профиль, плоскость которого выбирают так, чтобы плоскость θ_i стала проецирующей, то есть перпендикулярной горизонталям плоскости θ_i.

3. Гипербола, когда секущая плоскость θ параллельна двум образующим. (Гипербола имеет две бесконечно удаленные точки). Если интервал (масштаб заложения) секущей плоскости l_θ меньше интервала (масштаба заложения) образующей конуса l_k (см. рис. 59) или секущая плоскость перпендикулярна основанию конуса, то в сечении получается гипербола $l_\theta < l_k$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

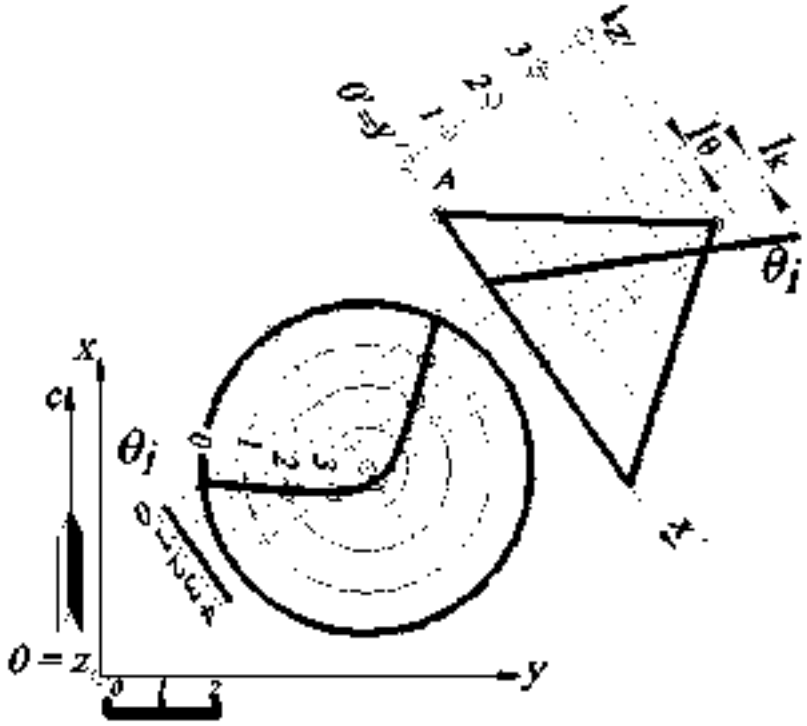


Рис. 59.

Если $l_\theta = 0$, гипербола на основную плоскость проекций H будет проецироваться в виде прямой, совпавшей с этой вертикальной плоскостью θ_i.

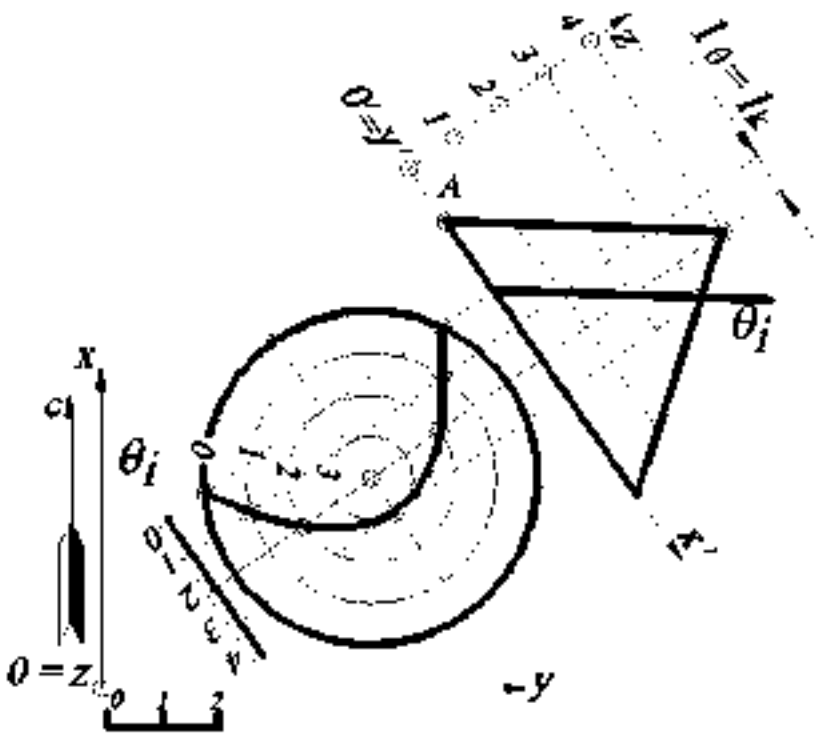


Рис. 60.

*4. **Парабола,*** когда секущая плоскость θ_i параллельна одной образующей конуса вращения (парабола имеет одну бесконечно удаленную точку). На чертеже в проекциях с числовыми отметками, если интервал (масштаб заложения) секущей плоскости l_θ равен интервалу (масштабу заложения) образующей конуса l_k, то в сечении получается парабола $l_\theta = l_k$, $y^2 = 2px$ (см. рис. 60).

Если *секущая плоскость проходит через вершину конуса*, то в сечении может получиться (рис. 61):

а) *две изотропные (мнимые) прямые*, в пересечении которых появляется действительная точка – вершина конуса S, при этом интервал секущей плоскости l_θ будет больше интервала образующей конуса вращения l_k: $l_\theta > l_k$;

б) *две совпавшие прямые*, интервал секущей плоскости l_θ будет равен интервалу образующей конуса l_k: $l_\theta = l_k$;

в) *две пересекающиеся прямые*, интервал секущей плоскости l_θ меньше интервала образующей конуса l_k: $l_\theta < l_k$ (а также если секущая плоскость проходит через ось конуса).

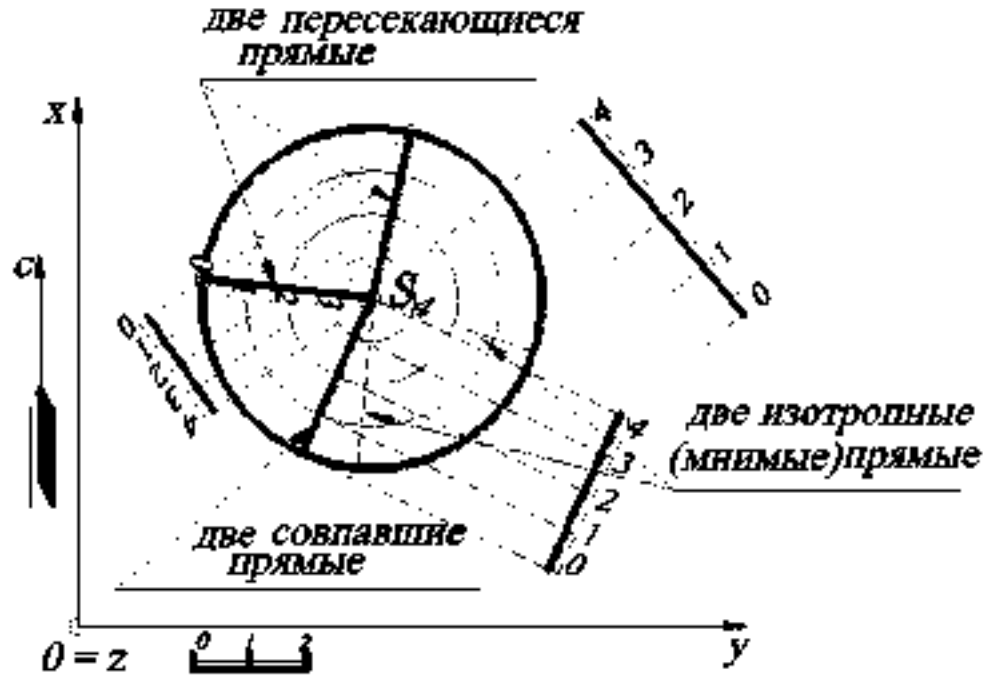


Рис 61

4.7. Найти точки пересечения прямой $A_{10}B_{40}$ и прямого кругового конуса, заданного вершиной S_{60} и основанием заданного радиуса с отметкой ***10***.

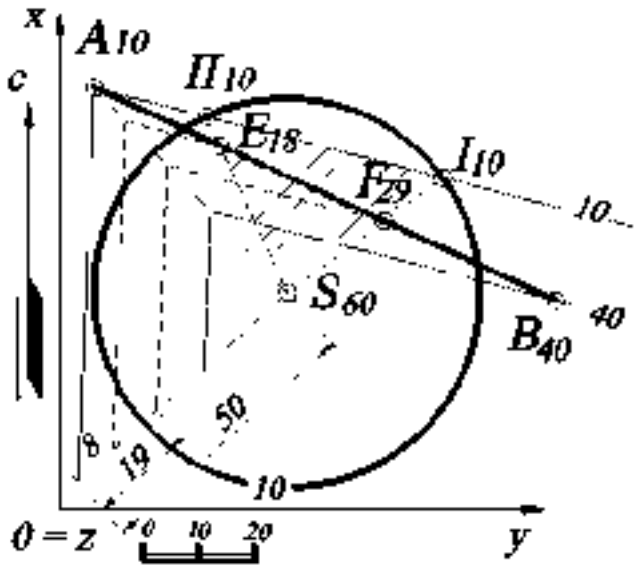


Рис 62.

Решение (рис. 62). Алгоритм решения этой задачи см. в задаче 4.5. Через вершину конуса S_{60} (см. задачу 4.3) и прямую $A_{10}B_{40}$ задают плоскость $S_{60}A_{10}B_{40}$ – это плоскость общего положения. Строят горизонтали этой плоскости (например, ***40***-ю и ***10***-ю), проградуировав отрезок $S_{60}A_{10}$. Находят пересечение плоскости $S_{60}A_{10}B_{40}$ с поверхностью заданного

конуса – это две образующие $S_{60}I_{10}$ и $S_{60}II_{10}$. Затем определяют точки пересечения заданной прямой $A_{10}B_{60}$ и полученных образующих $S_{60}I_{10}$ и $S_{60}II_{10}$ – E_{32} и F_{19}, числовые отметки которых определяются градуированием отрезка прямой $A_{10}B_{60}$ (см. построение на рис. 62).

4.8. Найти расстояние от точки A_{30} до поверхности прямого кругового конуса, заданного вершиной S_{40} и основанием – окружностью заданного радиуса с отметкой *0*.

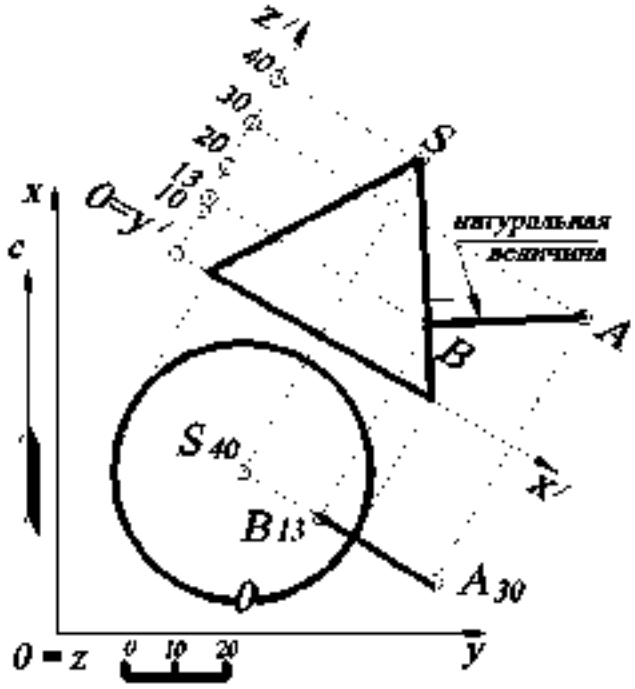


Рис 63

Решение (рис. 63). Расстоянием до поверхности конуса является перпендикуляр, опущенный из точки A_{30} к ближайшей образующей конуса. Проекция этого перпендикуляра на плане будет находиться в плоскости, задаваемой точкой A_{30} и осью конуса. Для нахождения точки пересечения этого перпендикуляра с поверхностью конуса строится профиль, параллельный этой плоскости. На профиле определяется точка пересечения перпендикуляра с поверхностью конуса *B* и её числовая отметка – *13*, а также натуральная величина расстояния $A_{30}B_{13}$ (так как отрезок прямой $A_{30}B_{13}$ параллелен плоскости профиля).

4.9. Построить касательную плоскость к поверхности прямого кругового конуса, проходящую через точку K_{20}. Конус задан вершиной S_{30} и основанием *n* – окружностью заданного радиуса с числовой отметкой *0*.

Решение (рис. 64). Известно, что касательная плоскость к поверхности в точке определяется двумя касательными, проведёнными к кривым поверхности,

проходящими через эту точку. Вершина конуса является особой точкой, и через неё проходят множество касательных – образующих конуса. Следовательно, касательная плоскость в этом случае задается прямой $K_{20}S_{30}$ и любой касательной прямой, проведённой к поверхности конуса, например к его параллели.

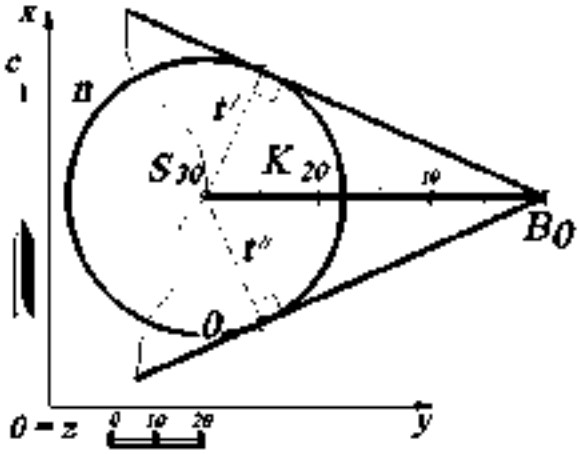


Рис. 64

Точка K_{20} не принадлежит поверхности конуса. Для построения касательной к основанию конуса определяют точку B_0 – пересечение прямой $S_{30}K_{20}$ с основной плоскостью проекций H. Из точки B_0 строят касательные прямые к основанию конуса n. и в точках касания с основанием конуса определяют образующие конуса l' и l''. Касательные к основанию конуса и образующие l' и l'' будут задавать две касательные плоскости. Решение задачи не изменилось бы, если строить горизонталь конуса с числовой отметкой *20* и проводить к ней касательные из точки K_{20}.

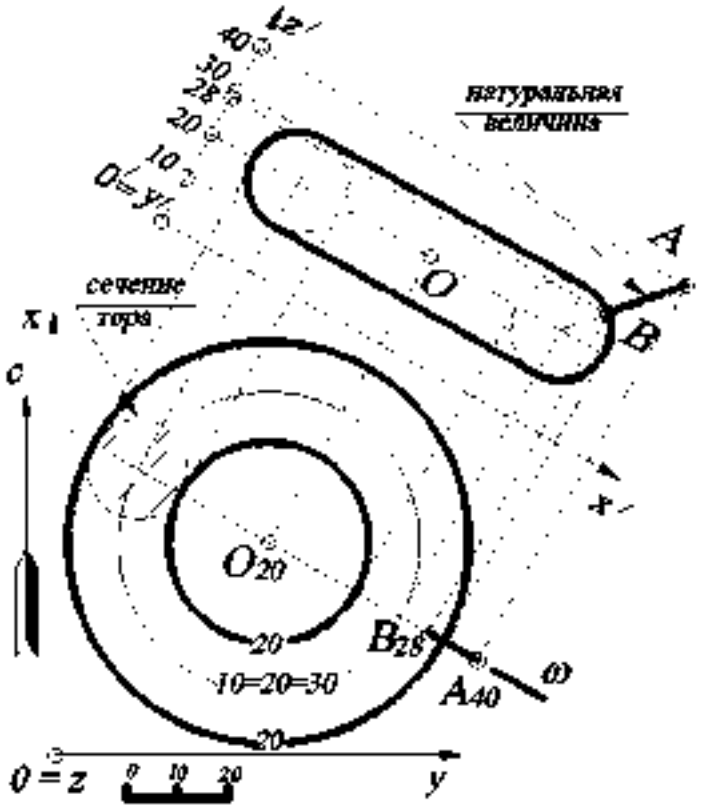


Рис. 65.

4.10. Найти расстояние от точки A_{40} до поверхности тора (круговое кольцо, «бублик»).

Решение. Тор образован вращением окружности вокруг оси, принадлежащей плоскости этой окружности

(эта окружность показана на рис. 65). Расстоянием является прямая, соединяющая заданную точку A_{10} с центром этой окружности – сечением тора, и будет находиться в плоскости, проходящей через центр тора ω. Для нахождения точки пересечения прямой и тора строится профиль параллельно проецирующей плоскости ω.

На профиле определяется искомая точка B и её числовая отметка *28*. На плане точка B_{28} находится с помощью линии проекционной связи. Натуральная величина расстояния определяется на профиле (по построению).

4.11. Построить линейчатую поверхность, направляющие p, q, r которой – скрещивающиеся прямые (рис. 66).

Решение. Образующая l, проходящая через точку P, принадлежащую направляющей p, пересекает прямые q и r и при движении точки P по прямой p описывает поверхность, называемую ***однополостным (линейчатым) гиперболоидом***. В этом случае необходимо найти образующую l, проходящую через точку P и две скрещивающиеся прямые q и r.

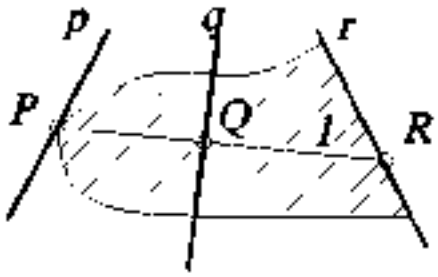


Рис. 66.

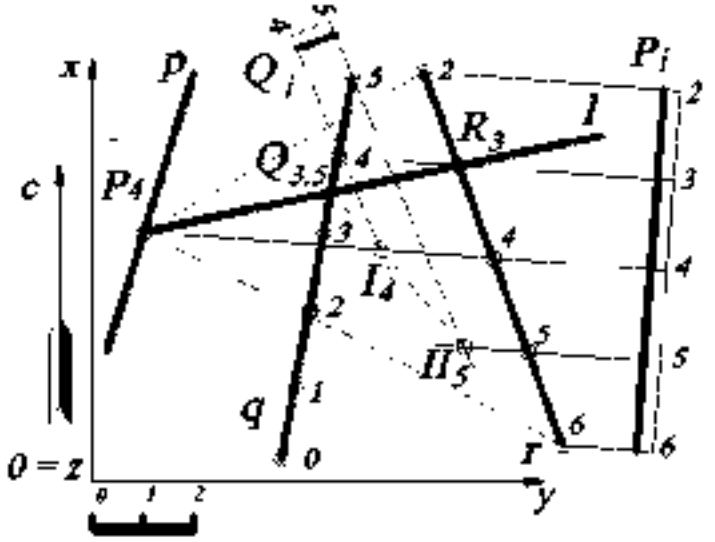


Рис. 67.

Задача сводится к основной позиционной задаче начертательной геометрии (нахождение общих элементов прямой и плоскости, рис. 67).

Алгоритм

1. На прямую r (можно выбрать и другую прямую, то есть q) и точку P «натягивают»

плоскость (на чертеже эта плоскость показана штриховыми линиями). Затем эту плоскость задают горизонталями P_1.

2. Находят точку пересечения прямой q с плоскостью P_1:

   а) через прямую q проводят вспомогательную плоскость-посредник Q_1;

   б) находят пересечение плоскостей P_1 и Q_1 – прямая I_1II_1;

   в) находят точку пересечения прямой I_1II_1 и прямой q – точка $Q_{1,5}$.

3. Прямая, соединяющая заданную точку P_1 и построенную точку $Q_{1,5}$, будет искомой прямой l.

Форма поверхности показана на рис. 68.

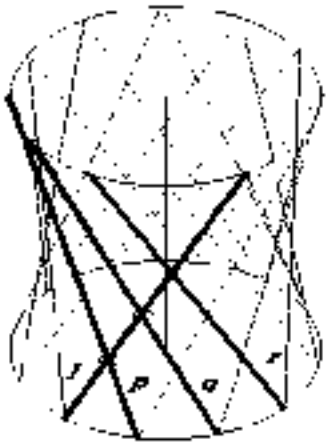


Рис. 68.

На рис. 69 построен однополостный гиперболоид в проекциях с числовыми отметками. На профиле очерк гиперболоида – гипербола, которая строится по точкам пересечения параллелей с плоскостью главного меридиана или может быть построена на профиле как огибающая вращающейся образующей l в разных её положениях: на плане очерк однополостного гиперболоида – горловая окружность (горловая параллель) – огибающая горизонтальных проекций прямолинейных образующих l. Однополостный гиперболоид является поверхностью второго порядка.

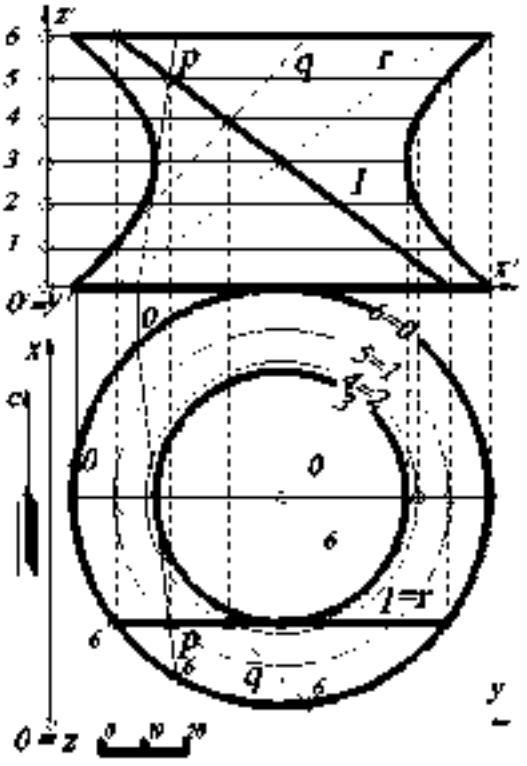


Рис. 69.

Множество прямых, с которыми совпадает при вращении образующая l, называют 1-м семейством на гиперболоиде. Из симметрии поверхности вращения относительно меридиональной плоскости следует существование на гиперболоиде 2-го семейства

прямых. Прямые 1-го семейства закручены влево, прямые 2-го – вправо. Любые две прямые одного семейства скрещиваются, любые две прямые из разных семейств пересекаются (или параллельны). Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят одна правая и одна левая прямые.

4.12. Построить к заданной кривой $A_3B_2C_1D_0$ поверхность одинакового ската с углом наклона поверхности к основной плоскости проекций H, равным $\alpha=70^0$.

Решение (рис. 70). Построения выполняются следующим образом:

1. В соответствии с масштабом чертежа строится профиль, в котором проводится прямая под углом α. Получаемый при этом отрезок l характеризует интервал образующих конусов.

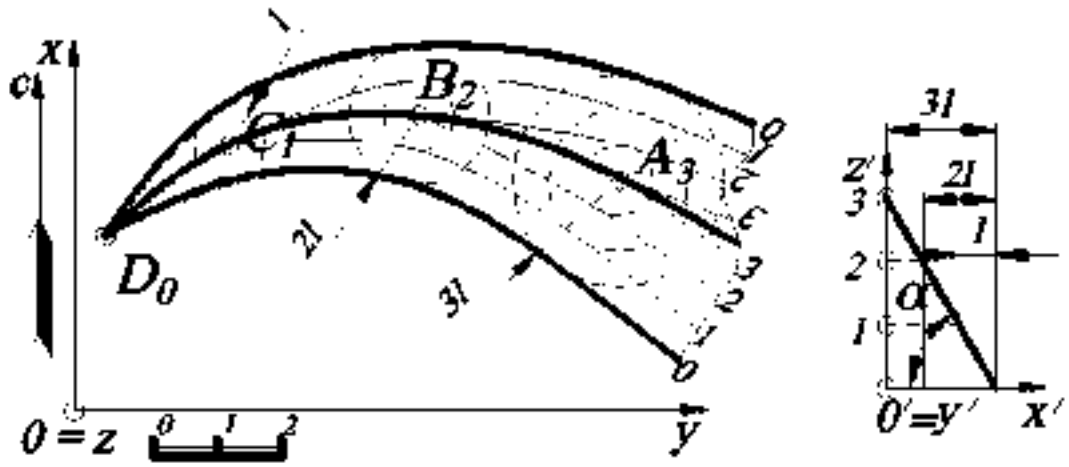


Рис. 70.

2. В соответствии с интервалом l строятся образующие конусов с центрами в точках $C_1B_2A_3$.

3. По касательным к горизонталям конусов с одинаковыми высотными отметками проводятся лекальные кривые горизонталей поверхности одинакового ската.

Наглядное изображение этой поверхности представлено на рис. 71.

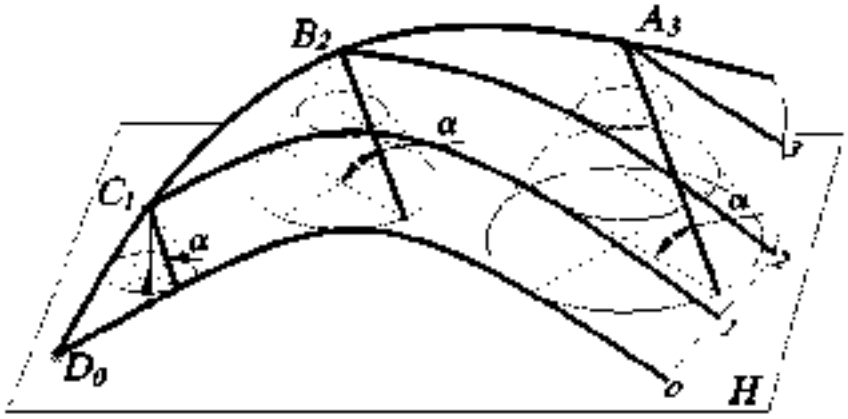


Рис. 71.

4.13. Построить поверхность равнодлинного откоса (частный случай коноида), образующая которой – прямая l, параллельная плоскости параллелизма q. Образующая постоянной длины $|l|=4$ (по масштабу чертежа) этой поверхности одним концом скользит по направляющей прямой A_0B_4, а другим по горизонтальной плоскости проекций H. Натуральная величина образующей определяется расстоянием от точки B_4 до горизонтальной плоскости проекций H.

Решение (рис. 72). В общем случае поверхность равнодлинного откоса можно представить как поверхность, соприкасающуюся с однопараметрическим множеством прямых круговых конусов с вертикальной осью (вершины этих конусов лежат на направляющей (прямой) A_0B_4, а основания – на горизонтальной плоскости проекций H). Тогда образующую конуса можно

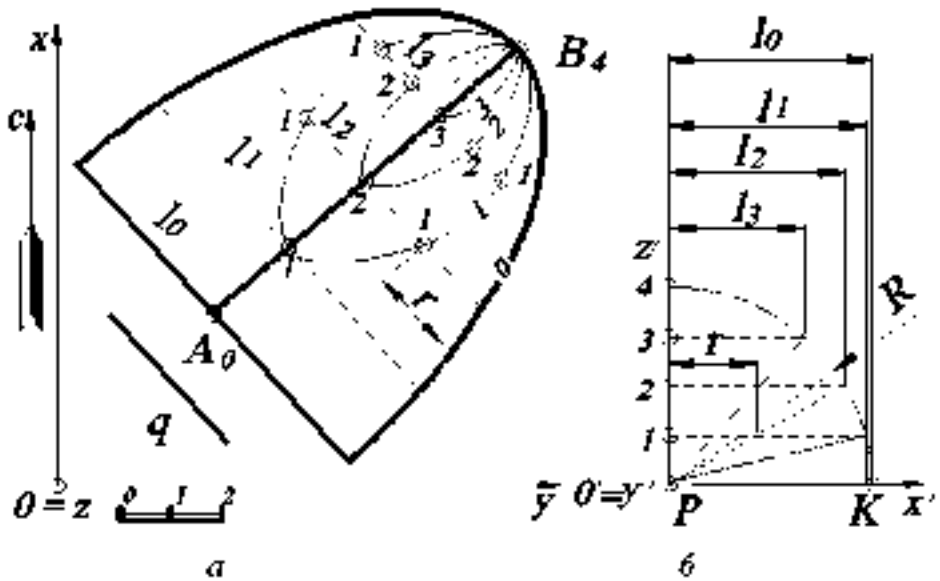


Рис 72.

рассматривать как постоянную образующую поверхности равнодлинного откоса, параллельную плоскости $q \perp H$ (рис. 72, *а*).

Для определения горизонтальных проекций образующих части поверхности равнодлинного откоса проводят окружность (на рис.72, *б* показана часть этой окружности) радиуса $R=4$, равного длине отрезка образующей $PK=l_0$. Рассекают эту окружность отрезками горизонтальных прямых, расстояния между которыми в масштабе чертежа равны единице (линейный масштаб). Длину отрезка PK можно рассматривать как постоянную образующую конусов.

Затем строятся образующие поверхности равнодлинного откоса, проходящие через отметки ***0***, ***1***, ***2***, ***3***, причём горизонтальные проекции этих образующих на плане перпендикулярны направляющей A_0B_4. В точке с отметкой «***4***» образующая поверхности будет проецирующей.

Построенные образующие на плане градуируют с интервалом, равным единице, то есть определяют промежуточные высотные отметки, расположенные между концами отрезка образующей. Градуировка осуществляется с помощью переноса соответствующих высотных отметок. Для этого используется сетка горизонтальных сечений на профиле (рис. 72, *б*) (например, расстояние r на образующей l_2 соответствует точке с высотной отметкой ***1***). Точки с одинаковыми высотными отметками соединяют плавными кривыми линиями, которые являются горизонталями поверхности равнодлинного откоса.

Наглядное изображение этой поверхности представлено на рис. 73.

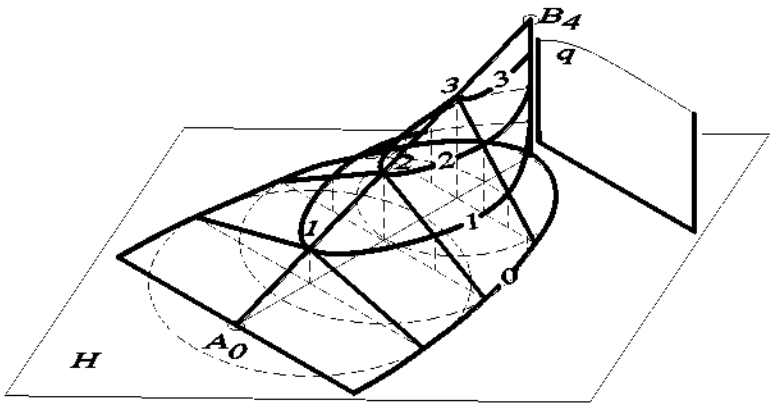


Рис. 73.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Определить расстояние от поверхности сферы до прямого кругового конуса. Сфера с центром ***O(50, 60, 70)***, $R_{сферы}$***=25 мм***. Конус с вершиной ***S(20, 30, 80)*** и основанием конуса – окружностью ***R=20 мм***, принадлежащей плоскости проекций ***xOy***.

4.2. Найти на поверхности наклонного конуса с круглым основанием образующие, наклонённые к основной плоскости проекций ***xOy*** под углом 30^0. Конус задан вершиной ***S(110, 10, 60)*** и основанием – окружностью с центром ***O(35, 55, 0)*** и радиусом ***R=30 мм***.

4.3. Построить проекцию сферы радиусом ***30 мм***, касательной к горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, к плоскости общего положения $A_{60}B_0C_{30}$ и к вертикальной плоскости, проходящей через *а)* ось ***Ox***, *б)* ось ***Oy***. Проекции точек заданы координатами: ***A(50, 45, 60)***, ***B(50, 105, 0)***, ***C(10, 75, 30)***.

4.4. На отрезке прямой $A_{40}B_{20}$ построить точку $C_?$, удалённую от начала системы координат ***O*** на ***60 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(20, 10, 40)***, ***B(40, 50, 20)***.

4.5. Построить проекции конуса вращения с вершиной в точке S_{60}. Отрезок прямой $S_{60}K_{45}$ – одна из образующих конуса. Окружность основания лежит в плоскости $A_{50}B_{30}C_0$. Проекции точек заданы координатами: ***A(10, 10, 50)***, ***B(65, 30, 30)***, ***C(10, 60, 0)***, ***S(35, 75, 60)***, ***K(55, 25, 45)***.

4.6. Построить проекцию конуса вращения, лежащего на горизонтальной плоскости проекций и касающегося её по прямой $O_?S_?$. Точка $S_?$ – вершина конуса; угол, который образующая составляет с осью конуса, - 30^0. Радиус окружности основания – ***30 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***O(35, 15, ?)***, ***S(35, 75, ?)***.

4.7. Через прямую $A_{45}B_{65}$ провести плоскость ω, касательную к сфере с центром ***O(30, 65, 35)*** и радиусом ***R=25 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(30, 10, 45)***, ***B(30, 45, 65)***.

4.8. Построить проекцию конуса вращения, основание которого принадлежит плоскости $A_{50}B_{30}C_0$, высота ***h=60 мм*** и радиус основания ***R=25 мм***. Центр основания – точка ***O(35, 40, 20)***. Проекции точек заданы координатами: ***A(10, 10, 50)***, ***B(65, 30, 30)***, ***C(10, 60, 0)***.

4.9. Построить проекцию прямого цилиндра вращения, основание которого принадлежит плоскости $A_{50}B_{30}C_0$, высота ***h=60 мм*** и радиус основания ***R=25 мм***. Центр основания – точка ***O(35, 40, 20)***. Проекции точек плоскости заданы координатами: ***A(10, 10, 50)***, ***B(65, 30, 30)***, ***C(10, 60, 0)***.

4.10. Построить проекции точек пересечения прямой со сферой, заданной центром ***O(35, 55, 30)*** и радиусом ***R= 30 мм***. Прямая задана проекциями точек: *а)* ***A(15, 20, 15)***, ***B(15, 90, 15)***, *б)* ***C(20, 40, 70)***, ***D(20, 40, 0)***, *в)* ***F(70, 45, 60)***, ***E(25, 95, 20)***.

4.11. Построить проекции точек пересечения прямой с прямым конусом вращения, заданным вершиной ***S(35, 50, 50)***, окружностью основания с центром ***O(35, 50, 0)*** и радиусом ***R=30 мм***, лежащей в горизонтальной плоскости проекций ***xOy***. Прямая задана проекциями точек: *а)* ***A(15, 20, 15)***, ***B(15, 90, 15)***, *б)* ***C(20, 40, 70)***, ***D(20, 40, 0)***, *в)* ***F(65, 20, 40)***, ***E(35, 85, 10)***.

4.12. Через прямую $A_{40}B_{60}$ провести плоскость ω, пересекающую прямой конус вращения по параболе. Конус вращения задан вершиной ***S(55, 60, 60)*** и основанием – окружностью, принадлежащей горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, с центром ***O(55, 60, 0)*** и радиусом ***R=45 мм***. Прямая задана проекциями точек: ***A(10, 5, 40)***, ***B(55, 30, 60)***.

4.13. Построить сечение прямого конуса вращения плоскостью, которая проходит через прямую ***KM*** и перпендикулярна к образующим этого конуса. Конус вращения задан вершиной ***S(55, 60, 60)*** и основанием – окружностью, принадлежащей горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, с центром ***O(55, 60, 0)*** и радиусом ***R=45 мм***. Найти натуральную величину сечения. Координаты точек – ***K(80, 35, 40)***, ***M(20, 15, 40)***.

4.14. Построить сечение прямого конуса вращения плоскостью, которая проходит через прямую ***KM*** и параллельна образующим этого конуса. Конус вращения задан вершиной ***S(55, 60, 60)*** и основанием – окружностью, принадлежащей горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, с центром ***O(55, 60, 0)*** и радиусом ***R=45 мм***. Найти натуральную величину сечения. Координаты точек – ***K(65, 50, 0)***, ***M(0, 50, 0)***.

4.15. Построить сечение прямого конуса вращения плоскостью, проходящей через отрезок прямой ***KE*** и наклонённой к горизонтальной плоскости проекций ***xOy*** под углом 75^0. Конус вращения задан вершиной ***S(55, 60, 60)*** и основанием – окружностью, принадлежащей горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, с центром ***O(55, 60, 0)*** и радиусом ***R=45 мм***. Найти натуральную величину сечения. Координаты точек – ***K(65, 50, 55)***, ***E(0, 50, 55)***.

4.16. Построить сечение наклонного цилиндра плоскостью, проходящей через точку ***A(35, 85, 80)*** и перпендикулярной к образующим данного цилиндра. Цилиндр задан осью $O_0O'_{80}$ и основанием – окружностью, лежащей в горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, с центром ***O(35, 105, 0)*** и радиусом ***R=25 мм***. Проекция точки ***O'(35, 25, 80)***. Найти натуральную величину сечения.

5. ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

5.1. Найти высотную отметку точки $A_?$, принадлежащую топографической поверхности.

Решение (рис. 74). Через точку $A_?$ на плане проводят линию ската $I_{90}II_{80}$, являющуюся прямой перепада высот, которую затем градуируют. Для этого из точки I_{90} проводят отрезок прямой $I_{90}II'$ под произвольным углом α и откладывают на нём от точки I_{90} разницу высотных отметок, выбрав единичный масштаб (см. задачу 1.1). Произвольный отрезок $I_{90}II'$, на котором откладывают разницу числовых отметок точек, называют шкалой масштабов. Соединяют полученную точку II' с точкой II_{80}. Затем с помощью подобных треугольников находят точку A', то есть проводят прямую из искомой точки A, параллельную отрезку прямой $II_{80}II'$. Далее по шкале масштабов определяют высотную отметку точки A на прямой $I_{90}II'$. Таким образом, высотная отметка точки A соответствует *84*. С помощью вышеописанного построения можно строить промежуточные изогипсы.

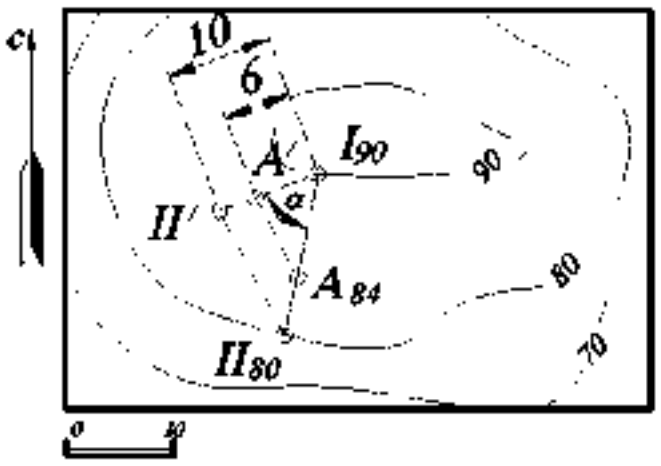


Рис 74

5.2. Построить линию пересечения топографической поверхности и плоскости.

Решение. При пересечении топографической поверхности плоскостью возможны три варианта.

1. Плоскость занимает проецирующее положение.

В этом случае проекция линии пересечения совпадает со следом плоскости (так как плоскость проецирующая), а линия пересечения будет иметь высотные

отметки, совпадающие с высотными отметками изогипс. Линию пересечения строят на профиле (в геологии такие сечения называют геологическими вертикальными разрезами). На рис. 75 показано построение линии пересечения проецирующей плоскости с топографической поверхностью.

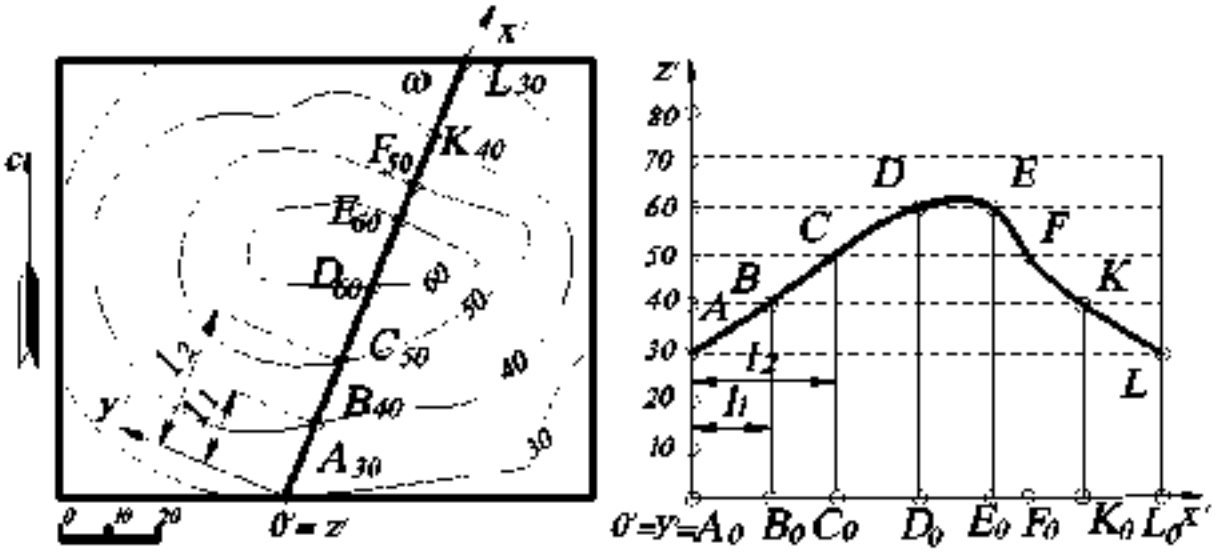


Рис. 75.

Построение осуществляется следующим образом. На плане задают новую систему координат $O'x'y'z'$, совпадающую с проекцией проецирующей плоскости ω, и находят точки пересечения с изогипсами A_{30}, B_{40}, C_{50}, D_{60}, E_{60}, F_{50}, K_{40}, L_{30}, имеющие одинаковые высотные отметки. На профиле по оси x' откладывают заложения этих точек l_1, l_2,... (на рис.75 показаны только два, остальные строятся аналогично) и получают основания точек A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0, K_0, L_0 (или проекции на основную плоскость проекций), которые затем поднимают по перпендикулярам на соответствующие высотные отметки и соединяют плавной кривой линией.

2. Плоскость занимает горизонтальное положение.

Найти линию пересечения заданной топографической поверхности горизонтальной плоскостью H_{82} (рис. 76). Нахождение линии пересечения топографической поверхности с горизонтальной плоскостью сводится к нахождению изогипсы, так как все изогипсы получаются в результате пересечения заданного

рельефа горизонтальными плоскостями. Однако если горизонтальная плоскость имеет числовую отметку, отличную от высоты заданного сечения топографической поверхности, то в этом случае необходимо найти изогипсу с промежуточной числовой отметкой.

Для определения на плане горизонтальной плоскости, проходящей через высотную отметку *82*, необходимо построить изогипсу с отметкой *82*. Для этого между изогипсами *80* и *90* строят ряд линий ската, считая, что перепад высот носит линейный характер. С помощью градуирования находят на этих линиях ската числовые отметки *82* (см. задачу 5.1) и, соединив последовательно полученные точки кривой линией, получают искомую изогипсу, которая называется промежуточной. Эта изогипса будет определять линию пересечения горизонтальной плоскости H_{t2} с заданной топографической поверхностью.

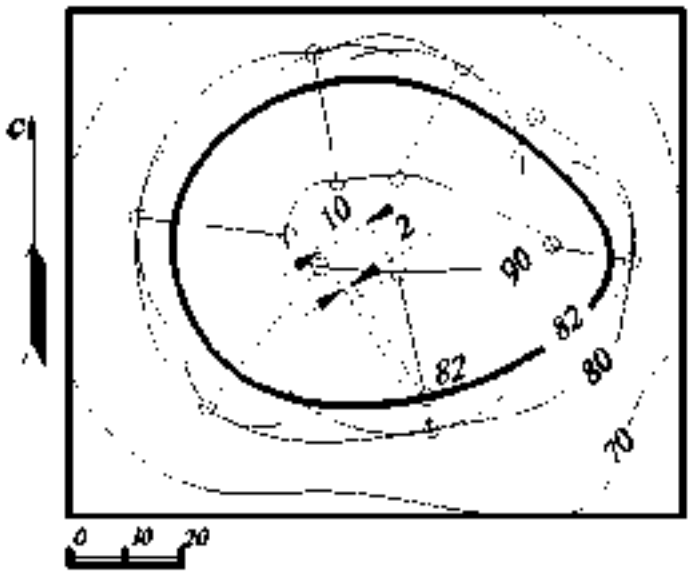


Рис. 76.

3. Плоскость занимает общее положение.

Для искомой линии пересечения заданных поверхностей (топографической поверхности и плоскости) необходимо найти ряд общих точек, которые одновременно принадлежали бы заданным поверхностям.

Для нахождения общих точек необходимо в заданной плоскости построить горизонтали с высотными отметками, равными высотным отметкам изогипс заданной топографической поверхности (рис. 77). Линии (горизонтали плоскости и изогипсы топографической поверхности) с одинаковыми высотными отметками в пересечении дадут общие точки, так как они лежат в одних горизонтальных

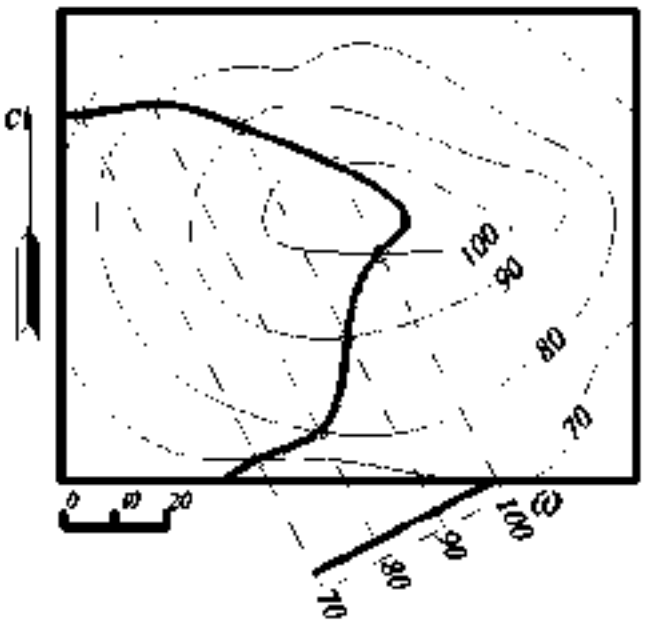


Рис 77

наковые высотные отметки, то есть с помощью горизонтальных вспомогательных плоскостей.

Однако иногда приходится применять и другие вспомогательные плоскости. Так, в случае рис. 78 точки *A*, *B* и *D* построены с помощью горизонтальных плоскостей с отметками *55* и *65* (то есть промежуточных горизонталей плоскости P_i и промежуточных изогипс топографической поверхности). Горизонтали плоскости и поверхности с этими отметками начерчены штриховыми линиями. На плоскости их можно построить точно, а на поверхности их строят приближенно.

плоскостях. Затем найденные точки соединяют плавной кривой линией, которая будет являться пересечением плоскости с топографической поверхностью.

Линия пересечения топографической поверхности с плоскостью и любой другой поверхностью строится, вообще говоря, по точкам пересечения их одноимённых горизонталей, имеющих оди-

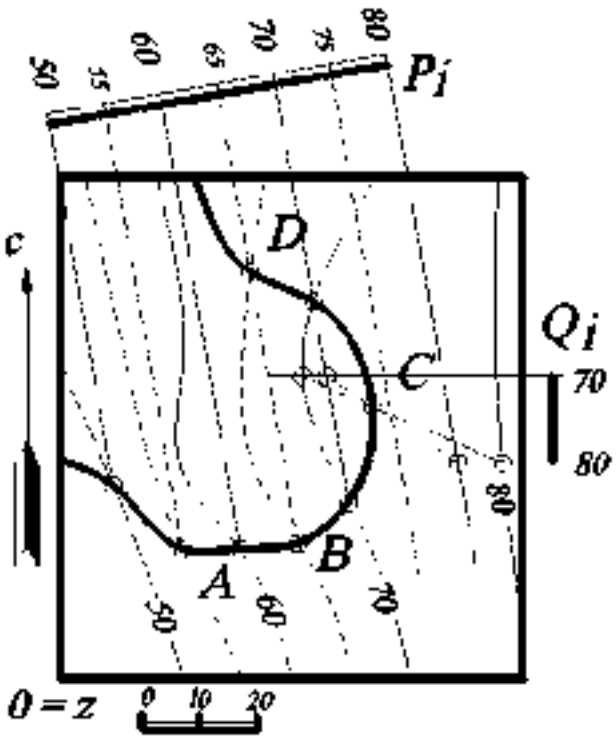


Рис 78.

Точка *C* построена с помощью плоскости общего положения Q_i. Топографическую поверхность в окрестности этих точек считают плоскостью, а её горизонтали – параллельными прямыми; при этом линии её пересечения со вспомога-

тельными плоскостями – прямые. Другими словами, находят сначала пересечение плоскости Q_1 с топографической поверхностью и с заданной плоскостью P_1 (отрезки прямых), а затем пересечение этих отрезков – точка D.

5.3. Найти точки пересечения заданной топографической поверхности с прямой A_0B_{40}.

Решение. Для нахождения точек (точки) пересечения топографической поверхности и прямой пользуются следующим ***алгоритмом***.

1. Через заданную прямую проводят вспомогательную плоскость-посредник. Таких плоскостей можно провести пучок ∞^1.

2. Находят линию пересечения вспомогательной плоскости-посредника с заданной топографической поверхностью.

3. Искомые точки будут находиться на пересечении заданной прямой с найденной линией пересечения.

4. Определяется видимость на чертеже.

Рассмотрим применение этого алгоритма на конкретном примере (рис. 79).

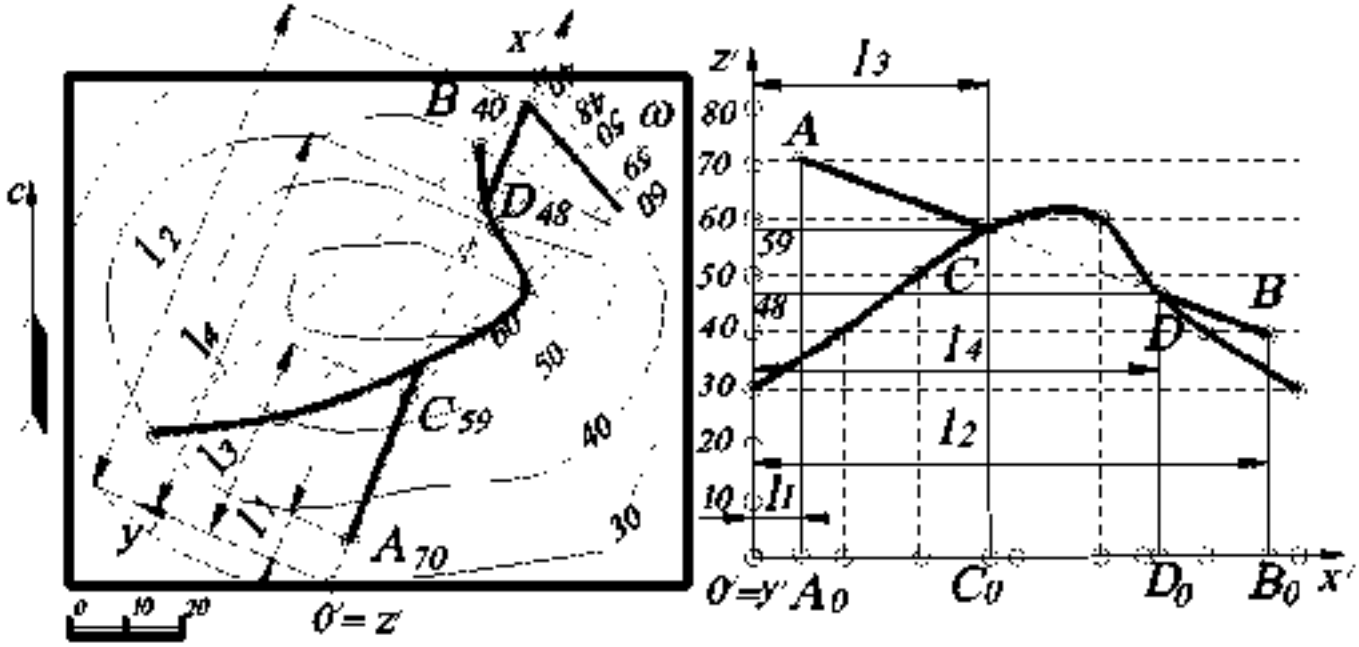


Рис. 79.

1. Через отрезок прямой $A_{70}B_{40}$ на плане проводят вспомогательную плоскость-посредник ω.

2. Находят линию пересечения этой плоскости-посредника ω с топографической поверхностью. Для этого градуируют прямую $A_{70}B_{40}$ и проводят горизонтали вспомогательной плоскости-посредника. Затем находят общие точки горизонталей ω и изогипс топографической поверхности, соединяя их последовательно плавной линией.

3. Находят точки пересечения C и D прямой $A_{70}B_{40}$ и построенной кривой линии и определяют их высотные отметки C_{59}, D_{48}.

4. Определяют видимость прямой $A_{70}B_{40}$ по конкурирующим точкам.

5.4. Построить линию пересечения топографической поверхности с усечённой пирамидой (в реальной ситуации с котлованом), уклоны боковых граней которой к горизонтальному основанию с числовой отметкой *3*: ***i=1:1*** – с севера и юга и ***i=1:1,5*** – запада и востока.

Решение (рис. 80). Строят горизонтали западной и восточной граней пирамиды с интервалом ***1,5 м***, то есть полторы единицы линейного масштаба (см. п. 2.4), а севера и юга – ***1 м*** (одна единица линейного масштаба). Прямые пересечения смежных граней (рёбра пирамиды) проходят через точки пересечения одноимённых горизонталей этих граней. Линия пересечения поверхностей определяется как линия, соединяющая точки пересечения изогипс топографической поверхности и горизонталей граней пирамиды с одинаковыми высотными отметками. Видимость определяется по конкурирующим точкам, принадлежащим рёбру пирамиды и изогипсе. Например, точки A_5 и B_4 принадлежат обеим поверхностям, проекции которых совпадают. Если точка A_5 принадлежит топографической поверхности, а точка B_4 – поверхности пирамиды, при этом точка A_5 находится выше, то это означает, что топографическая поверхность является видимой. Видимость поверхностей меняется на противоположную в линии пересечения заданных поверхностей.

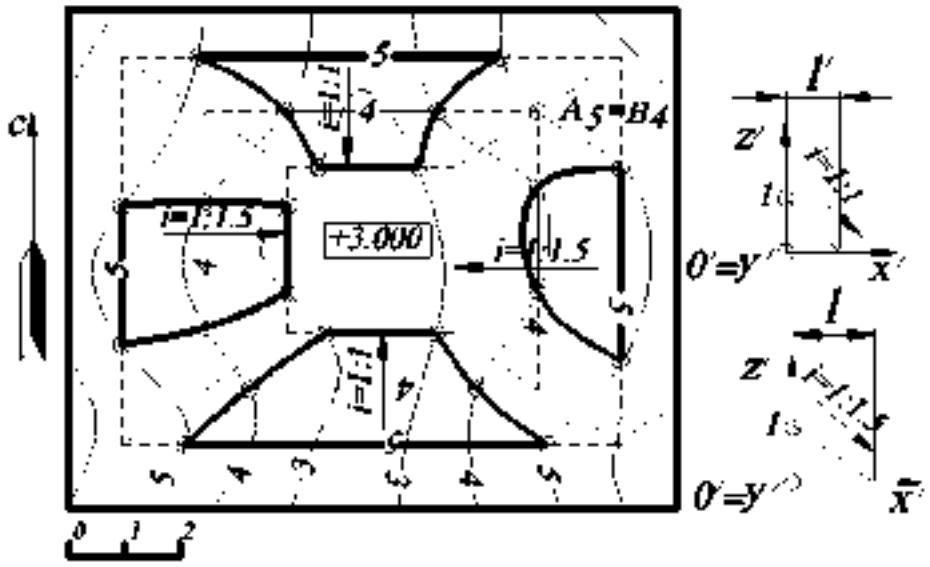


Рис. 80.

5.5. Найти линию пересечения топографической поверхности с коническим котлованом, угол падения образующих которого равен 45^0. Дно котлована - окружность с числовой отметкой *3*.

Решение (рис. 81). На конической поверхности (котловане) строят горизонтали с высотными отметками, равными высотным отметкам изогипс топографической поверхности. Для этого на профиле определяют интервал горизонталей конуса *l*. Находят точки пересечения линий, имеющих одинаковые высотные отметки и, последовательно соединив эти точки плавной кривой, получают искомую линию пересечения. Видимость поверхностей определяется исходя из условия конкурирующих точек, принадлежащих обеим поверхностям, проекции которых совпадают,

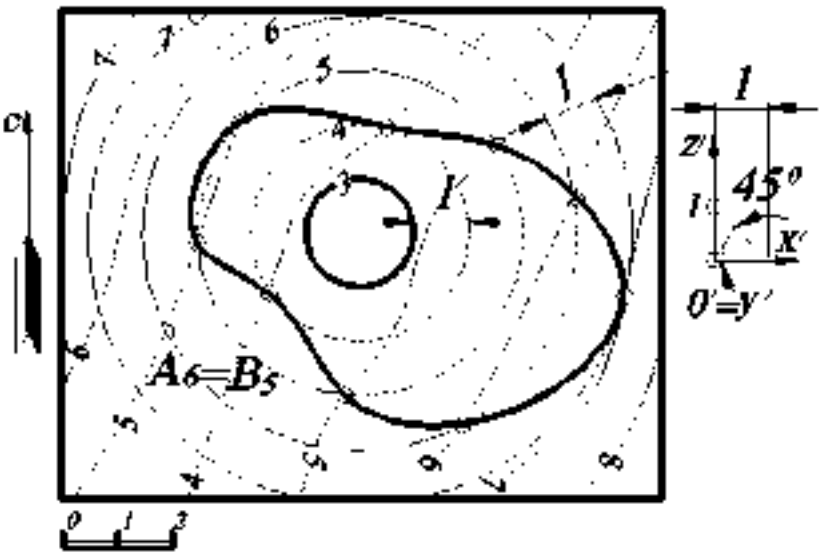


Рис. 81

например A_6 и B_5. Другими словами, если точка A_6 принадлежит поверхности конуса, а точка B_5 - топографической поверхности, при этом точка A_6 находится выше, то это означает, что конус является видимым. Видимость поверхностей меняется на противоположную в линии пересечения заданных поверхностей.

5.6. Построить откосы и найти их пересечение с топографической поверхностью: а) насыпи прямолинейного горизонтального участка дороги с отметкой *5*; уклон насыпи *i=1:1,5*; б) выемки прямолинейного участка дороги с отметкой *5*; уклон выемки *i=1:1* (рис. 82, *а*, *б*).

Решение. Сначала строят плоскости откосов (построение уклона, см. задачу 1.9), которые задаются горизонталями: а) интервал горизонталей на откосах насыпи – *1,5* (то есть полторы единицы линейного масштаба); б) интервал на откосах выемки – *1* (одна единица линейного масштаба. Затем находят общие точки построенных горизонталей и изогипс топографической поверхности.

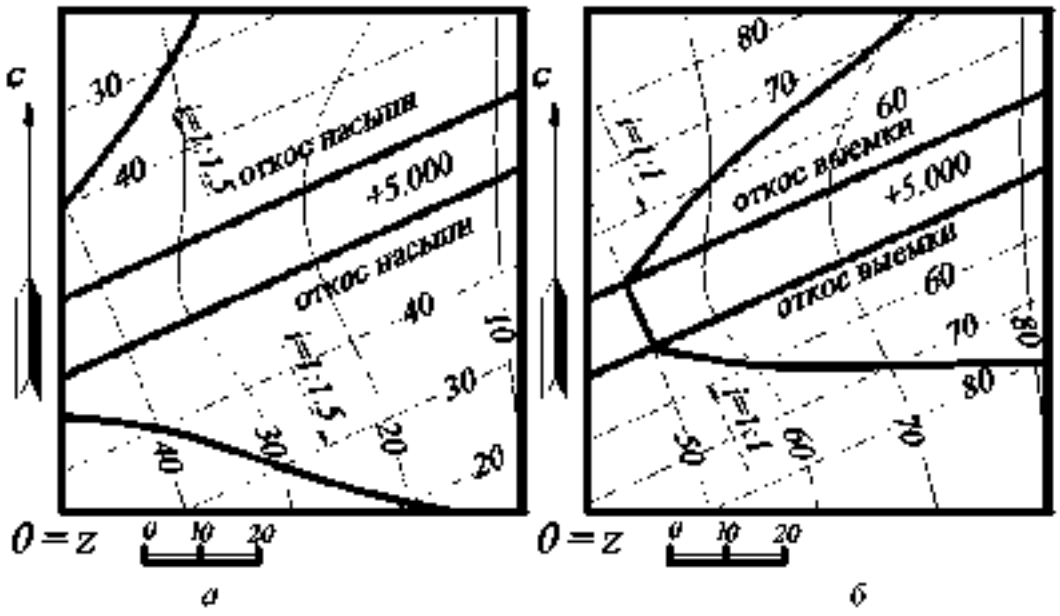
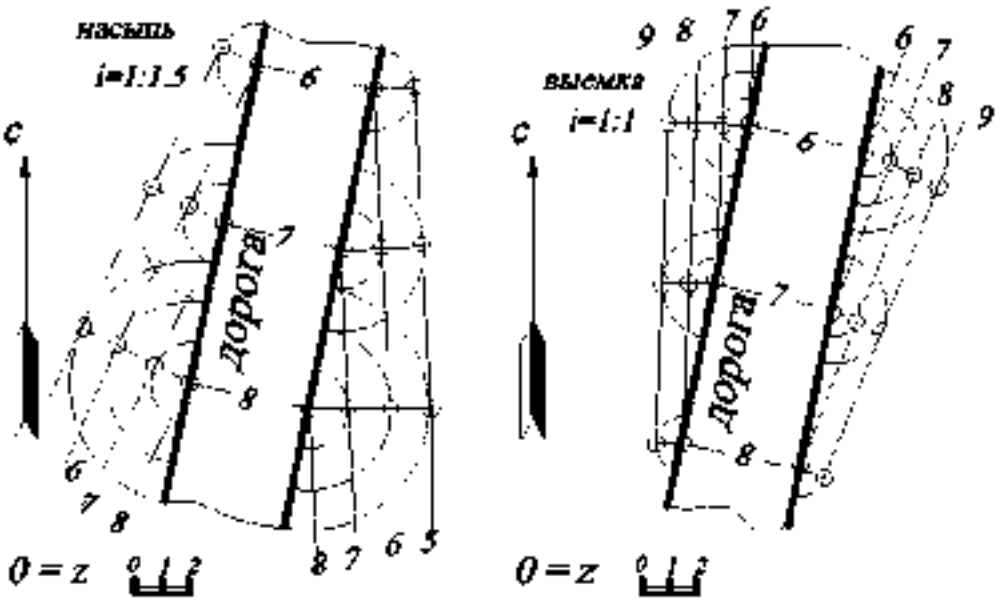


Рис 82.

5.7. Построить: а) откосы насыпи прямолинейного наклонного участка дороги. Уклон насыпи *i=1:1.5*; б) откосы выемки прямолинейного наклонного участка дороги. Уклон выемки *i=1:1*.

Решение (рис. 83, *а, б*). Каждую точку на бровке дороги с целой отметкой (можно и с дробной) принимают за вершину конуса, уклон образующих которого равен заданному уклону откоса. Искомая плоскость откоса касается всех этих конусов (достаточно построить только один из них). Интервал на откосах насыпи *–1,5* (полторы единицы линейного масштаба), выемки – *1* (единица линейного масштаба).



а *б*

Рис 83

5.8. Построить откосы: а) насыпи криволинейного горизонтального участка дороги с отметкой *5*. Ось дороги и её бровки – концентрические окружности. Уклон насыпи *i=1:1.5*; б) выемки криволинейного горизонтального участка дороги с отметкой *5*. Ось дороги и её бровки – концентрические окружности. Уклон выемки *i = 1:1*.

Решение (рис. 84, *а, б*). Горизонтали откосов – концентрические окружности. Разность радиусов соседних горизонталей равна *1,5* на откосах насыпи (полторы единицы линейного масштаба) и *1* (единица линейного масштаба) – на откосах выемки. Поверхности откосов – конусы вращения с общей осью, но различными вершинами. На насыпи вершина западного откоса выше дороги, а во-

сточного ниже, а в выемке – наоборот. В том случае, если ось дороги и её бровки не являются концентрическими окружностями, то построения выполняются иначе.

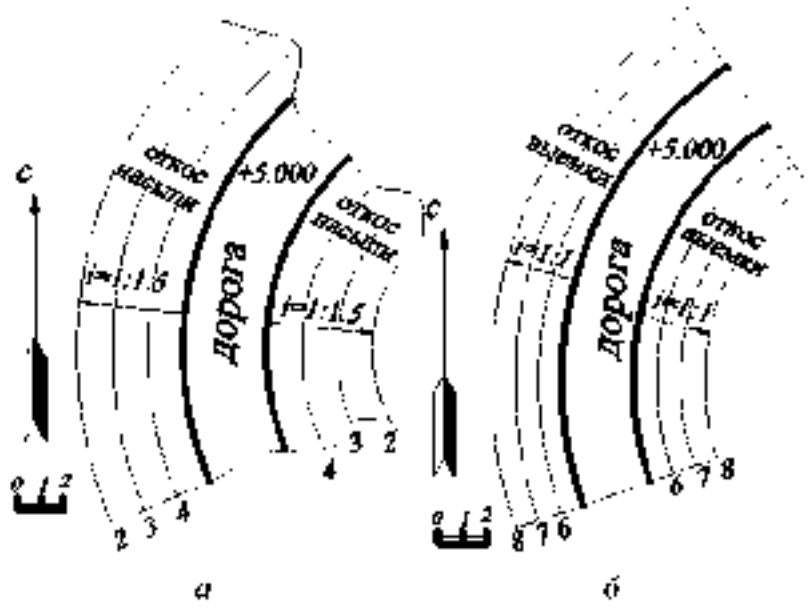


Рис. 84.

Строят конусы с вершинами на бровке дороги и с заданным уклоном образующих, а затем проводят касательные к одноимённым горизонталям этих конусов. Другими словами, поверхность откоса касается всех этих конусов, то есть является их огибающей. Здесь недостаточно построить только один из этих конусов, как в задаче 5.7, наоборот, чем больше построено конусов, тем точнее можно построить огибающие.

5.9. Задана часть топографической поверхности и градуированная ось - дорога заданной ширины. Построить границы откосов насыпи с уклоном *i=1:1*.

Решение (рис. 85). Плоскость дороги состоит из двух участков: слева - прямолинейного участка с отметкой *7*, а справа - наклонного *7-10*, имеющего уклон *1:4* (то есть интервал между горизонталями равен четыре единицы линейного масштаба)

Вначале строят плоскости откосов дороги, задавая их горизонталями. Горизонтали откосов левого участка дороги расположены на расстоянии интервала - *1* (то есть одна единица линейного масштаба). Для построения горизонталей откосов правого участка дороги каждую точку на бровке дороги с целой отметкой (можно и с дробной) принимают за вершину конуса, уклон образующих ко-

торого равен заданному уклону откоса *1:1*. Следовательно, интервал конуса равен *1* (то есть единице линейного масштаба). Искомая плоскость откоса касается всех этих конусов (достаточно построить только один из них), то есть горизонтали этой плоскости касаются горизонталей конусов – концентрических окружностей.

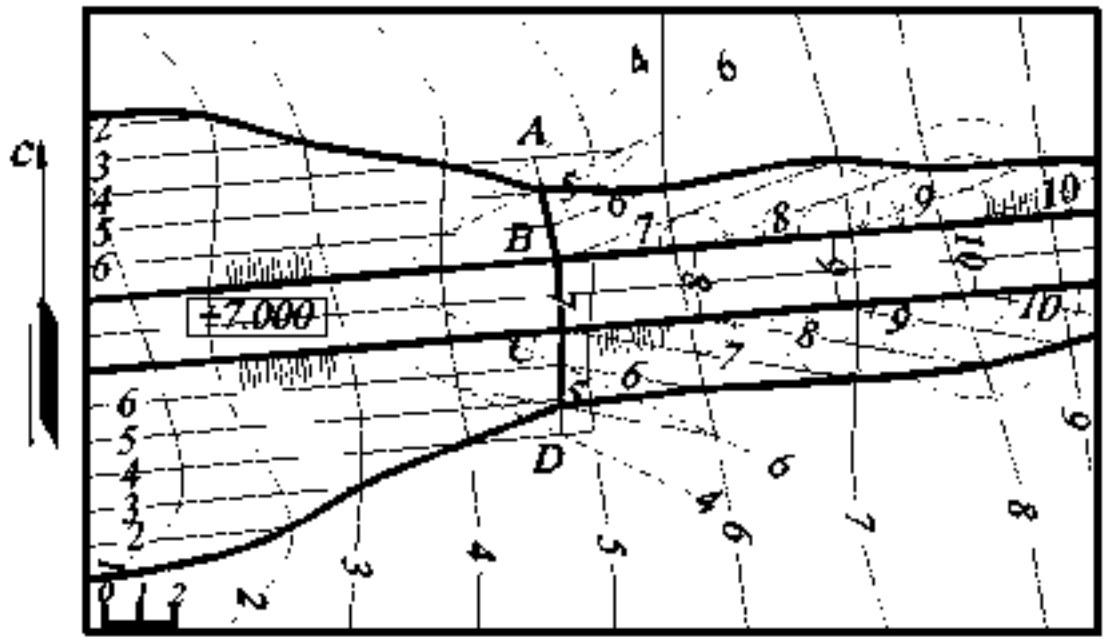


Рис. 85

Далее строятся линии пересечения соседних откосов друг с другом, которые пересекаются по прямым ***AB*** и ***CD*** (точки *A* и *D* – точки пересечения этих прямых с топографической поверхностью). Точки пересечения прямых ***AB*** и ***CD*** с топографической поверхностью определяются с помощью вспомогательных плоскостей общего положения, а именно, например, через прямую ***AB*** проводят вспомогательную плоскость-посредник (задавая её горизонталями h_4 и h_5) и находят линию пересечения этой плоскости и топографической поверхности. Общая точка построенной линии пересечения и заданной прямой ***AB*** будет являться искомой точкой – точкой пересечения прямой ***AB*** и топографической поверхности. Затем по точкам пересечения одноимённых горизонталей находят границы всех откосов.

После определения границ всех откосов на каждом из них чертят так называемые *берг-штрихи* (параллельные длинные и короткие черточки), которые показывают направление стока воды по откосу. Они начинаются от верхнего края откоса и направлены по линиям наибольшего ската, то есть перпендикулярно его горизонталям; на коническом откосе они проходят через вершину конуса (см. ГОСТ 21.108 – 78 «Условные графические изображения и обозначения на чертежах генеральных планов и транспорта»).

5.10. Задан план местности в горизонталях и проектируемой на этом участке местности горизонтальной площадки на отметке ***7 м*** и прямолинейного плоского въезда на неё (рис. 86). Площадка имеет форму прямоугольника с примыкающим к нему полукругом. Уклоны всех откосов ***i=1:1***. В зоне выемки к площадке должна примыкать канава для стока воды (кювет) шириной ***1 м***; отметка внешнего края канавы равна отметке её внутреннего края, то есть ***7 м***.

Выделенную на чертеже *7*-ю горизонталь топографической поверхности называют линией нулевых работ – она отделяет зону выемки (на востоке) от зоны насыпи (на западе).

Вначале строятся горизонтали откосов насыпи и выемки. Откосы насыпи, примыкающие к прямолинейным краям площадки, и откосы выемки, примыкающие к прямолинейным внешним краям канавы, – это плоскости, горизонтали которых параллельны этим краям (которые являются *7*-ми горизонталями этих откосов и идут через ***1 м***).

Откосы насыпи и выемки, граничащие с круглыми краями площадки и канавы, имеют форму конусов вращения, а их горизонтали на плане - концентрические окружности, разность радиусов (интервал) которых ***1 м*** (так как уклон равен ***1:1***).

Далее строятся линии пересечения соседних откосов друг с другом и всех откосов с землёй – в основном по точкам пересечения одноимённых горизонталей. Для точного определения точек ***A***, ***D***, ***C***, ***E*** применяют вспомогательные

плоскости общего положения. Например, для нахождения точки *A* через прямую *m* проводят вспомогательную плоскость-посредник (задавая её горизонталями h_2 и h_3), находят линию пересечения этой плоскости и топографической поверхности. Общая точка построенной линии пересечения и заданной прямой *m* будет

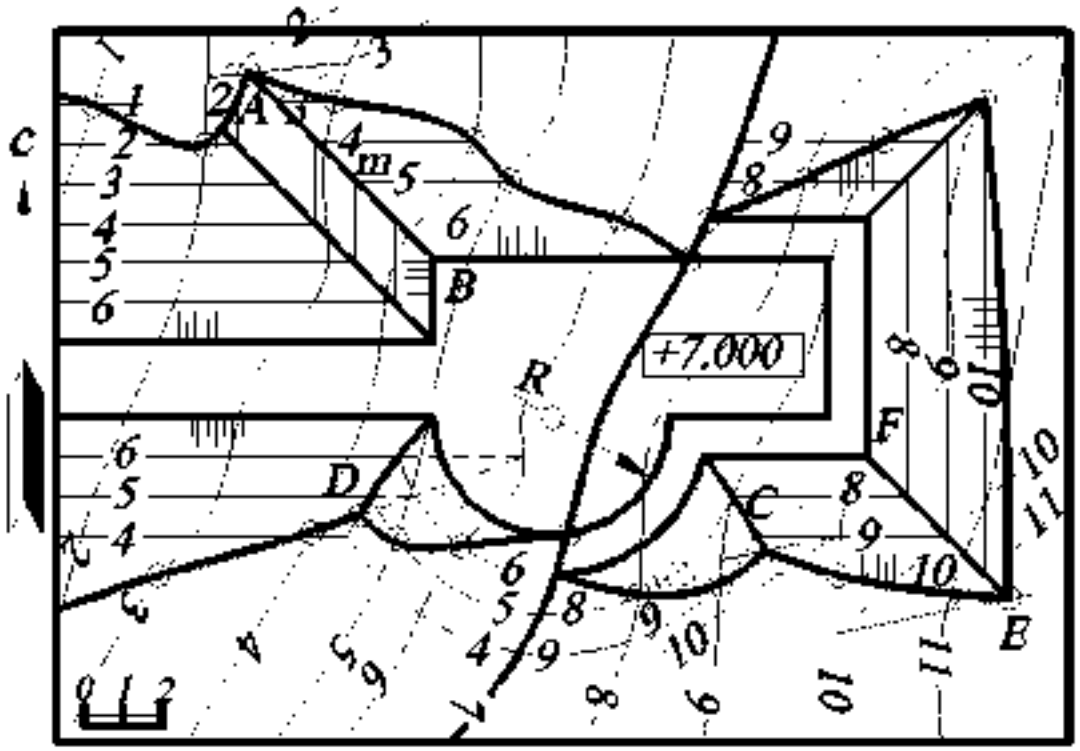


Рис. 86.

являться искомой точкой *A* — точкой пересечения прямой *m* и топографической поверхности.

Линия пересечения плоского и конического откосов насыпи и выемки - парабола, поскольку плоскость и конус имеют одинаковый уклон (интервал), то есть плоскость параллельна одной образующей конуса (см. «Конические сечения»).

Линия пересечения двух откосов друг с другом и две линии пересечения этих откосов с землёй сходятся в одной точке — общей точке этих трёх поверхностей. После определения границ всех откосов на каждом из них чертят бергштрихи.

На рис. 87 коническая поверхность задана уклоном *i=1:2*, а плоскость P_i - уклоном *i=1:3.5*, то есть плоскость P_i имеет меньший уклон, чем коническая поверхность. В этом случае плоскость P_i пересекает все образующие конической поверхности, следовательно, в сечении получается эллипс.

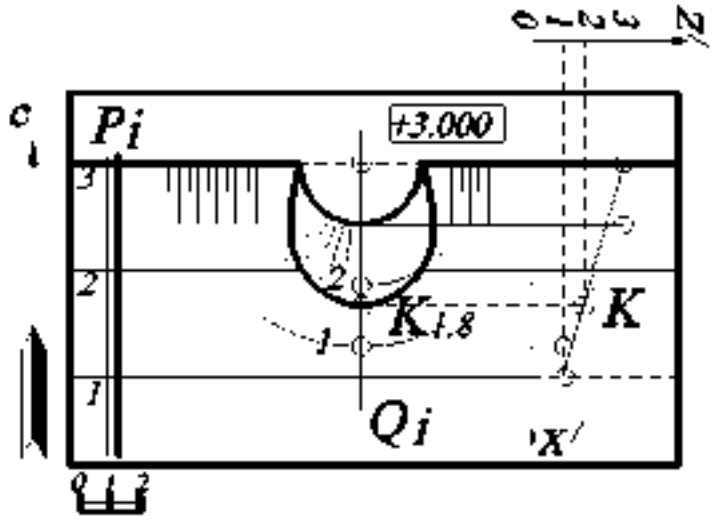


Рис. 87.

Линию пересечения конической поверхности с плоскостью P_i определяют точки пересечения их горизонталей с одинаковыми числовыми отметками. Нижняя точка эллипса $K_{1.8}$ (точка принадлежащая оси эллипса) определена с помощью сечения горизонтально проецирующей плоскости Q_i. В сечении этой плоскостью показаны профиль плоскости P_i и конической поверхности. Точка их пересечения *K* определяет положение и числовую отметку точки $K_{1.8}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.1. Построить пересечение топографической поверхности с двумя параллельными плоскостями $\Phi(A_{10}B_{70}C_{40})$ и θ, кратчайшее расстояние между которыми равно *15 мм*. Плоскость $\Phi(A_{10}B_{70}C_{40})$ находится выше плоскости θ. Построить вертикальный разрез в крест

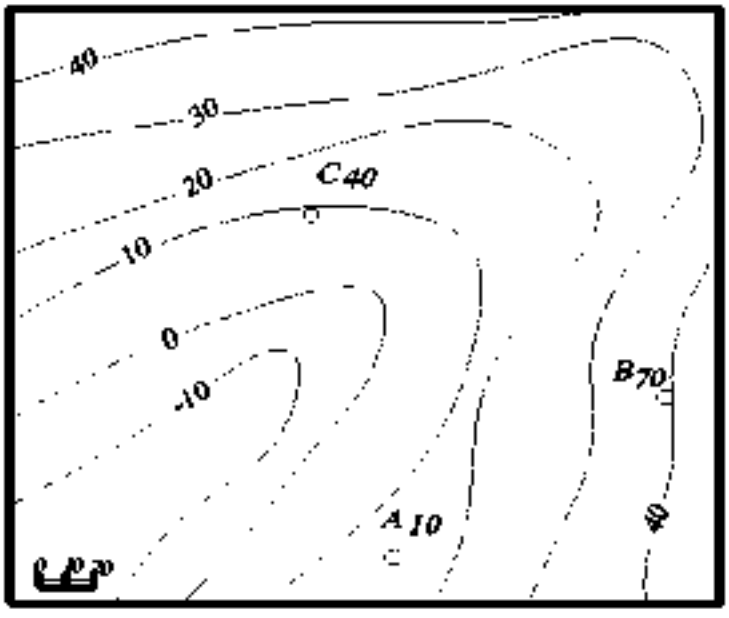
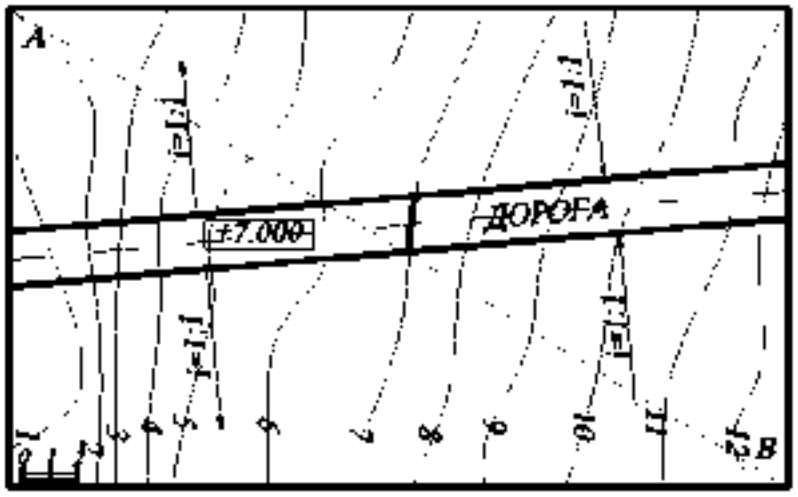


Рис. 88

простирания, проходящий через точку C_{40}, и построить срез по горизонту *13* (рис. 88).



5.2. Определить линию пересечения откосов дороги (плоскости) с топографической поверхностью. Построить вертикальный разрез по линии *A – B* (рис. 89).

Рис. 89.

5.3. Найти линию пересечения топографической и конической поверхностей. Построить вертикальный разрез, проходящий по линии *A – B* (рис. 90).

5.4. Построить линию пересечения топографической и цилиндрической поверхностей (рис. 91).

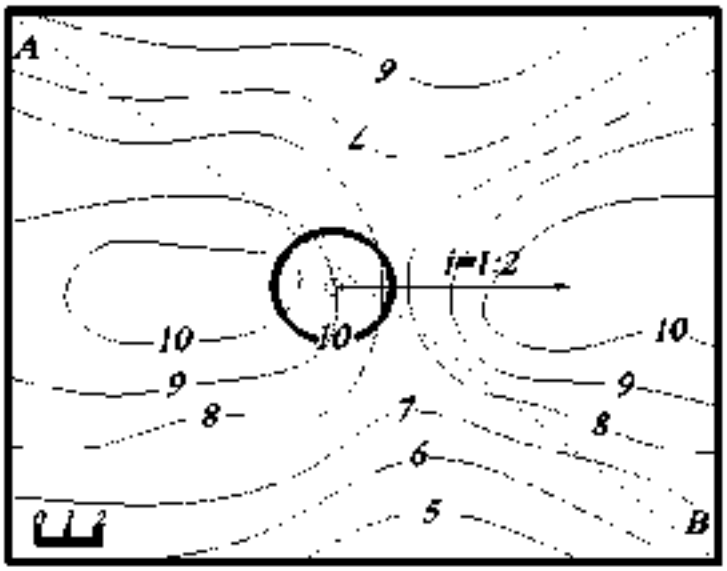
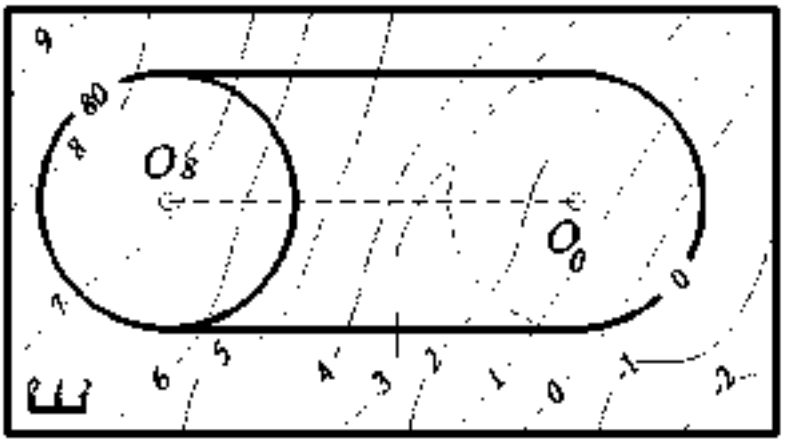


Рис. 90.



5.5. Задан план участка местности и проектируемой на этом участке горизонтальной площадки с отметкой *8*. Построить границы откосов с заданными уклонами (рис. 92).

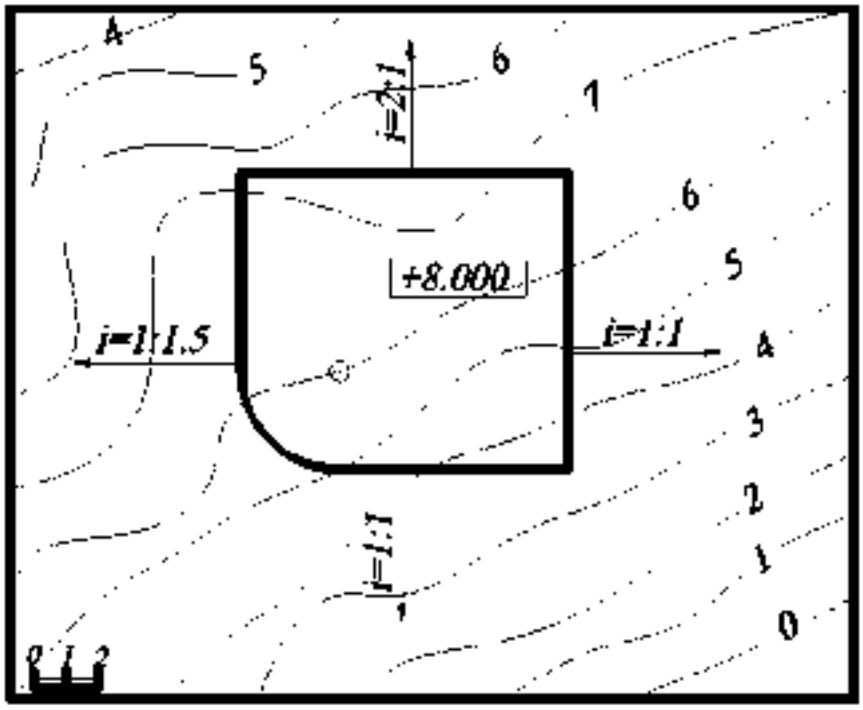


Рис 92

6. РАЗВЁРТКИ

6.1. Построить развертку поверхности треугольной призмы способом нормального сечения.

Решение (рис. 93). Проводят плоскость *п* перпендикулярно к боковым ребрам призмы в любом удобном месте. Для этого используют метод замены плоскостей проекций.

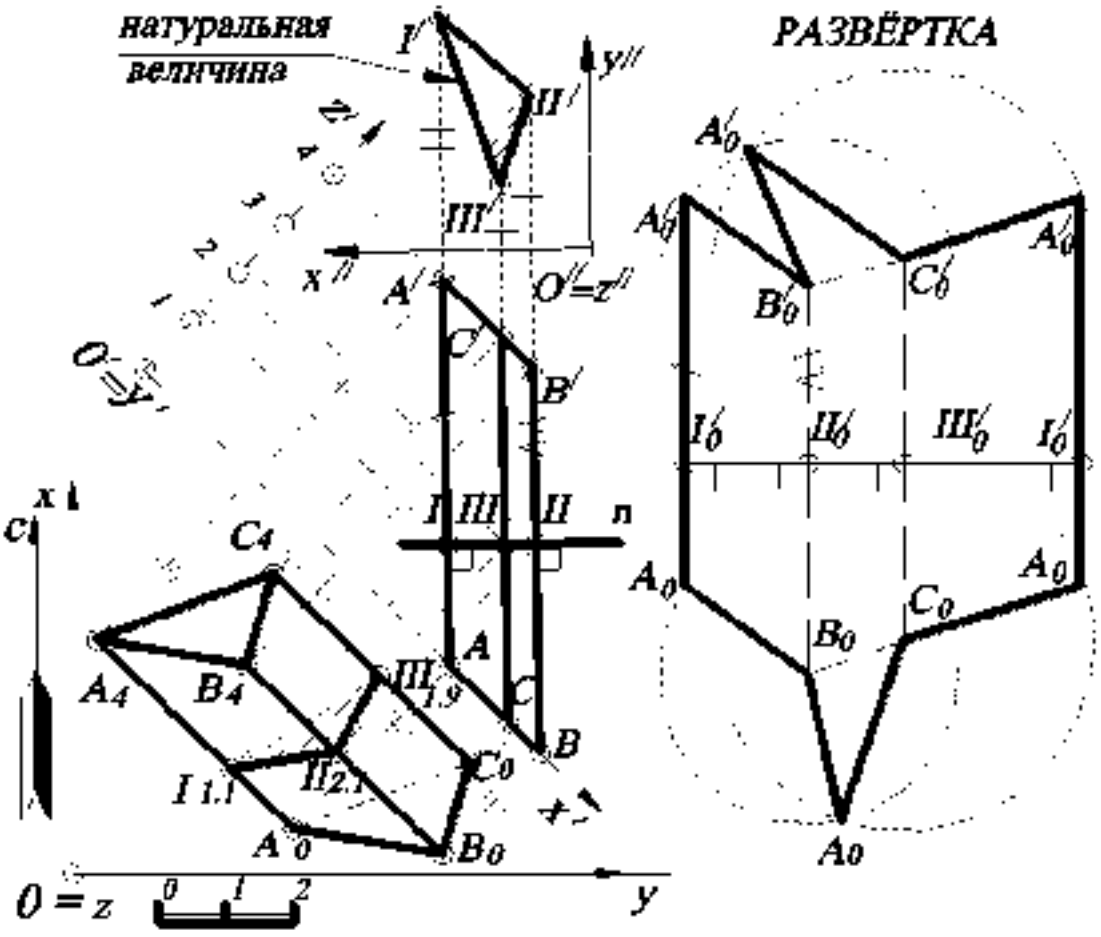


Рис 93

Находят натуральную величину нормального сечения методом двойной замены плоскостей проекций (*I' II' III'* – натуральная величина нормального сечения). Полученную ломаную линию натуральной величины нормального сечения *I' II' III' I'* разворачивают в прямую линию, которая на рис. 93 обозначена $I'_0\ II'_0\ III'_0$. Через точки I'_0, II'_0, III'_0, и I'_0 проводят вертикальные линии и откладывают

на них натуральную величину рёбер (перпендикулярно вверх и вниз от нормального сечения) до верхнего и нижнего оснований призмы соответственно, в данном случае взятые с профиля (так как плоскость профиля параллельна проекциям рёбер). Получают точки A_0, B_0, C_0 и A'_0, B'_0 и C'_0, при этом длины рёбер $IA=I'_0A_0$, $IA'=I'_0A'_0$; $IIB=II'_0B_0$, $IIB'=II'_0B'_0$; $IIIC=III'_0C_0$, $IIIC'=III'_0C'_0$. Найденные точки A_0, B_0, C_0 (снизу) и A'_0, B'_0 и C'_0 (сверху) последовательно соединяют ломаной линией и получают развертку боковой поверхности призмы. Затем пристраивают натуральные величины фигур верхнего и нижнего оснований методом засечек. В данном примере основания призмы являются натуральными величинами, так как нижнее основание призмы принадлежит горизонтальной плоскости проекций xOy, а верхнее основание параллельно ей. Линии сгиба на развертке изображаем штрихпунктирной линией с двумя точками.

6.2. Построить развёртку призмы способом раскатки

Решение (рис. 94). В данном случае ребра призмы занимают положение горизонталей. Вращаем призму последовательно вокруг прямых C_0D_0, B_2E_2, A_0F_0. При этом точки – вершины призмы перемещаются в плоскостях, перпендикулярных боковым ребрам.

Определив натуральную величину отрезков A_0B_2, B_2C_0, F_0E_2, E_2D_0 способом прямоугольного треугольника (для того чтобы не затемнять чертеж, построение натуральной величины выполнено на отдельном поле чертежа), находят положение точек B, A, C, D, F, E. Натуральные величины оснований были построены для проверки точности решения задачи, так как боковые ребра параллельны между собой. Последовательно соединив найденные точки, получаем развертку боковой поверхности призмы. На рис. 94 показано также построение на развёртке точки $K_{0.5}$, лежащей на видимой грани призмы $B_2C_0D_0E_2$, основанное на свойстве принадлежности точки плоскости. Следовательно, через точку $K_{0.5}$ проводят прямую, принадлежащую грани $B_2C_0D_0E_2$, и переносят эту прямую на развёртку, перемещая точку $K_{0.5}$.

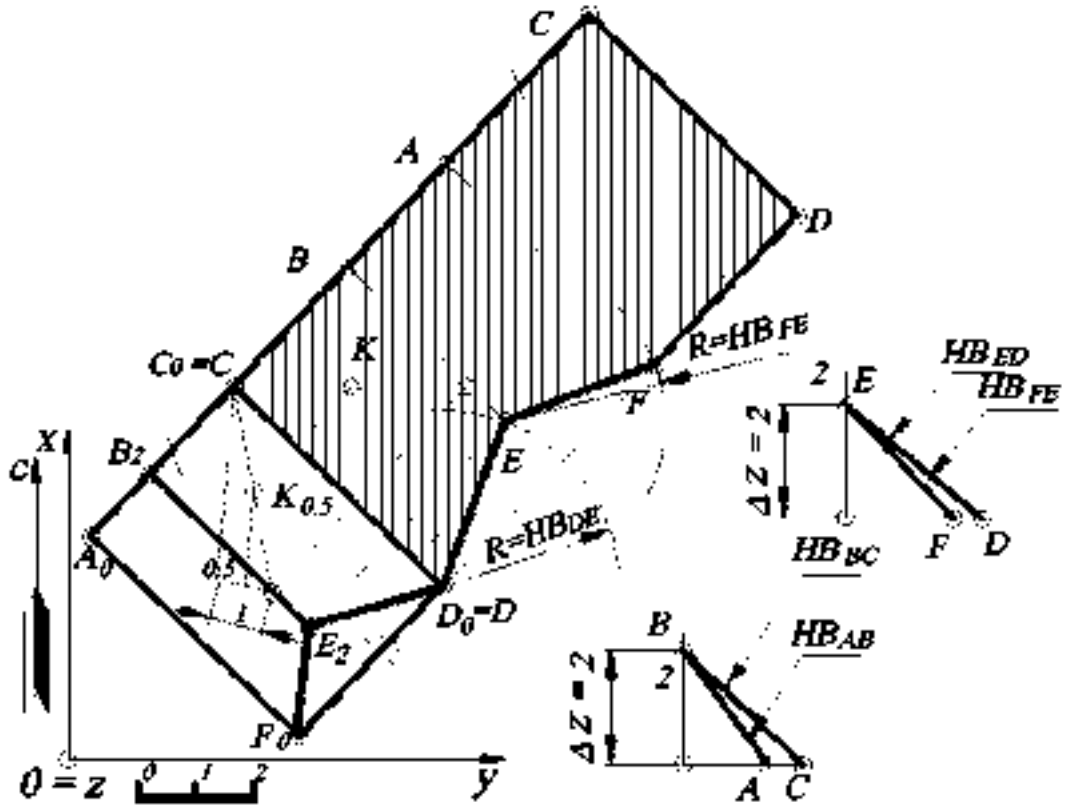


Рис 94

6.3. Построить развертку пирамиды $S_1A_0B_0C_0D_0$.

Решение (рис. 95). Разбивают диагональю A_0C_0 основание пирамиды $A_0B_0C_0D_0$. Определяют натуральные величины граней пирамиды. Натуральная величина основания пирамиды $A_0B_0C_0D_0$ совпадает с ее проекцией, так как принадлежит плоскости xOy. Для нахождения натуральных величин боковых рёбер пирамиды используют способ вращения вокруг проецирующей прямой (на рис. 93 это отрезок прямой S_0O_0). Поворачивая все боковые рёбра пирамиды и совмещая их с проецирующей плоскостью ω, строят профиль, плоскость которого параллельна плоскости ω. Натуральные величины рёбер - $|SA|$, $|SB|$, $|SC|$, $|SD|$ - находят на профиле, откладывая соответствующие числовые отметки.

На свободном поле чертежа последовательно совмещают все натуральные величины треугольников методом засечек, получая развертку пирамиды. Линии сгиба вычерчивают штрихпунктирной линией с двумя точками.

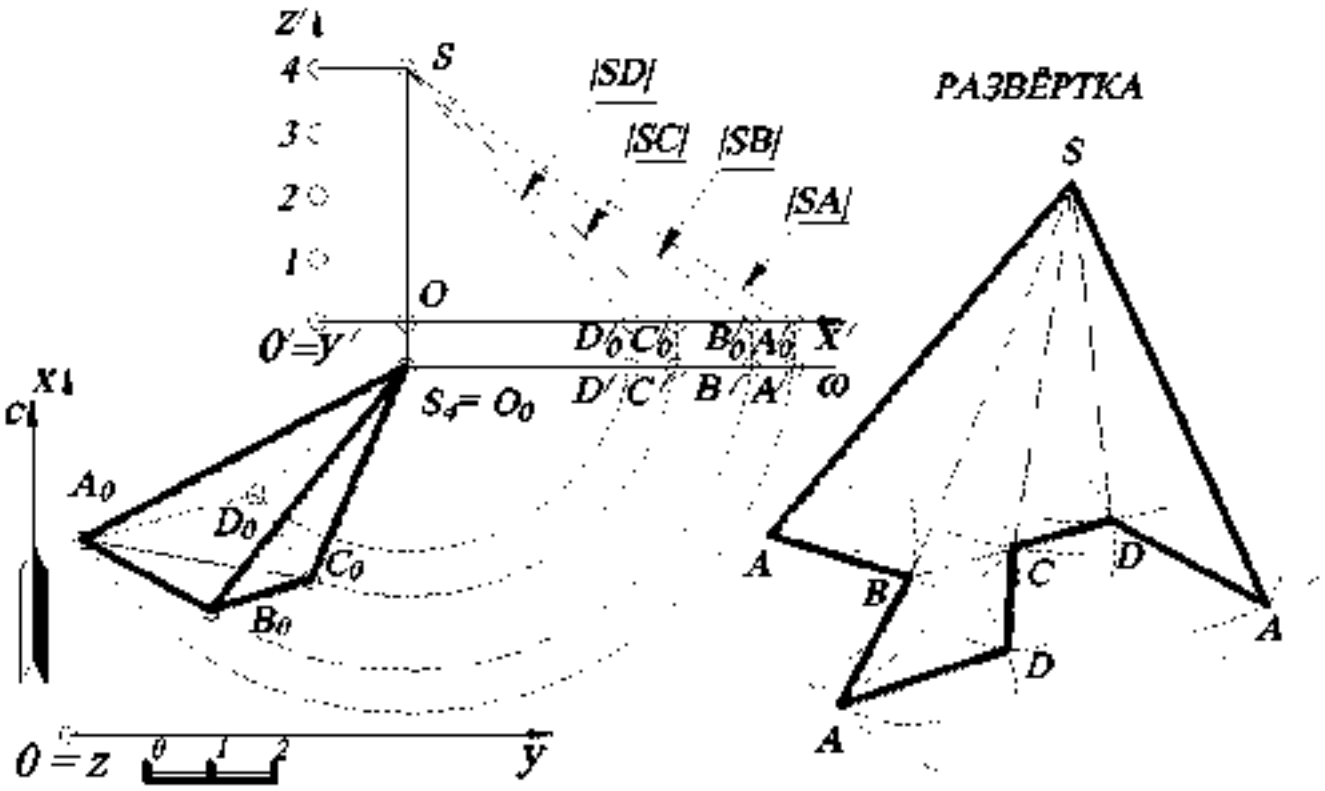


Рис. 95.

6.4. Дана пирамида $S_{10}A_0B_0C_0D_0$. Соединить две точки F_{10} и E_{19}, принадлежащие боковой поверхности пирамиды, кратчайшей линией на поверхности (такая линия на поверхности называется *геодезической*). Точка E_{19} принадлежит ребру $S_{10}C_0$, точка F_{10} принадлежит грани $S_{10}C_0B_0$.

Решение (рис. 96) На плоскости кратчайшей линией между двумя точками является отрезок прямой. Поэтому для решения этой задачи строят развёртку двух смежных граней пирамиды $S_{10}A_0B_0$ и $S_{10}B_0C_0$. Натуральная величина рёбер основания A_0B_0 и A_0C_0 совпадает с их проекцией, а натуральные величины боковых рёбер определяют методом прямоугольного треугольника (напоминаем, что развёртка строится только по натуральным величинам рёбер). На свободном поле чертежа последовательно выстраивают две грани (или два треугольника в натуральную величину) с помощью засечек циркуля. Линию сгиба показывают штрихпунктирной линией с двумя точками.

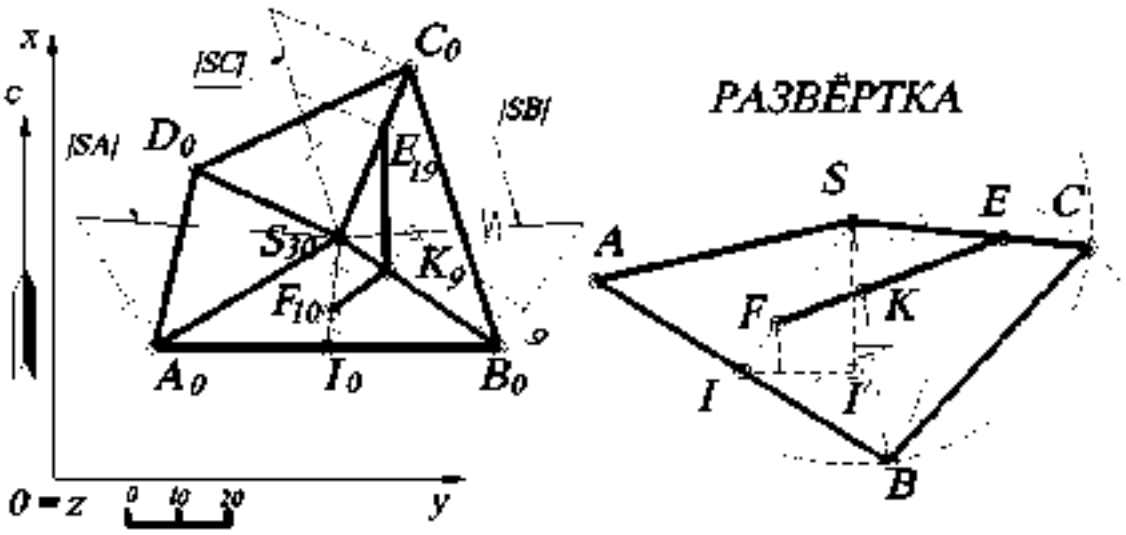


Рис. 96

На развёртке строят точки F и E. Чтобы построить точку E на развёртке, на плане проекцию точки E_{19} переносят на натуральную величину ребра $|SC|$ (с помощью подобных треугольников). Чтобы построить точку F_{10} на развёртке, проводят через неё прямую (на плане) $S_{30}I$ (так как известно, что точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости). На развёртке строят прямую SI (точка I находится на натуральной величине AB). Затем с помощью пропорционального деления отрезка SI (на развёртке) находят точку F (известно, что если точка делит отрезок прямой в заданном отношении, то и проекция этого отрезка делится в том же отношении). На развёртке строят прямую FE. Точка пересечения с ребром SB – точка K. Для построения точки K на плане переносят отрезок KB (можно и отрезок SK) на натуральную величину $|SB|$ и с помощью подобных треугольников определяют точку K_9 на ребре $S_{30}B_0$. Числовую отметку точки K находят, как показано на рис. 96. Ломаная $F_{10}K_9E_{19}$ – проекция кратчайшего расстояния между точками $F_{10}E_{19}$ на поверхности пирамиды.

6.5. Соединить две точки A_1 и B_3, принадлежащие конической поверхности Φ кратчайшей линией n. Такая линия на поверхности называется *геодезической* (форму геодезической линии принимает нить, туго натянутая на поверхности).

Решение (рис. 97). На плоскости кратчайшей линией между двумя точками является отрезок прямой. Поэтому для решения этой задачи строят развертку данной поверхности Φ. Построение развертки выполняют по способу треугольников, заключающемуся в том, что поверхность конуса заменяется вписанной многогранной с треугольными гранями, которая и развертывается.

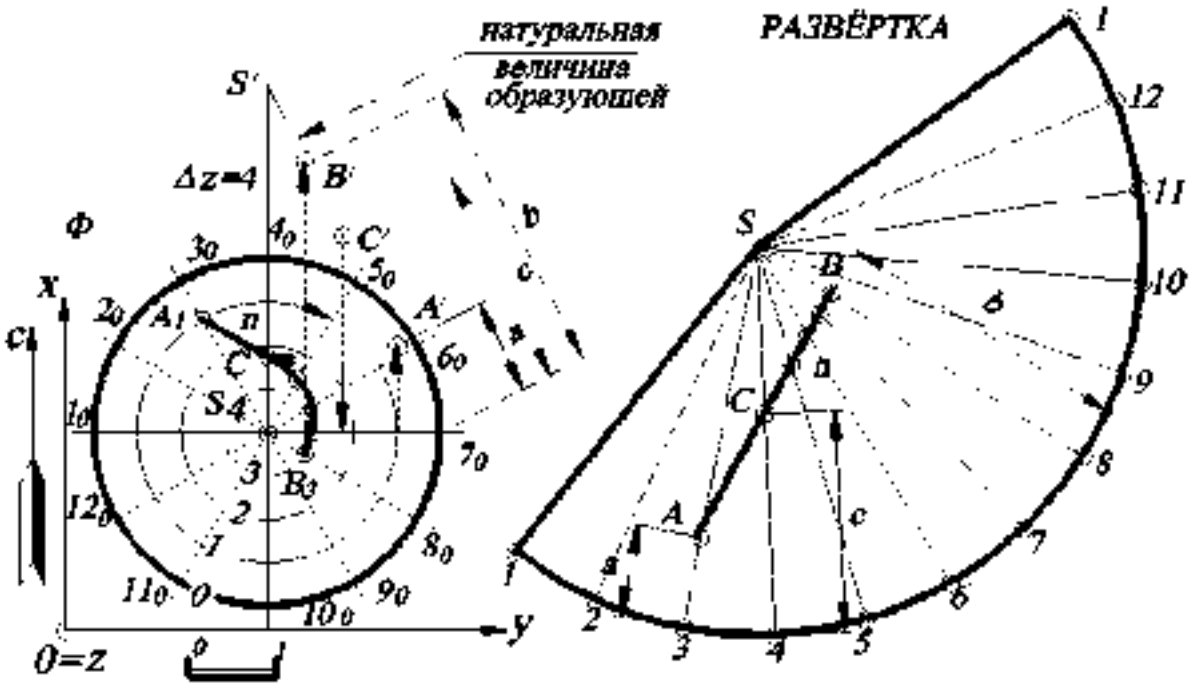


Рис 97.

В данную коническую поверхность вписывают пирамиду. Для этого основание конуса разбивают на двенадцать равных частей. (Развертка является более точной при наименьшей разности длины дуги и ее хорды).Затем находят натуральную величину ребра правильной пирамиды, которая равна образующей заданного конуса (методом прямоугольного треугольника).

На случайной прямой от точки S откладывают отрезок Sl, равный натуральной величине образующей конуса. Затем проводят дугу с центром в точке S и радиусом, равным длине Sl, так как все ребра пирамиды равны между собой. На

построенной дуге засечками отмечают точки *2, 3…12, 1*, равные длинам хорд $1_0 2_0$; $2_0 3_0 \ldots 12_0 1_0$. Таким образом, построили приближенную развертку конуса.

Далее пропорциональным делением отрезка в заданном отношении (как показано на чертеже) находят образы *A*, *B* данных точек поверхности на развёртке. Затем построенную прямую *AB* на развертке переносят в обратном отображении на поверхность *Ф*, получая геодезическую линию *n*.

Частный случай. Развертка поверхности прямого кругового конуса является сектором круга радиуса, равного длине *l* образующей. Центральный угол φ этого сектора вычисляется по формуле

$$\varphi^0 = \frac{r \cdot 360^0}{l},$$ где *r* - радиус основания конуса.

6.6. Построить развёртку цилиндрической винтовой линии.

Решение (рис. 98). Построение проекций винтовой линии определяется характером ее образования в пространстве

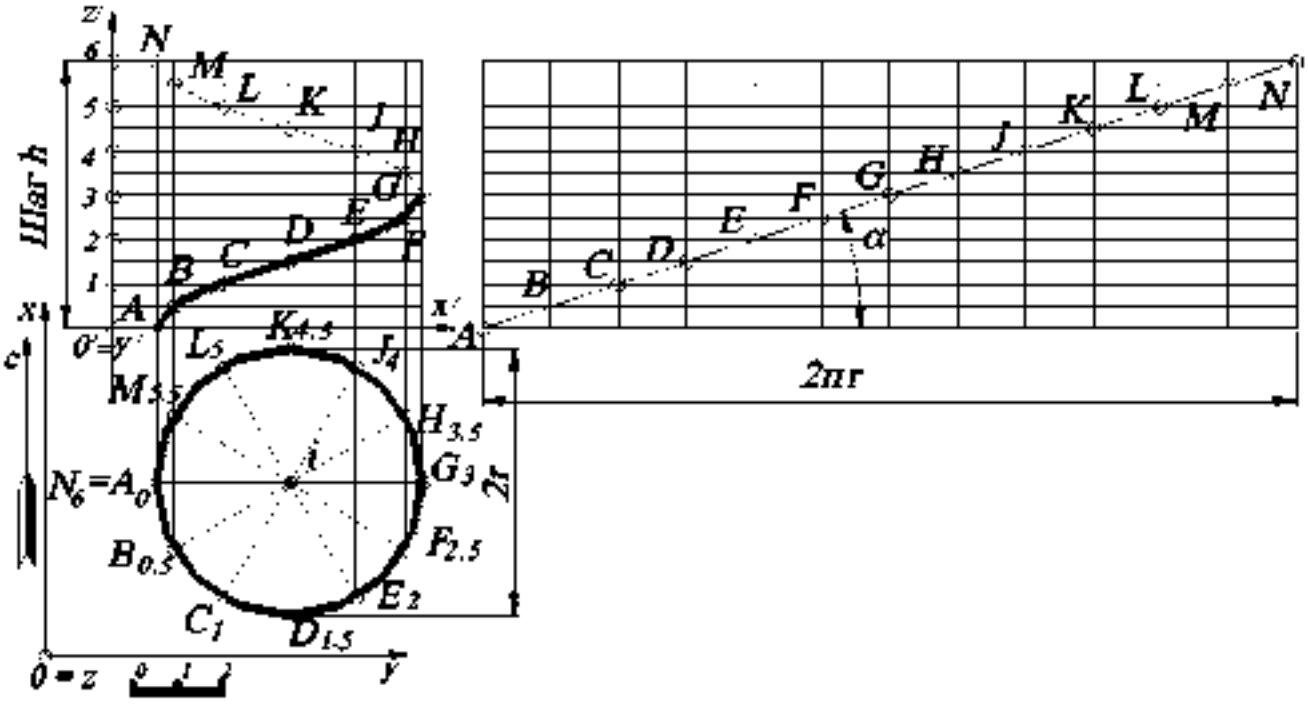


Рис. 98

Горизонтальная проекция цилиндра и винтовой линии – окружность, совпадающая с проекцией окружности основания цилиндра. Если цилиндр разрезать по его прямолинейной образующей AN и, разгибая, разгладить по плоскости, получится развёртка цилиндра – прямоугольник с высотой h и основанием $2\pi r$, в которое развернётся окружность основания цилиндра. Винтовая линия в результате развёртывания превратится в прямую – диагональ прямоугольника. Это означает, что винтовая линия пересекает все образующие под одним и тем же углом α.

Для построения развёртки винтовой линии делят окружность основания цилиндра, являющуюся горизонтальной проекцией винтовой линии, и отрезок, равный шагу h, отложенный на оси цилиндра, на одинаковое число равных частей. На рассматриваемом чертеже взято *12* частей. Тогда точки на профиле винтовой линии будут лежать на пересечении соответствующих горизонтальных и вертикальных прямых, проведенных через одноименные точки деления. Полученные точки соединяют плавной кривой. Как следует из способа построения, данная кривая является гелисой.

При развертывании цилиндрической поверхности на плоскость винтовая линия на развертке превращается в прямую, наклоненную под углом α к горизонтальной прямой – развертке основания цилиндра. Это следует из закона образования винтовой линии, по которому равным угловым перемещениям точки по окружности соответствуют равные прямолинейные перемещения, перпендикулярные плоскости окружности. На развертке равным отрезкам горизонтальной прямой будут соответствовать равные перемещения точки в вертикальном направлении. Итак, траектория точки на развертке представляет собой линию, у которой ординаты точек пропорциональны абсциссам, то есть прямую. Угол α равен углу подъема винтовой линии и определяется по формуле $tg\alpha = \frac{h}{2\pi r} = \frac{p}{r}$.

Тот факт, что на развёртке винтовая линия перешла в прямую, означает также, что винтовая линия является одной из *геодезических линий* на цилиндре.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6.1. Дана пирамида ***ABCD*** и две точки ***F*** и ***E***, принадлежащие видимым граням пирамиды. Соединить точки ***F*** и ***E*** кратчайшей линией по поверхности пирамиды. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(140, 120, 40)***, ***B(90, 30, 0)***, ***C(40, 20, 20)***, ***D(20, 130, 0)***; ***E(80, ?, 20)***, ***F(?, 90, 30)***.

6.2. Построить развёртку наклонного цилиндра. Цилиндр задан осью $O_0O'_{80}$ и основанием – окружностью, лежащей в горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, с центром ***O(35, 105, 0)*** и радиусом ***R=25 мм***. Проекция точки $O'(35, 25, 80)$.

6.3. Построить развёртку додекаэдра (правильного двенадцатигранника) со стороной ***30 мм***.

6.4. Построить полную развёртку усечённого куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью $K_{50}L_{25}M_0$. Куб задан следующими координатами: ***A(15, 45, 0)***, ***B(15, 85, 0)***, ***D(55, 45, 0)***, $A'(15, 45, 40)$; плоскость – ***K(10, 45, 50)***, ***L(70, 75, 25)***, ***M(10, 105, 0)***.

6.5. Построить полную развёртку прямого цилиндра вращения, усечённого плоскостью $K_{50}L_{25}M_0$. Цилиндр вращения задан осью $O_{90}O'_0$, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, и основанием – окружностью, принадлежащей горизонтальной плоскости проекций ***xOy***, с центром ***O(35, 65, 0)*** и радиусом ***R=25 мм***. Проекция плоскости задана следующими координатами точек: ***K(10, 45, 50)***, ***L(70, 75, 25)***, ***M(10, 105, 0)***.

6.6. Построить полную развёртку прямой правильной шестигранной призмы, стоящей на горизонтальной плоскости проекций и усечённой плоскостью $K_{50}L_{25}M_0$. Призма задана точкой ***A(10, 65, 0)***, принадлежащей основанию ***ABCDEF***, с центром описанной окружности вокруг основания ***O(35, 65, 0)*** и высотой ***h=40***. Проекция плоскости задана следующими координатами точек: ***K(10, 45, 50)***, ***L(70, 75, 25)***, ***M(10, 105, 0)***.

6.7. По данной развёртке построить проекцию призмы, поставив её основанием на плоскость xOy. Показать на её поверхности точку A_9. Ребро C_0D_0 параллельно оси Oy, $C(40, 20, 0)$ (рис. 99).

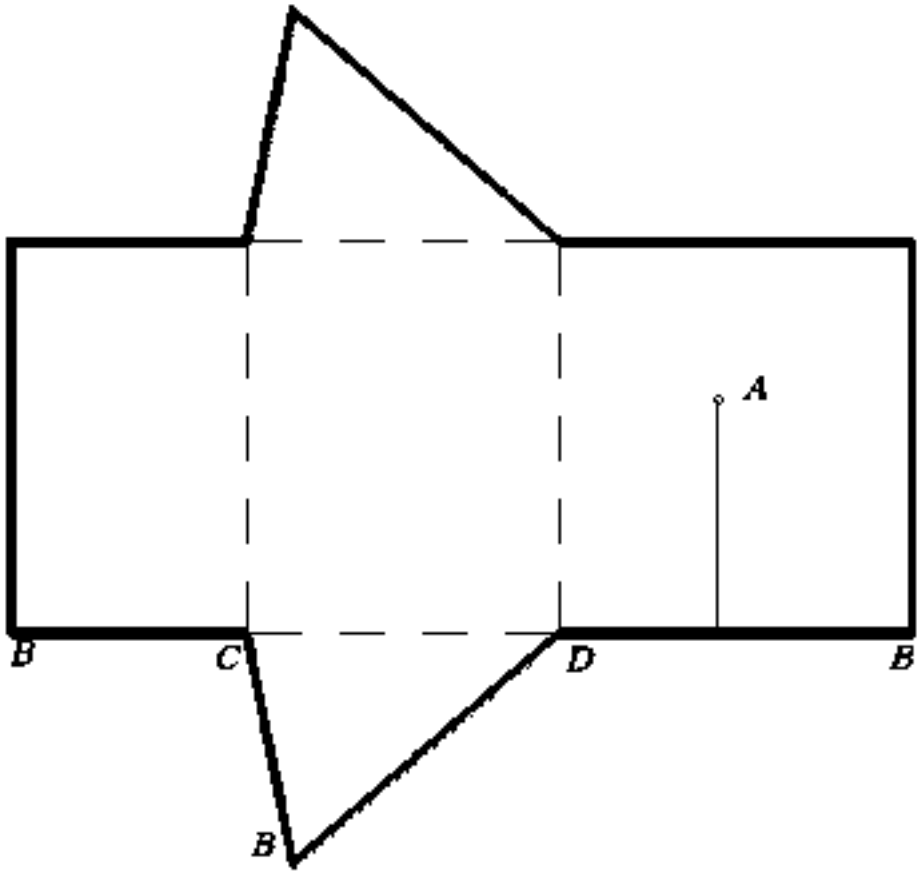


Рис. 99.

6.8. Построить полную развёртку пирамиды $SABC$, усечённой плоскостью $K_0L_{20}M_{40}$. Проекция плоскости задана следующими координатами точек: $K(10, 0, 0)$, $L(50, 20, 20)$, $M(10, 40, 40)$; координаты вершин пирамиды – $S(30, 20, 80)$, $A(10, 45, 0)$, $B(70, 75, 0)$, $C(10, 105, 0)$

6.9. Построить полную развёртку призмы $ABCA'B'C'$, усечённой плоскостью $K_0L_{20}M_{40}$. Проекция плоскости задана следующими координатами точек: $K(10, 0, 0)$, $L(50, 20, 20)$, $M(10, 40, 40)$; координаты вершин призмы – $A(10, 45, 0)$, $B(70, 75, 0)$, $C(40, 105, 0)$, $A'(10, 0, 50)$, $B'(70, 30, 50)$, $C'(40, 60, 50)$.

6.10. По данной развёртке построить проекцию пирамиды, поставив её основанием на плоскость *xOy*. Показать на её поверхности точку A_9. Ребро C_6D_6 параллельно оси *Oy*. *C(80, 70, 0)* (рис. 100).

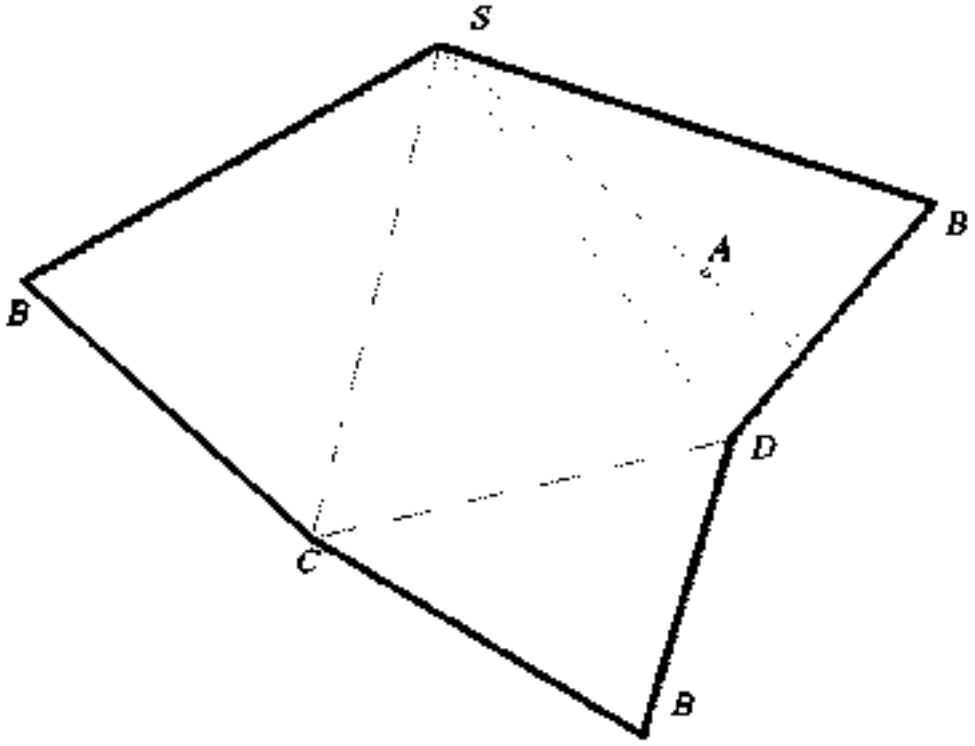


Рис 100

6.11. Построить полную развёртку поверхности конуса с вершиной S_{45} и радиусом основания *R=30 мм* (рис. 101)

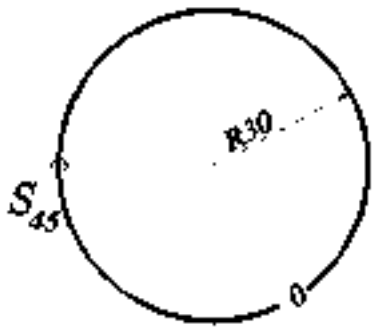


Рис. 101

6.12. Построить на поверхности цилиндра линию кратчайшего расстояния (геодезическую) между точками *A* и *B*. Точки *A* и *B* принадлежат видимой части поверхности цилиндра (рис. 102).

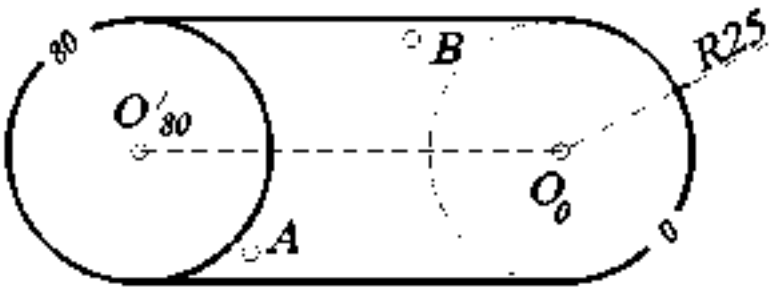


Рис. 102.

7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ

Для решения комплексных задач необходимо обобщить информацию предыдущих частей данного задачника, сформулировав использованные ранее алгоритмы, а также дать определение понятию «геометрическое место».

Под позиционными понимают задачи по определению общих элементов геометрических многообразий. Позиционные задачи подразделяют:

1) по признаку принадлежности двух геометрических множеств, т. е. если одно множество является подмножеством другого, содержится в последнем (например, прямая принадлежит плоскости);

2) по признаку параллельности, т. е. если одно множество не имеет общих элементов с другим множеством (например, прямая параллельна плоскости);

3) по признаку пересечения двух множеств, т. е. одно множество имеет общие элементы с другим множеством (например, прямая и плоскость при пересечении имеет общий элемент – точку, а при пересечении со сферой может иметь одну общую точку, две или не иметь вообще точки пересечения). Обычно выделяется частный случай пересечения – перпендикулярность геометрических элементов. Кроме этого, имеется частный случай для скрещивающихся прямых, когда они не параллельны, не пересекаются. Мы предлагаем классифицировать задачи исходя из основных фигур пространства. Основными элементами пространства являются точка, кривая (прямая) линия, поверхность (плоскость). Тогда (исходя из комбинаторики) будем иметь 6 типов задач:

1. Взаимное положение двух точек.
2. Взаимное положение точки и прямой (кривой) линии.
3. Взаимное положение двух линий.
4. Взаимное положение точки и поверхности.
5. Взаимное положение линии и поверхности.
6. Взаимное положение двух поверхностей.

Однако мы будем рассматривать эти геометрические фигуры как геометрические места (совокупность точек, положение которых удовлетворяет некоторым геометрическим условиям) трехмерного пространства, так как решение геометрических задач часто сводится к построению геометрических мест. Метод геометрических мест при решении задач на построение известен еще со времен Платона и состоит в следующем: «Построить объекты a_1, a_2 …, являющиеся элементами множества M и удовлетворяющие условиям *1*, *2* …». Число объектов и условий зависит от конкретного содержания задачи. Элементы множества M, удовлетворяющие условию *1*, образуют некоторое подмножество $M_1 \subset M$, условие *2* выделяет из M подмножество M_2 и т. д. Искомые объекты получаются как результат пересечения подмножеств M_1, M_2, …, т. е. $\{a_1, a_2, \ldots\} = M_1 \cap M_2 \cap \ldots$. Ниже перечисляются основные геометрические места, к нахождению которых приводится решение многих задач.

Однако вначале введем условные обозначения, которыми воспользуемся для символической записи.

- $A_1, A_2, \ldots$ - точки;
- $a_1, a_2, \ldots$ - прямые (кривые) линии;
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ - плоскости;
- $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ - поверхности;
- $\wedge$ - конъюнкция – логическая операция, служащая для образования высказывания «A и B», то есть обозначающая союз «и».
- $\bigcap$ – пересечение геометрических многообразий;
- $\perp$ - перпендикулярность геометрических многообразий;
- $\parallel$ - параллельность геометрических многообразий;
- $\dot{-}$ - обозначение скрещивающихся прямых линий.

Итак, следующие геометрические места рассматриваем, исходя из основных фигур и их частных положений.

1. Геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки, есть сфера с центром в этой точке. Всякая плоскость, касательная к сфере, будет удалена от его центра на расстояние, равное радиусу сферы, и перпендикулярна к этому радиусу (A).
2. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная ему ($A_1 \wedge A_2$).

Примечание. Около пары сфер одинакового радиуса можно описать цилиндр, а если сферы разного радиуса – два конуса.

3. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек A_1, A_2 и A_3, не лежащих на одной прямой, есть прямая, перпендикулярная к плоскости, определяемой тремя данными точками, и проходящая через центр окружности, описанной через эти три точки, так как окружность однозначно определяется заданием трех точек ($A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$).

Это геометрическое место точек может быть построено как линия пересечения двух плоскостей, проходящих через середины отрезков A_1A_2 и A_2A_3 и соответственно к ним перпендикулярных.

4. Геометрическое место точек, равноудаленных от четырех данных точек A_1, A_2, A_3 и A_4, не лежащих в одной плоскости (и определяющих сферу, что подтверждается подсчетом параметров), есть только одна точка – центр сферы, поверхность которой проходит через эти точки. Этот центр находится как точка пересечения плоскостей, проведенных через середины отрезков A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 и соответственно перпендикулярных им ($A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$).

Для того чтобы найти пересечение этих трех плоскостей, можно найти прямую пересечения двух плоскостей, а затем найти пересечение этой прямой с третьей плоскостью.

5. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой, есть поверхность прямого кругового цилиндра. Всякая плоскость, касательная к этому цилиндру, будет параллельна оси цилиндра и удалена от нее на данное расстояние ($\boldsymbol{a}$).
6. Геометрическое место точек, равноудаленных от заданных прямой и точки, есть линия пересечения прямого кругового цилиндра и сферы. Эта линия может быть построена решением задачи на нахождение общих элементов двух поверхностей ($A \wedge \boldsymbol{a}$).
7. Геометрическое место прямых, проходящих через определенную точку на данной прямой и наклоненной к последней под заданным углом ω, есть поверхность прямого кругового конуса ($A \wedge \boldsymbol{a}$).

Примечание. Если провести плоскость, пересекающую конус перпендикулярно к его оси, то поверхность конуса будет служить геометрическим местом прямых, проходящих через вершину и наклоненных к этой плоскости под углом $\boldsymbol{90^0-\omega}$. Всякая плоскость, касательная к такому конусу, будет наклонена под углом $\boldsymbol{90^0-\omega}$ к этой плоскости нормального сечения.

8. Геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки и плоскости, есть линия (две линии) пересечения плоскости со сферой ($A \wedge \boldsymbol{\alpha}$).

Примечание. В частном случае может получиться, что эта плоскость (или две плоскости, или одна из них) будет касательной плоскостью.

9. Геометрическое место точек, равноудаленных от заданных точки и поверхности на заданное расстояние, есть линия (или две линии, в частном случае ни одной) пересечения сферы с эквидистантой заданной поверхности. Например, эквидистантой сферы будут две сферы с тем же центром, расположенные по разные стороны от ее поверхности на данном расстоянии ($A \wedge \boldsymbol{\Phi}$).

Примечание. В частном случае сфера и эквидистанта поверхности могут быть касательными или не иметь действительных точек пересечения.

10. Геометрическое место точек, равноудаленных от данных двух параллельных прямых, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку, определяющему кратчайшее расстояние между данными прямыми, и проходящими через его середину ($a_1 \parallel a_2$).

11. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех параллельных прямых a_1, a_2, и a_3, не лежащих в одной плоскости, есть прямая, параллельная данным прямым ($a_1 \parallel a_2 \parallel a_3$).

Примечание. Если через произвольную точку A_1 на прямой a_1 провести перпендикулярную плоскость α, то последняя пересечет две другие в точках A_2 и A_3. Искомое геометрическое место может быть построено как перпендикуляр к плоскости α, проходящий через центр окружности, описанной в этой плоскости около треугольника $A_1A_2A_3$. Три параллельные прямые однозначно определяют прямой круговой цилиндр (подтверждается подсчетом параметров).

12. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, есть пара плоскостей, перпендикулярных к плоскости, содержащей данные прямые, проходящие через биссектрисы углов между ними ($a_1 \cap a_2$).

Примечание. Искомые плоскости будут совпадать с плоскостями двух ветвей плоской кривой, на которые распадается линия пересечения двух прямых круговых цилиндров.

13. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух перпендикулярных прямых, есть пара плоскостей (так же как и в п.12), перпендикулярных к плоскости, содержащей данные прямые, проходящие через биссектрисы углов между ними ($a_1 \perp a_2$).

14. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых, есть линия пересечения двух прямых круговых цилиндров ($a_1 \doteq a_2$) или плоскость параллелизма, расположенная на одинаковом расстоянии от заданных скрещивающихся прямых.

Примечание. В частном случае эти цилиндры могут быть касательными или вообще не иметь общих элементов. Тогда геометрическим местом точек будет являться плоскость, параллельная касательным плоскостям к этим цилиндрам.

15. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной плоскости, есть пара плоскостей, параллельных данной и расположенных от нее по разные стороны на данном расстоянии ($\underline{\alpha}$).

16. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой и плоскости, есть линия пересечения прямого кругового цилиндра с одной или двумя плоскостями ($a \wedge \alpha$). Могут быть случаи касания и пустого множества общих элементов.

Примечание. В том случае, если расстояние удаления равно нулю, то решается задача на нахождение точки пересечения прямой и плоскости. Это замечание справедливо и для случая прямой и плоскости, ей перпендикулярной ($\alpha \perp a$) и плоскости и пересекающей ее прямой ($\alpha \cap a$).

17. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой и параллельной ей плоскости, есть в общем случае прямые пересечения прямого кругового цилиндра и двух плоскостей ($a \parallel \alpha$).

Примечание. Эти прямые в общем случае будут являться образующими данного цилиндра, а в частном – две совпавшие образующие, которые получаются в результате касания плоскости этого цилиндра, а также мнимое пересечение элементов.

18. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой и поверхности, есть линия пересечения прямого кругового цилиндра с эквидистантой заданной поверхности ($a \wedge \Phi$)

Примечание. Если расстояние равно нулю, то строится точка пересечения прямой и поверхности.

19. Геометрическое место точек, равноудаленных от плоскости и точки, есть линия пересечения плоскости (двух плоскостей) со сферой ($\alpha \wedge A$).

Примечание. В частном случае может получиться так, что плоскость будет касательной к поверхности сферы, а также пустое множество общих элементов.

20. При определении взаимного положения плоскостей ($\alpha_1 \wedge \alpha_2$) обычно выделяют следующие варианты: параллельные плоскости ($\alpha_1 \,||\, \alpha_2$); пересекающиеся плоскости ($\alpha_1 \cap \alpha_2$) и их частный случай – перпендикулярные плоскости ($\alpha_1 \perp \alpha_2$). Мы будем рассматривать только два последних случая, объединяя их в единый блок, так как в первом случае получается однопараметрическое множество параллельных плоскостей.

Итак, геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, есть две биссекторные плоскости двугранных углов, образованных этими пересекающимися плоскостями. Каждая биссекторная плоскость проходит через линию пересечения плоскостей и делит пополам соответствующую пару углов между этими плоскостями ($\alpha_1 \cap \alpha_2$), ($\alpha_1 \perp \alpha_2$).

Примечание. Если расстояние удаления равно нулю, то решается задача на нахождение линии пересечения этих плоскостей, которая будет являться геометрическим местом точек, равноудаленных от этих плоскостей.

21. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех пересекающихся плоскостей α_1, α_2 и α_3, есть прямая - линия пересечения плоскостей биссектора, равноделящих двугранные углы между плоскостями α_1и α_2 и α_2 и α_3 ($\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$).

Примечание. Поверхность, касательная к трем пересекающимся плоскостям, является поверхностью прямого кругового конуса с вершиной в точке пересечения этих плоскостей.

22. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех плоскостей, параллельных одной прямой, есть прямая – ось цилиндра, касательного к этим трем плоскостям (($\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$) $||$ a).

23. Геометрическое место точек, равноудаленных от заданной поверхности и плоскости, есть, в общем случае, линия пересечения эквидистантной плоскости и эквидистантной поверхности ($\Phi \wedge \alpha$).

Примечание. В частном случае эта плоскость будет касательной или вообще не иметь ни одной общей точки с заданной поверхностью.

24. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух поверхностей, есть линия пересечения эквидистант этих поверхностей ($\Phi_1 \wedge \Phi_2$).

Примечание. Если расстояние равно нулю, то строится линия пересечения заданных поверхностей. Имеют место случаи касания этих поверхностей и отсутствия общих элементов.

Анализ основных геометрических мест позволяет сделать вывод о том, что для решения позиционных алгоритмических задач необходимы следующие алгоритмы:

1. Нахождение общего элемента прямой и плоскости – точки (табл. 1).
2. Нахождение общего элемента двух плоскостей (табл. 2, 3).
3. Нахождение общих элементов прямой (кривой) линии с поверхностью (табл. 4).
4. Нахождение общих элементов плоскости и поверхности (табл. 5).
5. Нахождение общих элементов двух поверхностей (табл. 6).
6. Построение касательных плоскостей к заданным поверхностям (табл. 7).

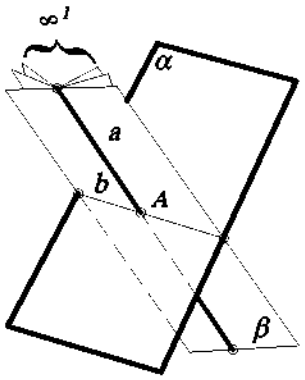
Кроме этих алгоритмов решения позиционных задач в табл. 8 представлен алгоритм основной метрической задачи.

Составим перечисленные алгоритмы.

Таблица 1

Алгоритм построения точки пересечения прямой и плоскости

(основная или первая позиционная задача)

<table>
<tr><td colspan="2">Алгоритм А 1</td></tr>
<tr><td>1. Через заданную прямую a проводят вспомогательную плоскость-посредник β.* В общем случае таких плоскостей может быть ∞^1.</td><td rowspan="4"> 
</td></tr>
<tr><td>2. Находят прямую b пересечения заданной плоскости α и плоскости посредника β.</td></tr>
<tr><td>3. Искомая точка A определяется в результате пересечения заданной прямой a и полученной прямой b.</td></tr>
<tr><td>4. Определяют видимость прямой методом конкурирующих точек.</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Плоскость-посредник выбирается частного положения, однако в проекциях с числовыми отметками она может быть и общего положения.</td></tr>
</table>

Алгоритм А2 – решение задачи на пересечение двух плоскостей общего положения – может быть осуществлен двумя способами:

1. Построить точки пересечения двух прямых одной плоскости с другой плоскостью, то есть использовать два раза алгоритм А1 (табл. 1).
2. Ввести две вспомогательные секущие плоскости частного положения, построить их линии пересечения с заданными плоскостями. Две соответствующие точки пересечения определят искомую линию пересечения данных плоскостей. Другими словами, для нахождения линии пересечения двух плоскостей необходимо найти две общие точки.

Таким образом, для нахождения линии пересечения двух плоскостей сформируем два алгоритма А2.1, А2.2. Эта задача называется второй позиционной задачей начертательной геометрии (табл. 2, 3).

Таблица 2

Построение линии пересечения двух плоскостей

(вторая позиционная задача)

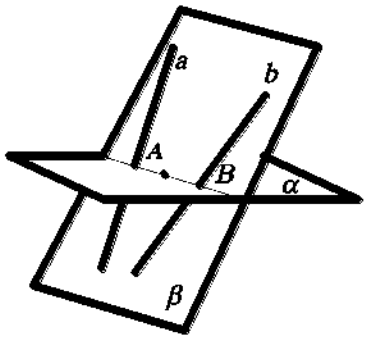
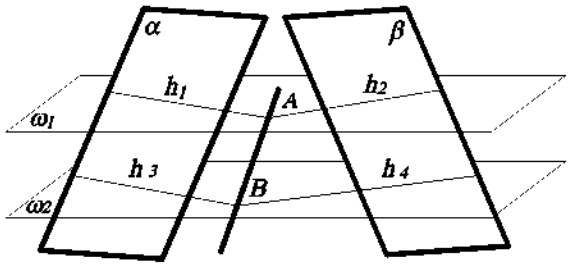
Алгоритм А 2.1	
1. Находят точку A пересечения прямой а с плоскостью α, используя алгоритм А1.	
2. Находят точку B пересечения прямой b с плоскость α, используя алгоритм А1.	
3. Строят прямую AB – линию пересечения заданных плоскостей α и β.	
4. Определяют видимость плоскостей методом конкурирующих точек.	
Примечание. В проекциях с числовыми отметками линию пересечения плоскостей строят как пересечение двух прямых-горизонталей с одинаковыми числовыми отметками.	

Таблица 3

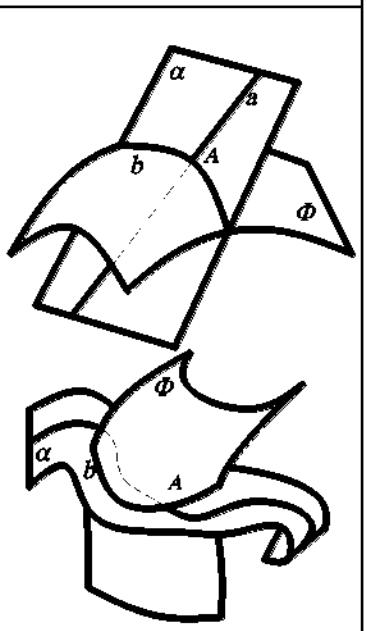
Построение линии пересечения двух плоскостей

Алгоритм А 2.2	
1. Проводят плоскость уровня ω_1 и находят линии пересечения h_1 и h_2 с заданными плоскостями α и β.	
2. Строят точку A пересечения прямых h_1 и h_2.	
3. Проводят плоскость уровня ω_2 и находят линии пересечения h_3 и h_4 с заданными плоскостями α и β.	
4. Строят точку B пересечения прямых h_3 и h_4.	
5. Определяют видимость плоскостей методом конкурирующих точек.	
Примечание. 1. Если плоскость задана следами, то нужно найти две общие точки. 2. В проекциях с числовыми отметками линию пересечения плоскостей строят как пересечение двух прямых-горизонталей с одинаковыми числовыми отметками.	

Все машины, приборы, любые изделия состоят из отдельных деталей, соединенных между собой. Форму деталей машин образуют, главным образом, сочетание плоскостей и кривых поверхностей (цилиндрической, конической, сферической, торовой), расположенных в пространстве так, что они находятся друг относительно друга в определенном соотношении. Чаще всего они пересекаются, образуя общую для них линию. Поэтому главным этапом конструирования таких деталей является определение границ элементарных исходных поверхностей, которыми и являются линии их взаимного пересечения. Таким образом, задача построения линии пересечения двух поверхностей, достаточно часто встречающаяся в начертательной геометрии, имеет широкое практическое применение в конструкциях технических деталей. Рассмотрим эти алгоритмы (табл. 4-6).

Таблица 4

Нахождение общих элементов кривой (прямой) линии

Алгоритм А 3	
1.Выбирают посредник α так, чтобы заданная кривая (прямая) смогла принадлежать этому посреднику (вспомогательная плоскость или поверхность).	
2. Строят посредник α, в который заключают заданную кривую (прямую) линию ***a***.	
3. Находят линию ***b*** пересечения посредника α с заданной поверхностью ***Ф***.	
4. Искомая точка ***A*** определяется при пересечении построенной кривой ***b*** и заданной а.	
5. Определяют видимость плоскостей методом конкурирующих точек.	
Примечание. Если задача решается не на компьютере, то нужно иметь в виду то, чтобы линия пересечения ***b*** была линией, которую на проекциях можно построить циркулем и линейкой (прямая или окружность). В противном случае посредник необходимо заменить.	

Линия пересечения двух поверхностей в общем виде представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две части и более. Строится линия пересечения при помощи вспомогательных плоскостей или кри-

вых поверхностей, которые называются посредниками. Выбор вспомогательной поверхности (посредника) определяется формой и положением пересекающихся поверхностей. В качестве посредников могут использоваться проецирующие плоскости, плоскости общего положения, цилиндрические, конические и сферические поверхности. Следует по возможности подбирать такие вспомогательные поверхности, которые в пересечении с данными поверхностями дают простые для построения линии (прямые или окружности). Каждый из посредников пересекает данные поверхности в общем случае по некоторым кривым, которые как лежащие в одной и той же плоскости или на одной и той же поверхности, могут пересекаться между собой и тогда определяют одну или несколько точек, лежащих на линии пересечения поверхностей.

Таблица 5

Построение линии пересечения плоскости и поверхности

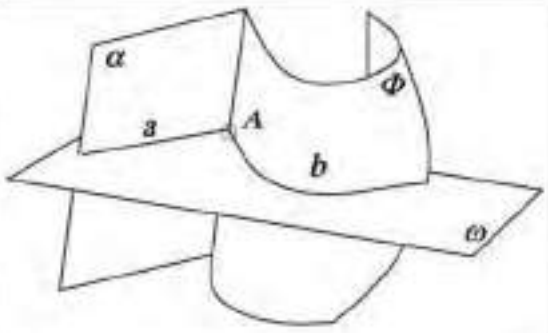
<table>
<tr><td colspan="2">Алгоритм А 4</td></tr>
<tr><td>1. Выбирают вспомогательную плоскость-посредник ω.</td><td rowspan="2"> 
</td></tr>
<tr><td>2. Строят посредник ω (построение обычно начинают с нахождения опорных (характерных) точек, к которым относятся экстремальные точки (низшие или высшие), точки видимости относительно плоскостей проекций).</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Находят линии a и b, по которым посредник ω пересекает заданную плоскость α и поверхность Φ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Отмечают точку A пересечения построенных линий a и b.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Операции 1, 2, 3, 4 повторяют нужное число раз (посредники задаются в пределах экстремальных точек). Полученные точки последовательно соединяют линией.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Определяют видимость полученной линии (если часть поверхности видима, то и линия видимая).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание. При решении задачи с помощью циркуля и линейки эта плоскость должна пересекать заданную поверхность по прямым или окружностям.</td></tr>
</table>

Таблица 6

Построение линии пересечения двух поверхностей

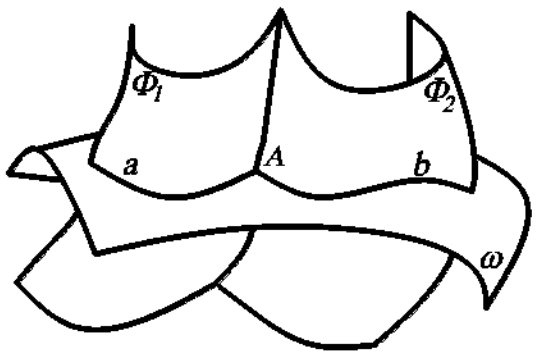
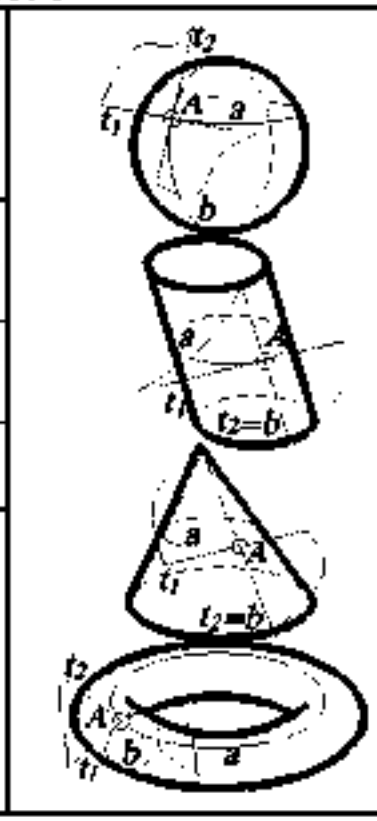
<table>
<tr><td colspan="2">Алгоритм А 5</td></tr>
<tr><td>1. Выбирают вспомогательную поверхность-посредник ω так, чтобы ее пересечение с заданными поверхностями осуществлялось по простым линиям.</td><td rowspan="8"> 
</td></tr>
<tr><td>2. Строят посредник ω (построение обычно начинают с нахождения опорных (характерных) точек, к которым относятся экстремальные точки (низшие или высшие), точки видимости относительно плоскостей проекций).</td></tr>
<tr><td>3. Находят линии a и b, по которым посредник ω пересекает заданные поверхности Φ₁ и Φ₂.</td></tr>
<tr><td>4. Отмечают точку A пересечения построенных линий a и b.</td></tr>
<tr><td>5. Операции 1, 2, 3, 4 повторяют нужное число раз (посредники задаются в пределах экстремальных точек).</td></tr>
<tr><td>6. Полученные точки последовательно соединяют линией.</td></tr>
<tr><td>7. Определяют видимость полученной линии (если часть поверхности видима, то и линия видимая).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание.
1. Если одна из поверхностей является проецирующей, то есть одна из проекций искомой линии уже дана, то другую проекцию искомой линии строят по ее принадлежности второй заданной поверхности.
2. Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания (теорема Монжа).</td></tr>
</table>

Таблица 7

Построение плоскости, касательной к сфере, цилиндру, конусу, тору

Алгоритм А 6	
1. Через точку A, принадлежащую заданной поверхности, строят образующую a циклической поверхности (круговое сечение).	
2. Проводят касательную прямую t_1 к полученной окружности a.	
3. Через точку A строят образующую b поверхности вращения.	
4. Проводят касательную прямую t_2 к полученной линии b.	
5. Прямые t_1 и t_2, пересекающиеся в точке A, задают касательную плоскость.	

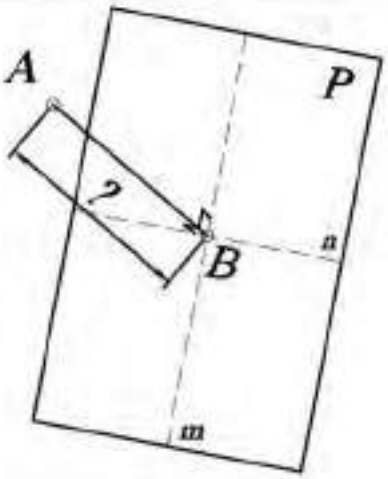
Кроме позиционных задач в начертательной геометрии имеются метрические задачи. Метрическими называют задачи, в которых необходимо определить натуральные значения геометрических величин – длин отрезков, размеры углов, расстояния между геометрическими многообразиями, а также площадь, объём и т. п. Причем необходимо помнить, что натуральная величина отрезков прямых, плоских фигур определяется на чертеже без дополнительных построений тогда, когда прямая или плоскость фигуры параллельна плоскости проекций, то есть является прямой или плоскостью уровня по отношению к плоскости проекций. В остальных случаях необходимы дополнительные построения или преобразование геометрических объектов до частного положения (способ прямоугольного треугольника, методы вращения или замены плоскостей проекций).

Задача на определение расстояния от точки до плоскости называется основной метрической задачей начертательной геометрии.

Таблица 8

Нахождение расстояния от точки до плоскости

(основная метрическая задача)

Алгоритм А 7	
1. Из точки ***A*** строят прямую, перпендикулярную плоскости ***P*** (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости такая прямая должна быть перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости).	
2. Находят точку ***B*** пересечения перпендикуляра с плоскостью ***P*** (основная позиционная задача, см. А1).	
3. Определяют натуральную величину отрезка прямой ***AB*** любым из известных способов.	

Важнейшей целью при решении задач является формирование общих подходов, а точнее методов к умению решать задачи как можно более широких классов (эвристических задач). Уже с далеких времен многие математики занимались поиском общих эвристических схем, которые помогают в поиске способа решения конкретных задач. Разработкой таких эвристических схем занимался один из комментаторов Евклида Папп, знаменитые математики и философы Рене Декарт (1596-1650), Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716). Так, например, Р. Декарт подчеркивал, что научные открытия и изобретения следует производить не путем беспорядочного блуждания наугад по дорогам науки, а с помощью метода. «Под методом же я разумею достоверные и легкие правила, строго соблюдая которые, человек никогда не примет ничего ложного за истинное» и сможет добывать новое знание – все, что он способен познать – «без изменений траты умственных сил»[1]. Эти слова можно трактовать в том смысле, что при решении задач в различных сферах деятельности (науке, технике, образовании и др.) следует пользо-

[1] Декарт Р. Избр. произв. – М.: Госполитиздат, 1950. – С. 80, 90.

ваться общими подходами (методами), которые преследуют цель максимально возможной интенсификации интеллекта.

В математике, как и в геометрии, в частности начертательной геометрии, общих подходов (методов) решения задач не так уж много, однако они являются достаточно универсальными и с успехом (возможно под другими именами), используются и в других областях знаний. Рассмотрим методы решения задач, которые используются в курсе начертательной геометрии.

1. Метод разбиения задачи на подзадачи. Этот метод состоит в том, что сложную нестандартную задачу разбивают на несколько более простых подзадач, по возможности стандартных или ранее решенных, при последовательном решении которых будет решена и исходная задача. Здесь возможны такие случаи:

• разбиение условий задачи на части;

• разбиение требования задачи на части;

• разбиение области определения задачи на части.

Рассмотрим пример расчленения условия на части. Построить точку A, равноудаленную от сторон линейного угла с вершиной B и принадлежащую прямой a. Линейный угол и отрезок прямой не лежат в одной плоскости. Условие задачи разбивается на две части:

1) геометрическое множество трехмерного пространства, равноудаленное от сторон линейного угла, – это плоскость α, проходящая через биссектрису и перпендикулярная к плоскости этого угла;

2) искомая точка принадлежит заданной прямой a – это пересечение плоскости α с прямой a.

2. Преобразование задачи. Последовательные преобразования сложной комплексной задачи в цепочку эквивалентных задач до получения задачи, которую знаем, как решать. Другими словами, перейти из пространства стереометрии в пространство планиметрии (уменьшить размерность задачи). Например, преобразование элементов задачи из общего положения в частное. При этом эквивалентность задач понимается как совпадение их множеств решений, а преобразова-

ние должно не менять языка ее записи, т. е. если задача была геометрической, то и преобразованная задача тоже должна быть геометрической. В противном случае это уже будет не преобразование, а моделирование.

3. Моделирование. В общем случае этот метод подразумевает замену исходной задачи ее моделью: текстовая (сюжетная) задача переводится в уравнение, систему уравнений или неравенств; уравнение представляется в виде кривой на плоскости или в пространстве и т. п., т. е. в конечном счете сводится к какому-то геометрическому изображению. А поскольку геометрическое моделирование, целью которого является построение моделей, то актуальность приобретают методы построения физических моделей и конструктивных. Физические модели представляют совокупность материальных объектов, оперирование которыми приводит к решению задачи. Такими материальными (реальными) моделями могут служить модели геометрических фигур и тел из разного рода материала (бумаги, пластилина, дерева и т. п.). Конструктивные модели позволяют задавать условие задачи и в аналитическом виде, и в графическом, что значительно упрощает поиск решения задачи. Этот метод широко используется при решении многопараметрических задач, отображающих процессы и явления различных сфер деятельности. В этом случае большое значение имеет понятие «размерности» геометрических пространств (многообразий), поскольку позволяет конструировать на двумерном чертеже гиперповерхности, а также исследовать их методами геометрического моделирования.

4. Введение вспомогательных элементов. В общем случае возможны следующие варианты:

• введение недостающих по смыслу задачи элементов между данными и искомыми элементами (дополнительное построение на чертеже, введение дополнительных переменных для составления уравнений и т. п.);

• преднамеренное погружение задачи в большую размерность, т. е. введение дополнительных параметров, не связанных с условием задачи. Такими элементами являются «посредники», содержащие исходный элемент.

5. Подобие. Построение дополнительных элементов на чертеже, подобных тем, которые получаются в результате решения задачи. Причем дополнительные элементы строятся так, чтобы по отношению к исходным они были симметричными. Этот метод основан на принципе пропорциональности. В качестве подобных элементов в пространстве служат эквидистантные поверхности.

6. Переформулировать. Часто условие задачи сформулировано так, что исходные элементы являются определителем какой-либо поверхности. Например, если в пространстве заданы три пересекающиеся прямые, то известно, что такие прямые являются определителем конуса вращения. Поэтому иногда простая переформулировка позволяет обнаружить искомые элементы. Например, построить прямую, равноудаленную от трех пересекающихся прямых. Такой прямой является ось конуса вращения. Например, построить из шести спичек четыре равносторонних треугольника. Задача переформулируется следующим образом: требуется построить объект с шестью ребрами и четырьмя треугольными гранями, т. е. тетраэдр.

7. Обобщение. Этот метод является общим в математике. Очень часто общее доказать легче, чем частное, и практика математической науки дает в подтверждение этому достаточно много ярких и убедительных примеров. Подобная ситуация определяется часто как «парадокс изобретателя». Об этом методе в той или иной форме высказывались Г. В. Лейбниц, П. Г. Л. Дирихле, Ю. В. Р. Дедекинд, Д. Пойа и др. Достаточно привести несколько принадлежащих им высказываний[2]: «Доказать больше иногда легче» (Д. Пойа); «Решая познавательную задачу, полезно придумать какую-либо другую, общую задачу, которая содержит первоначальную и легче поддается решению» (Г. В. Лейбниц); «Как часто случается, общая задача оказывается легче, чем была бы частная, если бы мы пытались решить ее непосредственно в лоб» (П. Г. Л. Дирихле, Ю. В. Р. Дедекинд).

[2] Цит. из Зенкин А.А. Когнитивная компьютерная графика. – М.: Наука, 1991. – С. 152-153.

Как правило, это обобщение протекает за счет погружения (вложения) исходных элементов задачи в пространство большей размерности, непосредственно связанное с исходными элементами. С геометрической точки зрения, такие пространства являются геометрическими местами – множествами точек, равноудаленными от заданного элемента (или элементов). Поэтому прямая может быть рассматрена как поверхность кругового цилиндра, точка – как сфера и т. п. Использование данного метода предполагает, что из решения обобщенной задачи без особого труда может быть получено решение исходной задачи.

Рассмотрим пример. Построить плоскость на расстоянии R_1 от точки A, на расстоянии R_2 от точки B и на расстоянии R_3 от точки C. Искомая плоскость, удаленная от трех точек A, B и C на заданные расстояния R_1, R_2, R_3, должна быть касательной к трем сферам, центры которых совпадают с точками A, B и C, а радиусы соответственно равны R_1, R_2, R_3. Около каждой пары сфер можно описать конус вращения. Таких конусов будет два. Плоскость, касательная к такому конусу, будет касательной и к вписанным в него сферам. Поэтому задача сводится к построению плоскости, касательной к этим конусам, которая определяется двумя прямыми: а) соединяющей вершины этих конусов; б) касательной к основанию конуса. В результате решения этой задачи могут получиться две плоскости.

Заметим, что метод «Переформулировать» и метод разбиения задачи на подзадачи могут рассматриваться как конкретная разновидность метода «Обобщить». Дело в том, что, переформулировав задачу, т.е. фактически определив какую-либо поверхность, мы получаем новую задачу, являющуюся обобщением, а разбивая задачу на подзадачи, в конечном счете приходим к обобщению этих подзадач. Вообще говоря, при решении задач трудно однозначно утверждать, какой именно метод использовался, поскольку чаще всего при решении задач могут использоваться одновременно несколько методов. Более того, одна и та же задача, исследуемая с опорой на разные методы, может приводить к одному и тому же результату.

Все рассмотренные нами методы не претендуют на полноту классификации методов решения геометро-графических задач, поскольку, во-первых, любая задача априори может преподнести новый метод. Во-вторых, в некоторых случаях простые рассуждения, мысленные операции (анализ, синтез, абстракция, конкретизация и т. п.), приводящие к незначительным «косметическим» изменениям, позволяют получить алгоритм решения сложной задачи. Тем не менее рассмотренные методы содержат некие реальные ориентиры, позволяющие новичку осваивать процесс решения задач и вырабатывать интеллектуальные и практические навыки и умения в этой деятельности.

Предложенные алгоритмы, сконструированные геометрические места, а также методы дают возможность большего понимания при решении нижепредложенных задач.

7.1. Дано: конус (заданный вершиной S_3 и основанием – параллель заданного радиуса с нулевой отметкой) и прямая A_9B_7. Построить плоскость, касающуюся данного конуса и параллельную прямой A_9B_7.

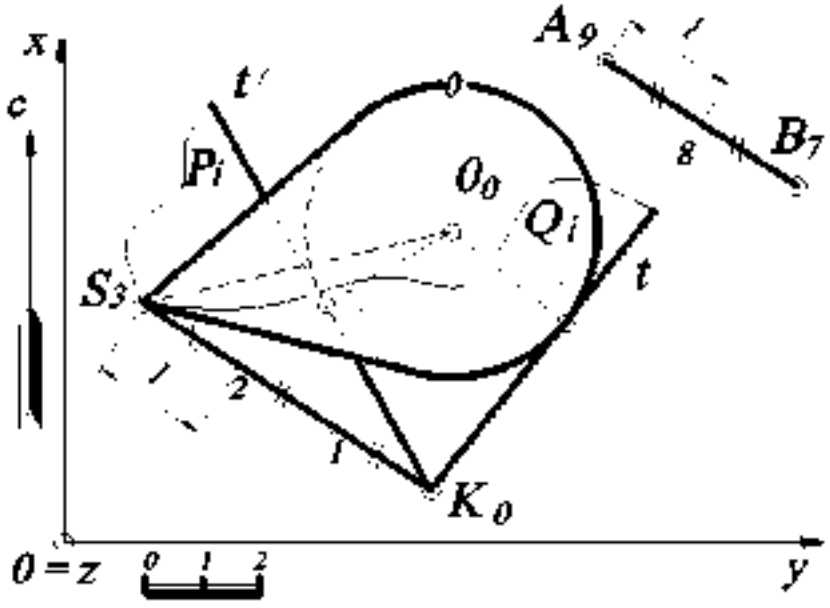


Рис. 103.

Решение (рис. 103). Известно, что прямая параллельна плоскости, если в плоскости найдётся хотя бы одна прямая, параллельная заданной. Следовательно, через вершину конуса S_3 проводят прямую, параллельную заданной прямой A_9B_7 (см. свойства параллельных прямых) и находят на этой прямой точку K с отметкой 0. Из полученной точки K_0 строят касательные прямые t и t' к основанию конуса (см. задачу 4.9). Прямые

S_3K_0 и t будут задавать одну искомую плоскость Q_i, а прямые S_3K_0 и t' - другую P_i.

7.2. Дано: точка A_1, точка B_4 и точка C_6. Построить точку $S_?$, равноудалённую от заданных точек A_1, B_4 и C_6 на расстояние ***4.5*** (по линейному масштабу).

Решение (рис. 104). Решение задачи сводится к построению прямого кругового конуса, образующая которого равна ***4.5***. Задача имеет два решения, то есть можно построить два конуса.

Вначале находят окружность основания конуса и точку O – центр основания конуса. По исходным данным, точки A_1, B_4 и C_6 принадлежат плоскости общего положения, следовательно, окружность основания будет проецироваться на плане в виде эллипса. Поэтому методом замены плоскостей проекций определяют натуральную величину треугольника $A_1B_4C_6$ (можно воспользоваться любым другим методом для определения натуральной величины $A_1B_4C_6$). Для этого строят профиль в проекционной связи перпендикулярно горизонталям плоскости $A_1B_4C_6$ и второй заменой плоскости проекций определяют натуральную величину $A_1B_4C_6$ (откладывая соответствующие координаты точек A_1, B_4 и C_6, взятые с плана).

Точка O' определяется на натуральной величине треугольника $A'B'C'$ как центр описанной окружности (точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника $A'B'C'$). Точку O' проецируют на профиль (используя принадлежность её к треугольнику ABC), определяют её числовую отметку ***3.1***, а затем строят на плане (отложив соответствующую координату).

Находят очерковую образующую $S'E'$, которая на профиле будет изображаться в натуральную величину (так как параллельна плоскости профиля), повернув точку A' вокруг $S'O'$. Затем на профиле из точки O восстанавливают перпендикуляр (высоту конуса) и засечкой циркуля из точки E радиусом ***4.5*** (по масштабу чертежа) определяют точку S – вершину конуса.

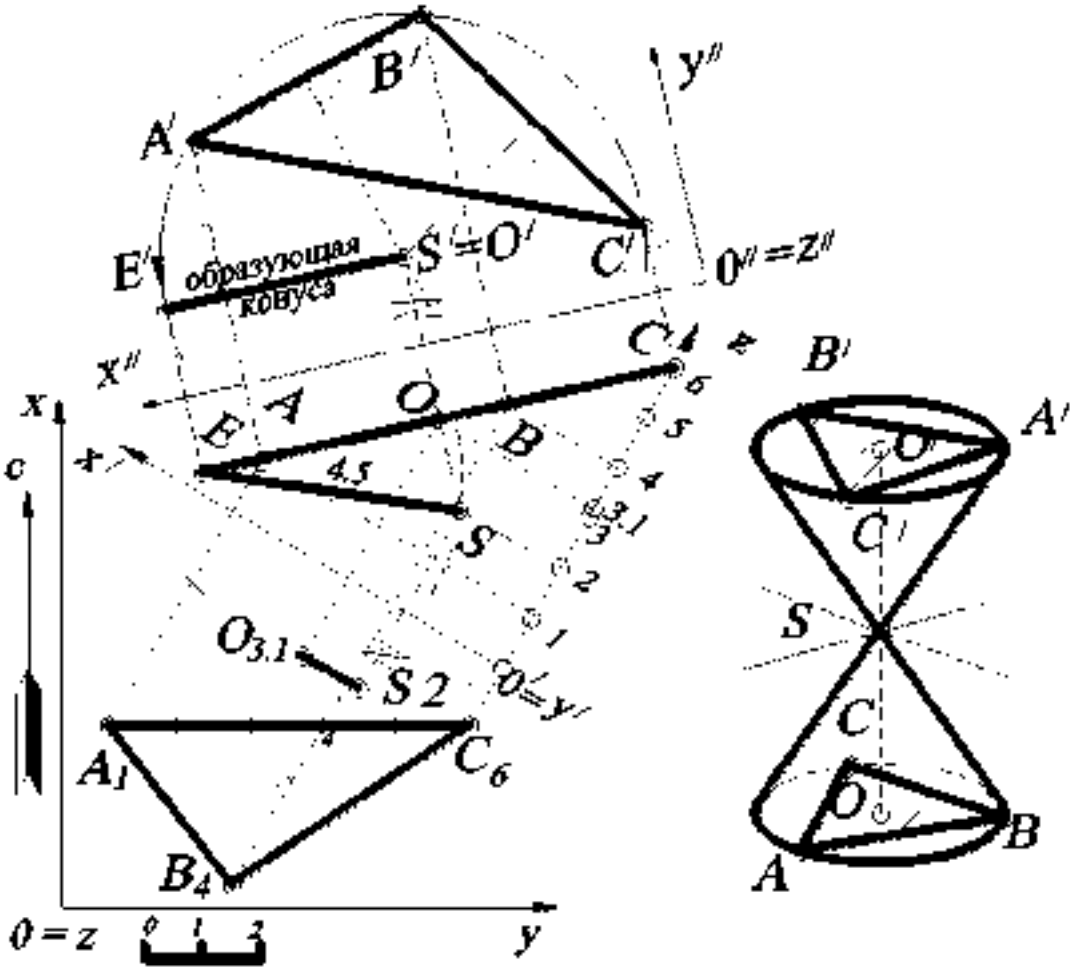


Рис 104

Точку *S* проецируют на план на прямую, проведённую через точку $O_{3.1}$ перпендикулярно горизонталям, так как высота конуса перпендикулярна его основанию (см. перпендикулярность прямой и плоскости). Точка S_2 – точка, равноудалённая от заданных точек A_1, B_4 и C_6 на расстояние *4.5*.

7.3. Дано: точка O_3, точка A_2 и расстояние R. Найти числовую отметку точки A_2, если известно, что расстояние между точками A_2 и O_3 равно R.

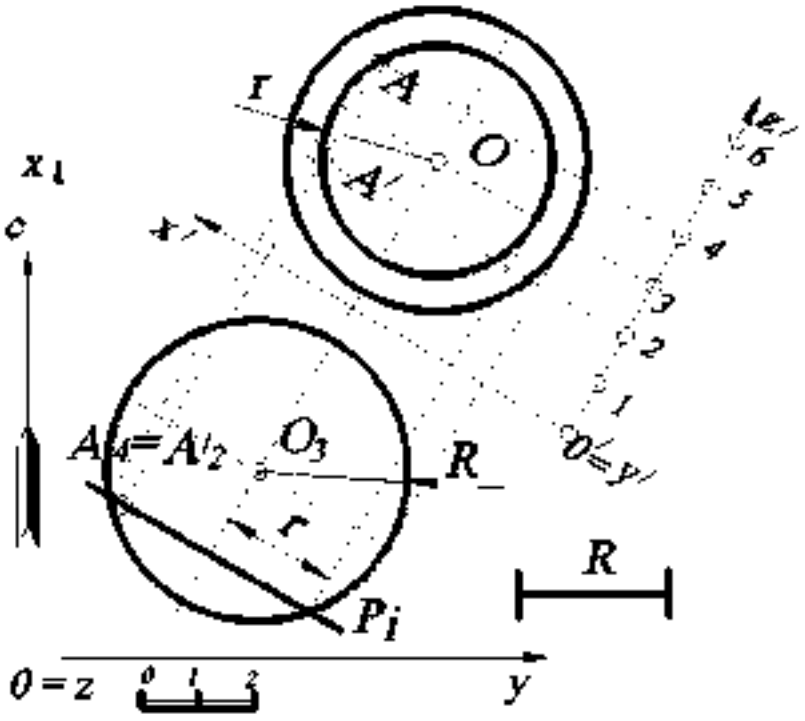


Рис. 105.

Решение (рис. 105). Задача сводится к построению сферы с центром O_3 и радиусом R. Другими словами, точка A_2 будет лежать на поверхности этой сферы, а числовая отметка этой точки определяется из принадлежности её к поверхности.

На плане строят сферу с центром O_3 и радиусом R. Известно, что если точка принадлежит поверхности, то она принадлежит линии, лежащей в этой поверхности. Следовательно, проводят через точку A_2 плоскость P_i, которая пересечёт эту сферу по окружности – параллели сферы. Затем для нахождения числовой отметки точки A_2 строят профиль этой параллели, на которую проецируют точку A_2 и определяют числовую отметку – это *1* (для наглядности на профиле построена также проекция сферы). Однако точка A_2 может иметь отметку *2* (см. рис. 103 – точка A'_2), так как в этой задаче два решения.

7.4. Дано: сфера (O_3 – центр, R – радиус) и точка A_2, принадлежащая этой сфере. На экваторе данной сферы построить точки, отстоящие от точки A_2 на расстояние $r=2$ (по масштабу чертежа).

Решение (рис. 106). Задача сводится к нахождению точек пересечения сферы с центром A_7 и радиусом $r=2$ с окружностью – экватором заданной сферы.

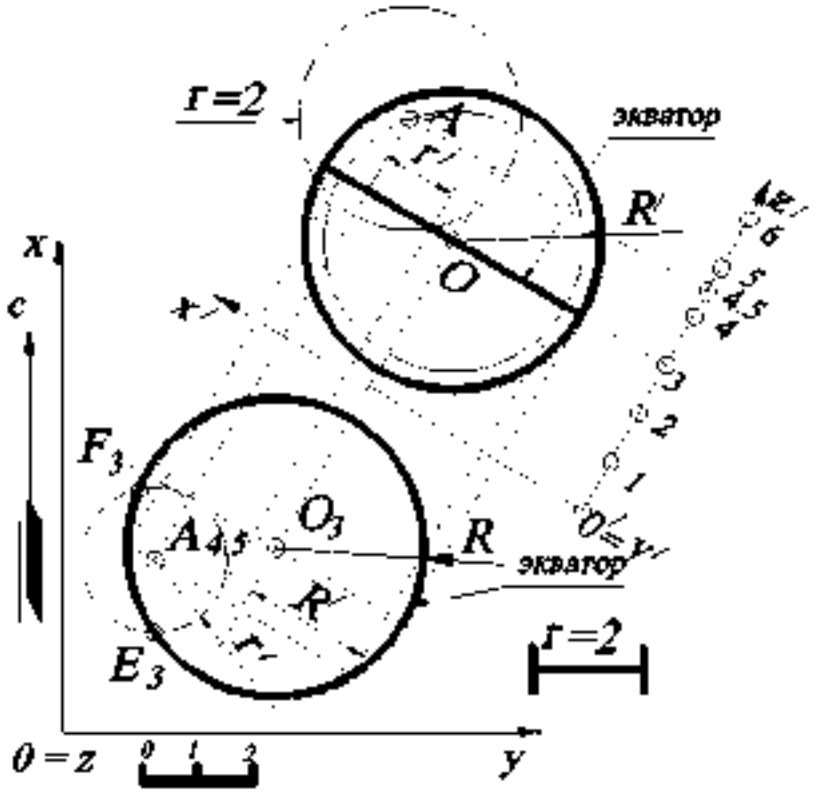


Рис. 106.

Другими словами, строят сферу с центром в точке A_7 и радиусом $r=2$ и определяют пересечение этой сферы с экватором данной сферы. Построения выполняются следующим образом. Вначале находят числовую отметку точки A_7. Для этого проводят проецирующую плоскость через точку A_7, которая пересечёт заданную сферу по окружности радиуса R'. На профиле эта окружность в пересечении с линией проекционной связи определит числовую отметку точки A_7 – *4.5* (или *1.5*, см. предыдущую задачу).

Затем на профиле строят сферу с центром в точке A и радиусом $r=2$ и определяют радиус горизонтали r' построенной сферы, который соответствует числовой отметке «экватора» заданной сферы, то есть *3*-й. На плане строят параллель сферы с радиусом r' и находят точки F_3 и E_3.

7.5. Дано: точки A_1, B_4, C_6 и D_2. Построить проекцию точки O_2, равноудалённую от четырёх данных точек.

Решение (рис. 107). Задача сводится к построению центра сферы, так как четыре некомпланарные точки задают сферу, а равноудалённая точка от четырёх – центр сферы. В этом случае, построив две параллели сферы, можно найти центр этой сферы, так как центры двух параллелей зададут ось сферы, а серединный перпендикуляр, проведённый к двум точкам, лежащим на одном очерке сферы, в пересечении с осью определит центр искомой сферы.

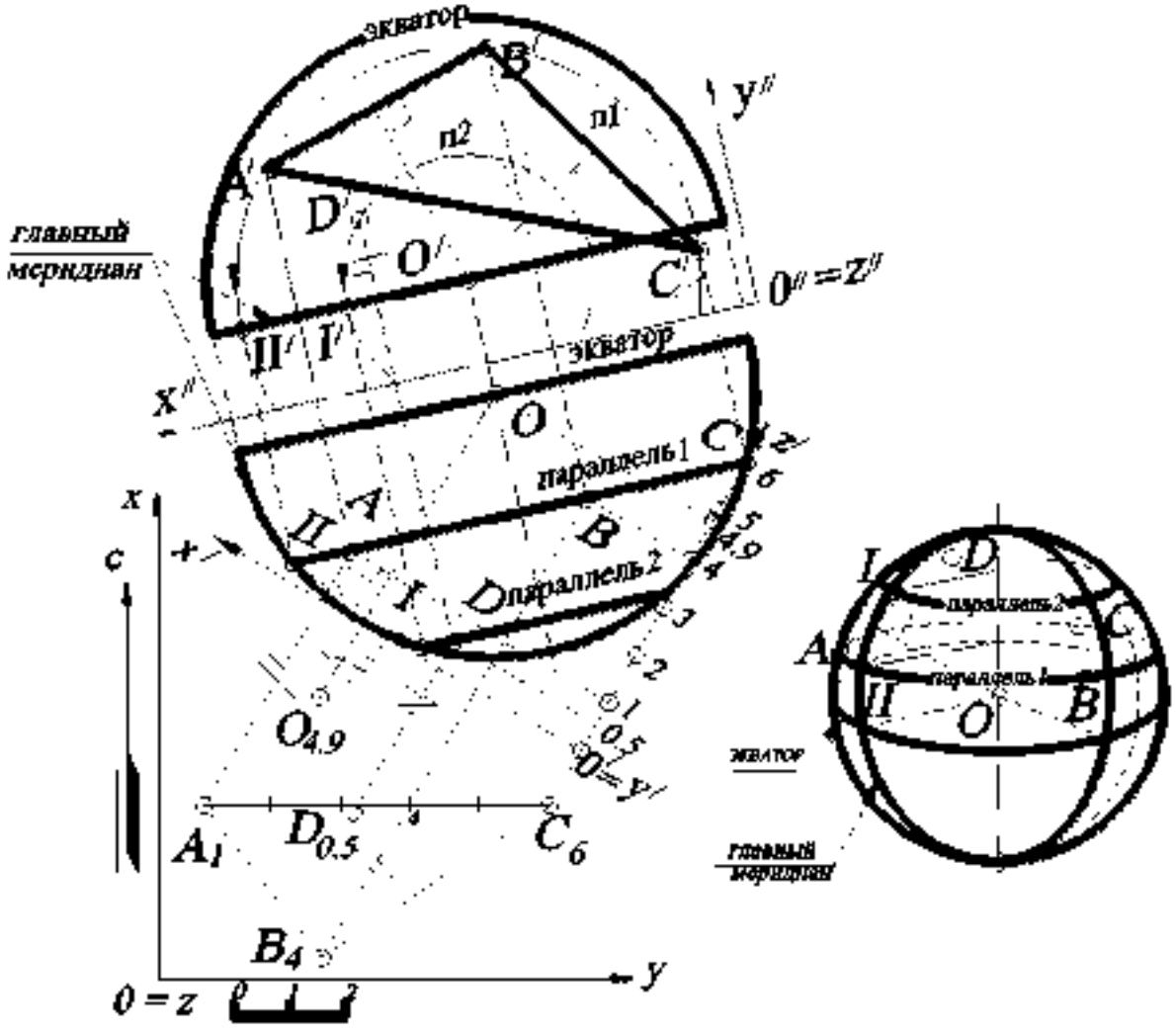


Рис. 107.

Известно, что три точки однозначно задают окружность (см. задачу 7.2), которая будет являться параллелью (горизонтальным сечением) искомой сферы. В

данном случае три точки, например A_1, B_4 и C_6, задают сечение $A_1B_4C_6$ сферы, которое не параллельно основной плоскости проекций H, так как точки A_1, B_4 и C_6 принадлежат плоскости общего положения. Для того чтобы точки A_1, B_4 и C_6 занимали горизонтальное положение, используют метод замены плоскостей проекций. На плане определяют горизонтали плоскости $A_1B_4C_6$, в которой находится ***параллель 1***, и двойной заменой плоскостей проекций определяют центр этой параллели (см. задачу 7.2.) – точка O' (то есть строят два серединных перпендикуляра к сторонам $A'B'$ и $B'C'$). Затем строят точку D', которая принадлежит ***параллели 2***. Точка O' является проекцией центра искомой сферы, а ось сферы на этой проекции является проецирующей прямой. Поэтому строят проекцию очерка сферы на профиле (на рис. 107 показана только его часть). Проекция очерка – «главного меридиана» - сферы на профиле будет проходить через точки I и II, которые определяются из принадлежности к параллелям сферы и линиям проекционной связи. В плоскости проекций $O''x''y''z''$ точки I'' и II'' принадлежат «главному меридиану», плоскость которого параллельна плоскости профиля.

На профиле строят проекцию оси сферы, которая будет проходить через точку O перпендикулярно параллелям. Затем, соединяя точки I и II , строят серединный перпендикуляр к этому отрезку, пересечение которого с осью даёт искомую точку O с числовой отметкой ***4.9***. Точку O проецируют на план.

7.6. *Дано:* сфера и прямой круговой конус. Построить точки $A_?$ и $B_?$, принадлежащие соответственно данным поверхностям сферы и конуса, если расстояние между ними минимально.

Решение (рис. 108). Задача сводится к нахождению кратчайшего расстояния между точкой и поверхностью (см. задачу 4.8). Проекцией кратчайшего расстояния будет являться прямая t, принадлежащая плоскости ω , задаваемой осью конуса и центром сферы. Для нахождения точек $A_?$ и $B_?$ – точек пересечения прямой t с поверхностями конуса и сферы, строится профиль, плоскость которого параллельна этой плоскости ω . На профиле строят прямую t, которая проходит

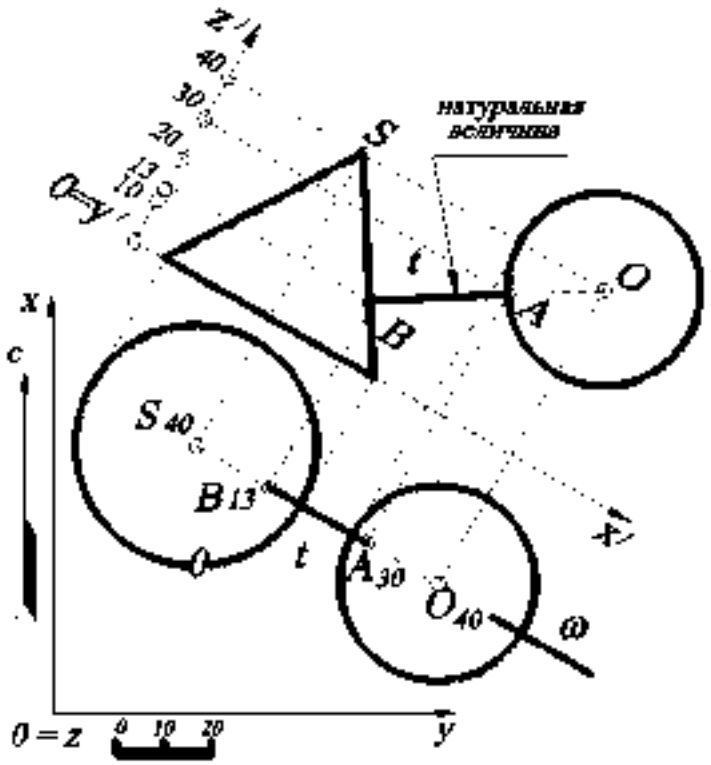


Рис. 108.

через центр сферы – точку O и перпендикулярна образующей конуса. Точки пересечения прямой t с очерками заданных поверхностей дадут искомые точки A_{17} и B_{16}, которые затем в проекционной связи находят на плане.

7.7. Дано: три пересекающиеся прямые S_5A_5, S_5B_2 и S_5C_0. Построить прямую m, равнонаклоненную к заданным прямым и проходящую через точку S.

Решение (рис. 109). Задача сводится к построению оси прямого кругового конуса, так как три пересекающиеся прямые задают прямой круговой конус, а прямая, равнонаклоненная к этим прямым, – ось конуса.

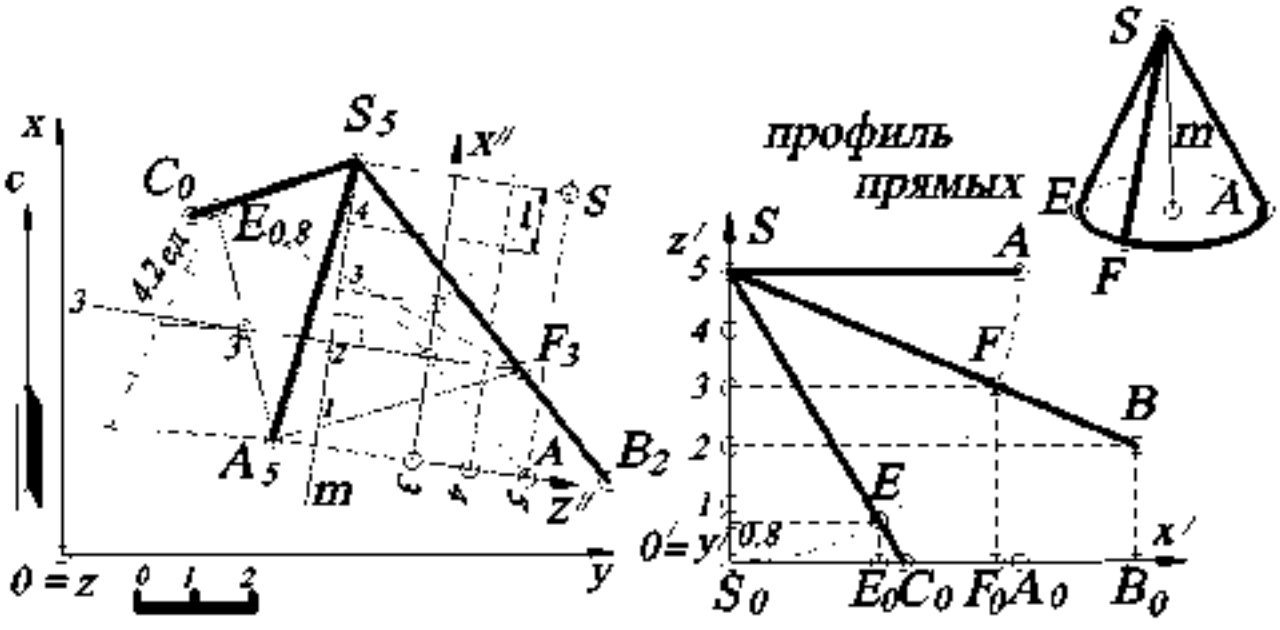


Рис. 109

Известно, что ось прямого кругового конуса перпендикулярна плоскости основания, а образующие такого конуса задаются отрезками прямых равной длины. Для нахождения натуральных величин и их заложений строят профиль (можно воспользоваться и другим способом, например способом прямоугольного треугольника). На профиле отмеряют отрезки равной длины – ***SA***, ***SF*** и ***SE*** и определяют заложения (проекции) этих прямых одинаковой длины, равной $SA=S_0A_0=S_0F_0=S_0E_0$, которые отмечают на плане соответственно на прямых S_5A_5, S_5B_2 и S_5C_0. Точки A_5, $E_{0.8}$ и F_3 определяют плоскость основания конуса. Затем на плане находят горизонталь плоскости $A_5E_1F_3$ (градуированием). Из точки $E_{0.8}$ проводят произвольную прямую (шкалу высотных отметок) длиной ***4,2ед.*** (на рис. 109 эта длина соответствует масштабу чертежа), а затем по подобию треугольников находят на отрезке $A_5E_{0.8}$ числовую отметку ***3***, которую соединяют с точкой F_3, получая горизонталь h_3. Из точки S_5 строят прямую ***m***, перпендикулярную к плоскости $A_5F_3E_{0.8}$ (на основании теоремы о частном проецировании прямого угла). Для нахождения интервала ***l*** оси конуса строят профиль, задаваемый осями $x''y''$ (см. задачи 2.11, 2.12).

Если в условии задачи необходимо определить плоскость, равнонаклонённую к трём пересекающимся прямым, то эта задача решается аналогично, то есть точки A_5, E_1 и F_3 задают искомую плоскость.

7.8. *Дано:* три параллельные прямые A_1B_4, C_3D_6 и E_0F_3. Построить прямую ***m***, равноудалённую от заданных прямых.

Решение (рис. 110). Решение задачи сводится к построению оси цилиндра, так как три параллельные прямые задают круговой цилиндр, а прямая, равноудалённая от этих прямых, – ось цилиндра. С помощью преобразования чертежа (двойной замены плоскостей проекций) переводят прямые A_1B_4, C_3D_6 и E_0F_3 из общего положения в частное – проецирующее (прямые изображаются в виде точек). В этой проекции находят равноудалённую точку (с помощью построения точки пересечения серединных перпендикуляров) – проекцию прямой ***m***, которая

будет задавать проекцию оси цилиндра. Затем последовательно прямую *m* находят на плане. В этом случае прямая задаётся произвольной точкой и направлением, так как образующие цилиндра параллельны его оси.

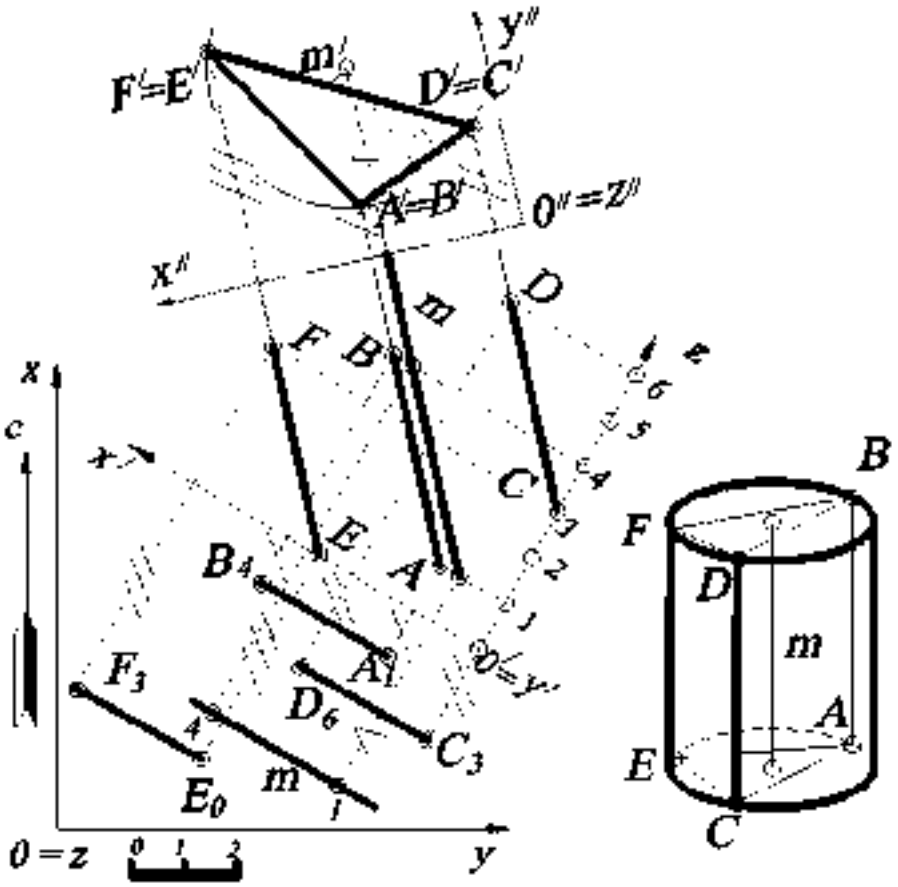


Рис. 110.

7.9. Дано: точка A_{20} и прямой круговой конус с вершиной S_{40}, стоящий на основной плоскости проекций *H*. Провести через точку A_{20} плоскость, отстоящую на *10* (в масштабе чертежа) от поверхности конуса.

Решение (рис. 111). В данном случае удобнее всего воспользоваться эквидистантной поверхностью (от лат. aequus- «равный» + distntia- «расстояние»), то есть поверхностью, все точки которой отстоят от заданной поверхности на заданное расстояние. Задача сводится к построению касательной плоскости к эквидистантной поверхности, отстоящей от заданного конуса на расстояние *10*. Строят эквидистантную поверхность, то есть конус, для чего строят профиль,

параллельный проекции прямой $S_{40}A_{20}$ (см. задачу 4.9). На профиле находят точку L – вершину эквидистантного конуса, проекция которого показана штриховыми линиями, и определяют точку B.

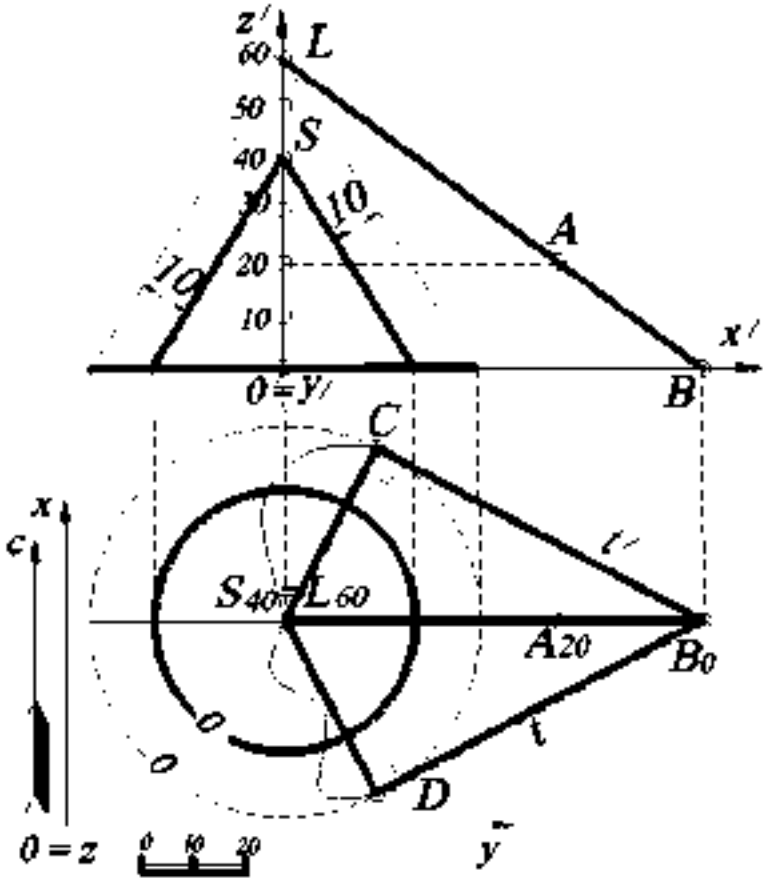


Рис. 111

На плане из точки B_0 строят касательные к основанию эквидистантного конуса. Задача имеет два решения: пересекающиеся прямые t и $L_{60}B_0$ задают одну касательную плоскость, а прямые t' и $L_{60}B_0$ – другую.

7.10. Дано: прямая A_7B_0 и сфера с центром O_1 и радиусом R. Построить сферу радиуса $r=1$ (по масштабу чертежа), касающуюся данной сферы, если центр искомой сферы принадлежит прямой A_7B_0.

Решение (рис. 112). В данном случае необходимо определить точку на прямой A_7B_0, удалённую от заданной сферы на расстояние $r=1$ – центр касательной

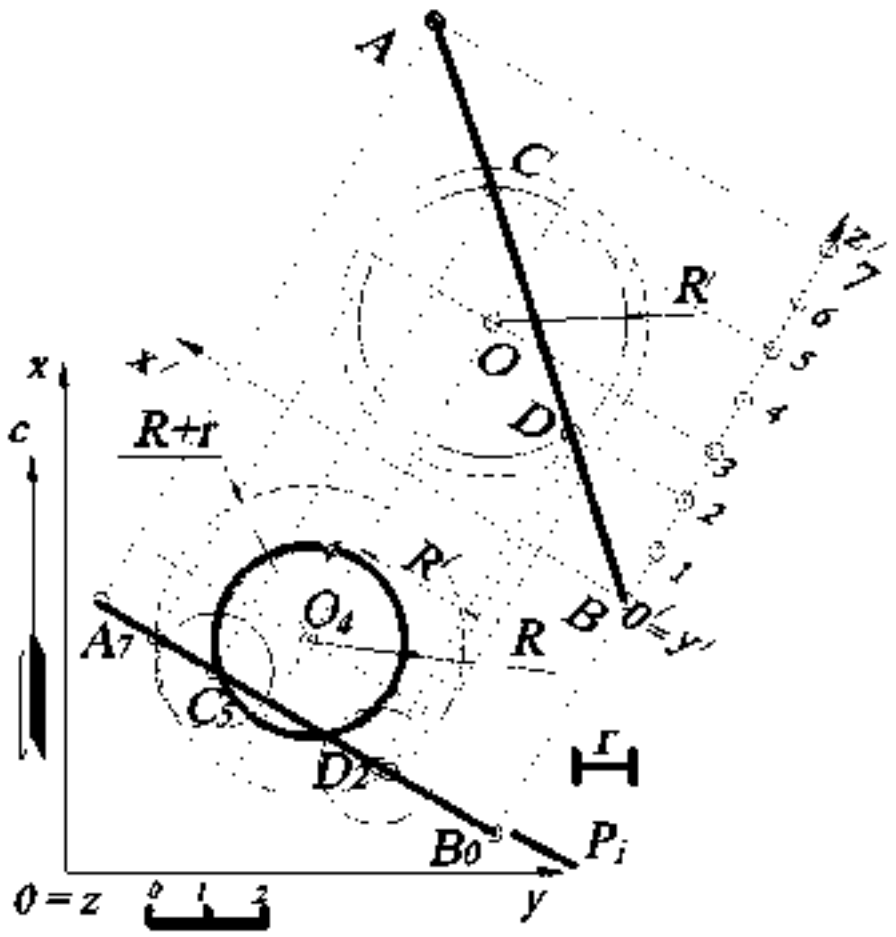


Рис. 112.

сферы. Таких точек будет две – с двух сторон сферы. В этом случае используется эквидистантная поверхность (см. задачу 7.9), то есть строят сферу радиусом $R+r$ (на чертеже показана штриховыми линиями). Тогда задача сводится к нахождению точек пересечения прямой A_7B_0 с эквидистантной сферой (см. задачу 4.5). Для этого строится профиль, плоскость которого параллельна вспомогательной плоскости P_i, проведённой через прямую A_7B_0. На профиле находят пересечение эквидистантной сферы с проекцией прямой AB как пересечение параллели сферы R' и прямой AB (точки C и D – центры искомых касательных сфер). Проецируют точки C и D на план и строят две сферы из этих центров радиусом r.

7.11. Построить плоскость $\Delta\overline{A}_7\overline{B}_7\overline{C}_7$, симметричную заданной плоскости $\Delta A_0B_0C_0$ относительно плоскости общего положения $\theta(P_0K_{60}L_0)$. Определить двугранный угол между плоскостью $\Delta A_0B_0C_0$ и плоскостью $\Delta\overline{A}_7\overline{B}_7\overline{C}_7$.

Решение. Декартову систему координат выбирают так, чтобы оси x и y совпадали с осями x и y в ортогональных проекциях (рис. 113), так как эта задача может аналогично решаться на эпюре Монжа (для удобства считывания изображений).

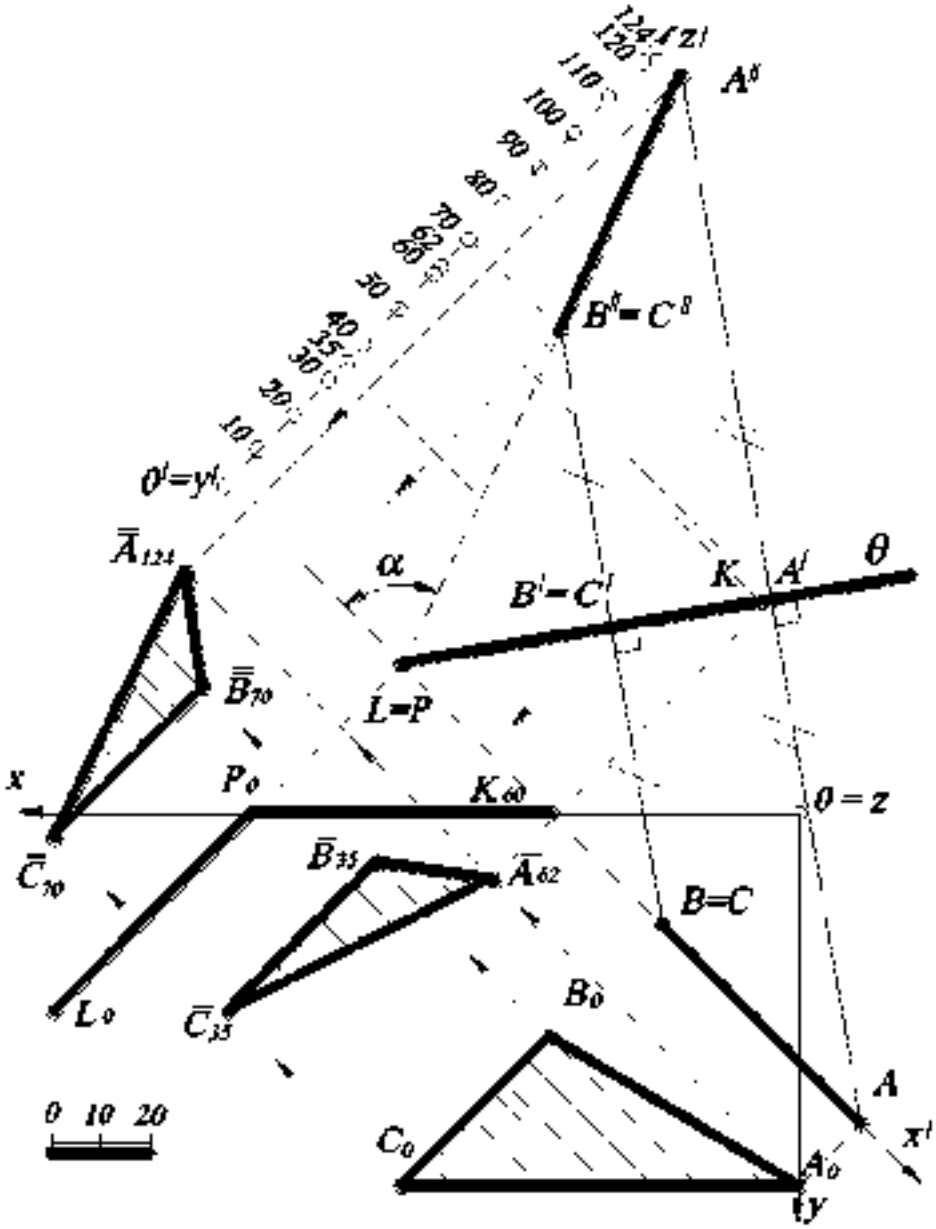


Рис. 113.

Для построения плоскости $\Delta \overline{\overline{A_?}}\,\overline{\overline{B_?}}\,\overline{\overline{C_?}}$, симметричной заданному треугольнику $\Delta A_0B_0C_0$ относительно плоскости $\theta\,(P_0K_{60}L_0)$, строят профиль так, чтобы плоскость симметрии проецировалась в виде прямой линии. Поэтому новую ось $x^{/}$ выбирают перпендикулярно к горизонталям плоскости $\theta\,(P_0K_{60}L_0)$. Тогда прямая P_0L_0, будет проецироваться на профиле в точку, так как высотная отметка точки L и P равна нулю. Плоскость $\Delta\, A_0B_0C_0$ будет проецироваться на профиле в виде отрезка прямой, так как этот треугольник лежит в горизонтальной плоскости проекций.

На профиле строят плоскость $A^{//}B^{//}C^{//}$, симметричную ABC относительно $\theta\,(LPK)$, а также плоскость $A^{/}B^{/}C^{/}$, принадлежащую $\theta\,(LPK)$.

Построение плоскости $A^{/}B^{/}C^{/}$ показано на рис. 111 стрелками, высотные отметки определяются на профиле. Аналогично строится треугольник $A^{//}B^{//}C^{//}$. В нашем случае треугольники ABC и $A^{//}B^{//}C^{//}$ на профиле являются проецирующими. Следовательно, угол между плоскостями равен α (угол между плоскостями считается острым).

В случае если $\Delta\, A_{60}B_{40}C_{10}$ занимает общее положение, то искомая плоскость $\Delta \overline{\overline{A_?}}\,\overline{\overline{B_?}}\,\overline{\overline{C_?}}$ будет строиться аналогичным образом (рис. 114). Однако на профиле плоскость ABC не будет проецирующей, а также будет занимать общее положение.

Таким образом, новую ось $x^{/}$ профиля выбирают перпендикулярно горизонталям плоскости $\theta\left(P_0K_{70}L_0\right)$ и строят заданную плоскость $A_{60}B_{40}C_{10}$ на профиле. Последовательность построений на рис. 114 показана стрелками.

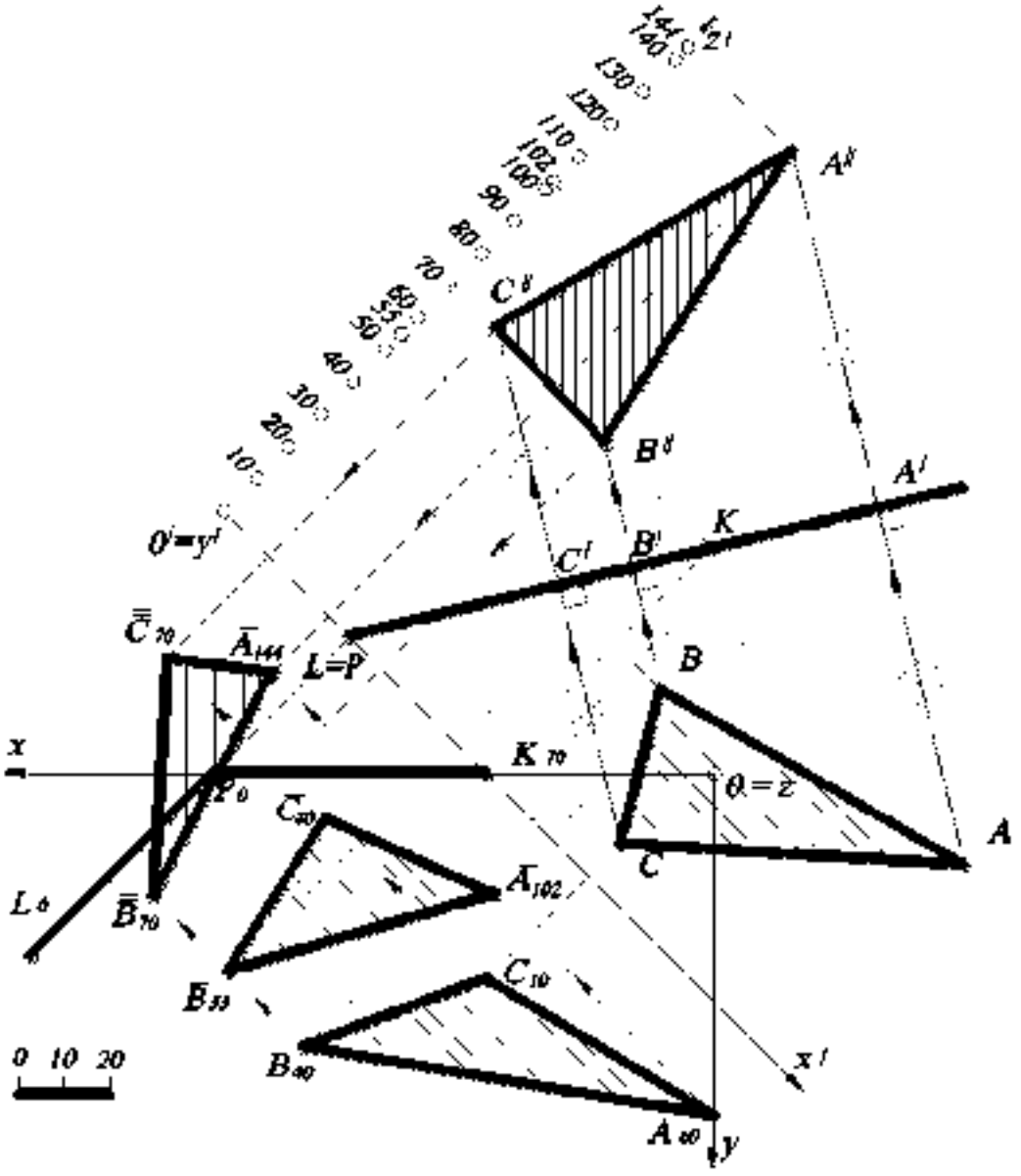


Рис 114

Для определения угла между плоскостями $A_{60}B_{40}C_{10}$ и $\overline{A}_{144}\overline{B}_{70}\overline{C}_{70}$ следует скопировать исходные данные треугольников $A_{60}B_{40}C_{10}$ и $A_{144}B_{68}C_{70}$, а также точку B_{55} на свободное поле чертежа (см. задачу 2.26). Затем из точки B_{55} последовательно опустить перпендикуляры на плоскости $A_{60}B_{40}C_{10}$ и $A_{144}B_{68}C_{70}$ (рис.115).

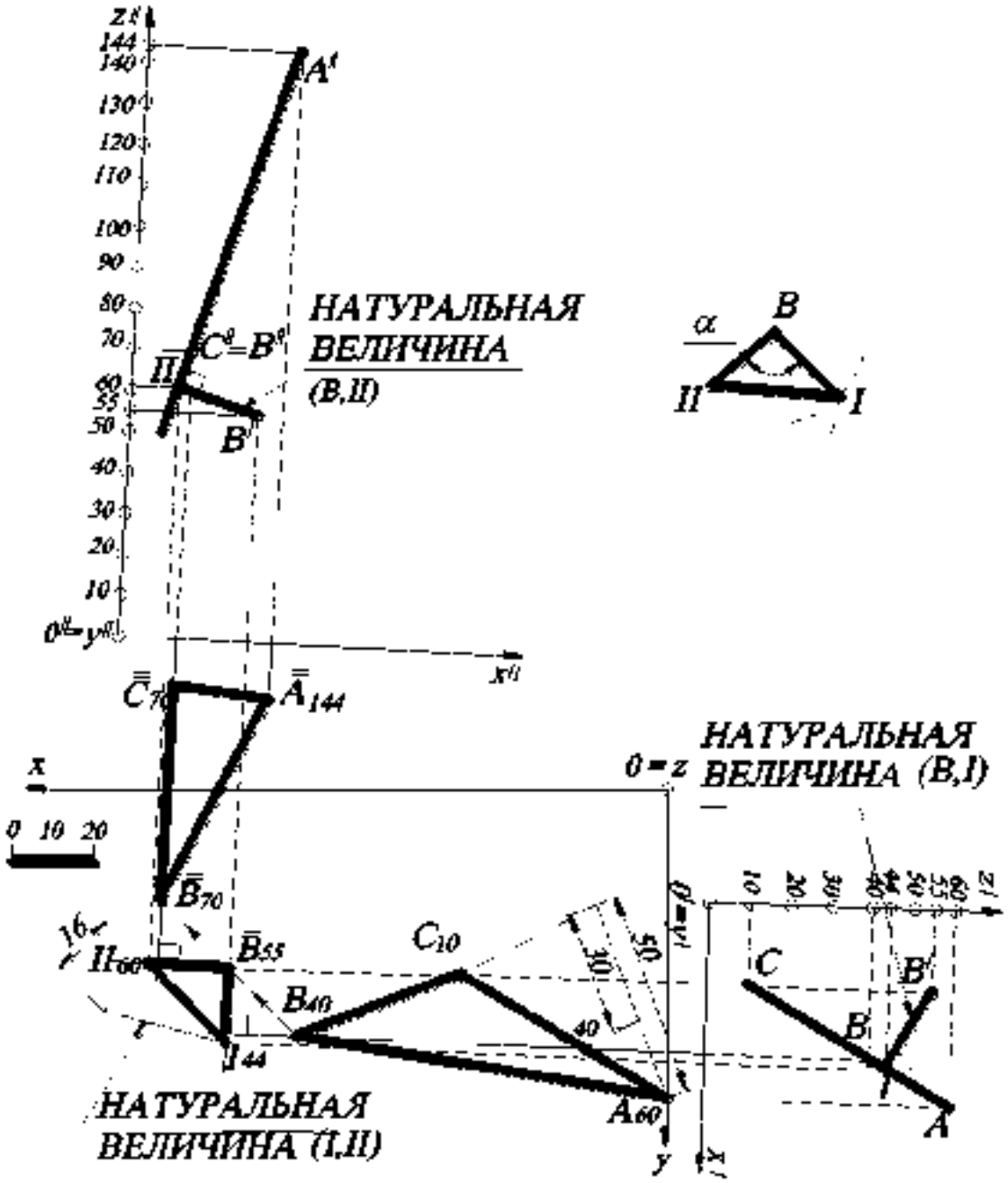


Рис 115.

Для определения расстояния от точки B_{55} до треугольника $A_{60}B_{40}C_{10}$ строят новый профиль $O'x'y'z'$, у которого ось x' будет направлена под прямым углом к горизонталям плоскости $A_{60}B_{40}C_{10}$. В этом случае треугольник $A_{60}B_{40}C_{10}$ будет проецироваться на этот профиль в виде прямой линии, что и требовалось получить. Строят на этом профиле проекцию точки B_{55}, которая находится на линии

проекционной связи, перпендикулярной оси x', и на расстоянии от этой оси, равном ***55*** (координата z). Из полученной проекции точки B' (на профиле) строят перпендикуляр на проецирующую плоскость ***ABC*** и получают отрезок ***(B,I)***, который проецируется в натуральную величину. На плане точка I_{44} будет находиться на пересечении прямой, параллельной оси x' (перпендикуляра к горизонтали плоскости $A_{60}B_{40}C_{10}$) и линии проекционной связи.

Аналогичным образом находят расстояние от точки B_{55} до плоскости $A_{144}B_{70}C_{70}$ ($B_{70}C_{70}$ – горизонталь плоскости) и строят проекцию этого расстояния на плане. Затем методом прямоугольного треугольника находят натуральную величину отрезка ***(I, II)***. На свободном поле чертежа методом засечек строят натуральную величину Δ ***B I II*** , а угол при вершине ***B*** будет определять искомый угол α.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

7.1. Построить прямую $F_{10}E_{80}$, равноудаленную от сторон треугольника ***ABC***. Проекции точек ***A***, ***B*** и ***C*** заданы следующими координатами: ***A(80,50,20)***, ***B(60,110,70)***, ***C(40,60,10)***.

7.2. Построить прямую $C_?D_?$ длиной ***40 мм***, параллельную прямой $A_{10}B_{50}$, если расстояние между ними ***a=30***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(40, 20, 10)***, ***B(15, 65, 50)***, ***C(50, 40, ?)***, ***D(35, ?, ?)***.

7.3. Построить проекцию прямой, пересекающую прямую $A_{60}B_0$, параллельную $C_{10}D_{50}$ и отстоящую от последней на расстояние ***r=20***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(35, 15, 60)***, ***B(45, 60, 0)***, ***C(30, 40, 10)***, ***D(10, 80, 50)***.

7.4. Построить плоскость, проходящую через точку ***A(40, 75, 50)*** и составляющую угол 45^0 с основной плоскостью проекций ***xOy*** и угол 30^0 с вертикальной плоскостью, проходящей через ось ***Oy***.

7.5. Построить плоскость, проходящую через точку ***A(25, 85, 10)*** и касающуюся одновременно двух сфер ω и ω'. Сфера ω задана центром ***O(20, 20, 25)*** и радиусом ***R=15***, сфера ω' задана центром ***O′(55, 70, 25)*** и радиусом ***R′=20***. Указать возможное количество решений.

7.6. В плоскости ***ABC*** построить точку, удалённую от заданных точек F_{50} и E_{40} на расстояние R_1***=40 мм*** и R_2***=30 мм***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(50, 20, 80)***, ***B(15, 120, 0)***, ***C(85, 85, 40)***, ***F(60, 40, 50)***, ***E(50, 80, 40)***. Указать возможное количество решений.

7.7. Определить направление луча (азимут падения и интервал), выходящего из точки ***A(50, 50, 60)*** и проходящего через точку ***B(10, 95, 30)*** после отражения от плоскости ω. Плоскость ω задана тремя точками ***C(75, 25, 50)***, ***D(30, 45, 30)***, ***E(50, 100, 0)***.

7.8. Даны две пересекающиеся прямые ***AB*** и ***BC***. Через прямую ***BC*** построить плоскость, составляющую с прямой ***AB*** угол 30^0. Проекции точек прямой заданы следующими координатами: ***A(10, 35, 50)***, ***B(30, 85, 20)***, ***C(20, 20, 10)***.

7.9. Найти на прямой $K_{30}E_{10}$ точку, равноудалённую от сторон линейного угла $A\hat{B}C$. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(30, 5, 50)***, ***B(70, 60, 30)***, ***C(10, 110, 0)***, ***K(60, 35, 30)***, ***E(10, 75, 10)***.

7.10. Найти точку $S_?$, равноудалённую от сторон треугольника $A_{20}B_{50}C_{70}$ на расстояние ***a=50 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(35, 15, 20)***, ***B(15, 60, 50)***, ***C(50, 75, 70)***. Указать возможное количество решений.

7.11. Через точку K_{30} провести плоскость, равнонаклонённую к прямым ***SA***, ***SB***, ***SC***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***K(100, 40, 30)***, ***S(55, 65, 20)***, ***A(40, 25, 20)***, ***B(10, 65, 50)***, ***C(55, 65, 20)***.

7.12. Через точку S_{20} провести прямую, равнонаклонённую к прямым ***SA***, ***SB***, ***SC***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***S(55, 65, 20)***, ***A(40, 25, 20)***, ***B(10, 65, 50)***, ***C(40, 100, 60)***.

7.13. Построить прямую, проходящую через точку S_{20} и равнонаклонённую к прямым $A_{30}B_{80}$, $C_{50}D_{80}$, $F_{20}E_{20}$. Проекции точек заданы следующими коорди-

натами: ***S(55, 65, 20)***, ***A(90, 65, 30)***, ***B(80, 90, 80)***, ***C(100, 45, 50)***, ***D(55, 45, 80)***, ***F(70, 0, 20)***, ***E(85, 40, 20)***.

7.14. Через заданные точки A_{40} и B_{25} построить прямые, равнонаклонённые к прямой $C_{50}D_{20}$ и пересекающие последнюю в одной точке $S_?$. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(20, 90, 40)***, ***B(30, 5, 25)***, ***C(40, 15, 50)***, ***D(10, 70, 20)***.

7.15. Через точку A_{50} построить прямые, пересекающие прямую $C_{20}D_{60}$ и отстоящие от точки B_{50} на расстояние ***r=40 мм***. Проекции точек заданы координатами: ***A(5, 130, 50)***, ***B(55, 80, 50)***, ***C(15, 65, 20)***, ***D(45, 135, 60)***.

7.16. Построить сферу, касающуюся трёх параллельных прямых ***AB***, ***CD***, ***FE*** и горизонтальной плоскости проекций ***xOy***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(60, 10, 40)***, ***B(45, 55, 70)***, ***C(25, 10, 20)***, ***F(30, 50, 20)***.

7.17. Найти точку K_{40}, равноудалённую от трёх параллельных прямых $A_{40}B_{70}$, $C_{20}D_?$, $F_{20}E_{50}$. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(60, 10, 40)***, ***B(45, 55, 70)***, ***C(25, 10, 20)***, ***F(30, 50, 20)***.

7.18. На биссектрисе угла, образованного отрезками прямых $A_{50}B_{30}$ и $A_{50}C_0$, найти точку, находящуюся от данной точки K_{70} на расстоянии ***25 мм***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(20, 10, 50)***, ***B(55, 35, 30)***, ***C(15, 60,0)***, ***K(45, 100, 70)***. Указать возможное количество решений.

7.19. На поверхности данной сферы ω найти точки, равноудалённые от сторон треугольника $A_{50}B_0C_{30}$. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(80, 10, 50)***, ***B(75, 45, 0)***, ***C(60, 20, 30)***. Сфера ω задана центром ***O(50, 105, 90)*** и радиусом ***R=35 мм***.

7.20. Построить проекции квадрата $A_{20}B_?C_?D_?$, сторона которого принадлежит прямой $A_{20}K_{50}$, а вершина $B_?$ лежит в плоскости треугольника $K_0L_{40}M_{30}$. Сторона квадрата ***a=35 мм***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(55, 45, 20)***, ***K(60, 85, 0)***, ***L(35, 120, 40)***, ***M(25, 85, 30)***. Указать возможное количество решений.

7.21. Построить проекции цилиндра вращения, ось которого принадлежит отрезку прямой $O_{20}K_{50}$. Цилиндрическая поверхность касается прямой $A_{40}B_{10}$. Точка O_{20} – центр нижнего основания цилиндра, а высота его – ***60 мм***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***O(40, 20, 20)***, ***K(25, 70, 50)***, ***A(55, 55, 40)***, ***B(15, 90, 10)***.

7.22. Построить плоскость, касательную к двум сферам ω, ω' и параллельную заданной прямой $A_{20}B_{70}$. Проекция прямой задана координатами точек ***A(55, 60, 20)***, ***B(35, 110, 70)***. Сфера ω задана центром ***O(45, 25, 20)*** и радиусом ***R=20 мм***; сфера ω' задана центром ***O'(95, 75, 30)*** и радиусом ***R'=25 мм***.

7.23. Построить плоскость, касательную к наклонному цилиндру и сфере. Цилиндр задан осью $O_0O'_{60}$ и основанием – окружностью радиуса ***R=20 мм***. Сфера задана центром ***S(40, 110, 30)*** и радиусом ***r=15 мм***. Проекции точек имеют следующие координаты: ***O(75, 75, 0)***, ***O'(45, 20, 60)***.

7.24. В плоскости $K_{60}L_{80}M_{40}$ найти точки, удалённые от двух параллельных прямых $A_{20}B_{50}$ и $C_{40}D_{70}$ на расстояние ***R=20 мм*** от $A_{20}B_{50}$ и на расстоянии ***r=30 мм*** от $C_{40}D_{70}$. Проекции точек заданы координатами: ***A(70, 20, 20)***, ***B(50, 70, 50)***, ***C(45, 10, 40)***, ***D(25, ?, 70)***; ***K(55, 105, 60)***, ***L(5, 70, 80)***, ***M(5, 110, 40)***.

7.25. Построить точки пересечения конуса вращения с окружностью ω. Конус вращения стоит на горизонтальной плоскости проекций и задан вершиной ***S(30, 50, 55)*** и круговым основанием с центром ***C(30, 50, 0)*** и радиусом ***R=30 мм***. Окружность ω задана центром ***O(15, 50, 30)*** и радиусом ***r=20***, причём плоскость окружности ω параллельна вертикальной плоскости, проходящей через ось ***Oy***.

7.26. Четыре шара радиуса ***R=20 мм*** лежат на дне куба со стороной ***4R=80 мм***. Построить шар, касающийся четырёх данных шаров и верхнего основания куба.

7.27. Через данную точку M_{110} провести плоскость, пересекающую боковую поверхность пирамиды ***SABCD*** по параллелограмму. Проекции точек заданы координатами: ***S(135, 120, 150) A(55, 15, 20), B(95, 180, 70), C(20, 160, 30), D(20, 25, 0) M(160, 55, 110)***.

7.28. Построить плоскость, касающуюся трёх сфер ω, ω' и ω''. Сфера ω задана центром ***A(40, 35, 25)*** и радиусом ***R=25 мм***, сфера ω' - центром ***B(40, 35, 65)*** и радиусом R'***=10 мм***, сфера ω'' - центром ***C(40, 85, 15)*** и радиусом R''***=15 мм***.

7.29. Построить прямую $F_?E_?$, пересекающую две скрещивающиеся прямые $A_{20}B_{70}$ и $C_{30}D_{60}$ и перпендикулярную плоскости $K_{30}L_{50}M_{50}$. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(10, 10, 20), B(65, 45, 70), C(80, 60, 30), D(30, 75, 60), K(35, 90, 30), L(35, 150, 80), M(5, 115, 50)***.

7.30. В произвольный тетраэдр вписать сферу, построив предварительно её центр.

7.31. Построить проекцию куба $ABCDA'B'C'D'$, ребро AA' которого принадлежит отрезку прямой $A_{20}K_{50}$, а вершина $B_?$ лежит в плоскости треугольника $K_0L_{40}M_{30}$. Ребро куба ***a=35 мм***. Проекции точек заданы следующими координатами: ***A(55, 45, 20), K(60, 85, 0), L(35, 120, 40), M(25, 85, 30)***.

7.32. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, основание ***ABCD*** которого принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Ребро куба ***a=80***. На ребре ***AD*** как на диаметре построена сфера. Построить проекцию второй сферы, лежащей внутри куба и касающейся первой сферы и граней трёхгранного угла с вершиной A'.

7.33. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, основание ***ABCD*** которого принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Ребро куба ***a=80***. Сфера ***R=20 мм***, лежащая внутри куба, касается граней трёхгранного угла с вершиной ***A***. Построить проекцию второй сферы, лежащей внутри куба и касающейся первой сферы и граней трёхгранного угла с вершиной C'.

7.34. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, основание $ABCD$ которого принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Ребро куба $a=80$. Сфера $R=30$ *мм*, лежащая внутри куба, касается граней трёхгранного угла с вершиной A. Построить проекцию второй сферы, лежащей внутри куба и касающейся первой сферы и граней трёхгранного угла с вершиной C.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Значительное место в вузовском курсе начертательной геометрии занимает решение задач. Пожалуй, не менее половины всего учебного времени, а в ряде случаев и большей половины всего учебного времени тратится на решение задач.

Между тем большинство студентов так и не научаются в должной степени решению задач и, встретившись с задачей совсем не трудной, но незнакомого или малознакомого вида, не знают, как к ней подступиться, с чего начать решение, и после нескольких попыток отказываются от этого, как им кажется, безнадежного дела. Однако некоторые студенты сумели найти общий подход к решению любых задач.

Многочисленные показывают, что традиционная методика решения задач не способствует формированию у студентов общих умений и способностей к решению задач.

Какова эта методика? Изучив какой-либо теоретический раздел программы, преподаватель на лекции демонстрирует решение одной или нескольких задач на применение изученной теории, затем подобные задачи студенты должны прорешать дома по сборнику задач. После этого на практических занятиях решаются задачи комплексного плана, с использованием информации, полученной при решении предыдущих типовых задач.

Казалось бы, в методике начертательной геометрии должны быть разработаны методы и приемы обучения задач. Однако, как показывает процесс обучения, считается, что «спасение утопающего – дело рук самого утопающего». Нет общей концепции подачи информации, при которой студент смог бы «выплыть» из сложившейся ситуации. Необходимо выработать общую методику решения задач, при которой студенты и выпускники технических вузов не содрогались, услышав слова «начертательная геометрия».

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Горная графическая документация. – М.: Изд. стандартов, 1983. – 200 с.

Горная энциклопедия / гл. ред. Е. А. Козловский. Т. 1– Т.5– М.: Сов. энциклопедия, 1989.

Ломоносов, Г. Г. Инженерная графика/ Г. Г. Ломоносов. - М.: Недра, 1984. – 287 с.

Нартова, Л. Г. Начертательная геометрия. Теория и практика [Текст]: учебник для вузов / Л. Г. Нартова, В. И. Якунин. - М.: Дрофа, 2008. - 302 с. : ил. - Библиогр.: с. 297.

Пеклич, В. А. Начертательная геометрия: учебник для вузов/ В. А. Пеклич. – М.: Изд-во АСВ, 1999. - 248 с.

Пеклич, В. А. Начертательная геометрия [Текст]: учебник / В. А. Пеклич. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2007. - 272 с. : ил. - Библиогр.: с. 265.

Русскевич, Н. Л. Начертательная геометрия/ Н. Л. Русскевич. – Киев: Вища школа, 1978. - 312 с.

Тарасов, Б. Ф. Методы изображения в транспортном строительстве/ Б. Ф. Тарасов. – Л.: Стройиздат, 1987. – 248 с.

Фролов, С А. Сборник задач по начертательной геометрии [Текст]: учебное пособие/ С. А. Фролов. - 3-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2008. - 192 с.: ил.

Фролов, С. А. Методы преобразования ортогональных проекций/ С. А. Фролов.- М.: Машгиз, 1963. –144 с.

Фролов, С. А. Начертательная геометрия [Текст]: учебник / С. А. Фролов. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2008. - 286 с.: цв.ил.

Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение [Текст]: учебник / А. А. Чекмарев. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Владос, 2005. - 471 с.: ил. - (Учебник для вузов). - Библиогр.: с. 465-466.

Четверухин, Н. Ф. Курс начертательной геометрии/ Н. Ф. Четверухин. – М.: Высшая школа, 1968. – 276 с.

Шангина, Е. И. Инженерная графика. Задачи и решения: учебное пособие/ Е. И. Шангина. – Екатеринбург: Изд. УГТУ, 2005. – 132 с.

Шангина, Е. И. Инженерная графика. Теория и приложения: учебное пособие/ Е. И. Шангина. – Екатеринбург: Изд. УГТУ. 2005. – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие *3*

1. Прямая. Способы задания прямой. Градуирование. Взаимное положение прямых *4*

Упражнения для самостоятельного решения *10*

2. Плоскость. Способы задания. Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей *14*

Упражнения для самостоятельного решения *42*

3. Многогранники *46*

Упражнения для самостоятельного решения *58*

4. Поверхности *61*

Упражнения для самостоятельного решения *78*

5. Топографические поверхности *81*

Упражнения для самостоятельного решения *94*

6. Развёртки *97*

Упражнения для самостоятельного решения *105*

7. Комплексные задачи *108*

Упражнения для самостоятельного решения *143*

Заключение *149*

Список рекомендуемой литературы *150*

Учебное издание

Шангина Елена Игоревна

Шангин Георгий Андреевич

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор издательства Л. В. Устьянцева

Компьютерная верстка и графика авторов

Подписано в печать 22.04.2015. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага писчая. Печать на ризографе. Печ. л. 9,5. Уч. изд. л. 8,5. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательство УГГУ

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.
Уральский гос. горный университет.
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники
издательства УГГУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ 5
СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ 5
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 13
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 18

ВВЕДЕНИЕ

Болтовые соединения широко применяются во всех отраслях промышленности и строительства, трудно представить себе машину или механизм без этого вида соединения.

При выполнении машиностроительных чертежей значительную часть времени конструктор затрачивает на вычерчивание изображения крепежных деталей и в частности болтов, гаек и т.д.

В этой связи необходимо отметить, что выполнение всех правил, установленных соответствующими стандартами, а также рекомендаций справочников, учебников, основанных на опыте конструкторов, значительно облегчают и упрощают этот трудоемкий процесс.

Настоящее методическое пособие предназначено для изучения и закрепления знаний, указанных правил и рекомендаций.

Работа содержит исходные данные индивидуальных заданий, описание основных крепежных деталей болтового соединения, методику определения размеров, необходимых для выполнения чертежа соединения деталей болтами различных конструкций, а также принципы формирования условных обозначений крепежных деталей.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Чертеж болтового соединения является частью задания «Условности машиностроительного черчения». Это задание выполняют студенты технологических и механических специальностей университета.

Работу выполняют в формате А 4 карандашом. Оформляется чертеж в соответствии с требованиями ЕСКД. Масштаб изображения следует выбирать в зависимости от размеров крепежных деталей.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Чертеж болтового соединения (рис. 2) содержит три изображения: полный фронтальный разрез, расположенный на месте главного вида, вид сверху и вид слева; на изображениях следует нанести обозначения резьбы, длину болта и размер под ключ. Кроме того, чертеж должен содержать условные обозначения крепежных изделий.

В качестве исходных параметров для выполнения чертежа дана толщина соединяемых деталей и вид крепежных изделий, определенный стандартами, а также размер резьбы болта. Эти данные приведены в таблице 1.

Общие сведения о крепежных деталях болтового соединения.

Соединение деталей болтом обычно состоит из трех стандартных крепежных изделий: болт, гайка и шайба. В некоторых случаях, обычно когда болтовое соединение работает в условиях повышенной вибрации, для предотвращения самопроизвольного отвинчивания гайки применяются шплинты (рис. 1). ***Шплинтом*** называется изделие, изготовленное из стальной проволоки полукруглого сечения, сложенной вдвое и предназначенное для фиксирования болта относительно гайки. Основными параметрами шплинта является его длина l и условный диаметр d_0. Условный диаметр шплинта равен диаметру отверстия болта под шплинт.

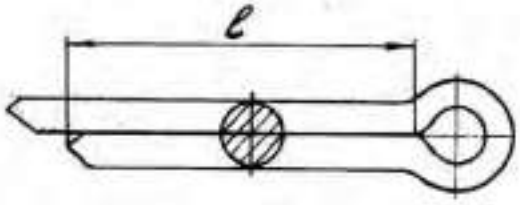



Рис. 1. Шплинт

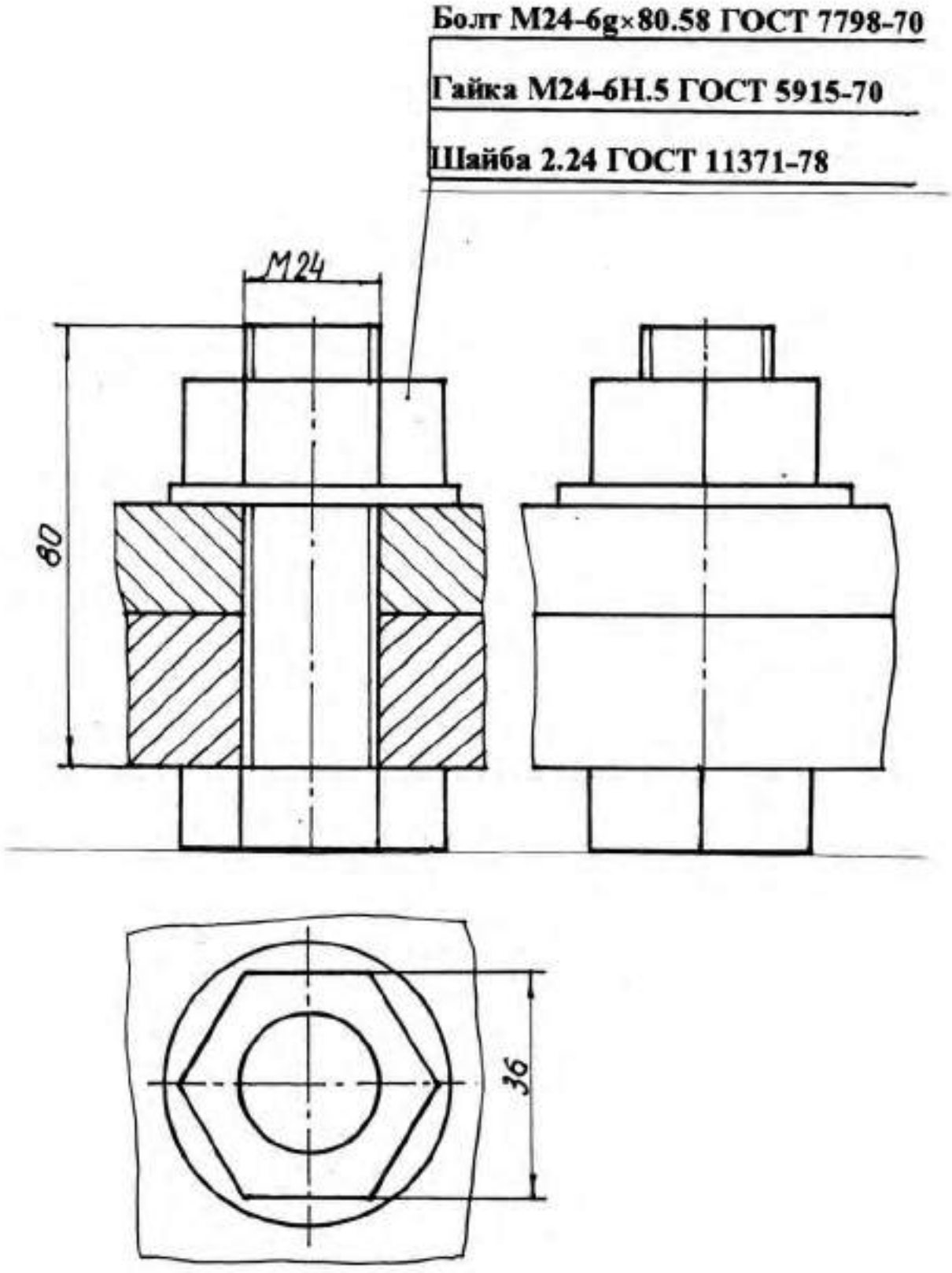


Рис. 2. Чертеж болтового соединения

Исходные данные

Таблица 1

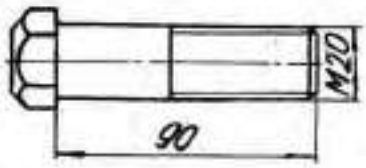
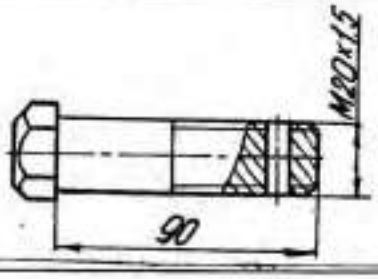
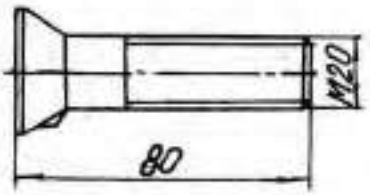
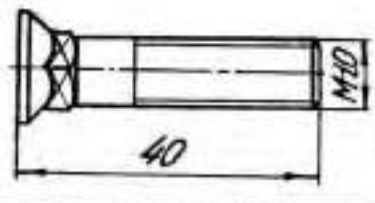
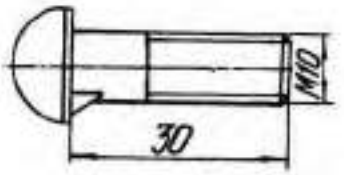
Номер варианта	БОЛТ					ГАЙКА		ШАЙБА
	Номинальный диаметр резьбы, мм	Шаг резьбы, мм	Исполнение	Толщина деталей	Номер ГОСТ	Исполнение	Номер ГОСТ	Номер ГОСТ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	20	2,5	1	40 40	7796-70	2	5915-70	11371-78
2	10	1,5	1	30 30	7783-81	1	5916-70	11371-78
3	10	1,25	4	10 20	7798-70	2	5918-73	6958-78
4	12	1,75	2	20 40	7785-81	2	5916-70	11371-78
5	12	1,25	1	15 20	7805-70	-	5927-70	10450-78
6	16	2,0	-	20 20	7786-81	1	5915-70	11371-78
7	24	2,0	2	30 40	7796-70	1	5918-73	11371-78
8	10	1,5	1	30 30	7783-81	1	3032-76	10450-78
9	12	1,75	3	20 30	7798-70	-	15523-70	6402-70
10	12	1,75	-	20 50	7786-81	2	3032-76	6958-78
11	16	2,0	2	30 30	7805-70	-	5918-73	11371-78
12	16	2,0	1	40 40	7785-81	1	3032-76	10450-78
13	30	3,5	3	50 40	7796-70	1	5916-70	6958-78
14	20	2,5	2	30 50	7783-81	2	3032-76	6958-78
15	16	1,5	2	20 20	7798-70	1	5918-73	10450-78
16	10	1,5	2	15 15	7785-81	1	3032-76	10450-78
17	20	1,5	3	40 10	7805-70	-	5927-70	11371-78
18	12	1,75	-	10 40	7786-81	2	3032-76	6958-78
19	40	3,0	4	50 50	7796-70	2	5918-73	6958-78
20	16	2,0	1	40 30	7783-81	1	3032-76	10450-78
21	12	1,75	1	20 10	7798-70	-	15523-70	6402-70
22	20	2,5	1	30 30	7785-81	2	3032-76	6958-78
23	24	3,0	1	50 40	7805-70	-	5927-70	10450-78

Окончание таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	10	1,5	-	30 50	7786-81	1	3032-76	10450-78
25	16	2,0	1	20 40	7796-70	2	5916-70	11371-78
26	12	1,75	2	20 30	7783-81	2	5915-70	11371-78
27	24	2,0	4	20 30	7798-70	-	15523-70	6402-70
28	16	2,0	1	20 40	7785-81	1	5916-70	11371-78
29	30	3,5	3	40 40	7798-70	-	15523-70	6958-78
30	20	2,5	-	20 40	7786-81	2	5916-70	11371-78
31	12	1,25	2	30 20	7796-70	1	5918-73	10450-78
32	16	2,0	1	15 25	7783-71	1	3032-76	10450-78
33	30	2,0	2	30 40	7805-70	2	5918-73	11371-78
34	6	1,0	1	10 10	7785-81	1	5915-70	6958-78
35	8	1,0	3	10 20	7805-70	-	5927-70	6402-70
36	8	1,25	-	15 20	7786-81	2	3032-76	10450-78
37	10	1,5	3	20 10	7796-70	1	5916-70	11371-78
38	10	1,5	2	20 10	7783-81	2	5915-70	6958-78
39	36	3,0	2	50 10	7798-70	1	5918-73	6958-78
40	12	1,75	2	20 25	7785-81	1	3032-76	10450-78
41	10	1,25	1	15 25	7805-70	-	5927-70	6402-70
42	16	2,0	-	20 15	7786-81	1	5915-70	6968-78
43	20	1,5	5	30 20	7796-70	2	5915-70	11371-78
44	16	2,0	1	10 30	7783-81	2	3032-76	10450-78
45	20	2,5	1	10 30	7798-70	-	15523-70	6402-70
46	6	1,0	1	10 8	7785-81	2	5915-70	6958-78
47	16	1,5	2	30 20	7805-70	2	5918-73	11371-78
48	8	1,25	-	10 12	7786-81	1	3032-76	10450-78
49	24	3,0	1	20 40	7796-70	2	5916-70	6958-78
50	10	1,5	2	10 25	7783-81	1	5915-70	11371-78

Таблица 2

Изображение и обозначение болтов

Изображение	Условные обозначение	Расшифровка обозначения
	Болт М20-6g×90.58 ГОСТ 7798-70	Болт исполнения 1, диаметром резьбы d=20 мм, длиной l=90мм, с крупным шагом резьбы, с полем допуска 6g, класса прочности 5.8, без покрытия.
	Болт 2М20×1,5-6g×90.58 ГОСТ 7798-70	Болт исполнения 2, диаметром резьбы d=20 мм, длиной l=90мм, с мелким шагом резьбы с полем допуска 6g, класса прочности 5.8, без покрытия.
	Болт С М10-6g×30.46.019 ГОСТ 7783-81	Болт с диаметром резьбы d=10 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6g, длиной l=30 мм, класса прочности 4.6, с покрытием 01 толщиной 9 мкм.
	Болт С М20-6g×80.56.019 ГОСТ 7785-81	Болт с диаметром резьбы d=20 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6g, длиной l=80 мм, класса прочности 5.6, с покрытием 01 толщиной 9 мкм.
	Болт С М10-6g×40.46.019 ГОСТ 7786-81	Болт с диаметром резьбы d=10 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6g, длиной l= 40 мм, класса прочности 4.6, с покрытием 01 толщиной 9 мкм.

Условное обозначение шплинта должно содержать условный диаметр, длину, условное обозначение материала и покрытия, толщину покрытия и наименование стандарта. Если шплинт изготовлен из низкоуглеродистой стали, то условное обозначение материала не указывается. При отсутствии покрытия шплинта его вид и толщина в обозначении не указываются.

Например, шплинт с условным диаметром 8 мм, длиной 32 мм из низкоуглеродистой стали без покрытия: *Шплинт 8×32 ГОСТ 379 - 70.*

Основными деталями болтового соединения являются болт и гайка. ***Болт*** представляет собой цилиндрический стержень с головкой на одном конце и резьбой на другом. На резьбовую часть болта навинчивается гайка.

Обычно в болтовом соединении применяются стандартные болты. В зависимости от условий работы и функционального назначения болты могут иметь различную форму стержня, форму и размер головки, параметры резьбы, характер исполнения и т. п. Все эти характеристики детали установлены соответствующим стандартом.

Условное обозначений болта, в общем случае, должно содержать следующие данные: название детали, класс точности, исполнение, условное обозначение резьбы, поле допуска, длину болта, класс прочности, характеристику материала, обозначение вида покрытия, толщину покрытия, условное обозначение стандарта. В условном обозначении болта не указывают исполнение 1, отсутствие покрытия, а также характеристику материала, если деталь выполнена из углеродистой нелигированной стали и соответствует техническим требованиям ГОСТ 1759.4 - 87. Кроме того, не указывают класс точности В, если стандартом на изделие предусмотрено два класса точности (А и В).

Примеры условного обозначения болтов различных конструкций приведены в таблице 2.

Гайка представляет собой деталь, имеющую отверстие с резьбой для навинчивания на болт или шпильку. Как правило, в соединениях применяются стандартные гайки. В некоторых случаях, вследствие специфических условий, могут быть применены гайки нестандартные.

В зависимости от условий эксплуатации соединения устанавливают гайки различных конструкций, например, для соединений работающих в условиях повышенной вибрации, обычно применяют про-

резные и корончатые гайки со шплинтами. В тех случаях, когда необходимо навинчивать гайку вручную, используют гайки–барашки.

Условное обозначение гайки, в общем случае, должно содержать следующие характеристики: название детали, класс точности, исполнение, условное обозначение резьбы, поле допуска, класс прочности, характеристику материала, обозначение вида покрытия, толщину покрытия, условное обозначение стандарта. В условном обозначении гайки не указывают исполнение 1, отсутствие покрытия, а также характеристику метериала, если деталь выполнена из углеродистой нелигированной стали и соответствует требованиям ГОСТ 17595-87. Не указывается в обозначении класс точности В, если стандартом на эту деталь установлено два класса точности (А и В). Примеры обозначения стандартных гаек различных конструкций приведены в таблице 3.

Шайбой называется деталь, которую устанавливают между гайкой или головкой болта и поверхностью одной из деталей. Она служит для предохранения материала детали от повреждения, а также для предотвращения самопроизвольного развинчивания крепежных деталей.

Условные обозначения шайбы включают следующую информацию: название детали, класс точности, если стандарт предусматривает два класса, исполнение, диаметр резьбы крепежной детали, толщину шайбы, условное обозначение марки (группы) материала, обозначение вида покрытия, толщину покрытия. Толщина шайбы указывается только в том случае, если стандартом на данный вид шайбы такой толщины не предусмотрено. Марка материала указывается только в том случае, если шайба изготовлена из материала не соответствующего техническим требованиям, установленным ГОСТ 18123 - 82. При отсутствии покрытия не указываются его условные обозначения и толщина. Примеры условных обозначений шайб приведены в таблице 4.

Таблица 3

Изображение и обозначение гаек

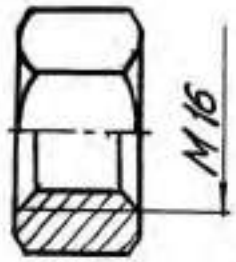
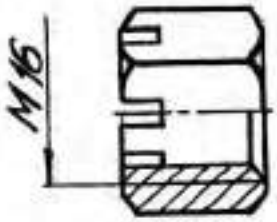
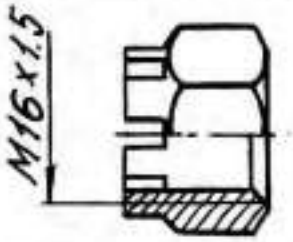
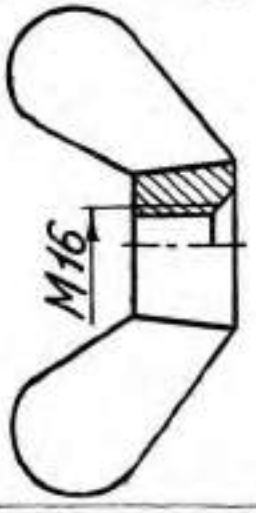
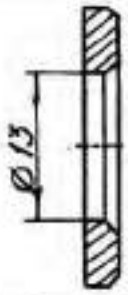
Изображение	Условные обозначения	Расшифровка обозначения
	Гайка М16-6Н.5 ГОСТ 5915-70	Гайка исполнения 1, с диаметром резьбы d=16 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6Н, класса прочности 5, без покрытия.
	Гайка М16-6Н.5 ГОСТ 5918-73	Гайка класса точности В, исполнения 1, с диаметром резьбы d=16 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6Н, класса точности 5, без покрытия.
	Гайка 2 М16×1,5-6Н.5.019 ГОСТ 5918-73	Гайка класса точности В, исполнения 2, с диаметром резьбы d=16 мм, с мелким шагом резьбы с полем допуска 6Н, класса точности 5, с покрытием 01 толщиной 9 мкм.
	Гайка М16-6Н.6 ГОСТ 3032-76	Гайка - барашек с диаметром резьбы d=16 мм, с крупным шагом резьбы с полем допуска 6Н, класса прочности 6, без покрытия.

Таблица 4

Изображения и обозначения шайб

Изображение	Условные обозначения	Расшифровка обозначения
	Шайба 2.12 ГОСТ 11371-78	Шайба круглая исполнения 2 для крепежной детали диаметром 12 мм из материала , соответствующего техническим условиям, без покрытия
	Шайба 10 65 Г ГОСТ 6402-70	Шайба пружинная исполнения 1 для крепежной детали диаметром 10 мм из стали 65 Г, без покрытия

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

На сборочных чертежах и чертежах общего вида применяются упрощенные и условные изображения крепежных деталей. Эти изображения установлены ГОСТ 2.315 - 68; их применение в значительной мере сокращают затраты труда конструктора. Крепежные детали, у которых диаметр стержня на чертеже менее 2 мм, изображают условно. В остальных случаях следует применять упрощенные изображения. Пример упрощенного изображения соединения деталей болтом с шестигранной головкой приведен на рис. 1.

При выполнении упрощенного изображения болтового соединения применяются следующие упрощения:

- фаски, проточки, галтели не показываются;
- резьба изображается выполненной по всей длине цилиндрической части болта;
- на виде сверху внутренний диаметр резьбы не показывается;
- зазоры между соединяемыми деталями и стержнем болта не показываются;

- изображения крепежных деталей выполняются по относительным размерам.

Если в соединении применен болт с шестигранной головкой, то размеры изображения деталей определяем по формулам, приведенным на рис.3. Приведенные формулы не установлены стандартом и рекомендованы на основе длительного опыта конструкторских и чертежных работ.

Основными параметрами, в зависимости от которых определяются относительные размеры изображения, являются размеры резьбы болта и толщина соединяемых деталей. Длину болта определяем по формуле, приведенной на рис. 3. Полученное значение необходимо сравнить со стандартной величиной длины болта. Как правило, они не совпадают, в этом случае выбираем ближайшее стандартное значение.

Относительные размеры конструктивных элементов болтов с различными формами головки приведены на рис. 4 и на рис. 5.

На чертеже необходимо проставить следующие размеры:

- условное обозначение резьбы болта;
- длину болта;
- размер под ключ гайки.

Длина болта и размер под ключ определяются по таблице соответствующего стандарта. Для определения размеров изображений болтов других конструкций пользуемся рис. 4 и рис. 5.

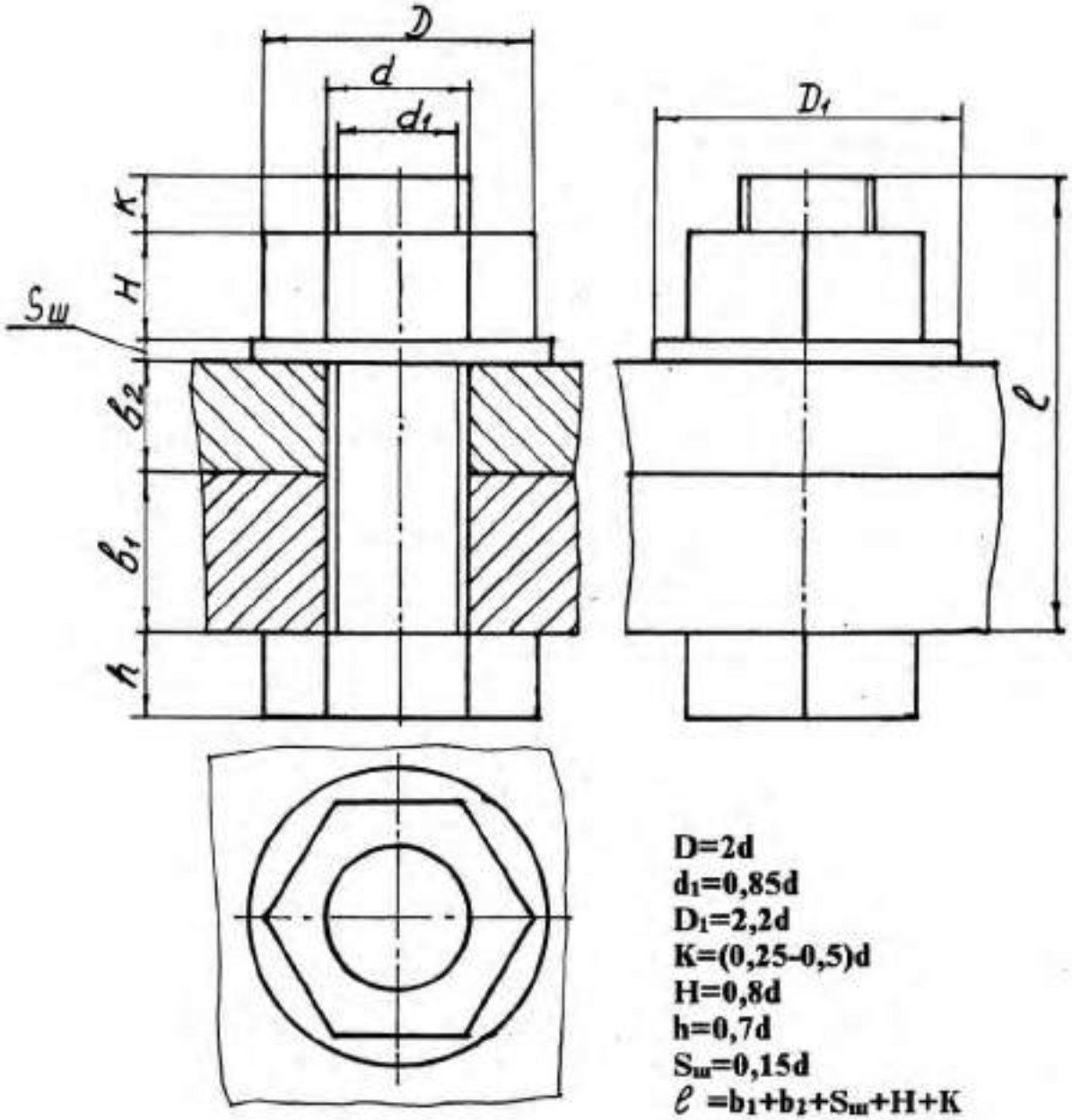


Рис. 3. Определение размеров упрощенного изображения болтового соединения

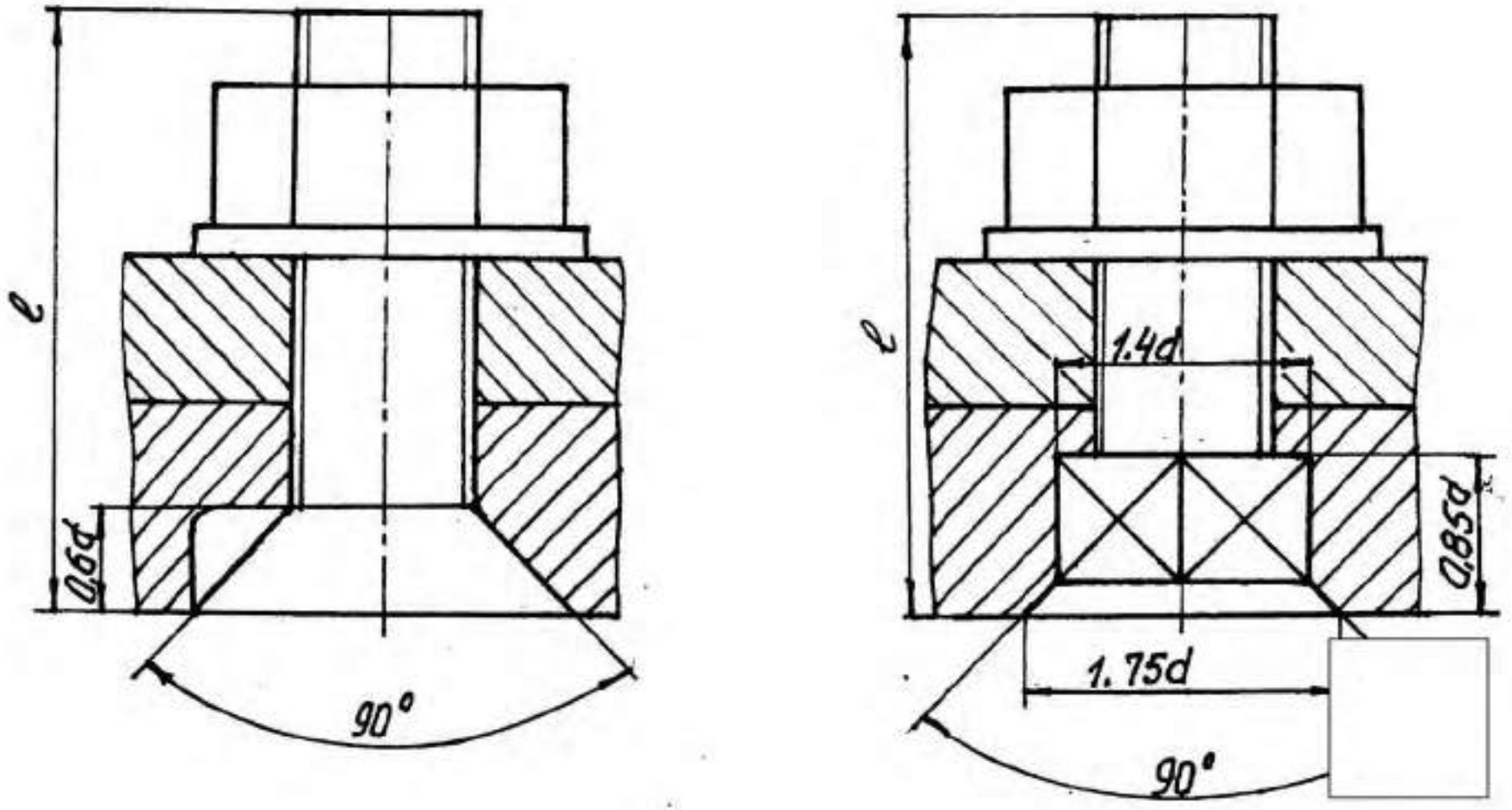


Рис. 4. Определение размеров упрощенного изображения болтового соединения

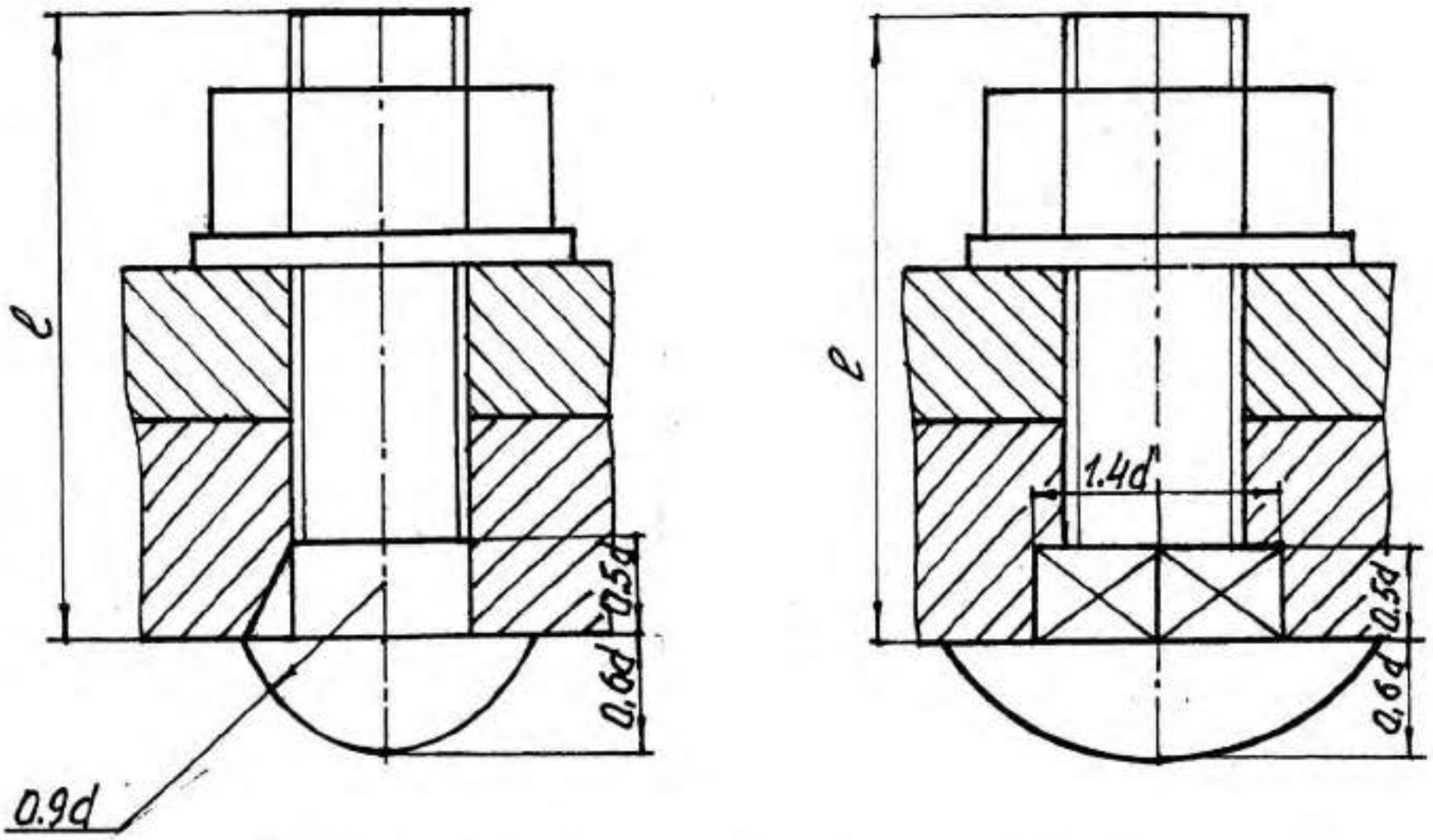


Рис. 5. Определение размеров упрощенного изображения болтового соединения

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Анурьев В. И. Справочник конструктора – машиностроителя: в 3 т. т. 1. - 9 -е изд., перераб. и доп/ под ред. И. Н. Жестковой. – М.: Машиностроение, 2006. – 928 с.: ил.

Чекмарев А. А., Осипов В. К. Справочник по машиностроительному черчению: учебное пособие. – М.: Высшая школа , 2008. – 493 с.

Федоренко В. А., Шошин А. И. Справочник по машиностроительному черчению. – Изд. Альянс, 16-е изд., переработанное, 2007. – 416 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «ЭПЮР №2»

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

Специальность – ***21.05.04 Горное дело***

Специализация № 3 – ***Открытые горные работы***

Квалификация выпускника: **горный инженер (специалист)**

Авторы: Шангина Е.И., проф., д. пед. н., к. т. н., зав. кафедрой ИГр

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Данная методическая разработка предназначена для оказания помощи студентам при выполнении самостоятельной графической работы «Эпюр №2» курса «Начертательная геометрия. Инженерная графика».

Работа содержит методические указания по ее выполнению. При выполнении эпюра студент решает следующие задачи:

1. Построение заданного многогранника в проекциях с числовыми отметками.
2. Сечение многогранника плоскостью общего положения.
3. Построение натуральной величины фигуры сечения.
4. Построение развертки многогранника с нанесением линии сечения.

Работа выполняется в масштабе 1:1000 на формате А2 в соответствии с требованиями ЕСКД, основная надпись по форме 1. Исходные данные приведены в таблице 1. Пример выполнения приведен на рис. 1.

Пример 1

Задание.

В проекциях с числовыми отметками:

1. Построить правильную шестигранную пирамиду, основание которой принадлежит плоскости **OAB**. Точка **O** является центром описанной окружности правильного шестиугольника (центр тяжести) - основания пирамиды (**I, II, III, IV, V, VI**). Сторона основания (**I-II**) **a**=50 и параллельна основной плоскости проекций H_0. Высота пирамиды **h**=150.

Координаты точек плоскости основания:

точка **O** (150, 90, 60);

точка **A** (100, 0, 80);

точка **B** (25, 110, 20).

2. Построить сечение заданной пирамиды плоскостью общего положения Σ_i. Плоскость Σ_i проходит через точку **A**. Азимут падения α секущей плоскости Σ_i совпадает с азимутом падения плоскости основания. Угол падения плоскости Σ_i: $\delta=30°$.

3. Построить натуральную величину фигуры сечения пирамиды плоскостью Σ_i.

4. Построить развертку боковой поверхности пирамиды с нанесением линии сечения.

Задача 1. 1. Построение пирамиды

По заданным координатам на плане строим точки **O**, **A**, **B** (рис. 1).

В плоскости **OAB** строим горизонталь, проходящую через т.**O**. На заложении отрезка прямой $A_{80}B_{20}$ находим точку **C** с высотной отметкой, равной высотной отметке точки **O**, т.е. **60**. Для этого проградуируем отрезок **AB**. Из точки **A** на плане проводим прямую под произвольным углом, на которой откладываем отрезок, равный разности координат высотных отметок A_{80} и B_{20}, т.е. **60**. Затем на этой же прямой от точки **A** откладываем отрезок, равный разности координат $A_{80}O_{60}$, т.е. **20**. С помощью подобных треугольников на заложении $A_{80}B_{20}$ находим точку C_{60}. Соединив точки C_{60} и O_{60}, находим горизонталь плоскости основания (рис. 1).

Для построения основания правильной пирамиды строим ее профиль и натуральную величину правильного шестиугольника. На плане (рис. 1) наносим новую декартову систему координат $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, где ось $\bar{x}$ проходит через точку O_{60} и перпендикулярна горизонтали плоскости $O_{60}C_{60}$. Ось $\bar{y}$ перпендикулярна оси $\bar{x}$ (проводится в удобном месте). Ось $\bar{z}$ совпадает с $\bar{O}$.

На свободном поле чертежа строим профиль (рис. 2), проходящий через $\bar{z}\bar{x}$, а ось $\bar{y}$ проецируется в точку и совпадает с $\bar{O}$. На профиле строим точки A_{80}, O_{60} и B_{20}, которые должны находиться на прямой (коллинеарны). Они определяют след плоскости основания пирамиды.

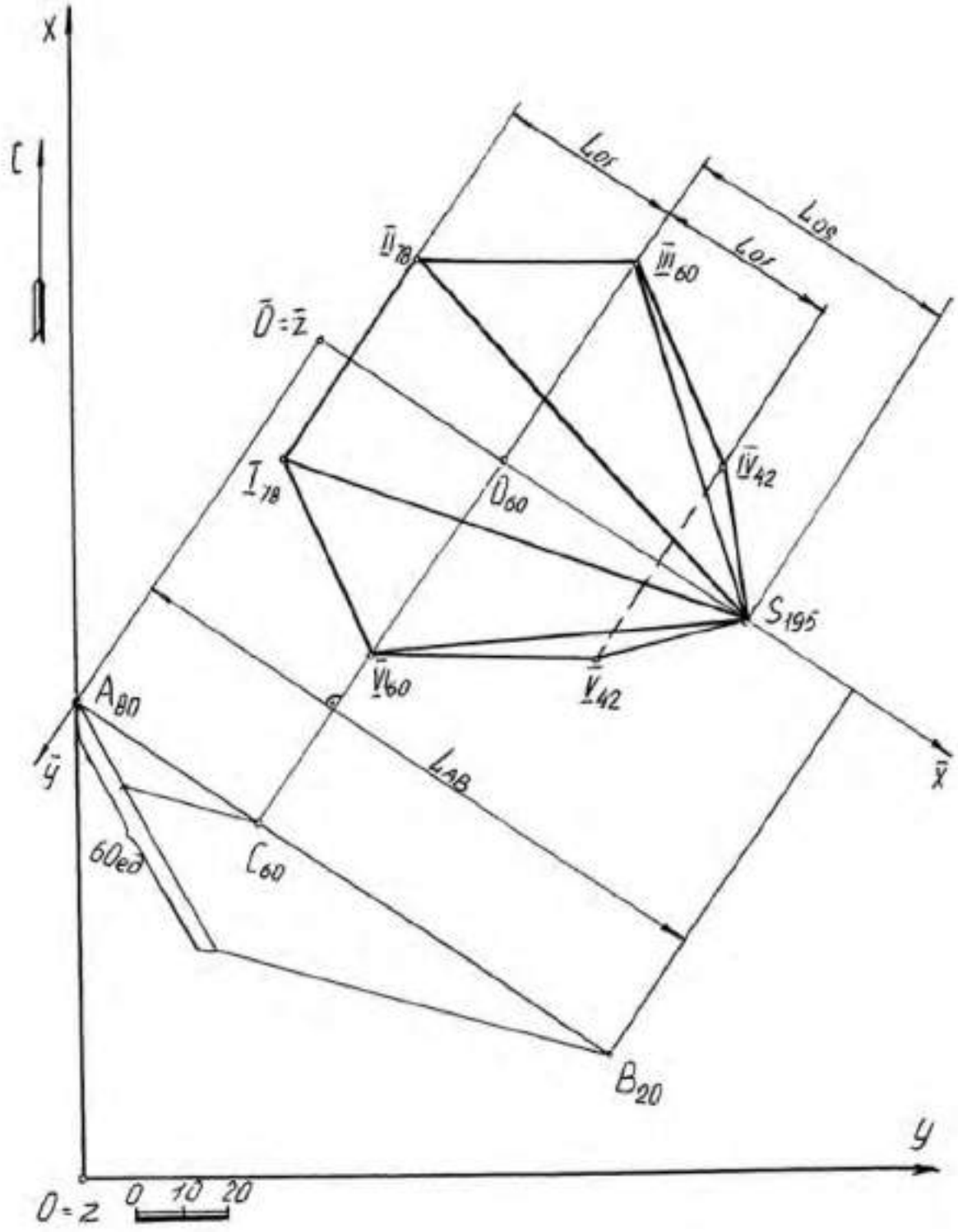

X
C
L01
L08
L01
II18
III60
O=Z
I18
D60
IV42
S195
V60
V42
A80
LAB
60ед
C60
B20
Y
0 10 20
O=Z

Рис. 1

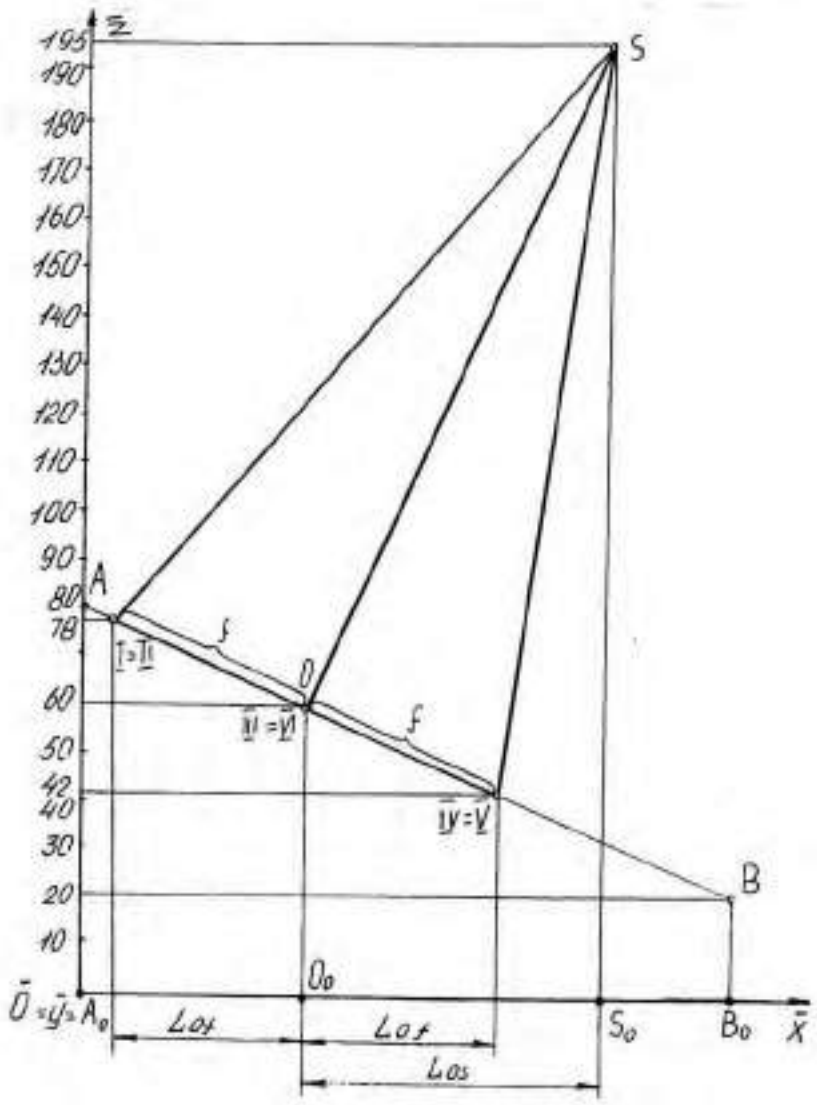


Рис. 2

На свободном месте чертежа строим правильный шестиугольник, являющийся основанием пирамиды (рис. 3).

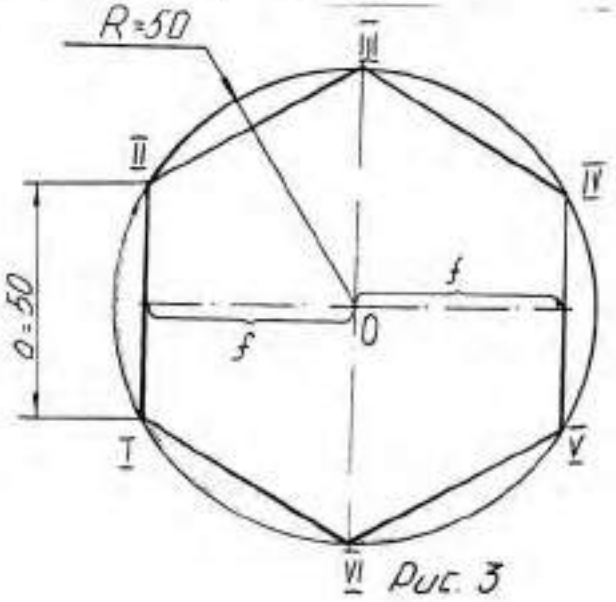


Рис. 3

Затем строим профиль основания пирамиды, т. е. правильный шестиугольник, принадлежащий плоскости основания, причем сторона **I-II** проецируется в точку (по заданию), сторона **IV-V** проецируется в точку, симметричную относительно центра **O**, а точки **III VI** совпадают с центром основания **O**.

Находим высоту пирамиды, которая проходит через точку O перпендикулярно к основанию и равна **h=150** (по заданию). Вершину пирамиды **S** соединяем с точками основания пирамиды и определяем на профиле ее высотную отметку, которая равна **195**.

Построенную на профиле пирамиду переносим на план (рис. 1), используя заложения $\mathbf{L_{of}}$, $\mathbf{L_{os}}$, причем точки (**I**, **II**), (**V**, **IV**), (**VI**, **III**) лежат на горизонталях, высотные отметки которых найдены на профиле. Точка **S** находится на перпендикуляре к горизонтали основания, проходящей через точку $\mathbf{O_{60}}$ на расстоянии $\mathbf{L_s}$.

Полученные точки последовательно соединяем друг с другом и определяем видимость.

Задача 1.2. Сечение тела плоскостью

На профиле строим секущую плоскость Σ_j (рис. 4), которая будет проецироваться в виде прямой линии, т. к. азимут падения α совпадает с азимутом падения основания пирамиды (по заданию). Плоскость Σ_j проходит через точку А под заданным углом падения **δ=30°**. Секущая плоскость Σ_j пересекает ребра пирамиды в точках **D**, **E**, **F**, **K**, **M**, **N**. Полученные точки с профиля переносим на план (рис. 5) с помощью пропорционального деления (если точка делит отрезок в некотором отношении, то и любая проекция этой точки делит проекцию этого отрезка в том же отношении (рис. 6)).

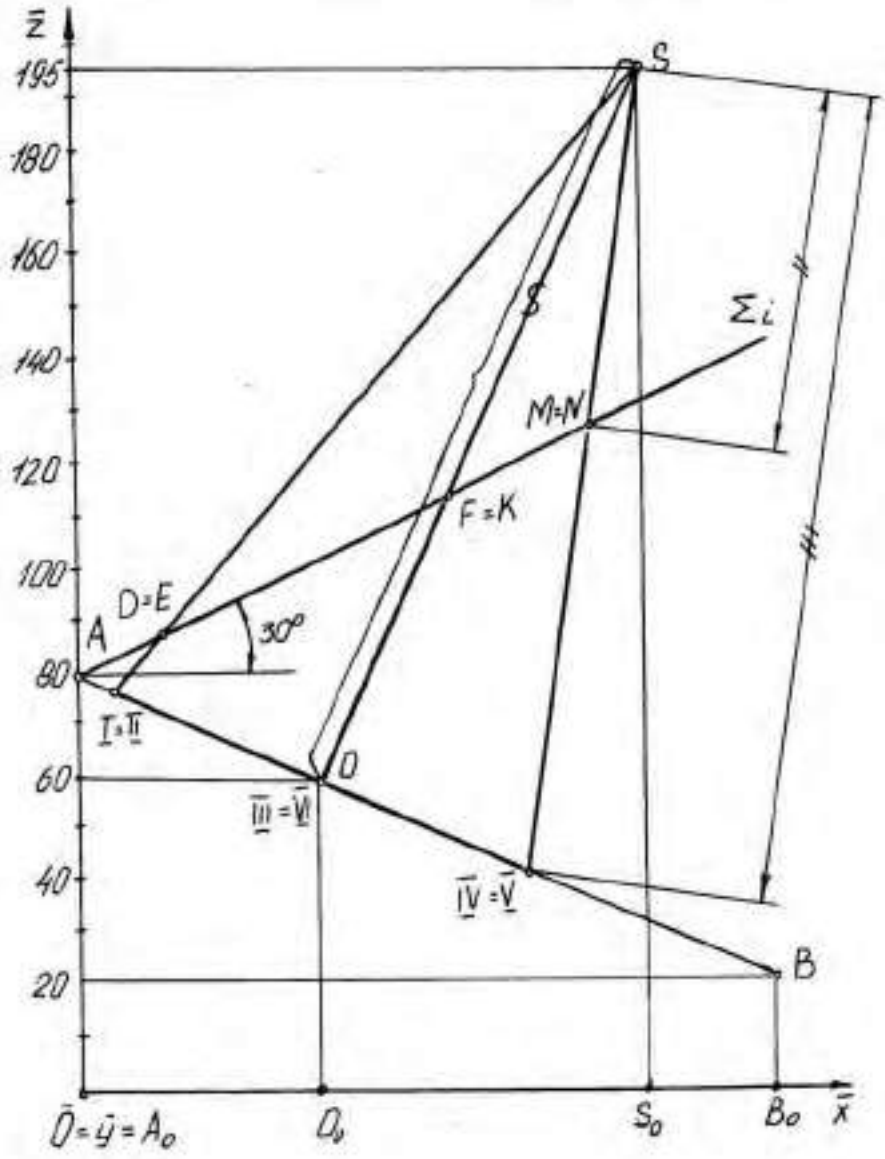


Рис. 4

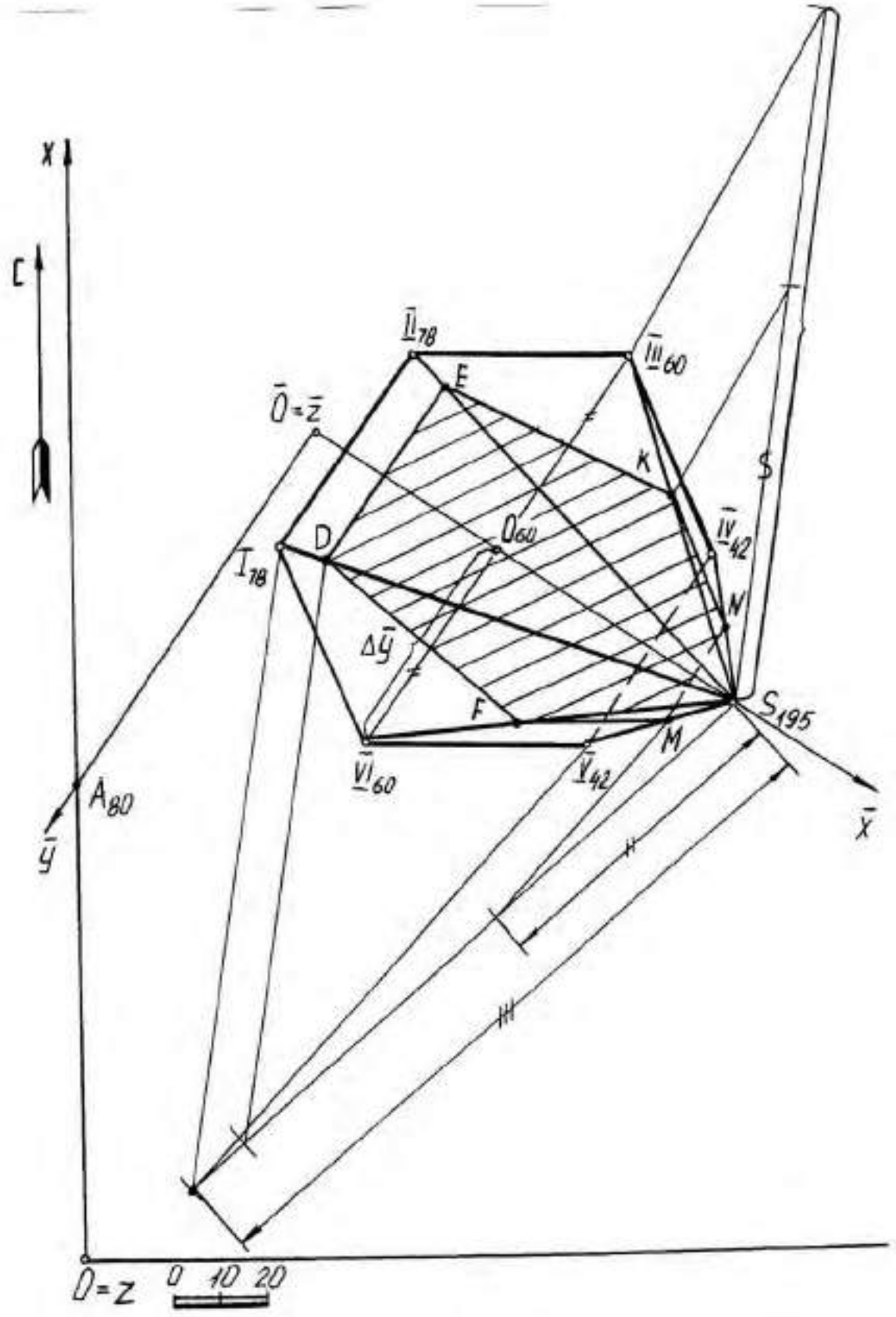

X
C
$\bar{I}_{78}$
$\bar{II}_{78}$
$\bar{III}_{60}$
$\bar{IV}_{42}$
$\bar{V}_{42}$
$\bar{VI}_{60}$
$\bar{O}=\bar{z}$
O_{60}
A_{80}
S_{195}
D
E
F
K
M
N
S
$\Delta\bar{y}$
H
h
$\bar{y}$
$\bar{x}$
O=Z
0 10 20

Рис. 5

Полученные точки **D**, **E**, **F**, **N**, **M** лежат на проецирующих прямых (**DE**), (**FK**) (**NM**), являющихся горизонталями (см. рис. 4), поэтому на плане стороны сечения **DE** и **NM** параллельны горизонталям основания пирамиды, а точки **F** и **K** принадлежат одной горизонтали плоскости сечения (рис. 5).

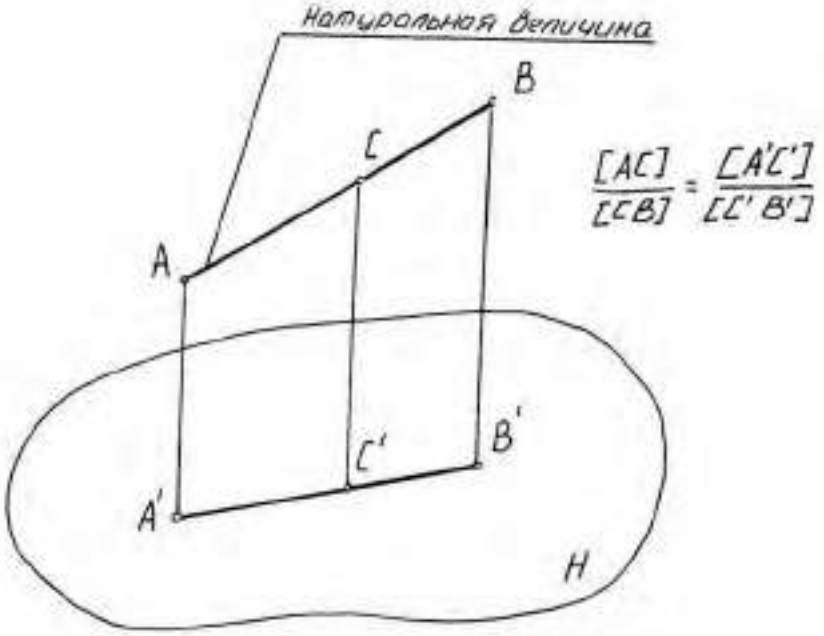


Рис. 6

Задача 1.3. Построение натуральной величины фигуры сечения

Для определения натуральной величины фигуры сечения воспользуемся методом замены плоскостей проекций на профиле, т. к. сечение на этой проекции является проецирующим (рис. 7).

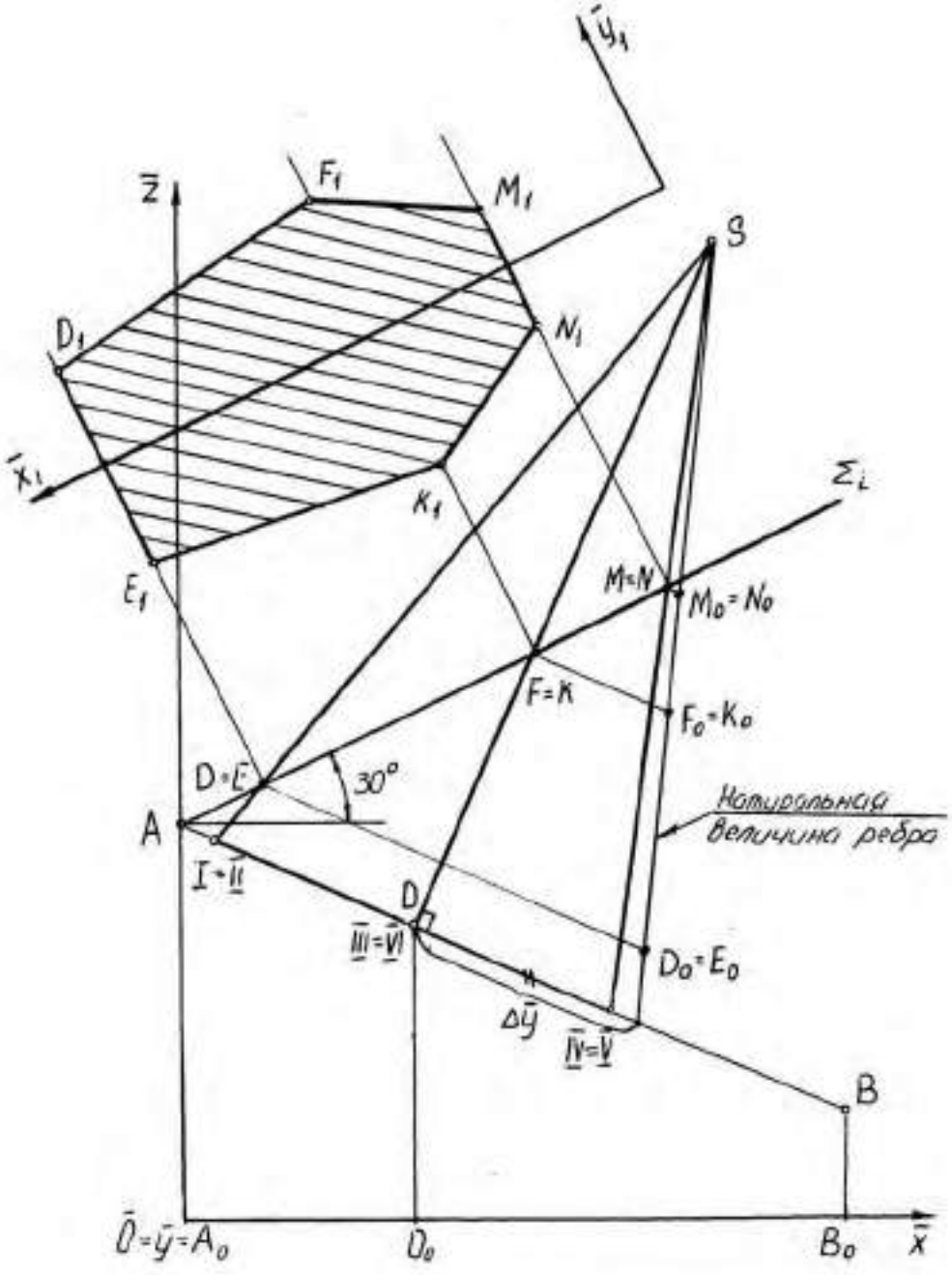


Рис. 7

Новую ось $\bar{x}_1$ выбираем параллельно секущей плоскости Σ_i в удобном для нас месте. Из точек **D,E,F,K,N,M** проводим линии связи перпендикулярно к оси $\bar{x}_1$, на которых откладываем (от оси $\bar{x}_1$) координаты $\bar{y}$ каждой точки, взятой с плана (рис. 5), причем точки E_1, K_1, N_1 имеют отрицательные координаты. Полученные точки последовательно соединяем ломаной линией и получаем натуральную величину фигуры сечения.

Задача 1.4 Построение развертки боковой поверхности пирамиды

Для построения развертки строим натуральную величину ребра правильной пирамиды на профиле (рис. 7) методом прямоугольного треугольника - одним катетом которого является ребро **S III** (**S YI**), другим катетом прямого угла, который совпадает с основанием пирамиды, является разность координат $\Delta \bar{y}$ концов отрезка, взятых с плана (рис.5). Гипотенуза прямоугольного треугольника есть натуральная величина всех ребер пирамиды.

Для определения линии сечения на развертке, на натуральную величину ребра переносим (в пропорциональном отношении) точки сечения $D_0E_0F_0K_0M_0N_0$ (рис. 7).

На свободном поле чертежа выбираем произвольную точку **S** и проводим дугу окружности радиусом, равным натуральной величине ребра пирамиды (рис. 8).

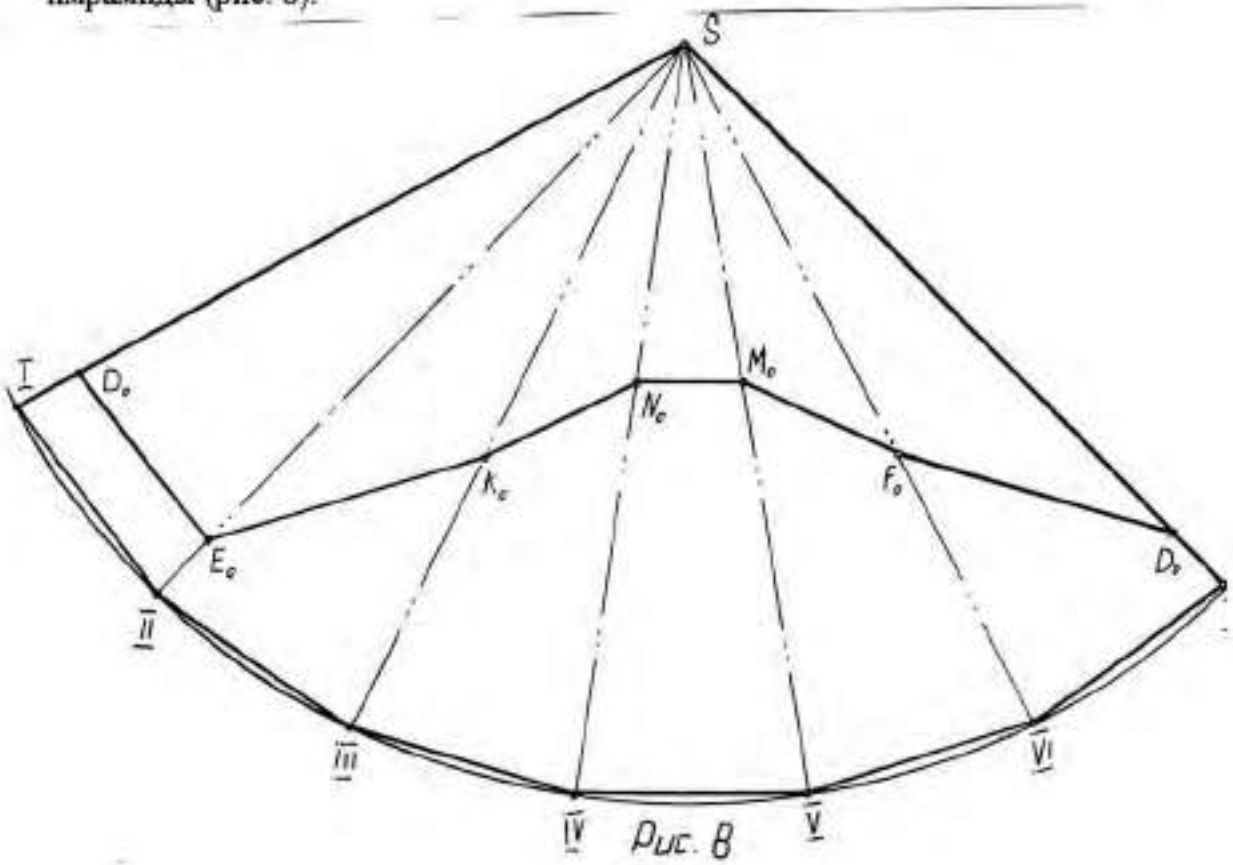


Рис. 8

На полученной дуге откладываем шесть одинаковых отрезков, равных стороне основания правильной пирамиды. Последовательно соединяем найденные точки и получаем развертку боковой поверхности пирамиды.

Для построения линии сечения на развертке переносим точки $\mathbf{D_0\ E_0\ F_0\ K_0\ N_0\ M_0}$, взятые с профиля натуральной величины (рис. 7), на соответствующие ребра развертки пирамиды. Полученные точки последовательно соединяем ломаной линией. Построение развертки боковой поверхности пирамиды осуществляется таким образом, так как у правильной пирамиды все боковые ребра одинаковые.

Пример 2

Задание:

В проекциях с числовыми отметками:

1.Построить трехгранную призму, основание которой принадлежит плоскости **ОАВ**. Точка **О** - центр описанной окружности правильного треугольника нижнего основания, одна сторона которого параллельна основной плоскости проекций $\mathbf{H_0}$. Радиус описанной окружности **R**=50.

Точка **О′** - центр описанной окружности правильного треугольника (тяжести) верхнего основания. Координаты точек:

точка **О** (150; 90; 60);

точка **О′** (100; 120; 190);

точка **А** (100; 0; 80);

точка **В** (25; 110; 20).

2.Построить сечение заданной призмы плоскостью Σ_i. Плоскость Σ_i проходит через точку **L** и перпендикулярна к боковым ребрам призмы. Точка **L** задана координатами: L (110; 160; 70).

3.Построить натуральную величину фигуры сечения призмы плоскостью Σ_i.

4.Построить развертку боковой поверхности призмы с нанесением линии сечения.

Задача 2.1 Построение призмы

По заданным координатам на плане строим точки **О**, **А**, **В**, **О′**. В плоскости Δ **ОАВ** находим горизонталь, проходящую через точку **О** (см. задачу 1.1).

Для построения нижнего основания призмы на плане строим профиль плоскости **ОАВ** методом замены плоскостей проекций (рис. 9) и натуральную величину правильного треугольника **I II III** (рис. 10).

На плане (рис. 9) наносим новую декартову систему координат $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, где ось $\bar{x}$ перпендикулярна горизонтали плоскости $\mathbf{O_{60}C_{60}}$ (выбирается в удобном для нас месте). Ось $\bar{y}$ перпендикулярна оси $\bar{x}$ и проходит через точку **А**.

В новой системе координат $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, строим профиль плоскости нижнего основания, проходящие через точки $\mathbf{A_1O_1B_1}$ (при правильном построении эти точки лежат на одной прямой). На построенном профиле находим нижнее основание призмы (рис. 9). Причем, сторона $\mathbf{II_1}$-$\mathbf{III_1}$ на профиле проецируется в точку (по заданию). На профиле определяем высотные отметки точек нижнего основания. Полученные точки с помощью линий связи переносим на план (сторона **II-III** проецируется в натуральную величину, а вершина **I** находится на линии ската, которая проходит через точку $\mathbf{O_{60}}$). Точки $\mathbf{I_{40}}$ $\mathbf{II_{70}}$ $\mathbf{III_{70}}$ определяют нижнее основание призмы.

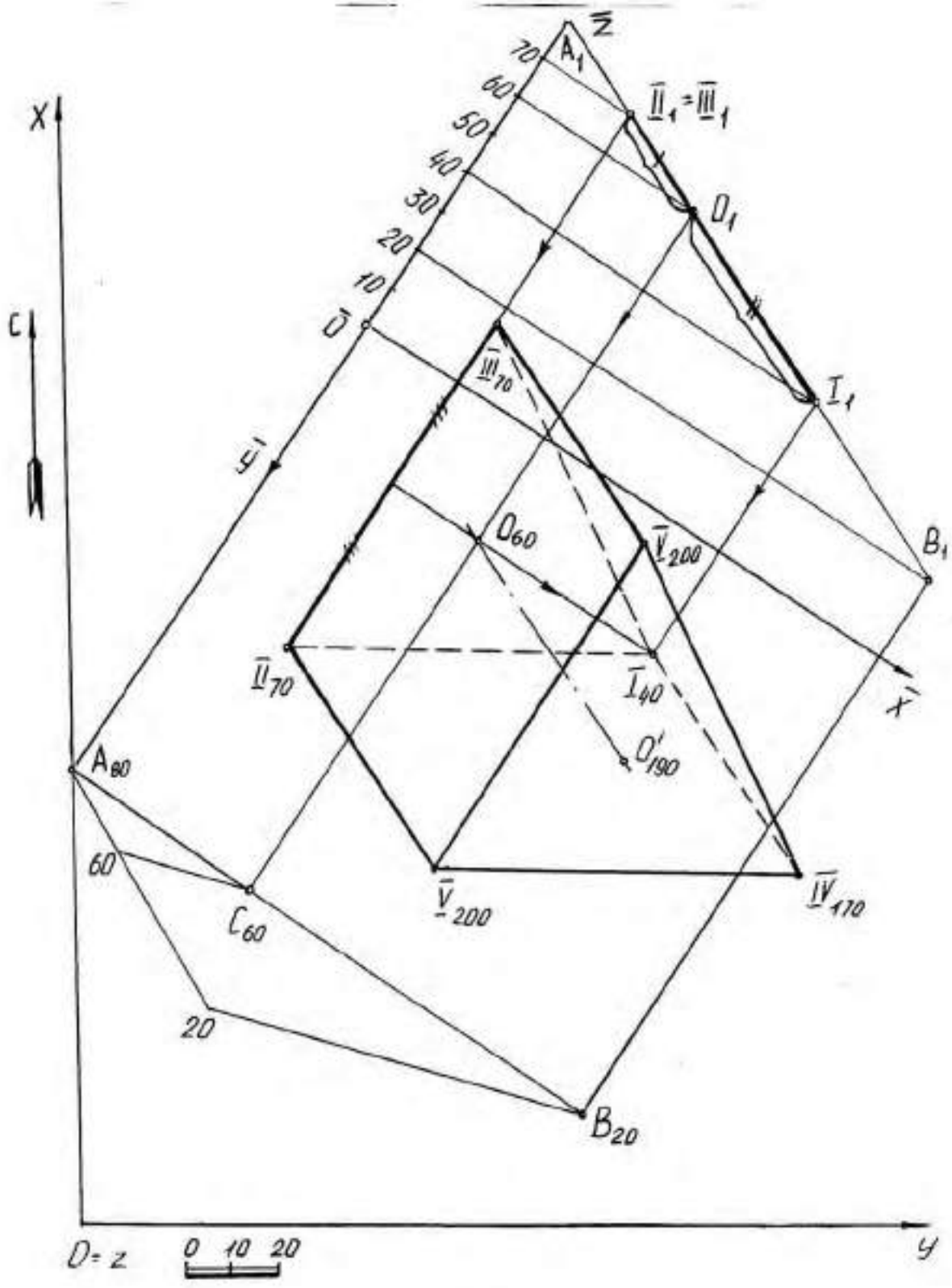

z
A1
II1 = III1
O1
I1
B1
X
X'
y'
y
C
O
70
60
50
40
30
20
10
III70
O60
V200
II70
I40
O'190
A80
60
C60
20
V200
IV170
B20
O = z
0 10 20

Рис 9

Строим центр описанной окружности (центр тяжести) верхнего основания призмы **O′** по заданным координатам. Соединяем точки **O** и **O′** прямой линией. Из точек **I II III** нижнего основания призмы проводим прямые, параллельные и равные оси призмы **OO′**. Найденные точки **IV V VI** определяют верхнее основание искомой призмы. Последовательно соединяем найденные точки ломаной линией и определяем видимость ребер построенной призмы.

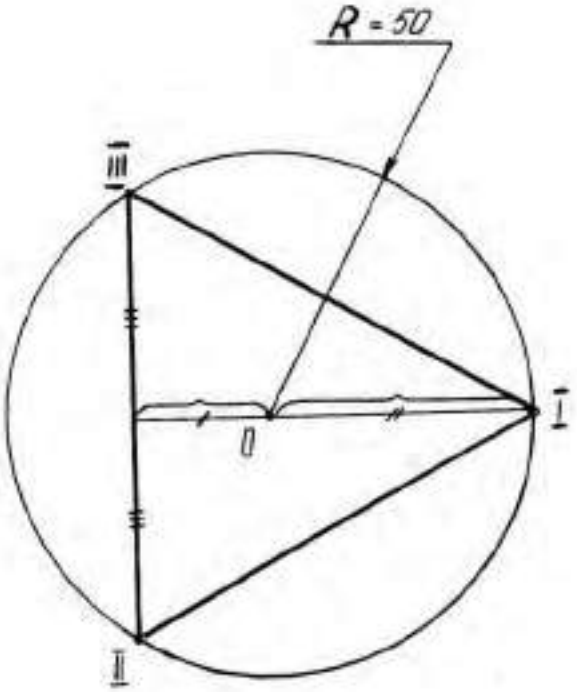


Рис 10

Задача 2.2. Сечение призмы плоскостью

По заданным координатам на плане строим точку L, через которую проходит плоскость Σi, перпендикулярная к боковым ребрам призмы (рис. 11).

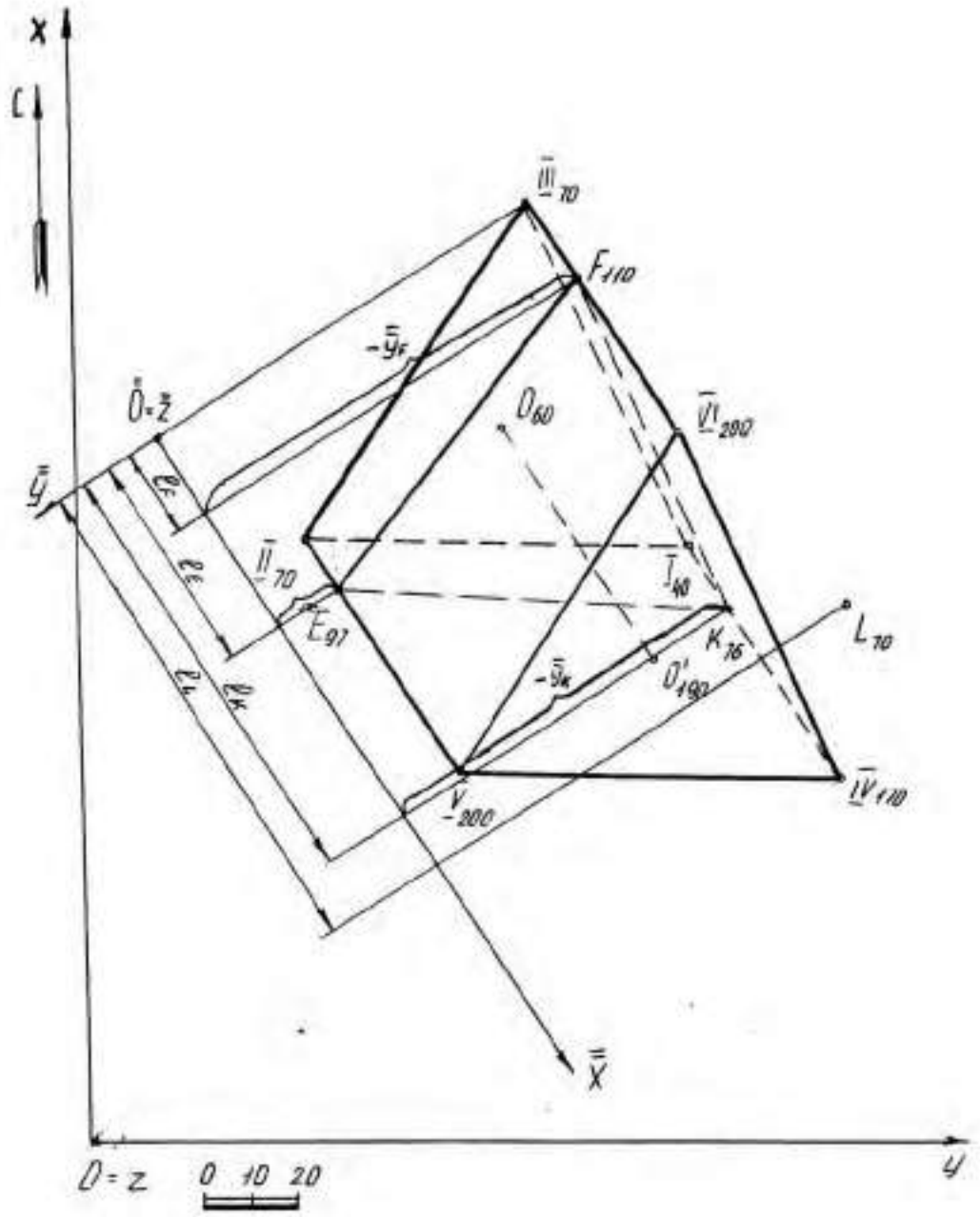


Рис. 11

Для нахождения плоскости Σ_i и сечения призмы этой плоскостью вводим новую декартову систему координат $\overline{Oxyz}$ таким образом, чтобы боковые ребра призмы в этой системе (профиле) проецировались в натуральную величину. Следовательно, ось $\bar{\bar{x}}$ на плане проводим параллельно

боковым ребрам, ось $\bar{y}$ перпендикулярна оси $\bar{x}$ и проходит через точку III_{70}. Ось $\bar{z}$ совпадает с началом отсчета новой системы координат $\bar{O}$ (рис. 11).

На свободном поле чертежа строим профиль призмы и секущей плоскости Σ_i в системе $\overline{\overline{Oxyz}}$ (рис. 12). Секущая плоскость Σ_i проходит через точку **L** и проецируется в виде прямой, перпендикулярной к боковым ребрам призмы (по заданию). Найденное сечение **FEK** переносим на план с помощью интервалов (l_F, l_E, l_K) и принадлежности. Определяют видимость сечения (если грань является видимой, то и линия, принадлежащая ей, видима).

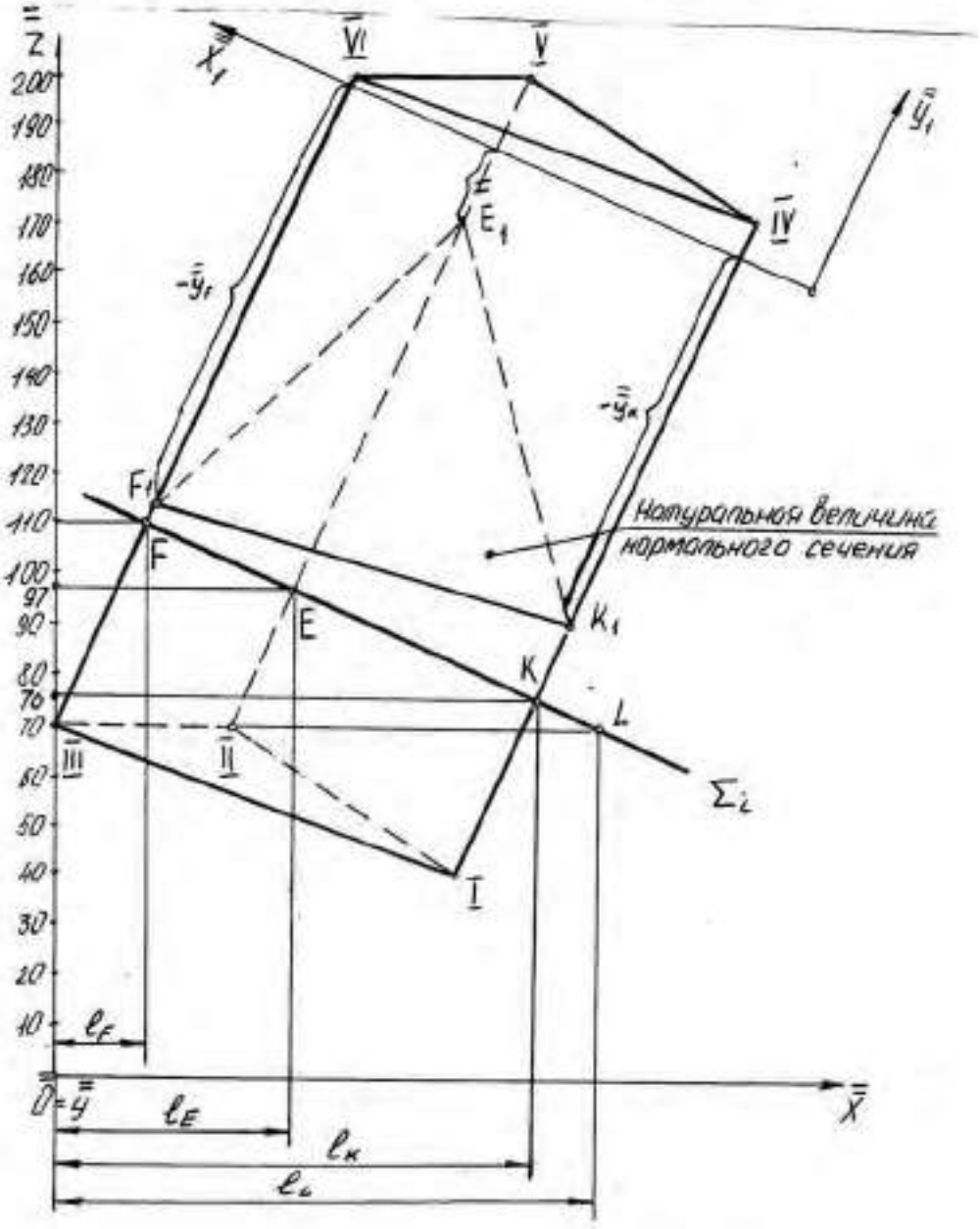


Рис. 12

Задача 2.3 Построение натуральной величины фигуры сечения (нормального сечения)

Для определения натуральной величины фигуры сечения воспользуемся методом замены плоскостей проекций на профиле (рис.12), т.к. сечение на этой проекции является проецирующим. Новую ось $\overline{\overline{x}}_1$ выбираем параллельно секущей плоскости Σ_i в удобном для нас месте. Из точек **F**, **E**, **K** проводим линии связи, перпендикулярные к $\overline{\overline{x}}_1$, на которых откладываем (от оси $\overline{\overline{x}}_1$) координаты $\overline{\overline{y}}$, взятые с плана (рис. 11). Причем, координаты $\overline{\overline{y}}$ точек являются отрицательными. Полученные точки последовательно соединяем ломаной линией и получаем натуральную величину фигуры сечения.

Задача 2.4 Построение развертки боковой поверхности призмы

Для построения развертки боковой поверхности призмы воспользуемся методом нормального сечения, т.к. плоскость Σ_i проходит перпендикулярно к боковым ребрам призмы, поэтому сечение **FEK** является нормальным. На свободном поле чертежа разворачиваем в прямую линию натуральную величину нормального сечения. Через точки **FEKF** проводим вертикальные линии и откладываем на них (от этих точек) расстояния, равные натуральной величине ребер до верхнего и нижнего основания призмы, взятые с профиля (рис. 13). Найденные точки последовательно соединяют ломаной линией.

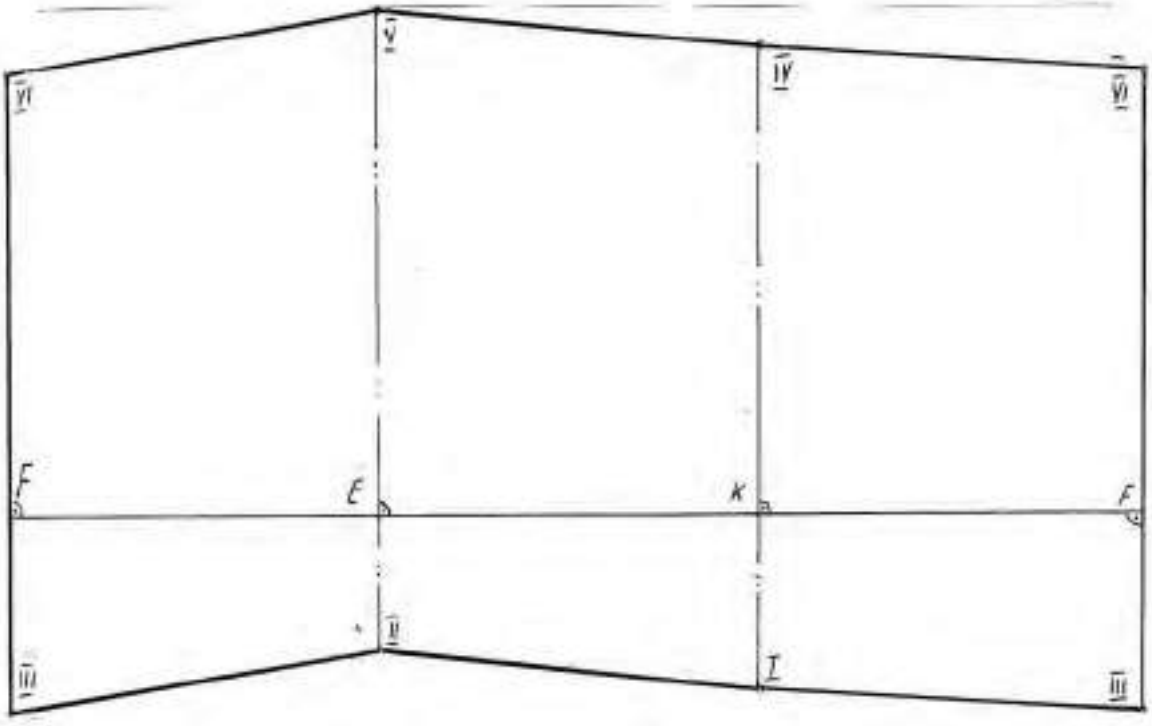


Рис. 13

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

ТАБЛИЦА 1

Номер варианта	Секущая плоскость (угол падения) Σ_1	Пирамида		
		сторона основания (a)	высота (h)	Координаты точек A, B, O
1	30°	40	150	
3	25°	45	150	
5	20°	50	150	$x_A = 100$
7	15°	55	150	A: $y_A = 0$
9	10°	60	150	$z_A = 80$
11	0°	40	155	
13	5°	45	155	
15	10°	50	155	$x_B = 25$
17	15°	55	155	B: $y_B = 110$
19	20°	60	155	$z_B = 20$
21	5°	40	160	
23	10°	45	160	
25	15°	50	160	$x_O = 150$
27	20°	55	160	O: $y_O = 90$
29	25°	60	160	$z_O = 60$
31	30°	40	150	$x_A = 100$
33	25°	45	150	A: $y_A = 0$
35	20°	50	150	$z_A = 80$
37	15°	55	150	$x_B = 30$
39	10°	60	150	B: $y_B = 115$
41	0°	40	155	$z_B = 250$
43	5°	45	155	$x_O = 140$
45	10°	50	155	O: $y_O = 80$
				$z_O = 50$

Продолжение табл. 1

Номер варианта	Призма													Нормальная плоскость		
	R	O			O’			A			B			L		
		x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
2	40	100	50	50	65	125	180	150	30	100	100	130	30	30	110	50
4	40	100	55	50	65	130	185	150	35	100	100	125	30	35	110	55
6	45	100	60	60	65	140	190	150	40	100	100	120	30	30	110	60
8	45	100	65	65	65	145	180	150	20	100	100	115	30	30	110	65
10	50	100	70	70	65	150	170	150	15	100	100	110	30	30	110	65
12	50	150	90	60	95	115	195	110	0	70	20	120	25	105	155	75
14	55	145	85	60	110	120	190	100	0	80	25	110	20	110	160	75
16	45	155	85	60	95	115	195	105	0	80	15	105	20	100	150	80
18	50	110	50	45	50	130	160	160	5	110	110	105	40	30	100	50
20	45	110	55	50	50	135	165	160	10	110	110	110	40	25	100	45
22	40	110	60	55	50	140	170	160	15	110	110	115	40	20	100	55
24	35	110	65	60	50	145	175	160	20	110	110	120	40	35	100	60
26	50	110	70	65	50	150	180	160	25	110	110	125	40	30	100	45
28	40	95	40	60	120	130	160	170	0	120	120	100	50	80	130	60
30	35	95	45	65	120	135	165	170	5	120	120	105	50	85	135	65
32	40	95	50	70	120	140	170	170	10	120	120	110	50	90	140	70
34	40	95	55	75	120	145	175	170	15	120	120	115	50	80	130	70
36	35	95	60	80	120	150	180	170	20	120	120	120	50	85	135	60
38	35	80	30	55	130	135	185	140	10	90	90	110	20	80	150	70
40	30	80	35	60	130	140	190	140	15	90	90	115	20	85	150	75
42	35	80	30	65	130	145	195	140	20	90	90	120	20	80	150	70
44	40	80	35	70	130	150	100	140	25	90	90	125	20	85	150	75
46	40	80	40	75	130	150	105	140	30	90	90	130	20	90	150	80

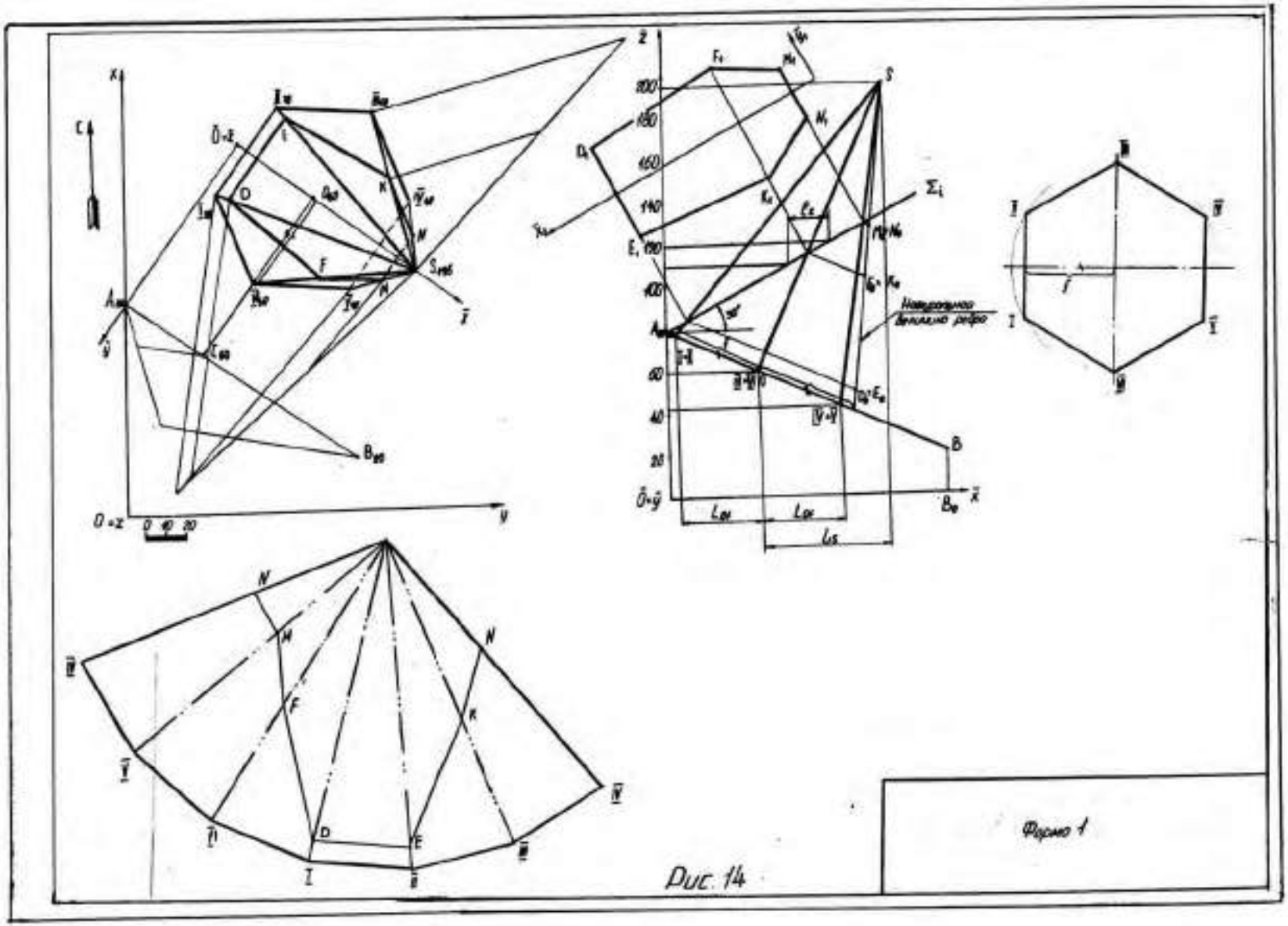


Рис. 14

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В. Н., Шангина Е. И. Начертательная геометрия в проекциях с числовыми отметками: Учебное пособие.- Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 1999. – 152 с.
2. Горная графическая документация. – Издание стандартов, 1983. – 200 с.
3. Ломоносов Г. Г. Инженерная графика. – М.: Недра, 1984. – 287 с.
4. Русскевич Н. Л. Начертательная геометрия. – Киев: «Вища школа», 1978. – 312 с.
5. Тарасов Б. Ф. Методы изображения в транспортном строительстве. – Ленинград: Стройиздат, 1987. – 248 с.

Шангина Елена Игоревна

Методическое пособие
по выполнению индивидуальной графической
работы «Эпюр № 2» по дисциплине
«Начертательная геометрия. Инженерная графика»
для студентов направления 553200 –
«Геология и разведка полезных ископаемых»

2-е издание, стереотипное

Корректура кафедры инженерной графики

Подписано в печать 17.10.2003 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/8
Печ. л. 1,6 Уч. - изд. 1,39. Тираж 150 экз. Заказ №128

Лаборатория педагогики
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральская государственная горно-геологическая академия
Лаборатория множительной техники

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ 4
2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЭПЮРА 4
3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЭПЮРА 6
4. ПРИЛОЖЕНИЕ 1 14
5. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 15

ВВЕДЕНИЕ

Методическое пособие «Эпюр № 1выполнено на основе учебного пособия А. И. Образцова, изданного в 1953 году.

Данное пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении графической работы «Эпюр №1» по курсу «Начертательная геометрия».

Цель работы - научиться строить линию пересечения заданных плоских фигур, определять видимость этих фигур на проекциях.

Графическая работа «Эпюр №1» является первым самостоятельным заданием студента по дисциплине «Начертательная геометрия». Для выполнения этой работы студент должен изучить следующие разделы начертательной геометрии: «Точка и прямая», «Плоскость», «Взаимное положение прямой и плоскости», «Взаимное положение двух плоскостей».

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Графическая работа «Эпюр №1» выполняется в масштабе 1:1 на формате А3 (297×420 мм). В правом нижнем углу формата А3 студент выполняет основную надпись – форма 1 по ГОСТ 2.104-68. Пример заполнения основной надписи приведен в Приложении I. В левом верхнем углу формата выполняется дополнительная графа 26 (14×70 мм). Пример выполнения графической работы дан в Приложении I.

В соответствии с ГОСТ 2.303-68 задание выполняется следующими типами линий:

- линии видимого контура толщиной S, равной 0,6÷0,8 мм;
- линии построения – сплошные тонкие, толщиной от $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$;
- линии невидимого контура – штриховые, толщиной от $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$;
- следы вспомогательных плоскостей-посредников изображаются разомкнутыми линиями, длиной 8-10 мм, толщиной от 1,5 *S* до 2*S*.

2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЭПЮРА

Вариант задания включает в себя три различные геометрические плоские фигуры:

- фигура № 1 задана координатами трех точек, фигура № 2 (многоугольник) полностью задана координатами трех точек и оставшимися точками, у которых одна из координат заменяется условием их принадлежности к плоской фигуре № 2;

- фигура № 3 занимает проецирующее положение (фронтально-проецирующее или горизонтально-проецирующее) и задается очерком в виде кольца, серпа, круга или его части.

Выполнение эпюра состоит из графического решения нескольких задач:

1) достроить недостающую проекцию многоугольника;
2) построить проекции линии пересечения треугольника *ABC* и многоугольника;
3) построить проекции линии пересечения: треугольника с плоскостью частного положения; многоугольника с плоскостью частного положения;
4) определить видимость элементов фигур на чертеже, считая фигуры непрозрачными.

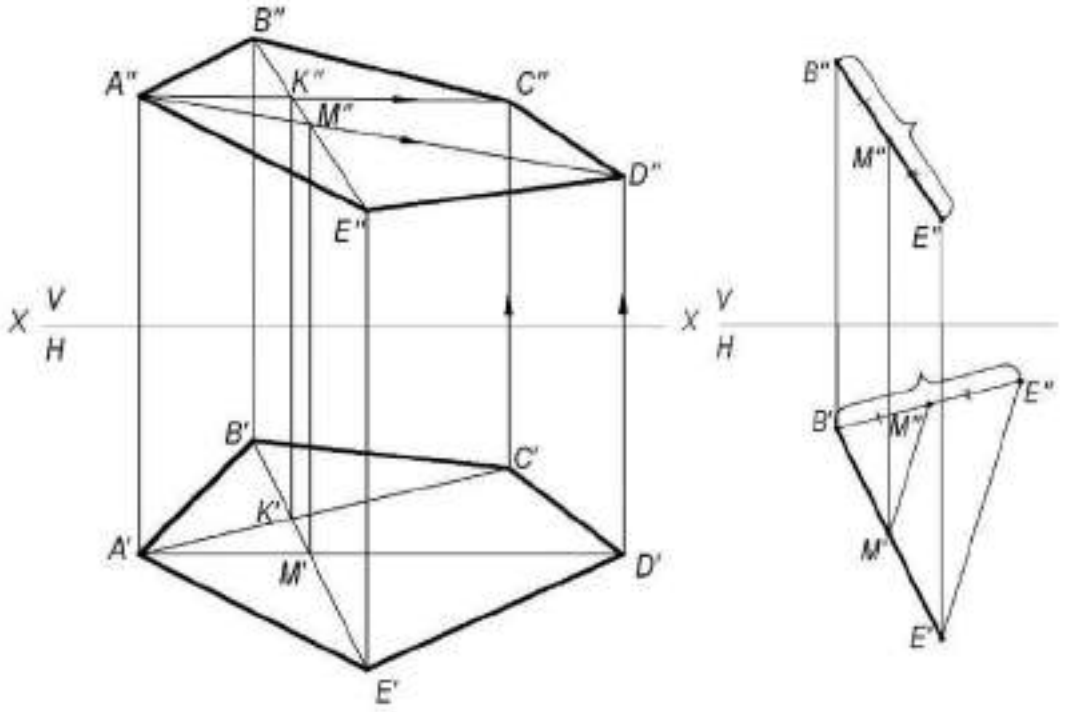
Исходные данные заданы численными значениями координат и сведены в таблицу.

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЭПЮРА

Для выполнения графической работы студенту необходимо решить ряд задач.

Задача 1. Построение исходного чертежа многоугольника (рис. 1).

Горизонтальная проекция многоугольника $ABCDE$ задана полностью, а фронтальная проекция только тремя проекциями точек $A''B''E''$. Необходимо достроить фронтальную проекцию точек C , D. При построении недостающей проекции заданного многоугольника необходимо соблюдать условие принадлежности точек данной фигуры к плоскости. Чтобы точки C, D лежали в плоскости, определенной тремя точками A, B и E, необходимо, чтобы они находились на прямых, лежащих в этой плоскости. Этими прямыми являются диагонали AC, AD и BE, горизонтальные проекции которых можно построить (рис. 1*а*).



а) *б*)

Рис. 1. Построение исходного чертежа многоугольника:

а- построение недостающих проекций вершин многоугольника; *б*- пропорциональное деление отрезка BE

На фронтальной проекции пятиугольника проводят проекцию диагонали $B''E''$. В плоскости пятиугольника лежат точки пересечения диагоналей K и M, горизонтальные проекции которых K' и M' имеются, а фронтальные проекции получаются в результате пересечения линий проекционной связи, проведенных из K' и M', с диагональю $B''E''$. По двум точкам строятся фронтальные проекции других двух диагоналей $A''K''$ и $A''M''$, на них должны лежать проекции точек C'' и D'', которые определяются по их горизонтальным проекциям.

В случае, если линия совпадает по направлению с линией проекционной связи или круто наклонена к оси проекций, то недостающая проекция точки строится из условия пропорционального деления отрезка: если точка делит отрезок на пропорциональные части, то проекция этой точки делит проекции этого отрезка в том же отношении. На рис. 1*б* нужно построить горизонтальную проекцию точки *M*. Из проекции точки *B*′ проводят линию под углом меньше 90° к *B*′*E*′ и на ней от проекции точки *B*′ откладывают отрезки равные *B*″*M*″ и *B*″*E*″. Соединяют *E*′ и *E*″ и параллельно этому направлению проводят от M″ линию до пересечения с *B*′*E*′. Получают искомую горизонтальную проекцию *M*′.

Задача 2. Построить точку пересечения прямой *MN* с плоскостью треугольника *ABC*.

Если прямая линия не параллельна плоскости, то она пересекает эту плоскость в действительной точке (см. рис. 2).

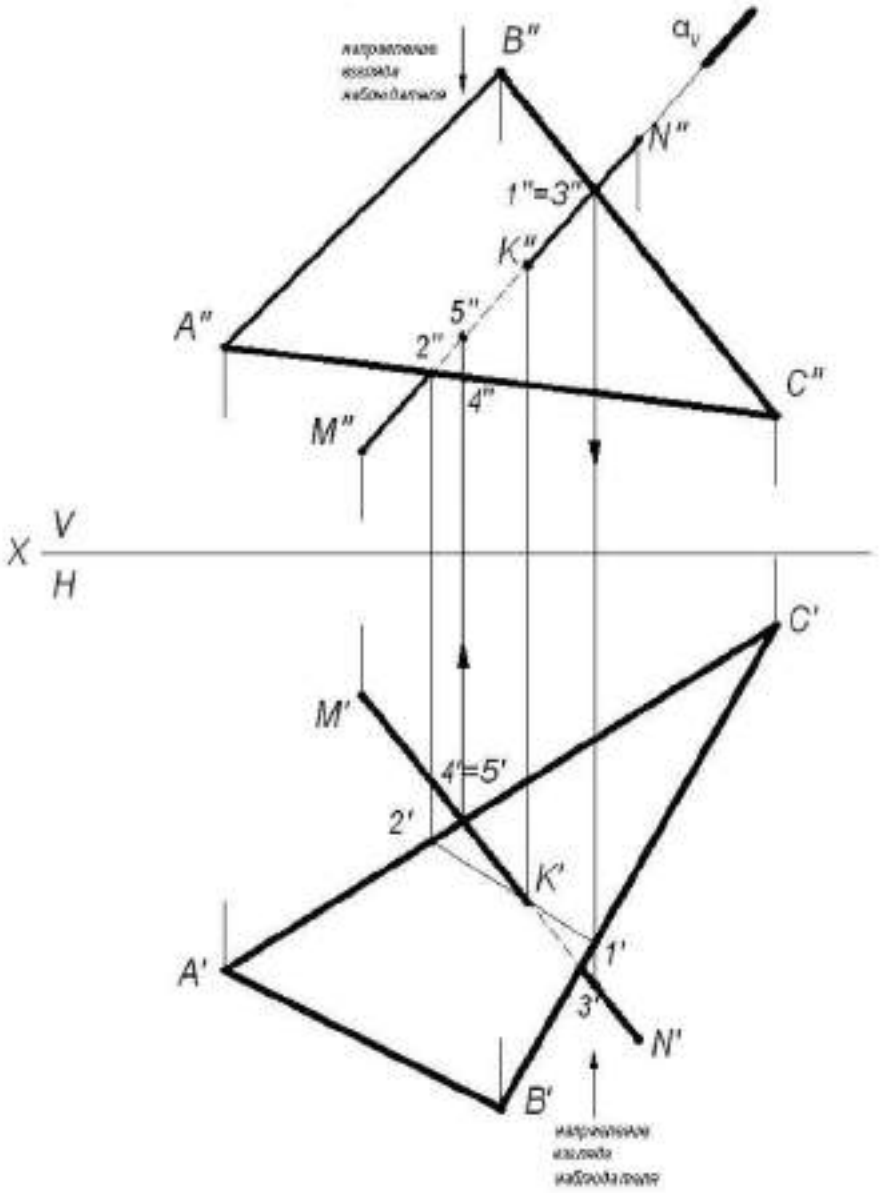


Рис. 2. Построение точки пересечения прямой с плоскостью

Алгоритм решения задачи:

1) Через заданную прямую MN проводим вспомогательную плоскость-посредник α, перпендикулярную фронтальной плоскости проекций. Следовательно, на фронтальной плоскости проекций V все точки плоскости-посредника α будут проецироваться в прямую линию, совпадающую с фронтальной проекцией прямой $M''N''$.

2) Находим линию пересечения вспомогательной плоскости-посредника α с заданной плоскостью треугольника ABC. На чертеже линия (1,2).

3) Находим искомую точку пересечения K прямой MN с плоскостью треугольника ABC. Она определяется как пересечение искомой прямой с найденной линией пересечения вспомогательной плоскости-посредника с плоскостью треугольника ABC.

Определение видимости на чертеже.

В начертательной геометрии плоскости считаются непрозрачными, поэтому необходимо на проекциях определить видимость.

Для определения видимости на чертеже используем метод конкурирующих точек, сущность которого заключается в выборе двух скрещивающихся прямых.

Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций V поступают так. Выбираем две скрещивающиеся прямые $B''C''$ и $M''N''$, фронтальные проекции которых пересекаются в точках 1 и 3. По горизонтальной проекции определяем, что проекция точки 3′, лежащая на проекции прямой $M'N'$, будет закрывать проекцию точки 1′, лежащую на проекции прямой $B'C'$, т. к она будет ближе к наблюдателю. На чертеже направление взгляда наблюдателя показано стрелкой. Следовательно, на фронтальной плоскости проекций проекция $M''N''$ будет закрывать проекцию $B''C''$. Границей видимости является проекция точки пересечения К″.

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций H выбираем две скрещивающиеся прямые $A'C'$ и $M'N'$, горизонтальные проекции которых пересекаются в точках 4′ и 5′. По фронтальной проекции определяем, что проекция точки 5″, лежащая на проекции прямой $M''N''$, будет закрывать проекцию точки 4″, лежащую на проекции прямой $A''C''$, т. к. она будет ближе к наблюдателю. На чертеже направление взгляда наблюдателя показано стрелкой. Следовательно, на горизонтальной плоскости проекций проекция $M'N'$ будет закрывать проекцию $A'C'$. Границей видимости является проекция точки пересечения K'.

Задача 3. Построение линии пересечения двух плоскостей, одна из которых занимает частное положение.

Даны две плоскости: плоскость ΔABC – плоскость общего положения, плоскость ΔDEK – плоскость частного положения, которая расположена перпендикулярно фронтальной плоскости проекций (рис. 3).

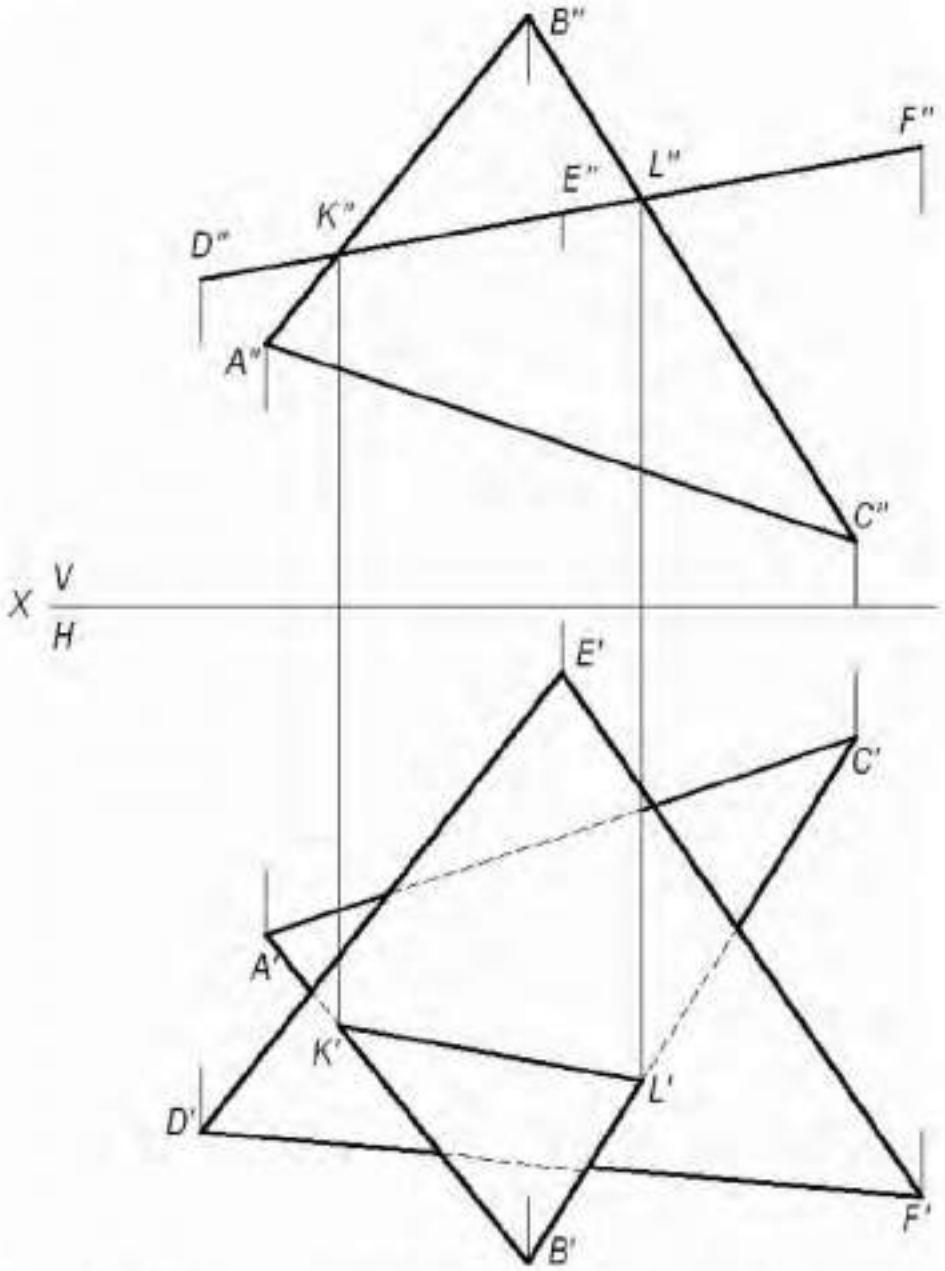


Рис. 3. Построение линии пересечения двух плоскостей, одна из которых занимает частное положение

Фронтальная проекция ΔDEK совпадает с фронтальным следом плоскости и фронтальной проекцией линии пересечения треугольников.

(KL) - линия пересечения двух треугольников. Проекции этой линии пересечения – фронтальную и горизонтальную строят исходя из свойства принадлежности точек K и L сторонам (AB) и (BC), соответственно. Видимость треугольников на горизонтальной плоскости проекций определяем методом конкурирующих точек, рассмотренном в задаче 2.

Задача 4. Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения.

Даны две плоскости общего положения, заданные треугольниками ABC и DEK. Построить линию пересечения двух треугольников, определить видимость треугольников на проекциях.

Прямая линия, получаемая при взаимном пересечении двух плоскостей, определяется двумя точками, каждая из которых одновременно принадлежит обеим плоскостям. Общие точки определяются решением основной позиционной задачи начертательной геометрии – построение точки пересечения прямой с плоскостью (см. рис. 2).

Для решения данной задачи проводят вспомогательные плоскости-посредники частного положения (проецирующие плоскости). Решение задачи приведено на рис. 4.

Алгоритм решения задачи:

1. Определяют первую точку линии пересечения двух треугольников – точку *M*.

1.1. Фронтально-проецирующая плоскость α проведена через сторону *DK* и задана на чертеже фронтальным следом α_V.

1.2. Плоскость α пересекает плоскость треугольника *ABC* по прямой (1,2), на чертеже строят две проекции этой прямой.

1.3. Прямая (1,2) пересекает сторону *DK* в точке *M*, строят две проекции точки *M″* и *M′*.

2. Определяют вторую точку искомой линии пересечения двух треугольников – точку *N*.

2.1. Горизонтально-проецирующая плоскость β проведена через сторону *AB* и задана на чертеже горизонтальным следом β_H.

2.2. Плоскость β пересекает плоскость треугольника *DEK* по прямой (3,4), на чертеже строят две проекции этой прямой.

2.3. Прямая (3,4) пересекает *AB* в точке *N*, строят две проекции точки *N″* и *N′*.

Плоскости треугольников *ABC* и *DEK* пересекаются по прямой *MN*.

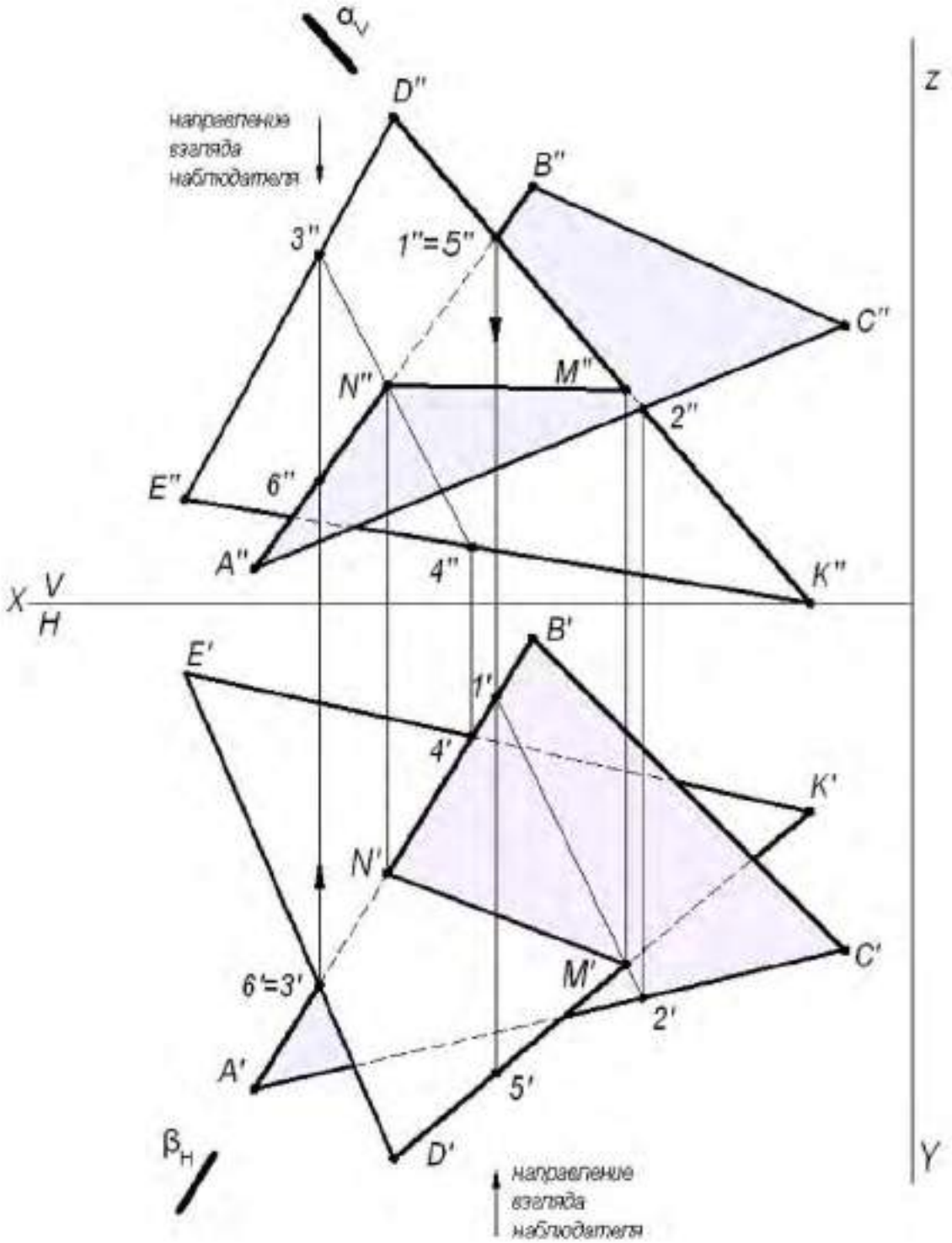


Рис. 4. Построение линии пересечения двух треугольников

3. Видимость плоских фигур на проекциях определяют методом конкурирующих точек.

Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций V выбираем две скрещивающиеся прямые $D''K''$ и $A''B''$, фронтальные проекции которых пересекаются в точках $1''$ и $5''$. По горизонтальной проекции определяем, что проекция точки $5'$, лежащая на проекции прямой $D'K'$, будет закрывать про-

екцию точки 1′, лежащую на проекции прямой $A'B'$, т. к. она будет ближе к наблюдателю. Следовательно, на фронтальной плоскости проекция $D''K''$ будет закрывать проекцию $A''B''$. Границей видимости является проекция линии пересечения $M''N''$.

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций H выбираем две скрещивающиеся прямые $A'B'$ и $D'E'$, горизонтальные проекции которых пересекаются в точках 3′ и 6′. По фронтальной проекции определяем, что проекция точки 3″, лежащая на проекции прямой $D''E''$, будет закрывать проекцию точки 6″, лежащую на проекции прямой $A''B''$, т.к. она будет ближе к наблюдателю. Следовательно, на горизонтальной плоскости проекция $D'E'$ будет закрывать проекцию $A'B'$. Границей видимости является проекция линии пересечения $N'M'$.

Задача 5. Построить две проекции линии пересечения плоскости α - общего положения, заданной следами и плоскости β - общего положения, заданной параллельными прямыми a и b.

Для решения данной задачи проводят вспомогательные плоскости-посредники частного положения (плоскости уровня), пересекающие заданные плоскости по прямым, недостающие проекции которых легко строятся и пересекаются в пределах чертежа.

Графическое решение задачи приведено на рис. 5.

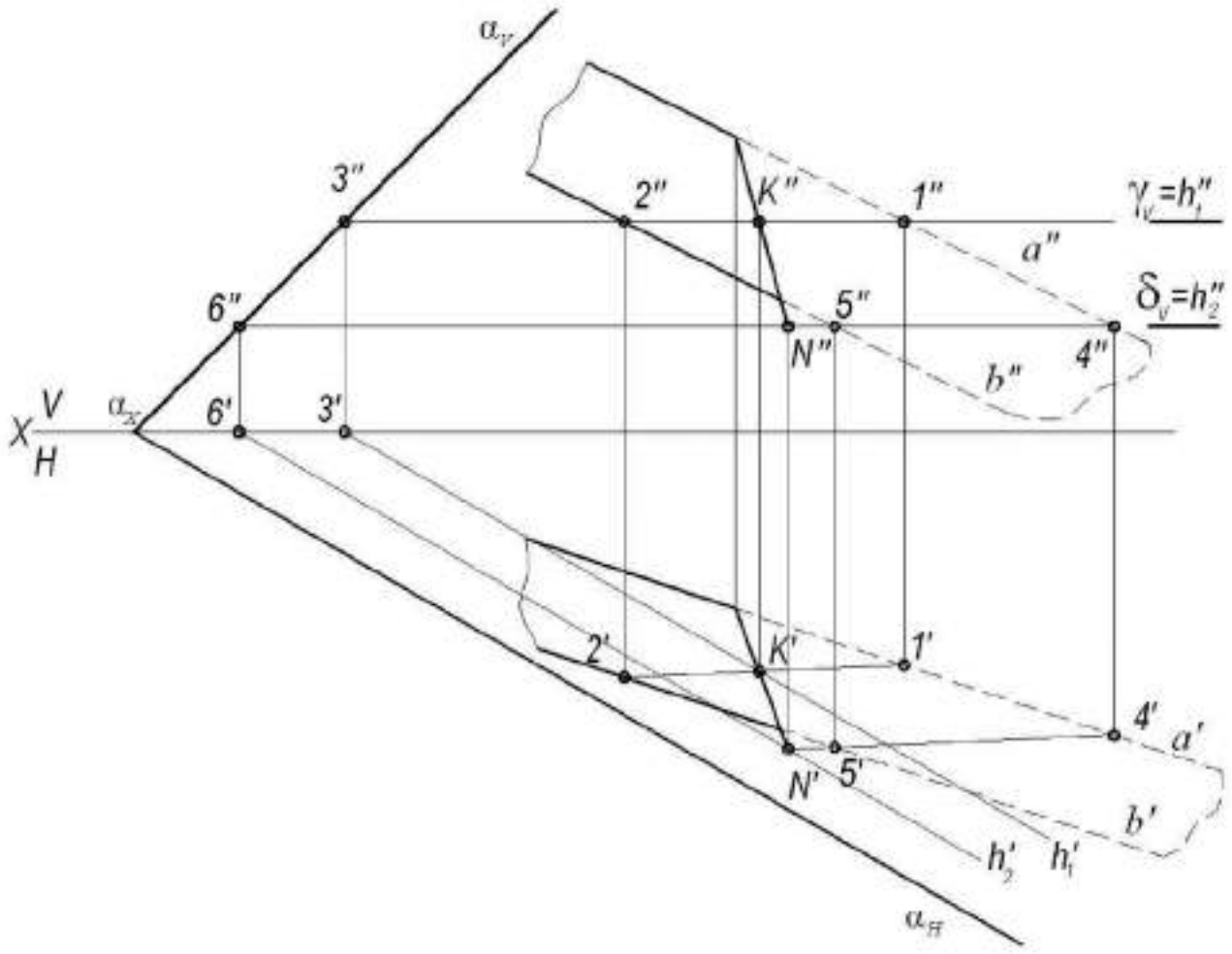
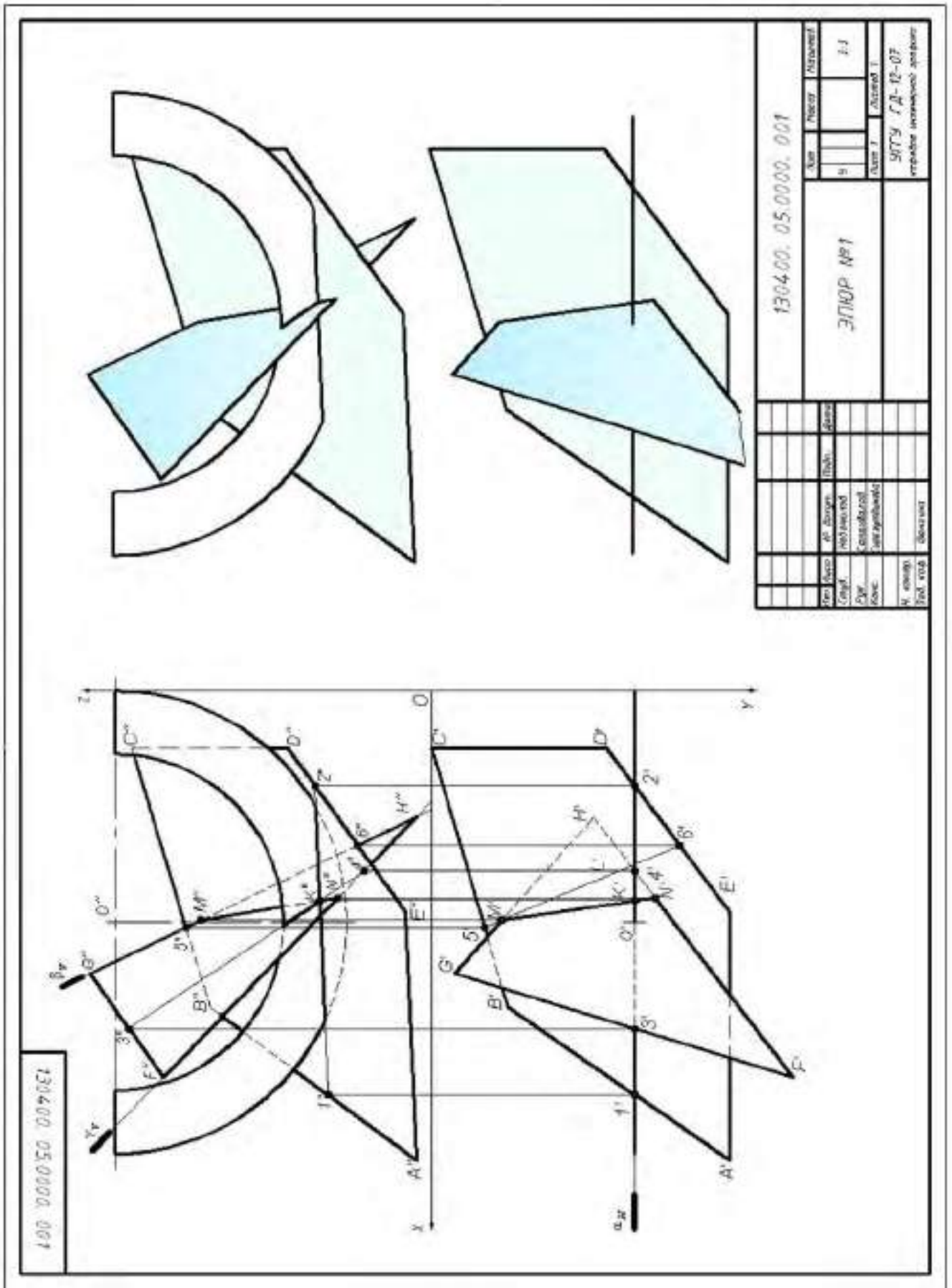


Рис. 5. Построение линии пересечения двух плоскостей

Вспомогательная горизонтальная плоскость-посредник γ задана следом γ_V и пересекает плоскость α по горизонтали, проходящей через точку 3, а плоскость β по горизонтали (1, 2). Горизонтальные проекции этих горизонталей пересекаются в точке K. Строят фронтальную проекцию точки K, используя свойство принадлежности точки прямой линии. Точка K принадлежит обеим плоскостям α и β. Вторая точка N, общая для двух плоскостей α и β, определяется второй вспомогательной плоскостью-посредником частного положения δ (на чертеже задана следом δ_V). Искомая прямая (KN) является линией пересечения двух плоскостей α и β.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. Учеб. пособие. М.: Высшая школа. 2007.272 с.

2. Самохвалов Ю. И. Начертательная геометрия. Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ. 2011. 121 с.

3. Самохвалов Ю. И., Шангина Е. И. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Учебно-методическое пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ. 2011. 96 с.

Минобрнауки Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов,
выполнению практических и контрольных работ*

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 4
1.1. Основные виды связей и их реакции 4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары 5
1.3. Условия равновесия систем сил 7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел 8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил 17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА 26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки 26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси 28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела 29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях 32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 57
3.1. Основные понятия сложного движения точки 57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении 60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки 73
4.3. Колебания материальной точки 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы . 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 155

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

1.1. Основные виды связей и их реакции

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей. **Гибкая связь**. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\bar{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

Цилиндрический шарнир (подшипник) создает соединение, при котором

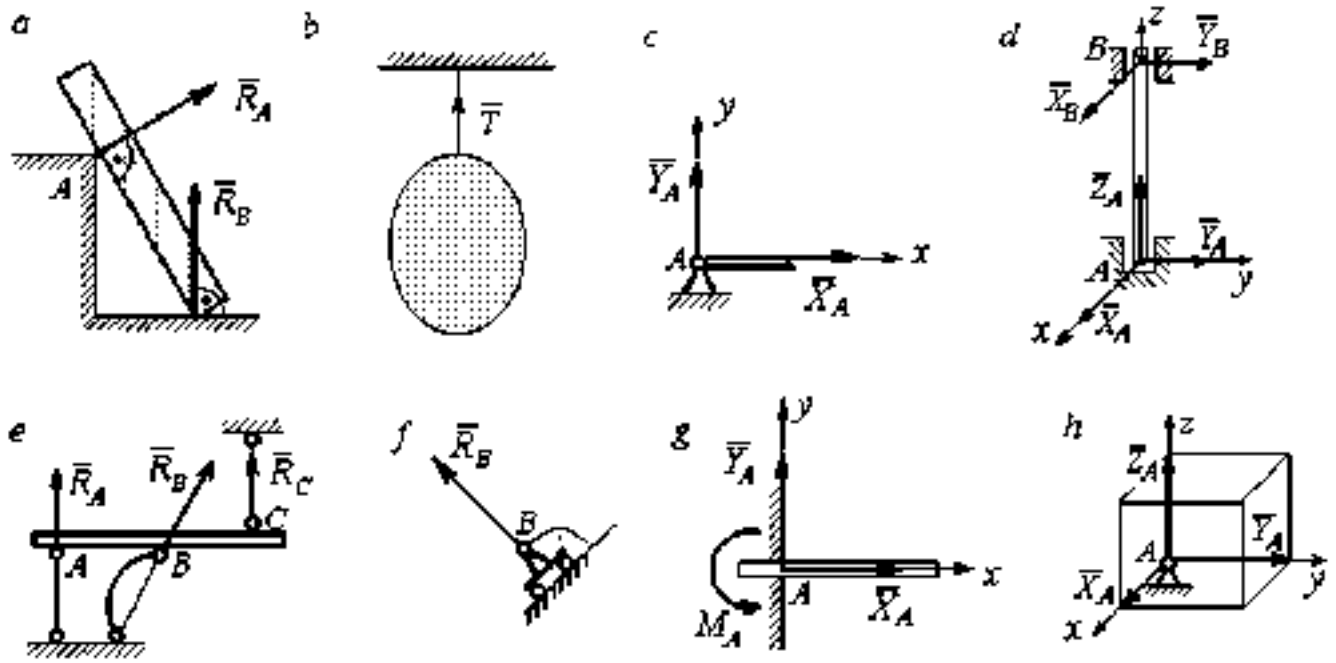


Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:
a – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити, *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника, *e* – реакция невесомого стержня, *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач

реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, *c*). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *d*) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, *e*). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *f*) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, *g*) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы F относительно центра O $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра O, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние h от центра O до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, *a*).

Величину h называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

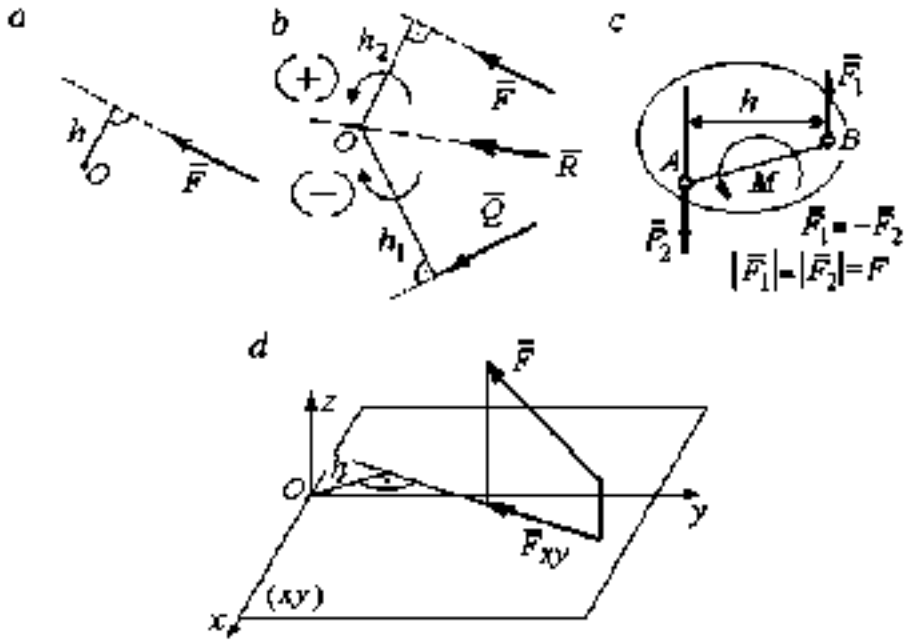


Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
a, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил;
d – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, *b* показано, что момент силы $\bar{F}$ относительно центра O положительный, а момент силы $\bar{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\bar{R}$ относительно центра O равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр O и плечо силы равно нулю.

Парой сил, или просто парой (рис. 1.2, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.2, *c*).

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы F относительно

оси z: $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где F_{xy} – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость xy, перпендикулярную оси z, h – плечо проекции F_{xy} относительно центра O – точки пересечения оси z и плоскости xOy.

1.3. Условия равновесия систем сил

Плоской системой сил называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Пространственной системой сил называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для **равновесия пространственной системы сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси x, y, z; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними,** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

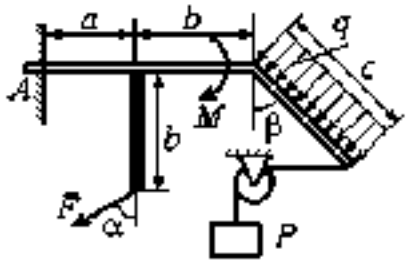
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

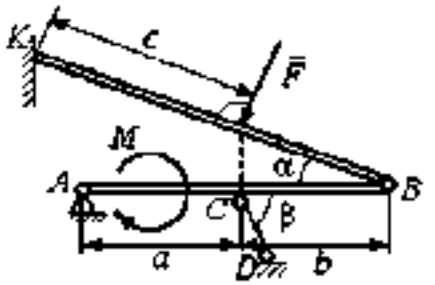
В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

Варианты № 1, 11, 21	
Задача 1	Задача 2



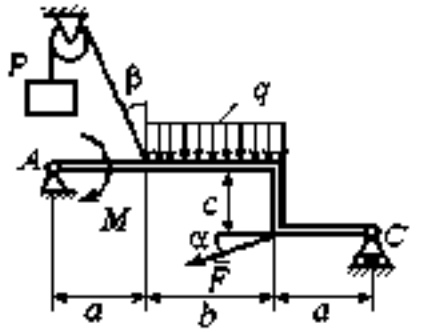
Найти реакцию жесткой заделки в точке A



Найти реакции шарниров A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

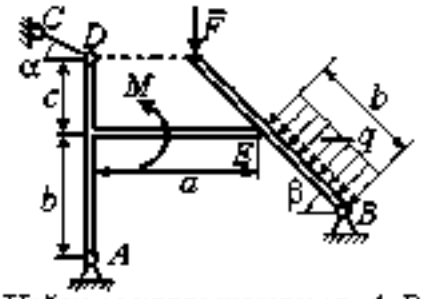
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

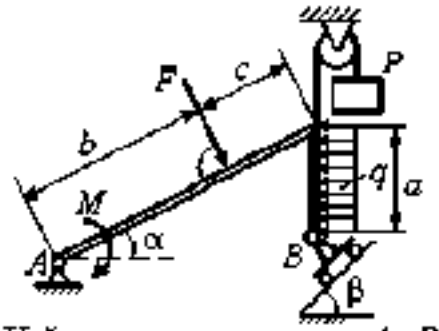
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B, реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

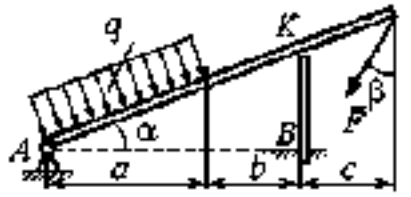
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакцию шарниров A и B

Задача 2

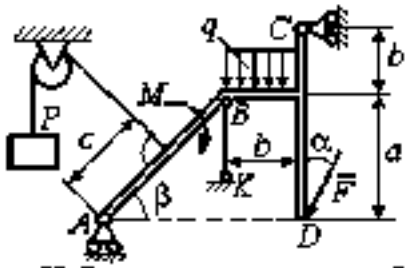


Найти реакцию шарнира A, реакцию опоры в точке K и реакцию жесткой заделки в точке B

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

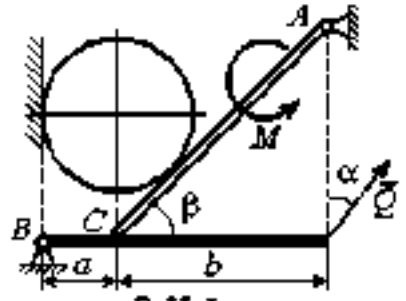
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK и реакцию шарниров A, C

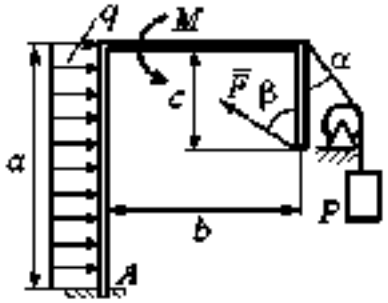
Задача 2



Вес шара P. Найти реакцию шарниров A, B, давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке C и уравновешивающую силу Q

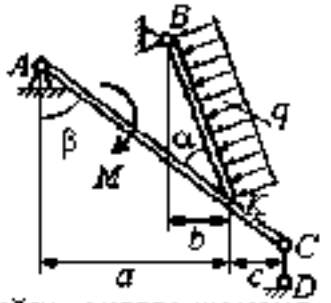
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

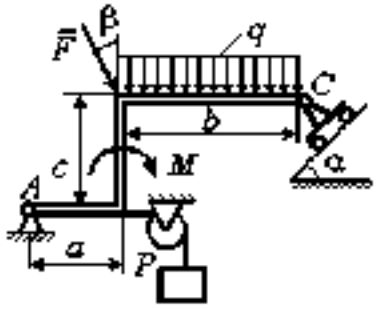
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

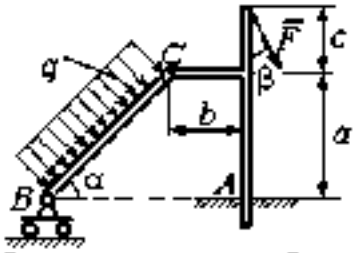
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

Задача 2

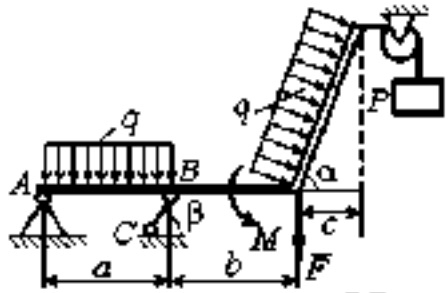


Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 –26

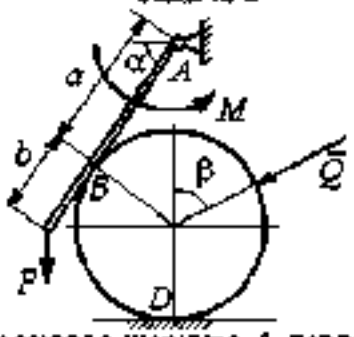
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

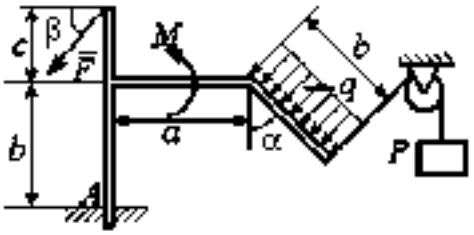
Задача 2



Найти реакцию шарнира A, давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

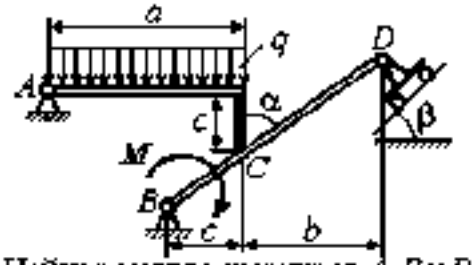
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

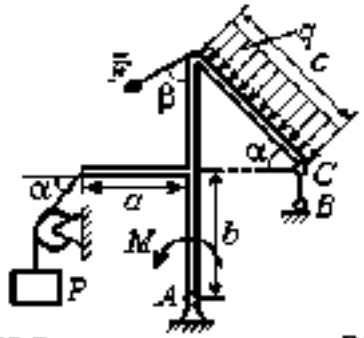
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

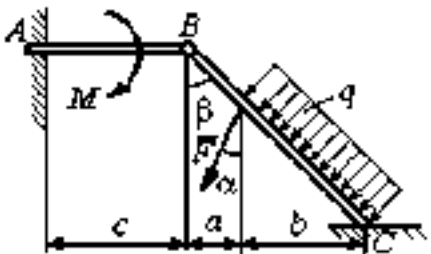
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

Задача 2

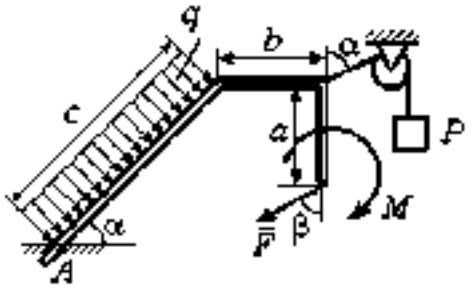


Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

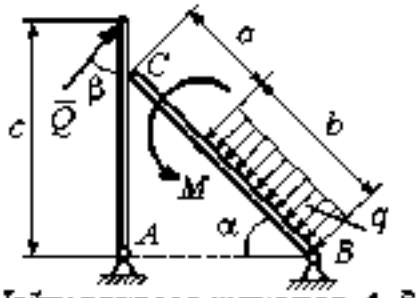
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B, реакцию опоры в точке C и уравновешивающую силу Q

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P, кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F, кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q, кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M, кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α, град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β, град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a, м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b, м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c, м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P, кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F, кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q, кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M, кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α, град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β, град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a, м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b, м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c, м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Задача 1. Рама ACE (рис. 1.7) в точке A закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке B поддерживается вертикальным невесомым стержнем BK. На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке D под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке AB. В точке E под прямым углом к участку балки CE прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира A и реакцию стержневой опоры BK, если $a = 2$ м.

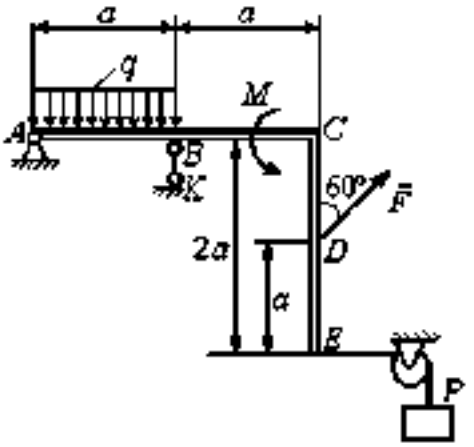


Рис. 1.7. Конструкция рамы

Решение

Выбираем систему координат xAy, например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира A двумя ее составляющими $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\bar{R}_B$ невесомой стержневой опоры BK приложена в точке B и направлена вдоль стержня BK. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\bar{Q}$. Сила $\bar{Q}$ приложена в середине отрезка AB и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза P на раму изображается реакцией $\bar{T}$, равной по величине весу груза.

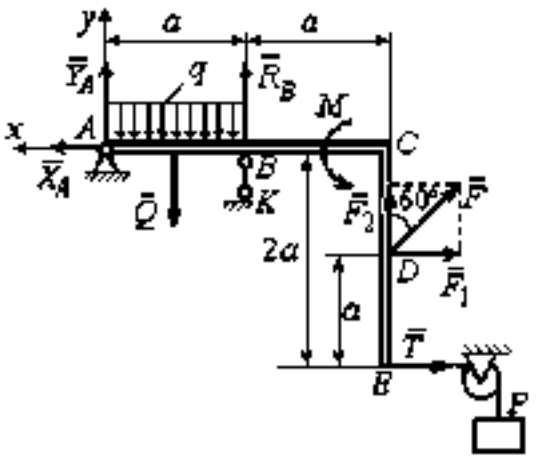


Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\bar{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси x, y, и моменты сил относительно центра A, уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{kv} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q\frac{a}{2} + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра A использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B:

$$X_A - 28{,}66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121{,}32 = 0.$$

Решая систему, найдем X_A = 28,66 Н, Y_A = 59,66 Н, R_B = – 60,66 Н.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции R_B стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18 \text{ Н}.$$

Задача 2. Балка $ABLC$ с вертикальной частью AB и горизонтальной перекладиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° в точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине CL, а в точке E закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью q = 2 кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине F = 10 кН, и пара сил с моментом M = 5 кН·м. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E, если a = 2 м.

Решение

Разделяем систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок $ABLC$ и EC отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку $ABLC$ (рис. 1.10, a). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\bar{Q}_1$, приложенной в середине отрезка BL, направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a = 4$ кН. Кроме силы $\bar{Q}_1$ и пары сил с моментом M на балку действуют реакция жёсткой заделки в точке A, имеющая своими составляющими силы $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и пару сил с моментом M_A, а также реакция шарнира C, разложенная на составляющие $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$ (см. рис. 1.10, a). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат xAy, как показано на рис. 1.10, a, и составим уравнения равновесия:

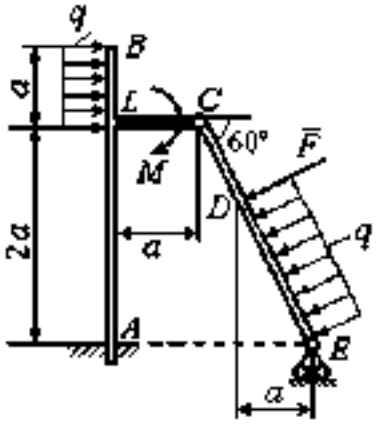


Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0.$$

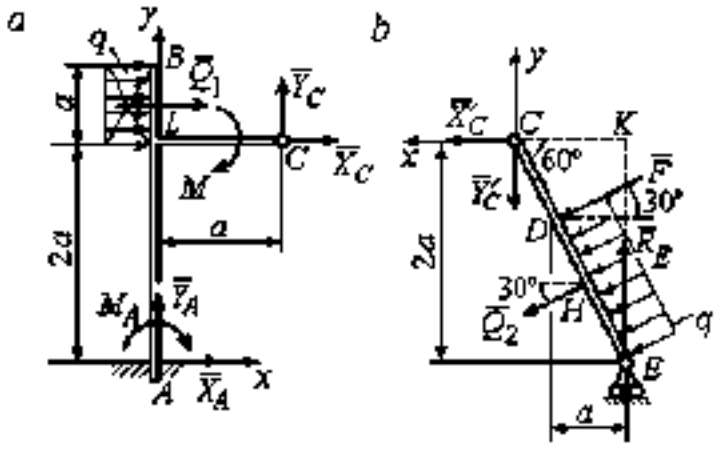


Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку $ABLC$,
b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C \cdot 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки EC. Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\bar{Q}_2$, приложенной в середине отрезка ED, направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8$ кН. На балку кроме сил $\bar{Q}_2$, $\bar{F}$ действуют реакции связей: $\bar{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке

E и $\bar{X}'_C$, $\bar{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира C. Силы $\bar{X}'_C$, $\bar{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, *a*, *b*). Действующие на балку EC силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат xCy, как показано на рис. 1.10, *b*, и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку C. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2\sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + X'_C = 0,\ \sum F_{ky} = R_E - Q_2\cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0,$$

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = -F\cdot CD - Q_2\cdot CH + R_E\cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a\operatorname{tg}30^\circ$. Заменяя в уравнениях величины X'_C на X_C, а Y'_C на Y_C и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0,\ Y_A + Y_C = 0,\ -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0,$$

$$X_C + 15{,}59 = 0,\ -Y_C + R_E - 9 = 0,\ 2{,}31R_E - 27{,}14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11{,}59\ \text{кН},\ Y_A = -2{,}76\ \text{кН},\ M_A = 42{,}87\ \text{кН·м},$$

$$X_C = -15{,}59\ \text{кН},\ Y_C = 2{,}76\ \text{кН},\ R_E = 11{,}76\ \text{кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки A и шарнира C:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91\ \text{кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83\ \text{кН}.$$

1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\bar{F}$, пара сил с моментом M и сила $\bar{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q. Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравновешивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\bar{F}$, $\bar{Q}$ и пара сил с моментом M. Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

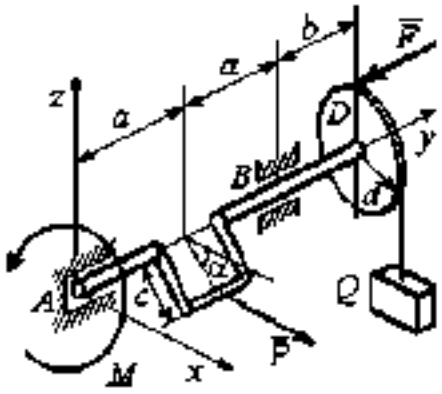
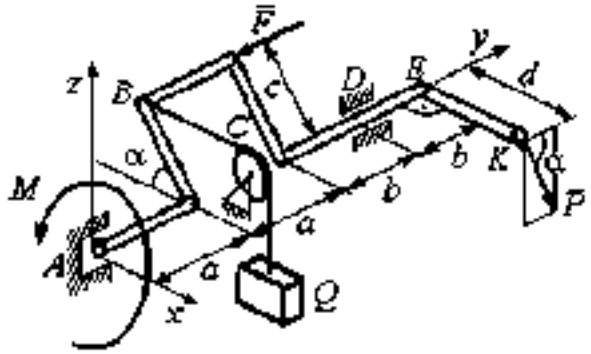
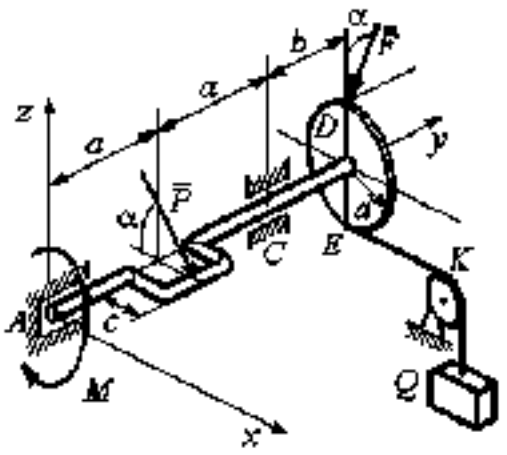
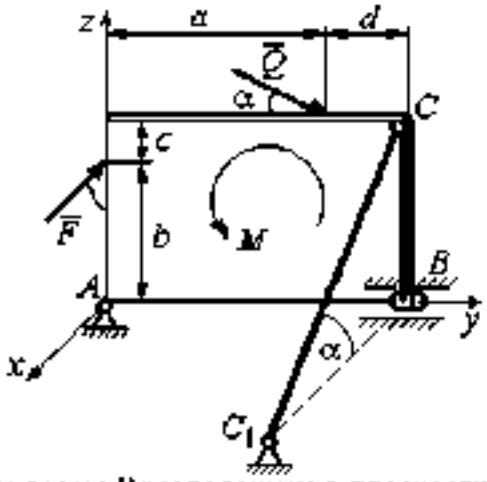
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Сила $\bar{F}$ параллельна оси Ay, сила $\bar{P}$ параллельна оси Ax, нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравновешивающего груза Q	Сила $\bar{F}$ параллельна оси Ay, сила $\bar{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy, отрезок нити BC параллелен оси Ax, рукоять вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравновешивающего момента M

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	
Сила $\bar{F}$ лежит в плоскости zAy, сила $\bar{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAx, отрезок вала EK параллелен оси Ax Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и C, а также величину уравновешивающего груза Q	Плита весом P расположена в плоскости zAy, пара сил с моментом M действует в плоскости плиты, стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной zAx; сила $\bar{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\bar{F}$ перпендикулярна плоскости плиты Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

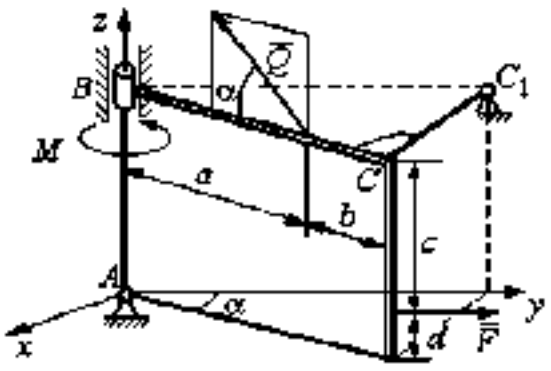
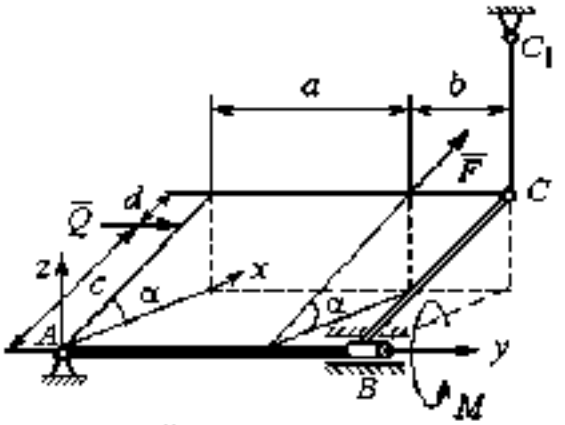
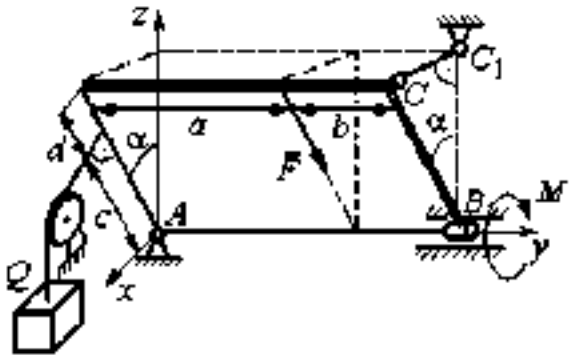
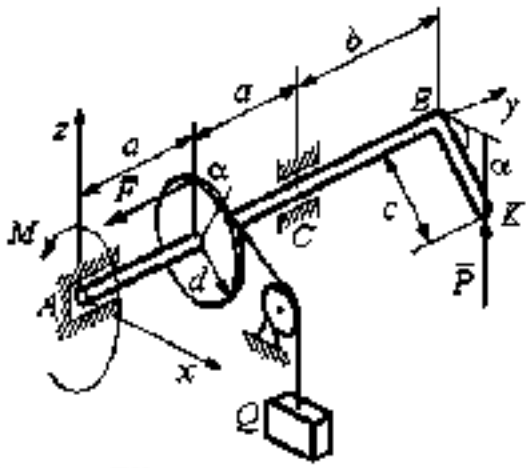
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; сила $\bar{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\bar{F}$ параллельна оси Ay; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	Плита весом P отклонена на угол α от горизонтальной плоскости xAy; сила $\bar{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси Ay; сила $\bar{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси Az. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	
Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; нить, удерживающая груз Q, находится плоскости zAx, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\bar{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости zAy. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	Рукоять EK перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости xAy; сила $\bar{P}$ параллельна оси Az; сила $\bar{F}$ параллельна оси Ay; нить, удерживающая груз Q, сходит со шкива по касательной Найти реакции подпятника A, подшипника C, и величину уравновешивающего груза Q

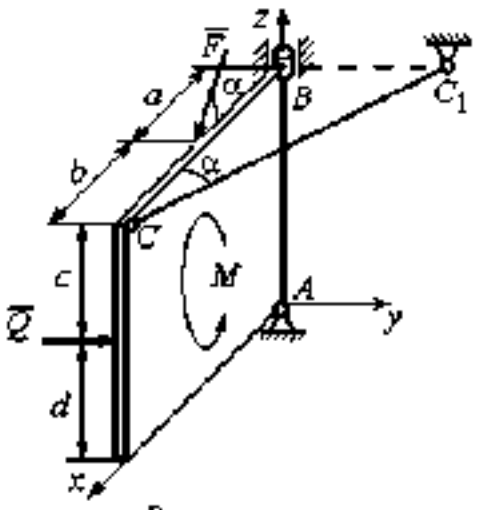
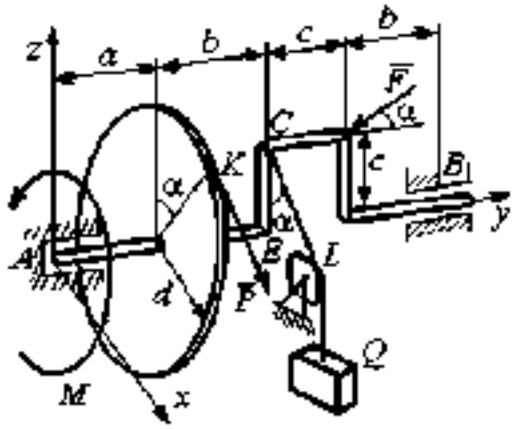
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
	
Плита весом P находится в вертикальной плоскости zAx; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной xAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты: сила $\bar{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты, сила $\bar{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	Сила $\bar{F}$ находится в плоскости zAy; стойка CE находится в плоскости zAy, отрезок CL нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной xAz, сила $\bar{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке K Найти реакции подпятника A, подшипника B и величину уравновешивающего момента M

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 7 10, 17 20, 27 30

Таблица 1.2

Исходные данные для задания С2.

Равновесие пространственной системы сил

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P, кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F, кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q, кН	–	12	–	12	8	12	10	–	10	12
M, кН·м	12	–	10	8	12	6	8	6	8	–
α, град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a, м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b, м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c, м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d, м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
P, кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F, кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q, кН	–	14	–	10	10	12	14	–	12	14
M, кН·м	10	–	12	12	12	8	10	10	10	–
α, град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a, м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b, м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c, м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d, м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F, кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q, кН	–	10	–	12	14	10	16	–	12	6
M, кН·м	12	–	16	14	8	10	8	12	10	–
α, град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a, м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b, м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c, м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d, м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

Задача 1. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике C и подшипнике K. Вал имеет шкив I радиуса R и шкив II радиуса r, перпендикулярные оси вала. Рукоять AE параллельна оси Cx. Нить, удерживающая груз Q, сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\bar{F}$, $\bar{P}$ и пара сил с моментом M, закручивающая вал вокруг оси Cy. Сила $\bar{F}$ находится в плоскости, параллельной zCy, и составляет угол 60° с направлением оси Cy. Сила $\bar{P}$ приложена в точке B шкива II, определяемой центральным углом 30°, и направлена по касательной. Определить величину уравновешивающего момента M и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН, $F = 2$ кН, $Q = 3$ кН, $R = 0{,}6$ м, $r = 0{,}3$ м, $a = 0{,}8$ м, $b = 0{,}4$ м.

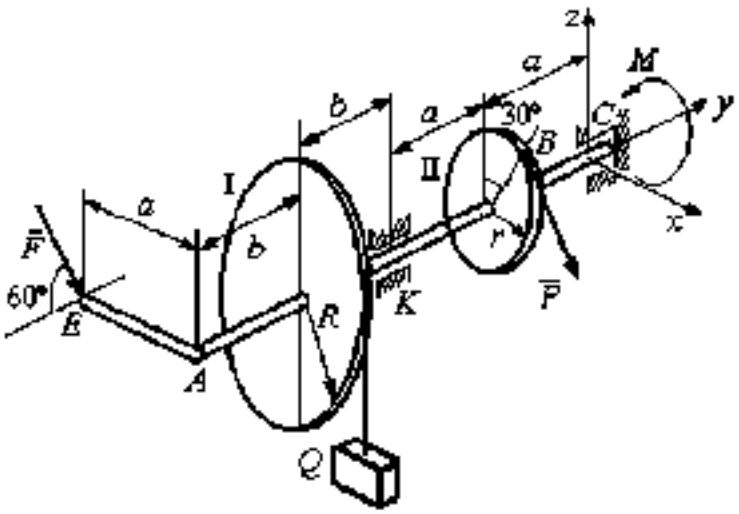


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\bar{F}$, $\bar{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник C и подшипник K. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника C раскладываем на три составляющие: $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$, $\bar{Z}_C$, направленные

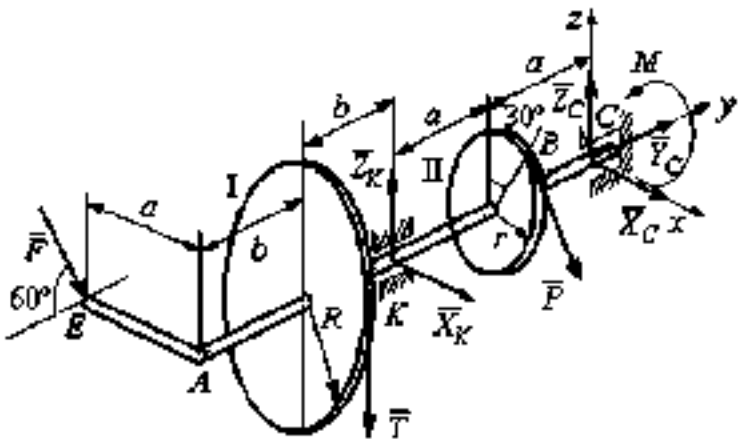


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

вдоль координатных осей. Реакция подшипника K лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\bar{X}_K, \bar{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей x, z. Реакция нити $\bar{T}$ направлена вдоль нити от точки K и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю ($\bar{P}, \bar{F}, \bar{X}_K, \bar{Z}_K, \bar{T}, \bar{X}_C, \bar{Y}_C, \bar{Z}_C, M$) ∞ 0, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\bar{F}_k) = 0, \sum M_y(\bar{F}_k) = 0, \sum M_z(\bar{F}_k) = 0.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

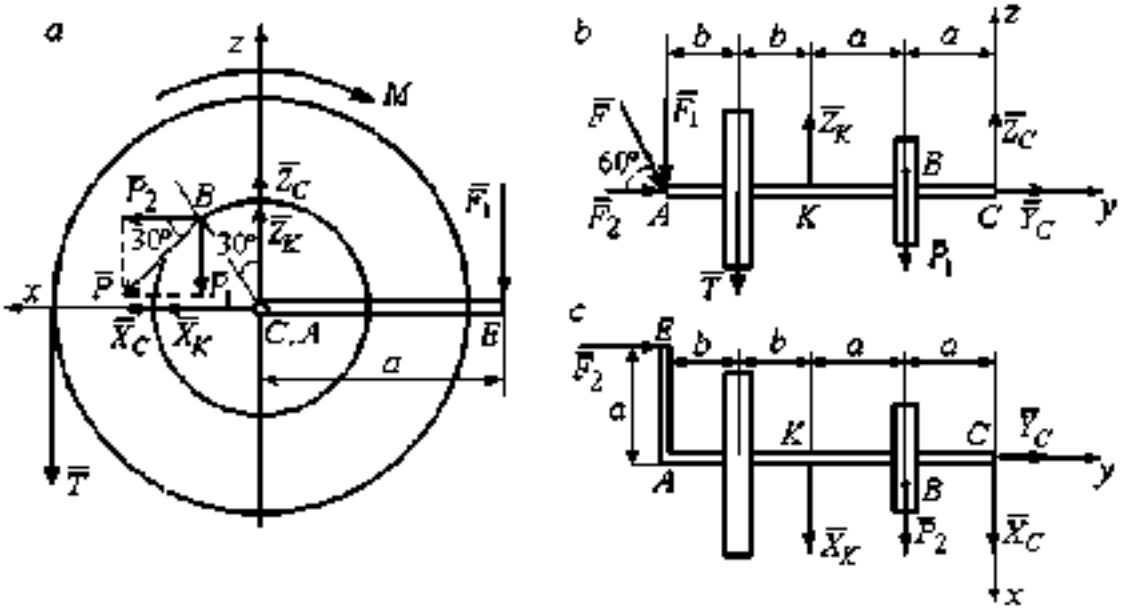


Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:

a – вид вала в проекции на плоскость zCx с положительного конца оси y;

b – вид вала в проекции на плоскость zCy с положительного конца оси x;

c – вид вала в проекции на плоскость xCy с положительного конца оси z.

На рис. 1.16, *а* показаны проекции всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки *C*, получим значения моментов исходных сил относительно оси *y*.

Для вычисления моментов сил относительно оси *x* достаточно найти моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси z.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P_2 + X_K + X_C = 0,\ \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0,$$

$$\sum F_{kz} = -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F_1 a + TR + Pr - M = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P\cos 60^\circ = 0{,}5P,\ P_2 = P\cos 30^\circ = 0{,}87P,$$

$$F_1 = F\cos 30^\circ = 0{,}87F,\ F_2 = F\cos 60^\circ = 0{,}5F$$ (см. рис. 1.16 *а*, *b*),

получим систему уравнений:

$$0{,}87 \cdot 4 + X_K + X_C = 0,\ \ 2 \cdot 0{,}5 + Y_C = 0,\ -4 \cdot 0{,}5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0{,}87 = 0,$$

$$0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}8 - 1{,}6Z_K - 3 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4) + 2 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}4) = 0,$$

$$-0{,}87 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}3 - M = 0,\ \ 0{,}87 \cdot 4 \cdot 0{,}8 + 1{,}6 \cdot X_K - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0.$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2{,}24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6{,}39$ кН, $X_K = -1{,}24$ кН, $Z_K = 0{,}35$ кН, $M = 2{,}3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6{,}84$ кН,

реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1{,}29$ кН.

Задача 2. Плита весом P расположена в вертикальной плоскости zAy. В точке А плита закреплена пространственным шарниром. а в точке B на оси y опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня CC_1, прикреплённого шарниром к плите в её верхнем углу. в точке C перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

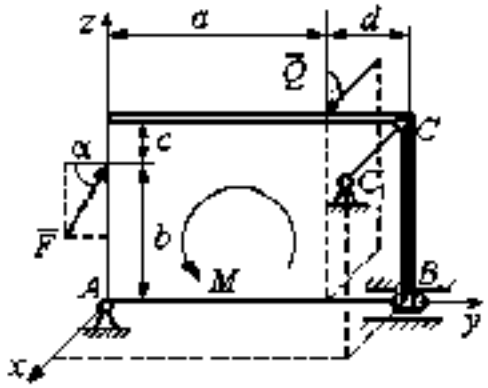


Рис. 1.17. Равновесие плиты

На плиту действует сила $\bar{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно её плоскости, и сила $\bar{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом α к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом M. Найти реакции шарниров A и B и усилие в стержневой подпорке CC_1 при равновесии плиты, если параметры нагрузки: P = 1 кН, Q = 500 Н, F = 400 Н, M = 300 Н·м, $\alpha = 35°$, a = 2 м, b = 1.5 м, c = 0.2 м, d = 0,4 м.

Решение

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира A раскладывается на три составляющие: $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника B лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$, направленные вдоль координатных осей x, z. Реакция стержня $\bar{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

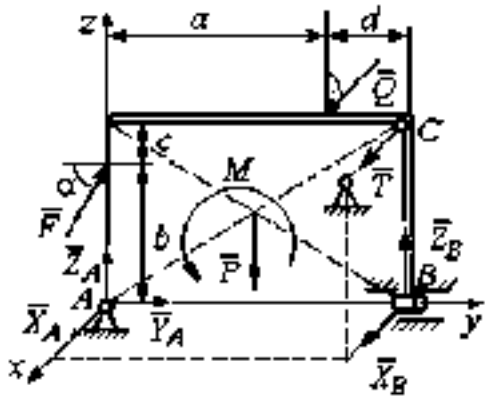


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \sim 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\bar{F}_k)=0,\ \sum M_y(\bar{F}_k)=0,\ \sum M_z(\bar{F}_k)=0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx}=0,\ X_A+Q+X_B+T=0,$$

$$\sum F_{ky}=0,\ Y_A+F\cos\alpha=0,$$

$$\sum F_{kz}=0,\ Z_A+F\sin\alpha-P+Z_B=0$$

$$\sum M_x(\bar{F}_k)=0,\ -F\cos\alpha\cdot b-P\cdot 0{,}5(a+d)+Z_B(a+d)+M=0,$$

$$\sum M_y(\bar{F}_k)=0,\ Q\cdot(b+c)+T\cdot(b+c)=0.$$

$$\sum M_z(\bar{F}_k)=0,\ -Q\cdot a-T\cdot(a+d)-X_B\cdot(a+d)=0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A+500+X_B+T=0,\ Y_A+400\cdot 0{,}82=0,\ Z_A+400\cdot 0{,}57-1000+Z_B=0,$$

$$-400\cdot 0{,}82\cdot 1{,}5-1000\cdot 0{,}5\cdot 2{,}4+Z_B\cdot 2{,}4+300=0,$$

$$500\cdot 1{,}7+T\cdot 1{,}7=0,\ -500\cdot 2-T\cdot 2{,}4-X_B\cdot 2{,}4=0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T=-500\text{ Н},\ X_B=83{,}33\text{ Н},\ Z_B=580\text{ Н},$$

$$X_A=-83{,}33\text{ Н},\ Y_A=-328\text{ Н},\ Z_A=192\text{ Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира A:

$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}=389{,}09\text{ Н},$$

цилиндрического шарнира B: $R_B=\sqrt{Y_B^2+Z_B^2}=585{,}95$ Н.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Векторный способ основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $\breve{OM} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки O, принятой за начало отсчета.

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги, $\vec{\tau}$ –единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Мгновенное ускорение, или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины a_x, a_y, a_z – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям n и τ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина a_n называется **нормальным ускорением** точки и вычисляется по формуле: $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина a_τ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданного закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$

вектор $\vec{a}_\tau$ в направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с $\dot{\varphi}$, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела (**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – величина угловой скорости тела; h

– расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки M при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки M; $\vec{V}_A$ – скорость полюса A; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки M при вращении тела вокруг полюса A, модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; MA – расстояние между полюсом A и точкой M.

Мгновенным центром скоростей называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры

находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, *a*).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, *b*, *c*).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B параллельны друг другу, но линия AB, соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, *d*), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный

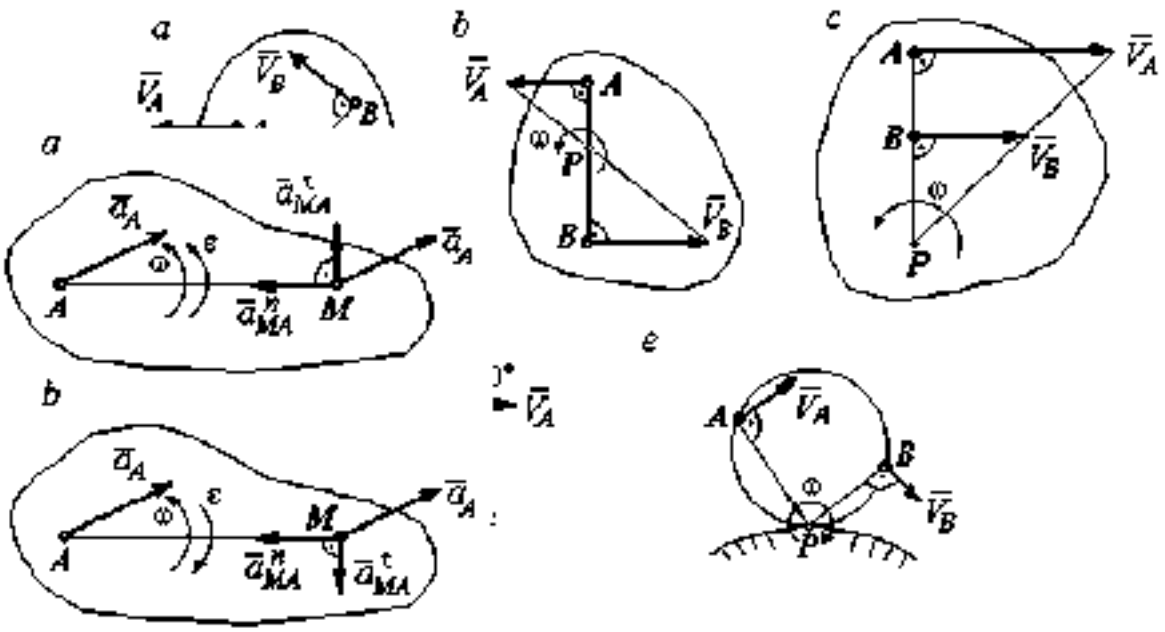


Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

Рис. 2.1. К способам построения мгновенного центра скоростей

центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, *e*).

Ускорение любой точки *M* плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{MA} + \bar{a}^{n}_{MA},$$

где $\bar{a}_A$ – ускорение полюса *A*; $\bar{a}^{\tau}_{MA}$, $\bar{a}^{n}_{MA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса *A*.

Вектор нормального ускорения $\bar{a}^{n}_{MA}$ всегда направлен от точки *M* к полюсу *A*. Вектор касательного ускорения $\bar{a}^{\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку *AM* в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, *a*), и против вращения, если оно

замедленное (рис. 2.2, *б*). Численно величины касательного и нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM\ ,\quad a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM\ ,$$

где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A (см. рис. 2.2).

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M, то для определения ускорения точки M используется векторное равенство

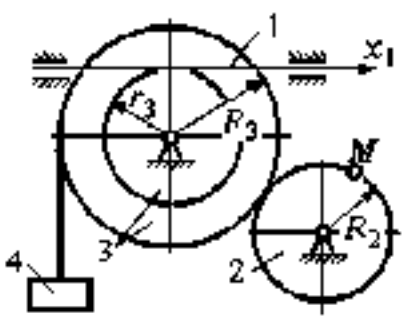
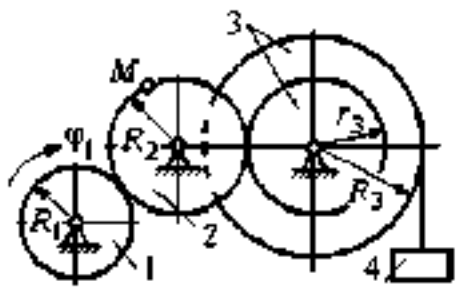
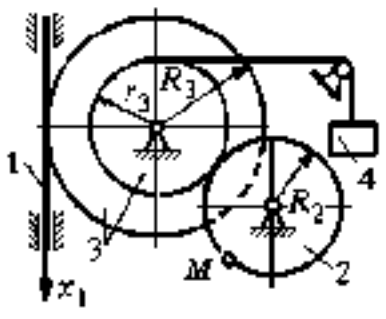
$$\bar{a}^{\tau}_{M} + \bar{a}^{n}_{M} = \bar{a}^{\tau}_{A} + \bar{a}^{n}_{A} + \bar{a}^{\tau}_{MA} + \bar{a}^{n}_{MA},$$

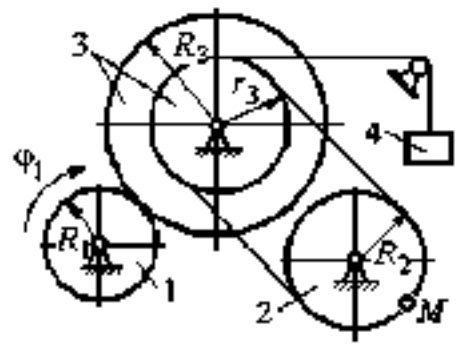
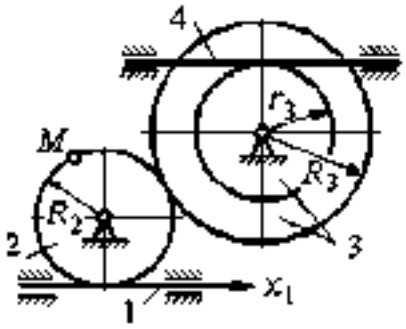
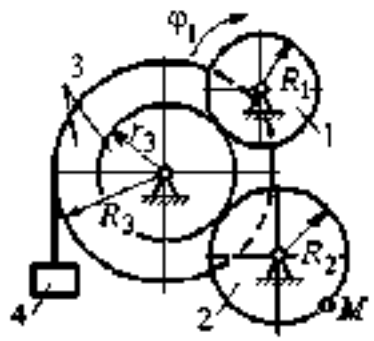
где $\bar{a}^{\tau}_{M}$, $\bar{a}^{n}_{M}$, $\bar{a}^{\tau}_{A}$, $\bar{a}^{n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
		

Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
		

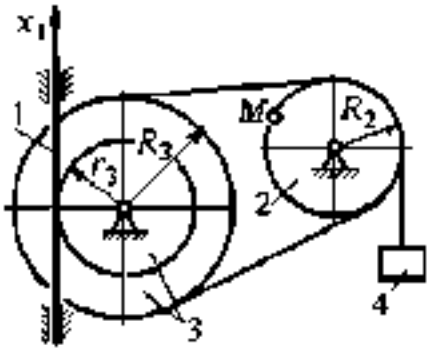
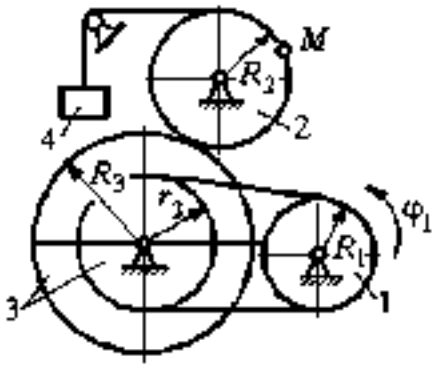
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	

Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

Окончание вариантов задания К1

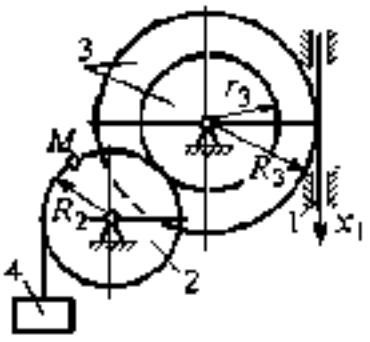
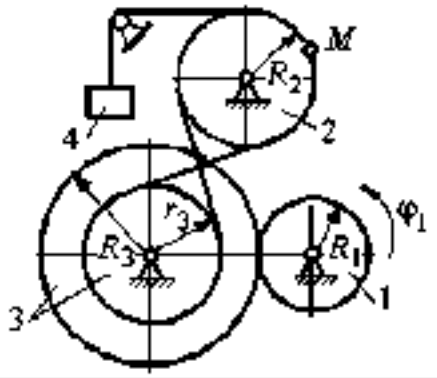
Варианты № 9, 19, 29	Варианты № 10, 20, 30
	

Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
1	–	40	45	35	$x_1(t) = (3t-1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	–	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	–	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	–	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	–	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	–	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	–	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2

Окончание табл. 2.1

Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
15	–	20	30	20	$x_1(t)=3t^2-\cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\cos(\pi t/2)$	1
17	–	20	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t)=5t+\cos(\pi t/2)$	1
19	–	22	50	18	$x_1(t)=t^2+\cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\sin(\pi t/4)$	4
21	–	20	40	20	$x_1(t)=t+(3t-4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t)=2t^2+12\cos(\pi t/6)$	3
23	–	45	60	40	$x_1(t)=4t^2+\sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t)=2t^2+4\cos(\pi t/2)$	2
25	–	15	35	25	$x_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\sin(\pi t/2)$	1
27	–	15	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/2)$	1
29	–	35	50	10	$x_1(t)=t^3-\cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/4)$	4

Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, *а*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на момент времени t_1, а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = 2t^2 - 5t$ см, $t_1 = 1$ с.

Решение

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

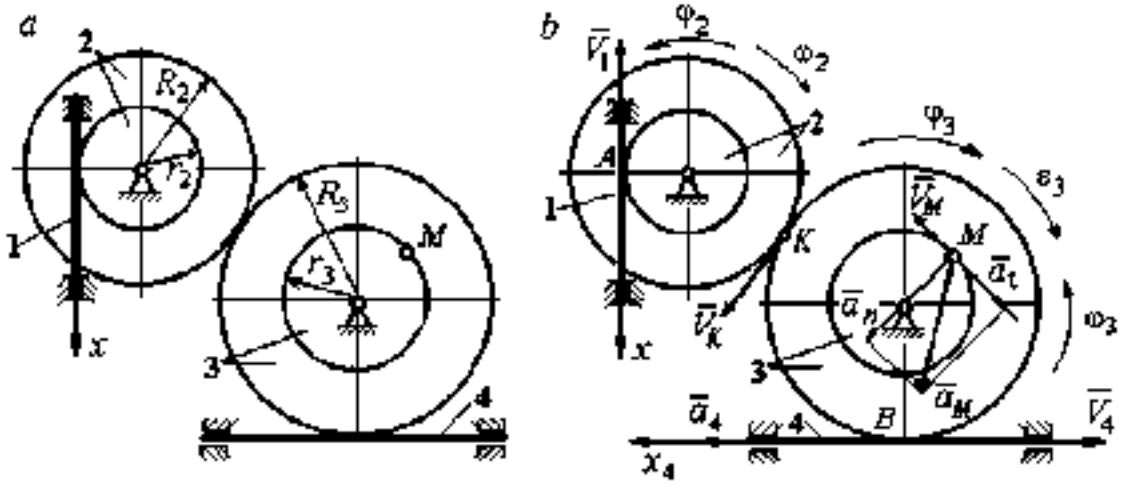


Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
a – схема механизма, *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками φ_2, φ_3, а положительное направление движения звена 4 – направлением оси x_4.

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты x. Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1) = -1$ см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси x. Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\bar{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси x. Эту же скорость будет иметь точка A – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии r_2 от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r_2} = \dfrac{|4t-5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с.

При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1) = -0{,}2$ рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью

$\omega_2(1)=|\dot{\varphi}_2(1)|$ = 0,2 рад/с происходит в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой ω_2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_2. При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3}=\frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая скорость диска 3 $\omega_3=\omega_2\frac{R_2}{R_3}=|2t-2{,}5|$ = $|\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1=1$с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1)=-0{,}5$ рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1)=|\dot{\varphi}_3(1)|=0{,}5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_3, как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M=\omega_3 r_3$. В момент времени $t_1=1$ с модуль скорости $V_M(1)=2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки *M* (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4=V_B=\omega_3 R_3$ = $|2t-2{,}5|\cdot 8$ = $|\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1=1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1)=-4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1)$ = 4 см/с, направлен вдоль оси x_4 в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t)=|\dot{\omega}_3|=|\ddot{\varphi}_3|$ = 2 рад/с^2. Из того, что угловая скорость ω_3 и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота φ_3, диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение a_τ точки *M* рассчитывается по формуле $a_\tau=\varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1=1$ с: $a_\tau=8$ см/с^2. Так как вращение диска 3 замедленное,

вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, *b*). Нормальное ускорение a_n точки M рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1)$ = 1 см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, *b*). Полное ускорение точки M в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)} = 8{,}06$ см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

Ускорение a_4 звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

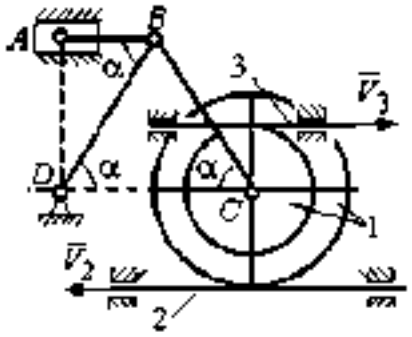
Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение a_4 не зависит от времени: a_4= 16 см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси x_4 в сторону положительных значений.

2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

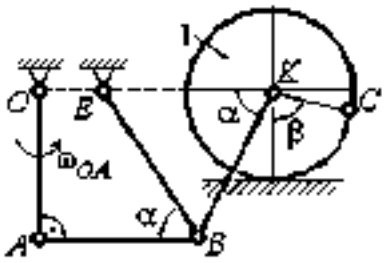
Варианты № 1, 11, 21



Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$

Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	AD, см	α, град	V_2, см/с	V_3, см/с
1	10	5	20	30	8	10
11	12	8	25	45	10	4
21	10	6	15	60	5	5

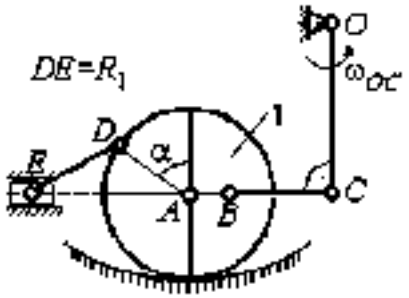
Варианты № 2, 12, 22



Найти: V_A, V_B, V_K, $\omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}$, ω_{BE}, ω_{BK}

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	OE, см	α, град	β, град	V_C, см/с
2	3	5	4	30	60	10
12	4	8	6	45	90	8
22	5	12	2	60	120	12

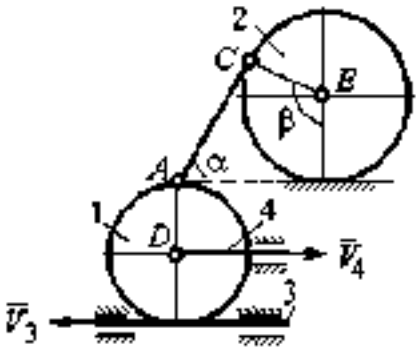
Варианты № 3, 13, 23



Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, $\omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$

Номер варианта задания	R_1, см	OC, см	AB, см	BC, см	α, град	ω_{OC}, рад/с
3	12	18	10	35	60	4
13	10	15	10	25	90	8
23	15	20	5	20	120	6

Варианты № 4, 14, 24

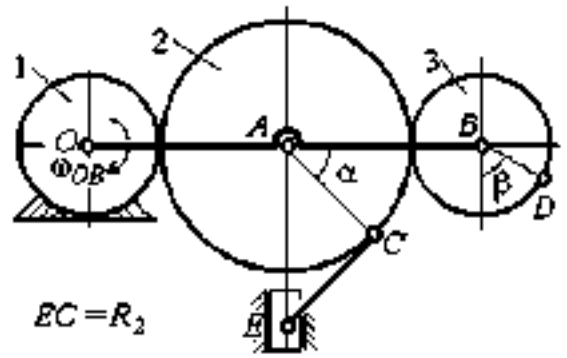


Найти: V_A, V_C, V_E, $\omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	α, град	β, град	V_3, см/с	V_4, см/с
4	10	15	30	60	8	4
14	6	10	45	90	4	6
24	10	12	60	120	3	3

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

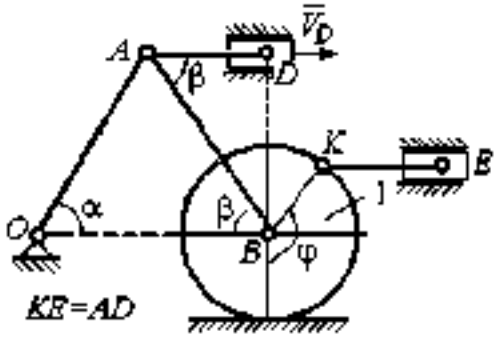
Варианты № 5, 15, 25



Найти: $V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, \omega_2, \omega_3, \omega_{EC}$

Номер варианта условия	R_1, см	R_2, см	R_3, см	α, град	β, град	ω_{OB}, рад/с
5	10	20	12	60	0	6
15	6	18	10	90	90	8
25	20	25	15	120	180	4

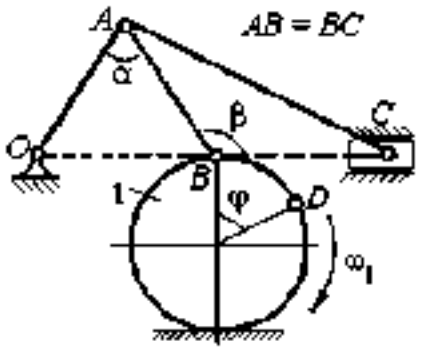
Варианты № 6, 16, 26



Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}, \omega_{KE}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
6	10	20	30	60	60	12
16	12	26	30	30	90	8
26	15	30	60	60	120	15

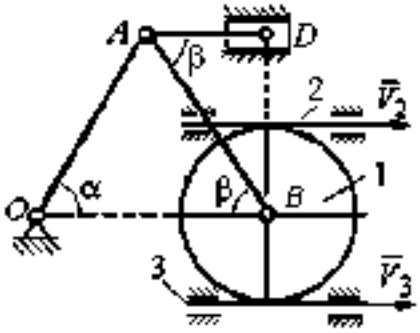
Варианты № 7, 17, 27



Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	AB, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
7	10	20	30	60	60	12
17	12	25	60	120	90	16
27	8	16	30	60	120	10

Варианты № 8, 18, 29

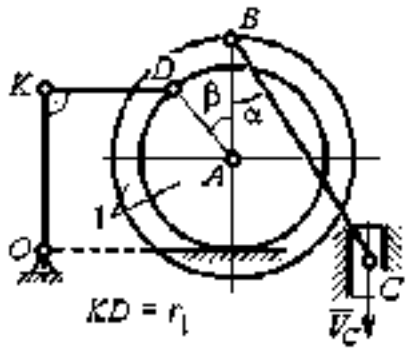
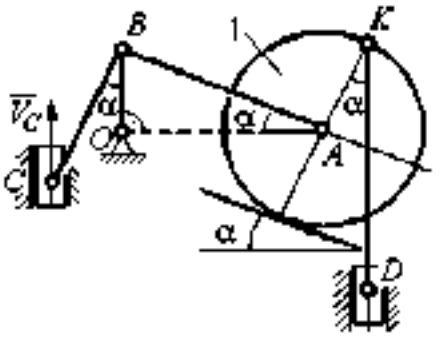


Найти: $V_A, V_B, V_D, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	V_2, см/с	V_3, см/с
8	10	20	30	60	12	4
18	12	26	30	30	8	2
28	15	30	60	60	6	3

Рис. 2.7. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Окончание вариантов задания К2

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: ω_{OK}, ω_{KD}, ω_{BC}, ω_1, V_A, V_B, V_K, V_D	 Найти: V_A, V_B, V_D, V_K, ω_{CB}, ω_1, ω_{OB}, ω_{AB}, ω_{KD}

Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	α, град	β, град	BC, см	V_C, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	CB, см	OB, см	KD, см	α, град	V_C, см/с
9	20	12	45	60	60	8	**10**	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	**20**	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	**30**	15	30	60	60	60	3

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня OC и подвижных дисков 2 и 3 радиусами r_2, r_3, шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках A и C. Стержень OC вращается вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью ω_{OC}. Диск 2, увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом r_1. Диск 3, также увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзывания по подвижному диску 2. В точке D, расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке E шарнирно

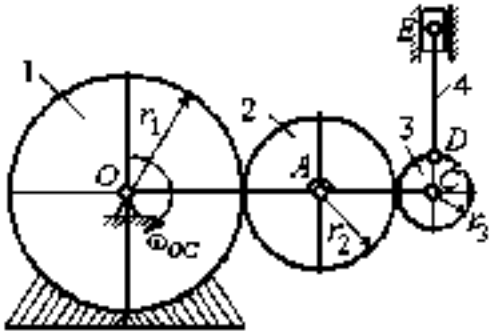


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

прикреплен поршень E, способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень OC горизонтален, стержень DE направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек A, C, D, E, угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: r_1 = 6 см, r_2 = 4 см, r_3 = 2 см, DE = 10 см, ω_{OC} = 1 рад/с.

Решение

Определим скорость точки A, общей для стержня OC и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2)$ = 10 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню OC и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой P_2. В этом случае скорость точки A может быть определена через угловую скорость диска ω_2 следующим образом: $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как V_A = 10 см/с, получим ω_2 = 2,5 рад/с.

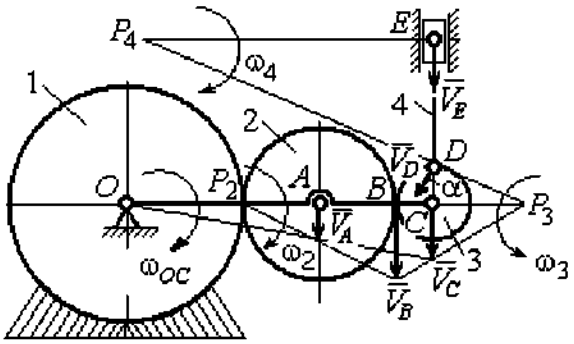


Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек B и C. Скорость точки B может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2$ = 20 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку BP_2 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей P_2.

Скорость точки C определяется через угловую скорость стержня OC: $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3)$ = 16 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню OC и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей P_3 диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины CP_3, получим: CP_3 = 8 см. Скорость точки C выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3} =$ 2 рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек C и B, принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки D $V_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}$ = 16,5 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку DP_3 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра P_3.

Для определения скорости поршня E воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки D и E. По построению, угол α между вектором $\vec{V}_D$ и осью DE равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos\alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0{,}97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos\alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки E: V_E=16 см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка P_4 – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек D и E (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \frac{V_E}{EP_4}$, где EP_4 – расстояние от точки E до мгновенного центра скоростей звена 4,

$EP_4 = DE \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ = 40 см. В результате, ω_4 = 0,4 рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки *D*.

Задача 2. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы *OA* и *ED* вращаются вокруг неподвижных центров *O* и *E*. В крайней точке *D* кривошипа *ED* к нему прикреплён шатун *DB*, второй конец которого в точке *B* прикреплён к кривошипу *OA*. Шатун *AC* прикреплён в точке *A* к кривошипу *AO*, а другим своим концом – к ползуну *C*, способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип *OA* вертикален, шатун *DB* расположен горизонтально, кривошип *ED* наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун *AC* отклонён на угол 30° от вертикального положения кривошипа *AO*. Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма *AC* = 6 см, *AB* = 2 см, *BO* = 8 см, *DB* = 10 см и скорость ползуна в данный момент V_C = 4 см/с.

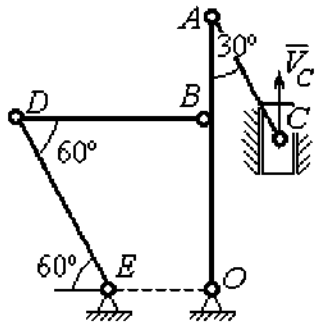


Рис. 2.11. Стержневой механизм

Решение

Кривошипы *OA* и *ED* совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек *A* и *B* перпендикулярны кривошипу *OA*, а скорость $\vec{V}_D$ точки *D* перпендикулярна кривошипу *ED*. Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей P_1 находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_C$. Угловая скорость звена AC равна $\omega_{AC} = \frac{V_C}{P_1C} = \frac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \frac{4}{3}$ рад/с. Далее, полагая, что точка A принадлежит шатуну AC, найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

Теперь, исходя из того, что точка A принадлежит как шатуну AC, так и кривошипу OA, найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \frac{V_A}{AO} = 0{,}4\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки B кривошипа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3{,}2\sqrt{3}$ см/с.

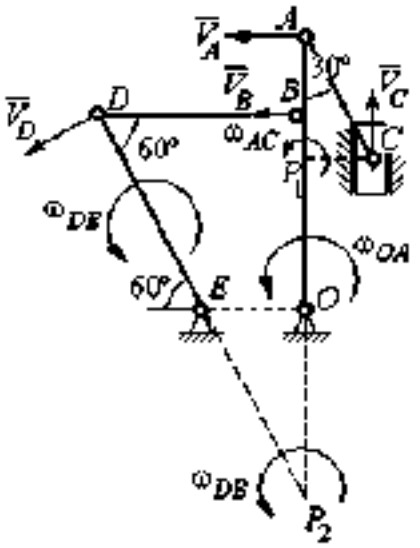


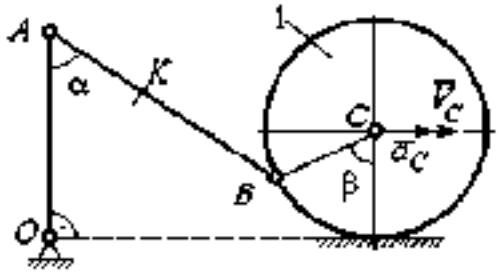
Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Шатун DB совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек B и D, построим мгновенный центр скоростей P_2 звена DB как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\bar{V}_B$ и $\bar{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна DB $\omega_{DB} = \frac{V_B}{P_2B} = \frac{3{,}2\sqrt{3}}{DB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 0{,}32$ рад/с. Скорость точки D $V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0{,}32 \frac{DB}{\sin 30^\circ} = 6{,}4$ см/с. Угловая скорость кривошипа DE $\omega_{DE} = \frac{V_D}{DE} = \frac{6.4}{(OB \cdot \sin 60^\circ)} = 0{,}69$ рад/с.

2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

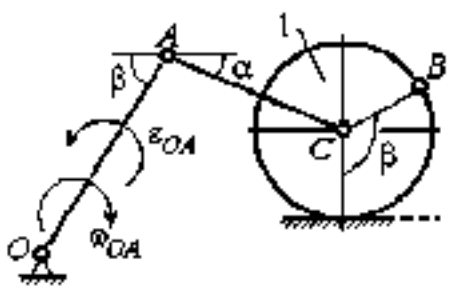
Варианты № 1, 11, 21



Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$

Номер варианта задания	AB, см	AK, см	α, град	β, град	R_1, см	V_C, см/с	a_C, см/с^2
1	16	10	60	120	10	12	6
11	20	16	30	60	8	10	8
21	18	10	60	180	6	8	4

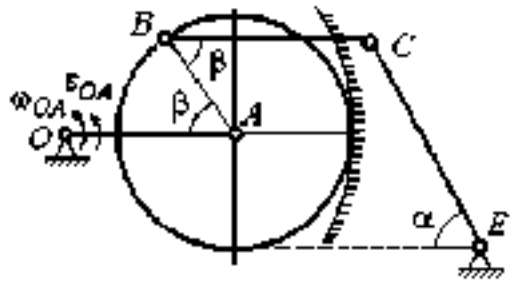
Варианты № 2, 12, 22



Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	AC, см	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
2	5	10	12	30	60	2	4
12	8	24	20	30	120	1	2
22	6	12	15	60	90	2	3

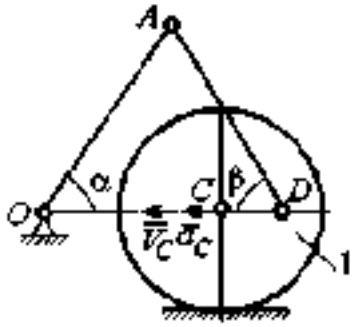
Варианты № 3, 13, 23



Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{BC}$

Номер варианта задания	BC, см	AO, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
3	16	15	60	90	10	2	3
13	18	12	90	60	8	3	2
23	14	12	30	120	10	2	4

Варианты № 4, 14, 24

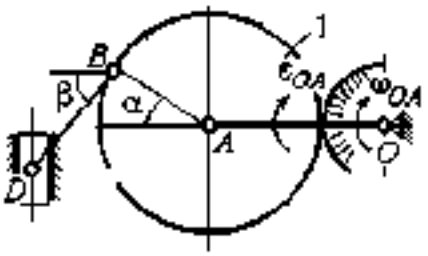


Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	DC, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
4	10	28	5,78	60	30	10	2
14	8	24	4,62	30	90	8	3
24	6	20	6	45	45	12	2

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

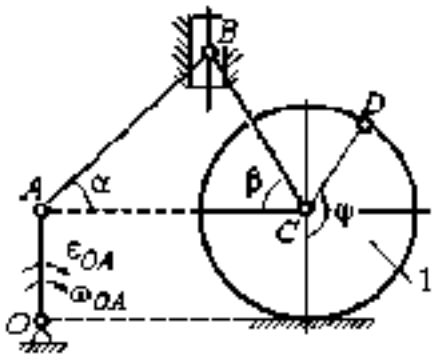
Варианты № 5, 15, 25



Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

Номер варианта задания	OA, см	BD, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
5	16	10	60	30	10	4	3
15	18	8	90	45	12	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2

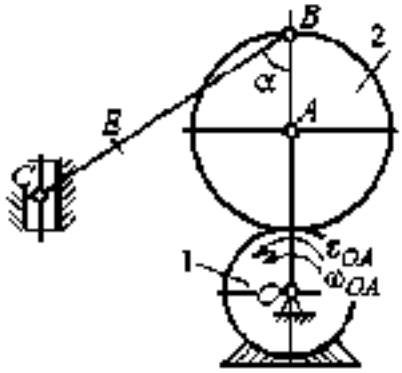
Варианты № 6, 16, 26



Найти: $a_B, a_D, \varepsilon_{BC}$

Номер варианта задания	R_1, см	AB, см	ω, град	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
6	6	18	60	30	30	2	3
16	8	20	90	60	30	2	4
26	5	16	120	30	60	3	4

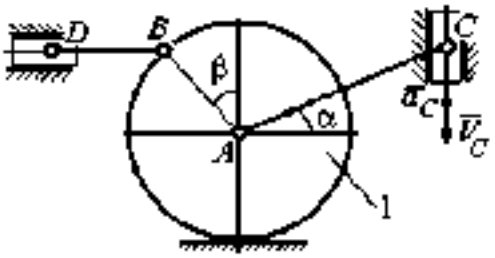
Варианты № 7, 17, 27



Найти: $a_E, a_C, \varepsilon_{BC}$

Номер варианта задания	BC, см	BE, см	α, град	R_1, см	R_2, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
7	22	10	60	2	10	2	3
17	28	15	30	3	6	3	4
27	20	8	45	4	8	2	2

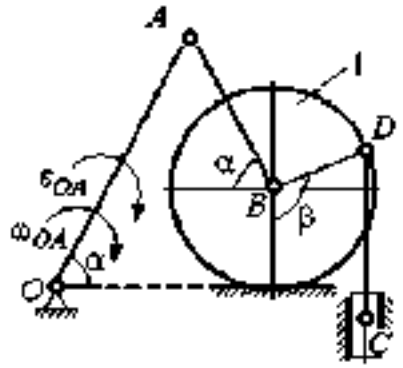
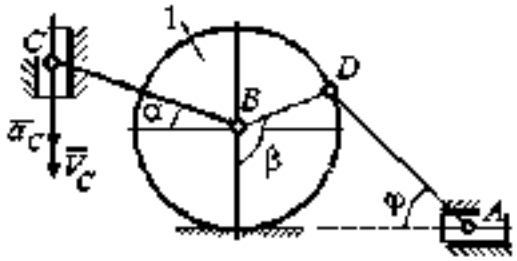
Варианты № 8, 18, 28



Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

Номер варианта задания	R_1, см	BD, см	AC, см	α, град	β, град	v_C, см/с	a_C, см/с^2
8	4	5	12	60	60	12	5
18	6	10	16	45	90	10	8
28	8	8	16	30	120	8	6

Рис. 2.14. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AB}$	 Найти: $a_A, a_B, \varepsilon_{CB}$

Номер варианта задания	OA, см	DC, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	BC, см	φ, град	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
9	18	10	30	120	4	2	3	**10**	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	**20**	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	**30**	4	16	30	45	60	12	4

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек $R = 0.5$ м и $r = 0{,}3$ м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном AC, один конец которого соединён с центром барабана в точке A, а другой – с ползуном C, перемещающимся вертикально. В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60°, найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C: $V_C = 9$м/с, $a_C = 4$ м/с^2.

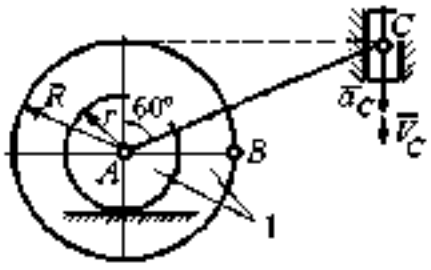


Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости ω_{AC}, ω_1 шатуна AC и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей P_2 находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки C направлена вертикально вниз. Точка A принадлежит как шатуну AC, так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки A параллельна поверхности качения барабана.

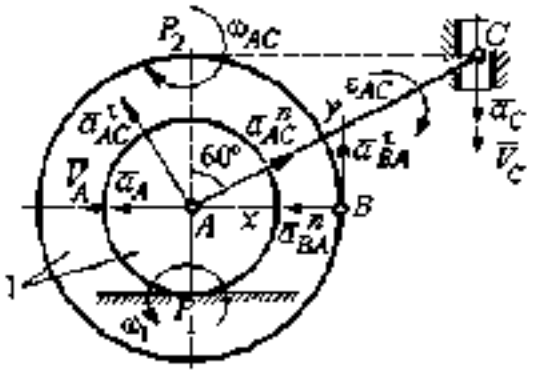


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_2} = \dfrac{9}{R\operatorname{tg}60°} = 6\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки A шатуна $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3}$ м/с. Угловая скорость барабана 1 $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3}$ рад/с. При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке P_1 на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\bar{a}_A$ точки A через полюс C на основании векторного равенства: $\bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{a}_{AC}^{\tau} + \bar{a}_{AC}^{n}$, где $\bar{a}_C$ – ускорение точки C, выбранной в качестве полюса; $\bar{a}_{AC}^{\tau}$, $\bar{a}_{AC}^{n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении шатуна AC вокруг полюса C. Вектор нормального ускорения $\bar{a}_{AC}^{n}$ направлен вдоль шатуна AC от точки A к полюсу C и равен по величине $a_{AC}^{n} = \omega_{AC}^2 \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108$ м/с^2. Вектор касательного ускорения $\bar{a}_{AC}^{\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку AC.

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна AC ε_{AC} неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\bar{a}_{AC}^{\tau}$ выбрано из предположения, что

вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

Выберем ось x вдоль линии AC (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{AC} + \vec{a}^{n}_{AC}$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{AC}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a^n_{AC}$. Отсюда найдём ускорение центра барабана $a_A = \dfrac{1}{\cos 30^\circ}\left(a_C \cos 60^\circ - a^n_{AC}\right) = -122{,}4$ м/с^2. Отрицательное значение ускорения точки A означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

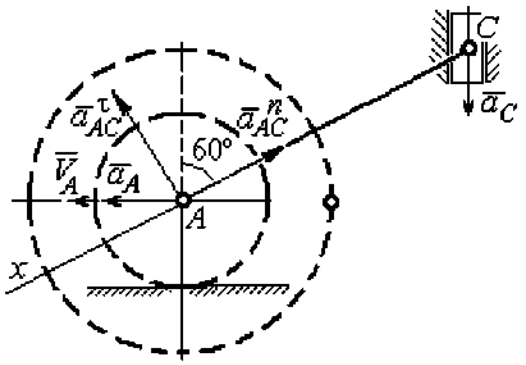


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Для того чтобы найти ускорение точки B, выразим его через полюс A на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\tau}_{BA}$, $\vec{a}^{n}_{BA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении барабана вокруг полюса A.

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{BA}$ равен по величине $a^n_{BA} = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150$ м/с^2. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки B к полюсу A (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_1 \cdot BA$, где ε_1 – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения ε_{AC} шатуна AC) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние AP_1 от точки A до центра скоростей барабана P_1 остаётся постоянным, равным r. Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки A можно продифференцировать. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка A движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r} = 40{,}8$ рад/с^2, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_1 \cdot BA = 20{,}4$ м/с^2.

Заметим, что для вычисления углового ускорения ε_{AC} шатуна AC подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние AP_2 от точки A до центра скоростей P_2 шатуна AC является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат xBy как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки B: $a_{Bx} = a_A + a^{n}_{BA}$, $a_{By} = a^{\tau}_{BA}$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20{,}4$ м/с^2, $a_{Bx} = -122{,}4 + 150 = 27{,}6$ м/с^2. Вектор полного ускорения точки B направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки B: $a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = 34{,}32$ м/с^2.

Задача 2. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке A, катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков R_1 и R_2. На краю диска 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC, соединенный с центром C диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2, $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см. Длина стержня $BC = 20$ см.

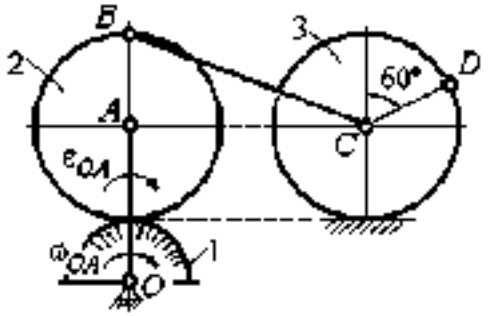


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость точки A: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка P_2 соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = \dfrac{48}{8} = 6$ рад/с.

Скорость точки B диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96$ см/с.

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\bar{V}_B$ и $\bar{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96$ см/с.

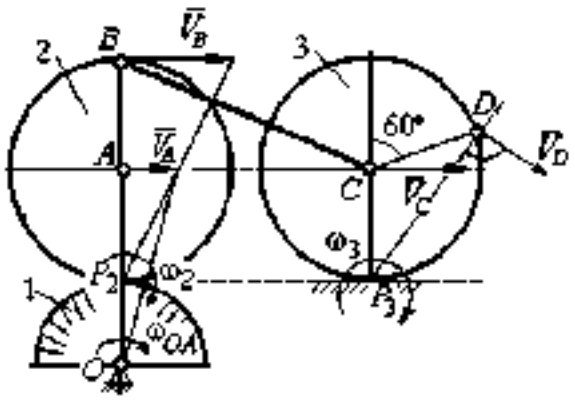


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей. Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Скорость точки D диска 3: $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину DP_3 находим из треугольника P_3DC. В результате $DP_3 = 2R_3\cos 30° = 13{,}8$ см и $V_D = 165{,}6$ см/с. Вектор скорости $\bar{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии DP_3 и (см. рис. 2.20).

Определение ускорений точек механизма.

Представим ускорение $\bar{a}_C$ точки C векторной суммой $\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}^n_{CB} + \bar{a}^\tau_{CB}$, где $\bar{a}_B$ – ускорение точки B, выбранной в качестве полюса; $\bar{a}^n_{CB}$, $\bar{a}^\tau_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B, $a^n_{CB} = \omega^2_{CB} \cdot CB$, $a^\tau_{CB} = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки C $a^n_{CB} = 0$, так как стержень CB совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня ε_{CB}. Для определённости выберем направление углового ускорения стержня BC в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой ε_{CB}.

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ строится перпендикулярно линии стержня BC в сторону углового ускорения ε_{CB} (см. рис. 2.21).

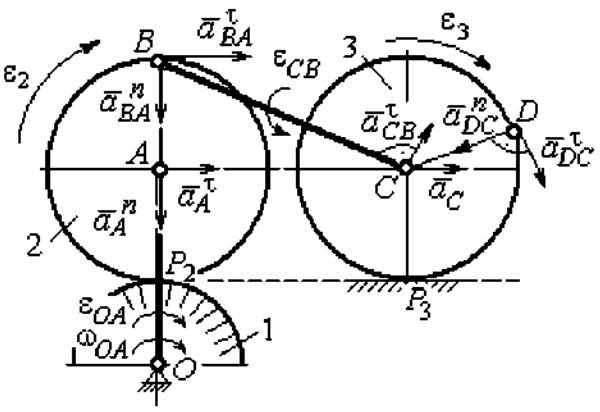


Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Выразим ускорение точки B через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A. Величина нормальной составляющей ускорения точки B $a^{n}_{BA} = \omega_2^2 \cdot BA = 288$ см/с^2. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса BA от точки B к полюсу A (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения ε_2 диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным R_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим: $\dfrac{dV_A}{dt} = \dfrac{d\omega_2}{dt} R_2$, или $a^{\tau}_A = \varepsilon_2 R_2$, откуда $\varepsilon_2 = \dfrac{a^{\tau}_A}{R_2}$.

Для того чтобы найти величину a^{τ}_A, рассмотрим вращательное движение кривошипа OA вокруг неподвижной оси O. Ускорение точки A представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_A$, где $\vec{a}^{n}_A$ и $\vec{a}^{\tau}_A$ – известные нормальная и касательная составляющие ускорения точки A кривошипа OA:

$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 192$ см/с^2, $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 24$ см/с^2. Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^n$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения a_{BA}^τ точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_A^\tau}{R_2} =$ $= 3$ рад/с^2, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 24$ см/с^2.

Для определения ускорения точки C имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^\tau$. Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

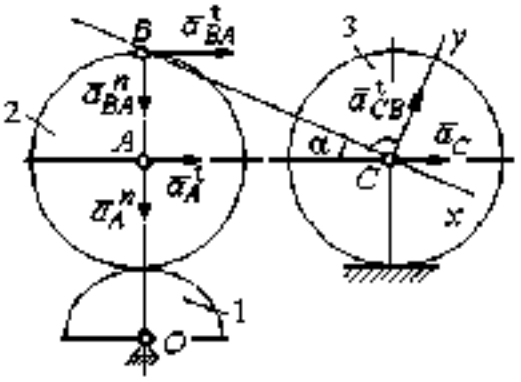


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки С

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha;$$

$$a_C \sin\alpha = a_A^N \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha + a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC; $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$. Решая систему, найдём: $a_C = 256{,}7$ см/с^2, $a_{CB}^\tau = -358{,}12$ см/с^2.

Модуль углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \dfrac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 17{,}9$ рад/с^2.

Знак «минус» величины a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня BC, показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой ε_{CB}, также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки D через полюс C: $\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^\tau_{DC}$, где $\bar{a}_C$ – известное ускорение точки C; $\bar{a}^n_{DC}$, $\bar{a}^\tau_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C. Величина нормального ускорения точки D: $a^n_{DC} = \omega_3^2 \cdot DC = 1152$ см/с^2. Вектор ускорения $\bar{a}^n_{DC}$ направлен по радиусу от точки D к полюсу C (рис. 2.23).

Для расчёта касательной составляющей a^τ_{DC} ускорения точки D найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3$. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3$, или $a_C = \varepsilon_3 R_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = 32{,}09$ рад/с^2. Тогда величина касательной составляющей ускорения точки D: $a^\tau_{DC} = \varepsilon_3 \cdot DC = 256{,}7$ см/с^2. Направление вектора $\bar{a}^\tau_{DC}$ соответствует ускоренному движению диска 3.

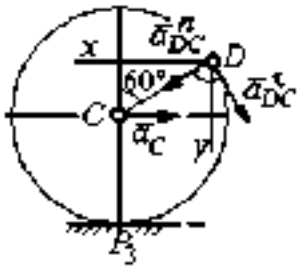


Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Проведём оси Dx и Dy, как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки D на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a^n_{DC}\cos 30^\circ - a^\tau_{DC}\cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a^n_{DC}\cos 60^\circ + a^\tau_{DC}\cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx} = 612{,}5$ см/с^2, $a_{Dy} = 798{,}3$ см/с^2. Величина ускорения точки D:

$$a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 1006{,}2 \text{ см/с}^2.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией.** Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где ω_e – величина угловой скорости вращения тела; h_e – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_к$ – вектор ускорения Кориолиса. (Иногда его называют поворотным ускорением.)

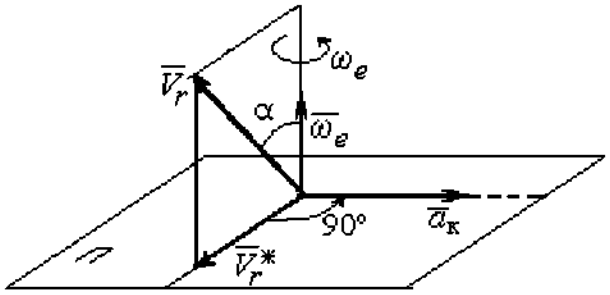


Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_к = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_к| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость П, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости П вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить

простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^{\tau}$ и относительного нормального $\vec{a}_r^{n}$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^{\tau}$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^{n}$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n}$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки равны: $a_r^{\tau} = \left|\dot{V}_r\right|$, $a_r^{n} = \dfrac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны относительной траектории. При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^{n} = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e$, $a_e^{n} = \omega_e^2 h_e$, где ε_e – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|$; h_e – расстояние от точки до оси вращения тела; ω_e – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_{\text{к}} = 0$, $a_e^{n} = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau}$.

3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1.

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

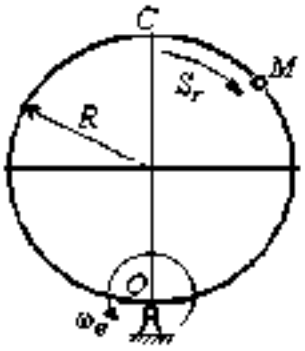
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2, который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схемеописаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

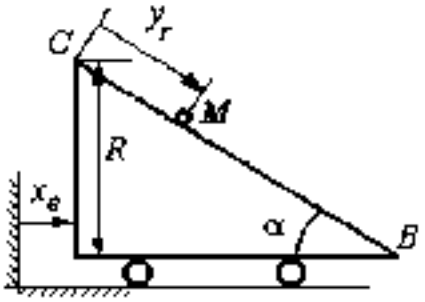
Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



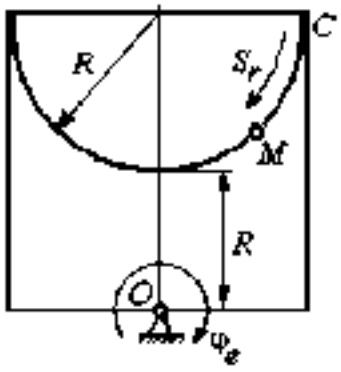
Задача 2



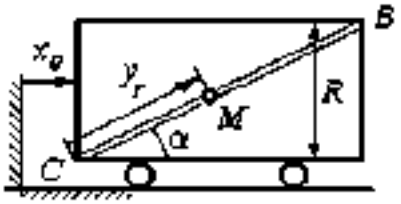
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



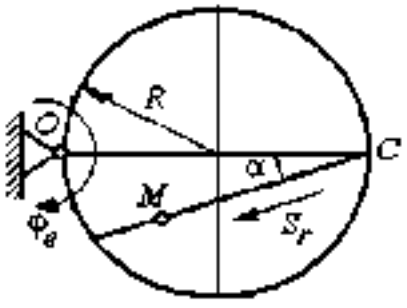
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла 2/3 пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Задача 2

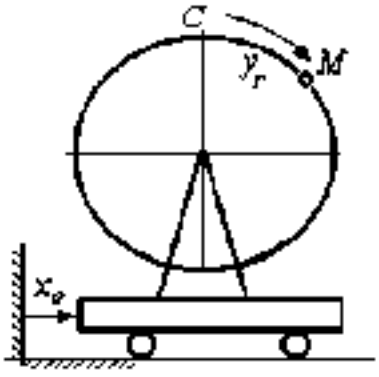
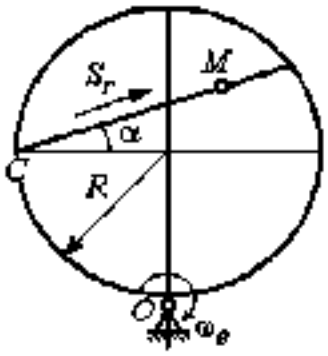


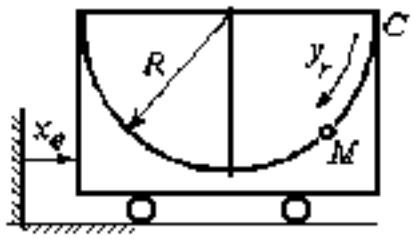
Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

Варианты № 4, 14, 24

Задача 1

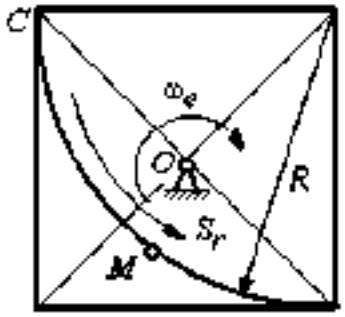


Задача 2

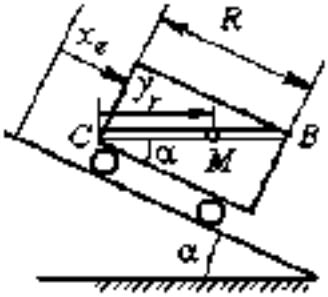


Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



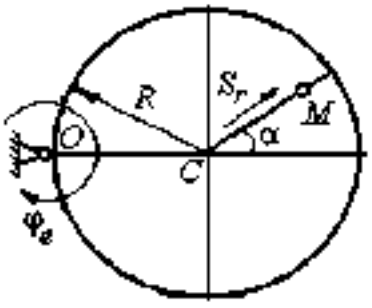
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла путь CB

Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Задача 2

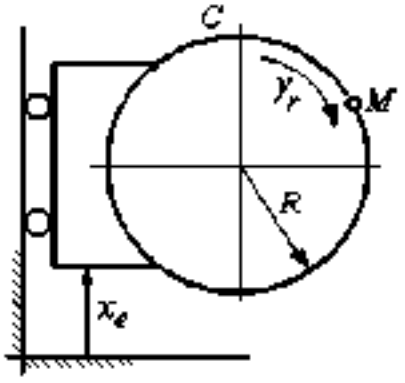
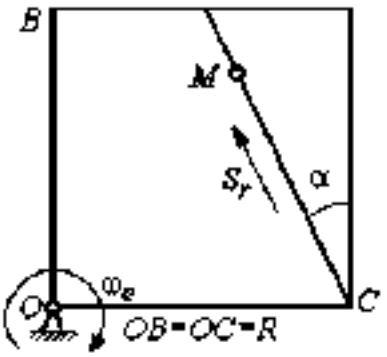


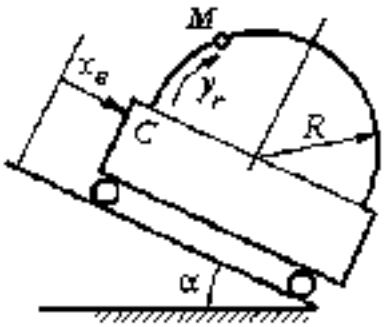
Рис. 3.3. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

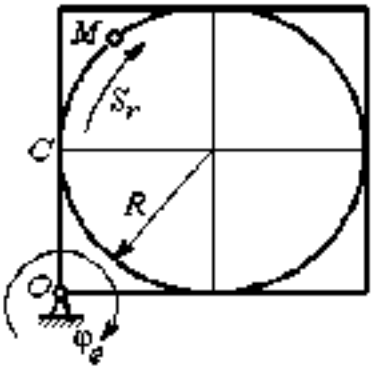


Задача 2

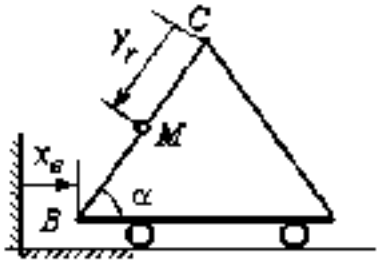


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



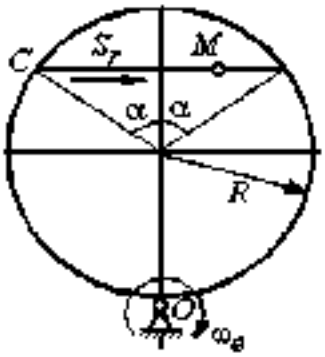
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Задача 2

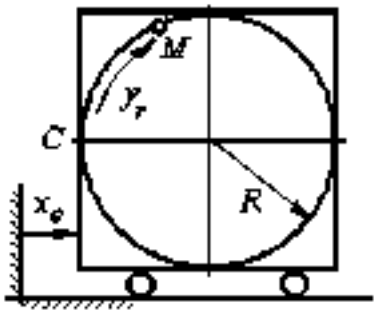
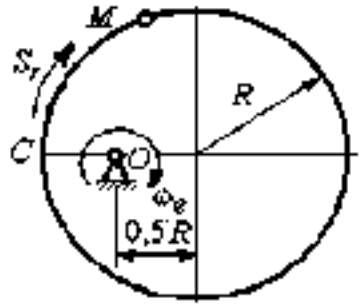


Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

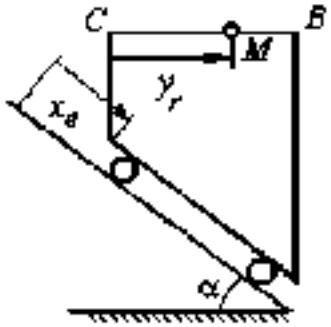
Окончание вариантов задания К4

Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$CM = S_r(t)$, см $CM = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
1	1	3	–	$S_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	
2	1	2	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	–	$y_r = \pi\left[2t + \sin\pi t\right]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	–	$y_r = \pi\left[2t + \cos(\pi t/2)\right]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = \left[1 - \cos(\pi t/4)\right]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1

Продолжение табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер заточки	R, см	α, град	$CM = S_r(t)$, см $CM = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
8	1	8	–	$S_r = 2\pi\left[t^2 + \sin\pi t\right]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t+1)$	$x_e = \cos\pi t$	–
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3-2t)^2$	1
10	1	6	–	$S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos\pi t$	–
11	1	6	–	$S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin\pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	–
12	1	18	–	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e - 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t+1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e - (3-2t)^2$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	–
16	1	12	90	$S_r = 3\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	–	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}\left[t^2 + 2\sin\pi t\right]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin\pi t$	
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\omega_e - 5t - t^2$	1
	2	9	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	–	$S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi\sin\pi t$	–
21	1	3	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin\pi t$	–

Окончание табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер заточки	R, см	α, град	$CM = S_r(t)$, см $CM = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
22	1	4	–	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin \pi t$	$x_e = 5t - t^2$	–
23	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	–	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	–
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	–	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	–	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin \pi t$	–
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	–	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin \pi t$	–

Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

Задача 1. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного треугольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

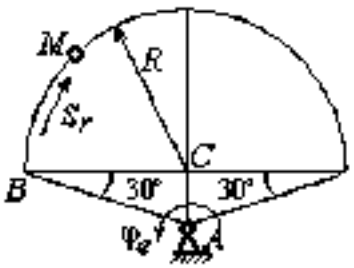


Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ_e. По ободу диска от точки B движется точка M. Движение точки относительно диска задается законом изменения длины дуги окружности: $\overset{\smile}{BM} = S_r = 9\pi t^2$ см. Положительное направление движения точки M на рис. 3.6 показано дуговой стрелкой S_r. Радиус диска R = 9 см.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1с.

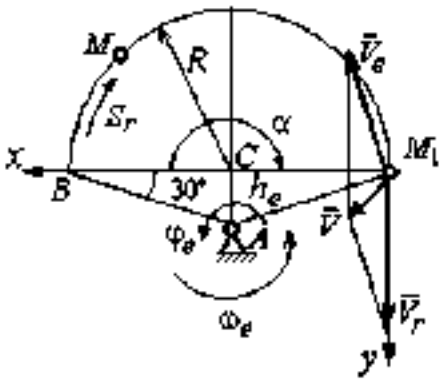


Рис. 3.7. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки при сложном движении

Решение

Вращение фигуры будет для точки M переносным движением. Относительное движение точки M – её движение по окружности обода диска.

Для определения положения точки M на ободе диска вычислим расстояние, которое она прошла на заданный момент времени. Длина дуги окружности, пройденной точкой за 1 с: $S_r(1) = 9\pi$ см. Положение точки M определяется центральным углом $\alpha = \dfrac{S_r(1)}{R} = \dfrac{9\pi}{9} = \pi$. Положение точки в момент времени t_1 = 1 с отмечено на рис. 3.7 точкой M_1.

Для определения скорости переносного движения точки вычисляем значение производной: $\dot{\varphi}_e = 5 - 4t$. Угловая скорость вращения фигуры: $\omega_e = |\dot{\varphi}_e|$. При t_1 = 1 с $\dot{\varphi}_e(1) = 1$ рад/с. Положительная величина производной $\dot{\varphi}_e(1)$ показывает,

что вращение фигуры в данный момент происходит в положительном направлении, что отмечено дуговой стрелкой ω_e на рис. 3.7.

В момент времени $t_1 = 1$ с точка M находится в положении M_1. Скорость V_e переносного движения точки в момент времени $t_1 = 1$ с $V_e(1) = \omega_e(1) h_e$, где расстояние от точки M_1 до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \dfrac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см. Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги BM. В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r(1) = |\dot{S}_r(1)| = 18\pi = 56{,}5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении M_1 происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой S_r. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

Абсолютную скорость точки находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат M_1xy (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5{,}2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 56{,}5 = 29{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5{,}2^2 + 29{,}5^2} = 29{,}95$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\bar{a} = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{n} + \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n} + \bar{a}_{\kappa}.$$

Относительное касательное ускорение a_r^{τ} вычисляется по формуле: $a_r^{\tau} = |\ddot{S}_r|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi = 56{,}5$ см/с^2 – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\bar{a}_r^{\tau}$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке M_1 в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой S_r.

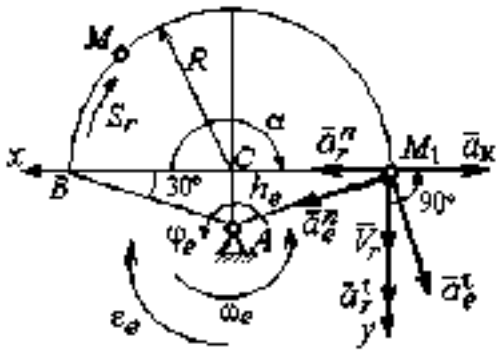


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Относительное нормальное ускорение точки вычисляется по формуле $a_r^{n} = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно: $a_r^{n}(1) = \dfrac{V_r^2(1)}{R} = \dfrac{(18\pi)^2}{9} = 355{,}3$ см/с^2. Вектор ускорения $\bar{a}_r^{n}$ направлен по радиусу диска к центру C (см. рис. 3.8).

Переносное касательное ускорение вычисляется по формуле: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = |\ddot{\varphi}_e|$. Вычислим производную $\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2. Угловое ускорение $\varepsilon_e = |\ddot{\varphi}_e| = 4$ рад/с^2 постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\varphi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\varphi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение ε_e направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\bar{a}_e^{\tau}$ переносного касательного ускорения точки в её положении M_1 перпендикулярен линии AM_1 и направлен противоположно вектору переносной

скорости $\bar{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: $a_e^{\tau} = a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3} = 41{,}6$ см/с^2.

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле: $a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1) h_e = 6\sqrt{3} = 10{,}4$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\bar{a}_e^n$ направлен по линии AM_1 к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\bar{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\bar{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 1 \cdot 18\pi = 113{,}1$ см/с^2.

Так как вектор относительной скорости точки $\bar{V}_r \perp \bar{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\bar{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку M_1 (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси xM_1y (см. рис. 3.8) векторное равенство $\bar{a} = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^n + \bar{a}_к$. Получим: $a_y = a_e^{\tau}\cos 30° + a_e^n \cos 60° + a_r^{\tau} = 97{,}9$ см/с^2,

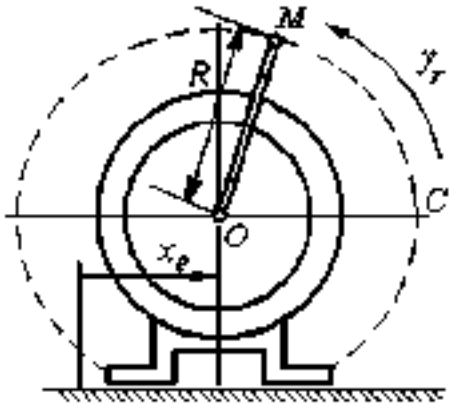


Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укреплённого на электромоторе

$a_x = -a_e^{\tau}\cos 60° + a_e^n \cos 30° + a_r^n - a_к = 228{,}4$ см/с^2. Модуль абсолютного ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 248{,}5$ см/с^2.

Задача 2. К вращающемуся валу электромотора прикреплён стержень OM длины $R = 6$ см. Во время работы электромотора точка M стержня из начального положения C перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см.

При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону $x_e = 5\sin(\pi t/3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса R, переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол α, отсчитываемый стержнем OM от начального положения OC, в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \dfrac{y_r(t_1)}{R} = \dfrac{\pi}{6} = 30°$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой M_1.

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_r = 6{,}28$ см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню OM_1.

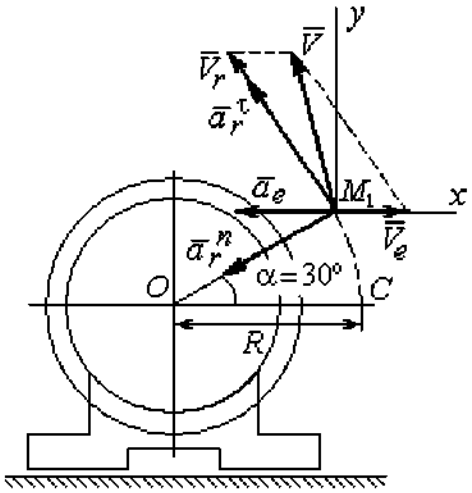


Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3}\cos(\pi t/3).$$

В момент времени $t_1 = 1$с $V_e = \dfrac{5\pi}{3}\cos 60° = 2{,}62$ см/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости точки M направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину

абсолютной скорости, выберем оси xM_1y, как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r\cos 60^\circ$ = – 0,52 см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси x), $V_{My} = V_r\cos 30^\circ$ = 5,44 см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2}$ = 5,46 см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки ω_e = 0 и потому $a_к$ = 0. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$, направленные вдоль стержня OM и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении $a_e^n = 0$. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^\tau = \dot{V}_r$, $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^\tau = \dot{V}_e$ = $-\dfrac{5\pi^2}{9}\sin(\pi t/3)$ и в момент времени t_1 = 1с равны a_r^τ = 6,28 см/с^2, a_r^n = 6,57 см/с^2, a_e = – 4,75 см/с^2. Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат xM_1y. Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^\tau\cos 60^\circ - a_r^n\cos 30^\circ - a_e = -4{,}08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^\tau\cos 30^\circ - a_r^n\cos 60^\circ = 2{,}15 \text{ см/с}^2.$$

Величина абсолютного ускорения $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}$ = 4,61 см/с^2.

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение точки под действием системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:** $m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{kx}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum F_{ky}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum F_{kz}$ или, обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнениями: $m\ddot{x}=\sum F_{kx}$, $m\ddot{y}=\sum F_{ky}$, $m\ddot{z}=\sum F_{kz}$, где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций сил на оси координат.

Интегрирование дифференциальных уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

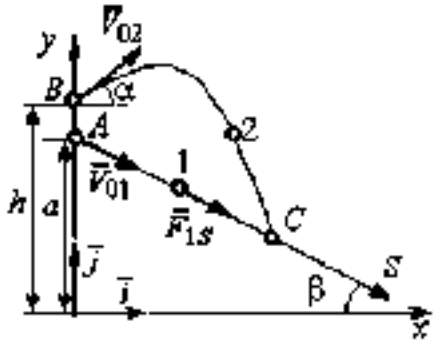
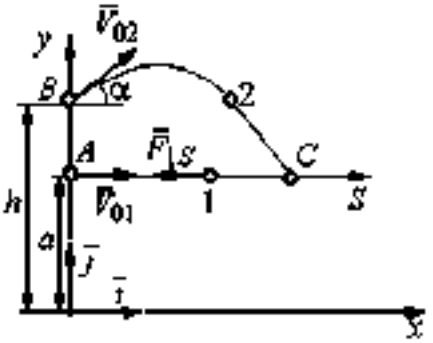
Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой m_1, получив в начальном положении *A* скорость V_{01}, движется вдоль гладкой оси *AS*, наклоненной под углом β к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси *AS*. Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой m_2 из положения *B* на оси *y*. На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей *x*, *y*.

Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 точки 1 и 2 встретились на оси *AS* в точке *C*.

Момент времени t_1 задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты заданий представлены на рис. 4.1, 4.2. Исходные данные приведены в табл. 4.1.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

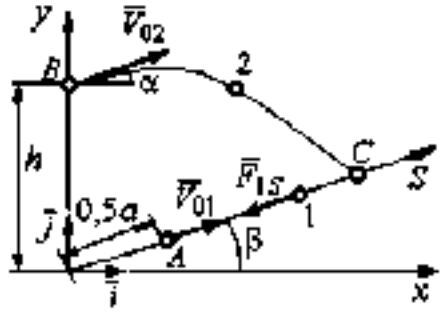
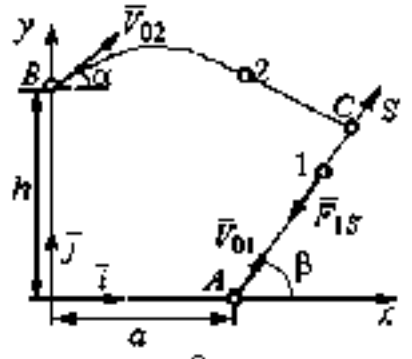
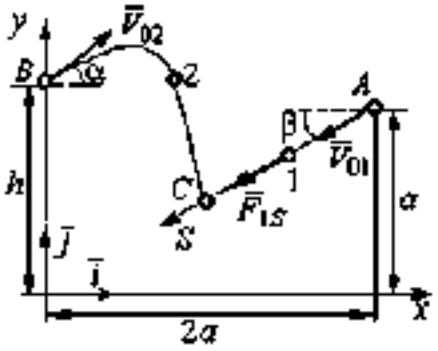
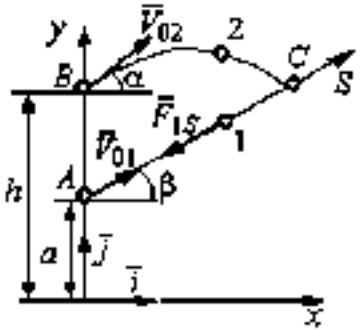
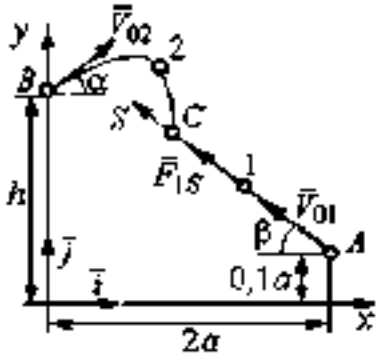
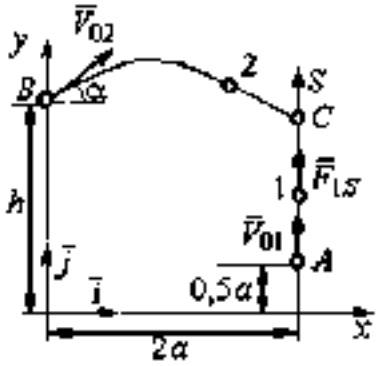
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с

Рис. 4.1. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	Встреча в точке C, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0{,}4$ с	Встреча в точке C в момент максимального подъёма точки 1

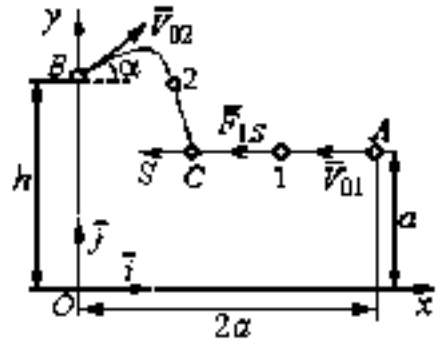
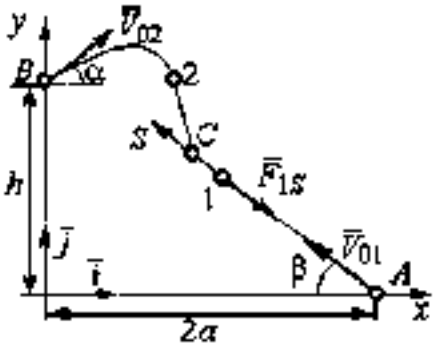
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	
Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0{,}6$ с	Встреча в точке C в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма

Рис. 4.2. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 4.1

Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки

Номер варианта задания	m_1, кг	F_{1x}, Н	V_{01}, м/с	β, град	m_2, кг	$\bar{F}_2$, Н	a, м	b, м
1	1	3	3	30	2	$7\bar{i}$	2	4
2	3	6	2	0	2	$4\bar{i}+12\bar{j}$	1,5	1
3	2	5	4	35	1,5	$10\bar{i}+4\bar{j}$	2	2,5
4	1	10	2	60	2	$4\bar{i}+8\bar{j}$	2,2	2
5	1	3	3	30	2	$5\bar{i}$	3	4,5
6	0,8	6	6	50	3	$3\bar{i}+12\bar{j}$	1,5	4
7	2	5	4,5	40	1	$10\bar{i}+2\bar{j}$	3	2,5
8	1	2	3,5	90	2	$6\bar{i}+8\bar{j}$	1,2	2
9	2	4	4	0	1	$3\bar{i}+2\bar{j}$	2	2,5
10	1	3	3	55	1,5	$4\bar{i}$	1	1,5
11	0,5	2	3	60	2	$3\bar{i}+8\bar{j}$	1,5	2,5
12	0,2	3	4	0	1	$5\bar{i}-2\bar{j}$	1	2,5
13	1	2	6	50	1,5	$6\bar{i}-4\bar{j}$	0,8	2
14	0,5	6	4	35	1	$3\bar{i}-2\bar{j}$	2,5	2
15	0,2	3	3	50	2	$2\bar{i}-2\bar{j}$	3	4
16	2	4	6	40	2	$3\bar{i}+12\bar{j}$	1	1,5
17	1	6	5	60	1,5	$5\bar{i}+4\bar{j}$	3	2,5
18	1	2	2	90	2	$4\bar{i}+4\bar{j}$	2	2
19	1	3	2	2	2	$2\bar{i}+10\bar{j}$	1	1,5
20	5	4	2	30	1	$3\bar{i}-2\bar{j}$	1,5	1,5
21	0,2	4	4	45	1	$6\bar{i}-2\bar{j}$	1	3
22	0,4	3	2	0	2	$4\bar{i}+6\bar{j}$	1,5	2,5
23	1	3	8	60	2	$4\bar{i}+2\bar{j}$	1,2	1,5
24	0,5	8	3	30	2	$6\bar{i}+7\bar{j}$	2	1,5
25	2	4	4	60	1	$2\bar{i}-2\bar{j}$	3,5	4
26	1	3	5	50	2	$4\bar{i}+6\bar{j}$	0,5	1,5
27	1,5	3	6	30	2	$4\bar{i}+4\bar{j}$	2	2,5
28	2	5	3	90	2	$6\bar{i}+7\bar{j}$	2	1,5
29	2	4	4	0	1	$5\bar{i}-2\bar{j}$	1,5	2
30	1	3	2,5	70	2	$4\bar{i}+6\bar{j}$	1	1

Пример выполнения задания Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

На рис. 4.3 представлена схема движения материальных точек в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой $m_1 = 2$ кг, получив в начальном положении *A* скорость $V_{01} = 4$ м/с, движется вдоль гладкой оси *AS* с углом наклона $\beta = 30^\circ$. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести $\vec{P}_1$ и постоянная сила $\vec{F}_1$, проекция которой на ось *AS* равна $F_{1S} = 4{,}5$ Н. Направление вектора проекции силы $\vec{F}_{1S}$ на ось *AS* показано на рис. 4.3.

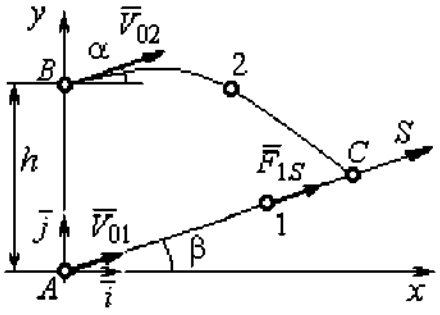


Рис. 4.3. Схема совместного движения точек

Одновременно с началом движения точки 1 из положения *B* на оси *y* высотой $h = 1$ м начинает движение точка 2 массой $m_2 = 1{,}2$ кг. На точку 2 действуют сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, направление которой определяется разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей *x*, *y* декартовой системы координат: $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, Н. Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальным значением, обе они встретились на оси *AS* в точке *C*.

Решение

Рассмотрим движение точки 1. В текущий момент времени на точку 1 действует сила тяжести $\vec{P}_1$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ наклонной оси *AS* и сила $\vec{F}_1$, величина проекции которой на ось *AS* равна F_{1S} (рис. 4.4). Дифференциальное уравнение движения точки 1 $m_1\ddot{S} = F_{1S} - P_1\sin\beta$, или $m_1\dfrac{dV_{1S}}{dt} = 4{,}5 - m_1 g\sin\beta$. С учетом исходных данных, полагая ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2, дифференциальное уравнение движения точки 1 приводится к виду: $\dfrac{dV_{1S}}{dt} = -2{,}66$. Разделим

переменные, представив дифференциальное уравнение в виде $dV_{1S} = -2{,}66dt$. Проинтегрировав его, получим зависимость скорости точки 1 от времени: $V_{1S} = -2{,}66t + C_1$. Для того чтобы определить закон движения точки 1, представим скорость точки как производную от координаты $V_{1S} = \dfrac{dS}{dt}$. Получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dS}{dt} = -2{,}66t + C_1$, проинтегрировав которое, найдём уравнение движения точки 1: $S = -1{,}33t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$, $S = 0$, $\dot{S} = V_{1S} = V_{01} = 4$ м/с. Подставляя первое из условий в уравнение движения точки 1, получим $C_2 = 0$. Подставим начальное значение скорости в уравнение $\dot{S} = -2{,}66t + C_1$, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени. Получим $C_1 = 4$. Таким образом, движение точки 1 вдоль оси AS описывается уравнением: $S = -1{,}33t^2 + 4t$.

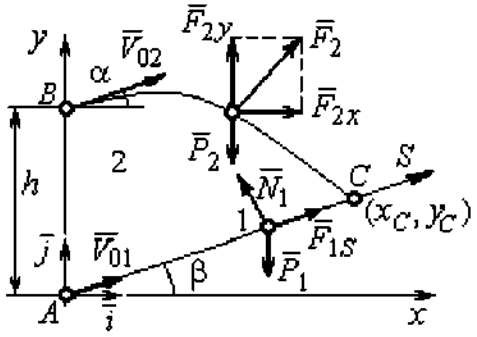


Рис. 4.4. Силы, действующие на точки 1 и 2, во время их движения

По условию задачи встреча двух точек происходит в момент времени t_1, когда скорость первой точки уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальной: $V_{1S}(t_1) = \dfrac{V_{01}}{2} = 2$ м/с. Подставляя это условие в уравнение, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени, получим: $2 = -2{,}66t_1 + 4$, откуда найдём момент времени встречи $t_1 = 0{,}75$ с. Расстояние AC, пройденное точкой 1 до встречи, определяется как путь, пройденный этой точкой за время $t_1 = 0{,}75$ с, $AC = S(t_1) = -1{,}33 \cdot 0{,}75^2 + 4 \cdot 0{,}75 = 2{,}25$ м. Координаты точки встречи x_C, y_C определяются из равенств: $x_C = S(t_1)\cos 30^\circ = 1{,}95$ м; $y_C = S(t_1)\sin 30^\circ = 1{,}12$ м.

Рассмотрим движение точки 2. В текущий момент времени на нее действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, проекции которой на оси координат

$F_{2x} = 2{,}4$ Н, $F_{2y} = 4{,}5$ Н. Дифференциальные уравнения движения точки 2 в проекциях на оси координат x, y имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = F_{2x} = 2{,}4, \quad m_2\ddot{y} = -P_2 + F_{2y} = -m_2 g + 4{,}5,$$

или после подстановки исходных данных: $\ddot{x} = 2$, $\ddot{y} = -6{,}06$.

Представим в первом уравнении проекцию ускорения точки 2 на ось x как производную от соответствующей проекции скорости $\ddot{x} = \frac{dV_{2x}}{dt}$. После разделения переменных получим дифференциальное уравнение $dV_{2x} = 2dt$. Проинтегрируем его и найдем зависимость горизонтальной составляющей скорости точки 2 от времени: $V_{2x} = 2t + C_3$. Заменим в этом уравнении проекцию скорости точки на ось x на производную от координаты $V_{2x} = \frac{dx}{dt}$. После интегрирования получим уравнение, описывающее движение точки 2 вдоль оси x, $x = t^2 + C_3 t + C_4$. Для того чтобы найти постоянные C_3 и C_4, воспользуемся граничными условиями движения точки 2 – известной начальной координатой движения точки и вычисленной координатой точки встречи, то есть при $t = 0$, $x = 0$, а при $t_1 = 0{,}75$ с $x(t_1) = x_C = 1{,}95$ м. Подставляя граничные условия в уравнение движения точки 2, получим $C_4 = 0$, $C_3 = 1{,}85$. Таким образом, уравнение движения точки 2 вдоль оси x: $x = t^2 + 1{,}85t$

.

Закон движения точки 2 вдоль оси y находим путем интегрирования второго дифференциального уравнения. Его представим в виде: $\frac{dV_{2y}}{dt} = -6{,}06$. После разделения переменных и первого интегрирования получим зависимость проекции скорости точки 2 на ось y от времени: $V_{2y} = -6{,}06t + C_5$. Заменив проекцию скорости точки 2 на ось y производной от координаты $V_{2y} = \frac{dy}{dt}$, вторично проинтегрируем. В результате движение точки 2 вдоль оси y описывается уравнением: $y = -3{,}03t^2 + C_5 t + C_6$. Для определения констант C_5 и C_6 используем граничные условия: при $t = 0$ $y(0) = h = 1$ м, а при $t_1 = 0{,}75$ с $y(t_1) = y_C = 1{,}12$ м. Получим $C_6 = 1$

, C_5 = 2,43. Таким образом, точка 2 движется вдоль оси y по закону: $y = -3{,}03t^2 + 2{,}43t + 1$.

Проекции скорости точки 2 на оси координат как функции времени имеют вид: $V_{2x}(t) = \dot{x} = 2t + 1{,}85$, $V_{2y}(t) = \dot{y} = -6{,}06t + 2{,}43$. Значения проекций при $t = 0$: $V_{02x} = V_{2x}(0) = 1{,}85$ м/с, $V_{02y} = V_{2y}(0) = 2{,}43$ м/с. Величина начальной скорости: $V_{02} = \sqrt{V_{02x}{}^2 + V_{02y}{}^2} = 3{,}05$ м/с.

Угол наклона вектора скорости в начальный момент определяется из равенства: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{V_{02y}}{V_{02x}} = \dfrac{2{,}43}{1{,}85} = 1{,}31$. Откуда $\alpha = 52{,}64°$.

4.3. Колебания материальной точки

Силы, возникающие при отклонении материальной точки от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть точку в это положение, называются **восстанавливающими**. Восстанавливающие силы, линейно зависящие от расстояния от точки до положения её равновесия, называются **линейными восстанавливающими силами**. Так, сила упругости пружины $F = c\Delta\ell$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины; $\Delta\ell$ – удлинение пружины, является линейной восстанавливающей силой.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m вдоль оси Ox под действием линейной восстанавливающей силы, представляет собой уравнение гармонических колебаний и имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат; ω – угловая частота колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$. Единица измерения угловой частоты – рад/с.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется суммой $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. **Амплитуда свободных колебаний** $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина, обратная периоду $\nu = \frac{1}{T}$ определяет число полных колебаний точки за 1 с и называется **частотой колебаний**. Частота колебаний измеряется в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному полному колебанию в секунду. Угловая частота связана с частотой колебаний соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Если на материальную точку кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления движению, пропорциональная скорости точки, $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, где μ – коэффициент сопротивления, то дифференциальное уравнение движения точки с сопротивлением относительно положения равновесия имеет вид $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$, или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$, где n – коэффициент затухания, $n = \frac{\mu}{2m}$; ω – угловая частота собственных колебаний точки без учёта сопротивления, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

При $n < \omega$ движение точки представляет затухающие колебания. Общее решение дифференциального уравнения колебаний с сопротивлением $x = e^{-nt}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha)$, где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; ω_1 – угловая частота затухающих колебаний, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$; $A_1 = Ae^{-nt}$ – амплитуда затухающих колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; α – начальная фаза колебаний, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$.

При $n > \omega$ движение точки апериодическое, затухающее. Общее решение дифференциального уравнения движения точки с таким сопротивлением имеет вид $x = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t})$, где $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

При $n = \omega$ движение точки происходит согласно уравнению $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.**

При действии гармонической возмущающей силы $F = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота колебаний возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия и при отсутствии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающей силы, $h = \frac{H}{m}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

При отсутствии резонанса, когда частота собственных колебаний не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$, решение имеет вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае резонанса, когда $p = \omega$, – вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \frac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 определяются из общего решения неоднородного уравнения с учетом начальных условий движения. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{\text{соб}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии резонанса $A_{\text{вын}} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$.

При резонансе амплитуда вынужденных колебаний растет как линейная функция времени $A_{\text{вын}} = \frac{ht}{2p}$.

Если возмущающее воздействие заключается в **принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины**, например, по закону $S = a\sin pt$, где a, p – амплитуда и угловая частота колебаний точки подвеса пружины, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия при отсутствии сил сопротивления имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt$, где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающего колебания, $h = \frac{ca}{m}$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины может быть получено аналогично случаю возмущения гармонической силой.

Система пружин заменяется одной с эквивалентной жесткостью. Так, колебания груза на двух параллельных пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 4.5, *a*) можно рассматривать как колебания груза на одной пружине эквивалентной жесткости $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$, где $c_{\text{экв}}$ – коэффициент жесткости эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин (рис. 4.5, *b*) коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{\text{экв}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Если груз расположен между двумя пружинами (рис. 4.5, *c*), тогда $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$. Коэффициент жесткости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов жесткости пружин.

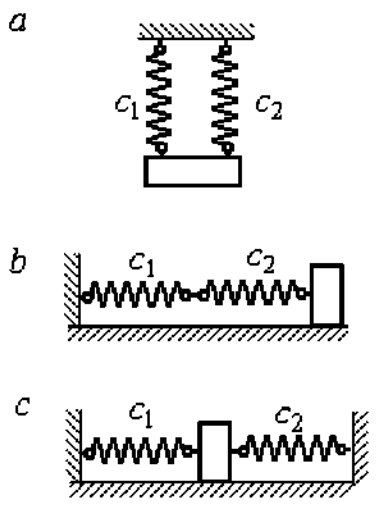


Рис. 4.5. Способы крепления груза на двух пружинах:
a – две параллельные пружины;
b – последовательно соединённые пружины; *c* – крепление груза между пружинами

4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

Задача 1. Исследование гармонических колебаний точки.

Найти уравнение движения груза массой m_1 (или одновременно двух грузов массой m_1 и m_2) на пружине жесткостью c_1 (или на двух пружинах жесткостью c_1 и c_2). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

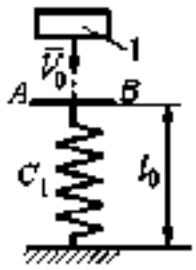
Задача 2. Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин c_1 и c_2. Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu\vec{V}$ Н, где μ – коэффициент сопротивления; V – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

Варианты заданий даны на рис. 4.6 – 4.9. Исходные данные в табл. 4.2.

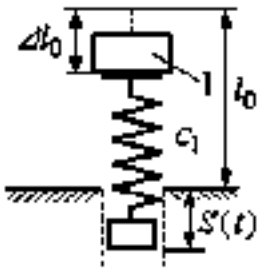
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Невесомая пластина AB укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость V_0, падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней

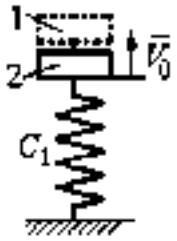
Задача 2



К верхнему концу пружины, сжатой на величину Δl_0, прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



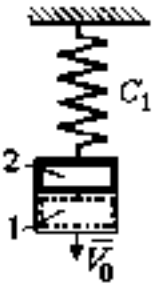
В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость V_0, направленную вверх

Задача 2

Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с начальной скоростью V_0. Через 1 с груз упрется в площадку AB, укреплённую на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжит движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку AB и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером D

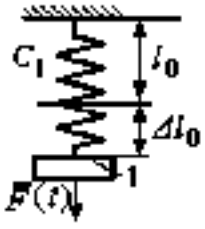
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



В положении статического равновесия груза 2, укрепленного на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью V_0

Задача 2

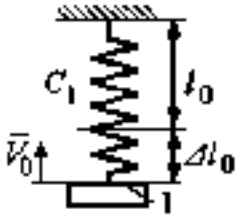


Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние Δl_0, подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\bar{F}(t)$

Рис. 4.6. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты заданий 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



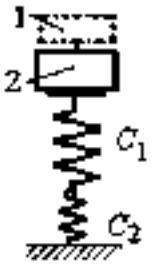
К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние Δl_0 и сообщили скорость V_0, направленную вверх

Задача 2

Грузу 1, укреплённому на двух последовательно соединенных пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость V_0, направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\bar{F}(t)$

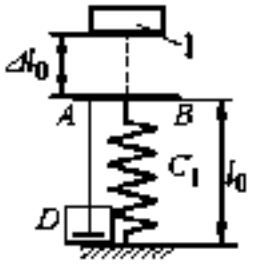
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укрепленных на двух вертикальных последовательно соединенных пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости

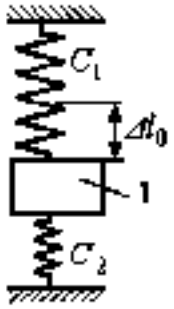
Задача 2



Груз 1 падает с высоты Δl_0 на площадку AB, установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер D создаёт сопротивление движению груза на пружине

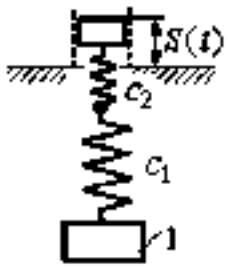
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние Δl_0 и отпустили без начальной скорости

Задача 2

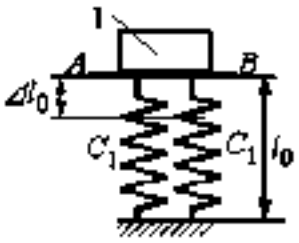


К недеформированным пружинам, соединённым последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью V_0. Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.7. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

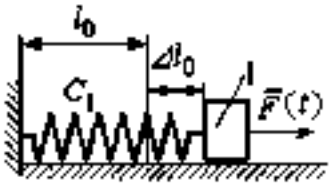
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину Δl_0 и сообщили скорость V_0, направленную вниз

Задача 2



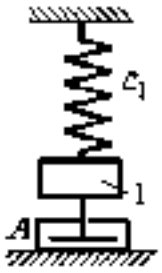
К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние Δl_0 и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\bar{F}(t)$

Варианты № 8, 18, 28

Задача 1

Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость V_0, направленную вверх

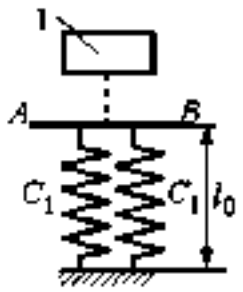
Задача 2



В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость V_0, направленную вниз. Демпфер A создает сопротивление движению груза

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины AB, укреплённой на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней

Задача 2

К двум горизонтальным пружинам, соединенным последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость V_0, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

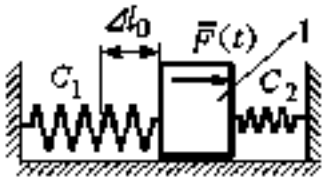
Рис. 4.8. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Варианты № 10, 20, 30

Задача 1

В положении статического равновесия груза 1, укрепленного на двух последовательно соединенных пружинах, сообщили скорость V_0, направленную вниз по наклонной плоскости

Задача 2



Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние Δl_0 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\bar{F}(t)$

Рис. 4.9. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 10, 20, 30

Таблица 4.2

Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	Δl_0, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
1	1	2,5	–	2,0	200	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	210	–	0,1	–	–	0,02sin12t
2	1	1,5	2,0	4	250	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	4	220	–	–	1,0	–	–
3	1	2,0	1,5	3	250	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	–	200	–	0,14	–	12sin5t	–
4	1	2,0	–	3	180	–	0,1	–	–	–
	2	1,5	–	2	150	120	–	–	8sin12t	–
5	1	1,0	2,0	–	120	100	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	50	–	0,5	18	–	–
6	1	1,2	–	–	120	180	0,12	–	–	–
	2	1,4	–	2,4	120	180	–	–	–	0,03sin14t
7	1	1,6	–	3,2	140	–	0,15	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,12	–	12sin6t	–
8	1	1,0	2,0	3,0	150	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	3,5	120	–	–	15	–	–

Продолжение табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	Δf_0, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
9	1	1,5	–	–	100	–	–	–	–	–
	2	1,4	–	2,0	100	110	–	–	–	0,015sin8t
10	1	2,5	–	2,5	110	100	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	110	52	0,08	–	5sin9t	–
11	1	2,0		4,0	300					
	2	1,0	–	–	200	–	0,12	–	–	0,01sin4t
12	1	1,8	2,4	4	220	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	5	240	–	–	0,6	–	–
13	1	1,5	1,5	2	200	–	–	–	–	–
	2	1,8	–	–	180	–	0,08	–	10sin10t	–
14	1	2,0	–	2	200	–	0,12	–	–	–
	2	2,0	–	2	150	120	–	–	10sin8t	–
15	1	1,5	2,0		120	250				
	2	1,5	–	–	120	–	0,4	4	–	–
16	1	2,0	–	–	150	75	0,1	–	–	–
	2	2,0	–	2,5	150	75	–	–	–	0,01sin5t
17	1	1,5	–	2,1	160	–	0,11	–	–	–
	2	1,8			150		0,1		8sin12t	
18	1	2,0	1,0	2,5	80	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	2,5	50	–	–	21	–	–
19	1	1,6	–	–	120	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	2,0	85	120	–	–	–	0,015sin7t
20	1	2,0	–	2,0	90	100	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	100	90	0,12	–	6sin10t	–
21	1	2,0	–	1,6	220	–	–	–	–	–
	2	2,5			250		0,14			0,01sin10t
22	1	2,2	1,5	3	180	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	4	280	–	–	0,8	–	–
23	1	2,2	1,2	2	220	–	–	–	–	–
	2	1,6	–	–	200	–	0,12	–	5sin7t	–

Окончание табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	Δl_0, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
24	1	1,6	–	2,4	160	–	0,13	–	–	–
	2	1,0	–	3	150	300	–	–	$6\sin 10t$	–
25	1	0,8	1,2	–	120	80	–	–	–	–
	2	0,8	–	–	180	–	0,4	12	–	–
26	1	1,4			100	120	0,15			
	2	1,8	–	2,2	150	120	–	–	–	$0,015\sin 8t$
27	1	2	–	4,0	150	–	0,12	–	–	–
	2	2	–	–	162	–	0,13	–	$5\sin 9t$	–
28	1	1,5	2,0	2,0	140	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	3,1	180	–	–	12	–	–
29	1	1,0	–	–	140	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	2,4	75	150	–	–	–	$0,08\sin 5t$
30	1	1,6		3	75	150				
	2	1,5	–	3	80	70	0,15	–	$8\sin 10t$	–

Пример выполнения задания Д2. Исследование колебаний точки

Задача 1. Груз 1 весом $P = 20$ Н, лежащий на гладкой наклонной плоскости, прикреплён к недеформированной пружине, расположенной параллельно плоскости (рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 30°, коэффициент жесткости пружины $c = 400$ Н/м. В начальный момент груз переместили вверх по наклонной плоскости (сжали пружину) на расстояние $\Delta l_0 = 0,1$ м относительно нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Рис. 4.10. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.11. Направим ось Ox, вдоль которой происходят колебания груза, вниз вдоль наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты x выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.11) В произвольном положении груза, обозначенном координатой x, к нему приложены три силы: сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось Ox: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины относительно её нерастянутого положения, включающее её растяжение x относительно выбранного начала координат и растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза на наклонной плоскости.

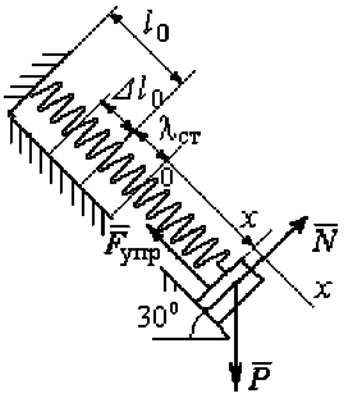


Рис. 4.11. Расчётная схема колебаний груза

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = P\sin 30^\circ - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

В положении статического равновесия сила упругости уравновешивается силой, равной проекции силы тяжести на ось x: $P\sin 30^\circ - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Подставляя это выражение условия статического равновесия груза в уравнение движения, получим дифференциальное уравнение колебаний груза:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где ω – угловая частота колебаний; $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}01$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси Ox.

Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \dfrac{P\sin 30^\circ}{c}$ = 0,025 м. Координата начального положения груза определяется величиной сжатия пружины и, поскольку начало отсчёта координаты x выбрано в положении статического равновесия груза, равна (со знаком!): $x_0 = -(\Delta\ell_0 + \lambda_{ст}) = -0{,}125$ м (см. рис. 4.11).

Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = -0{,}125$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставим сюда начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического растяжения пружины:

$$x(t) = -0{,}125\cos 14{,}01t \text{ м}.$$

Амплитуда колебаний груза $A = 0{,}125$ м.

Задача 2. Груз 1 весом $P = 20$ Н подвешен на недеформированной вертикальной пружине (рис. 4.12). Жесткость пружины $c = 800$ Н/м. В начальный момент груз был оттянут вниз в положение, при котором пружина растянулась на расстояние $\Delta\ell_0 = 0{,}1$ м, и в этом положении ему сообщена начальная скорость $V_0 = 2$ м/с, направленная вверх.

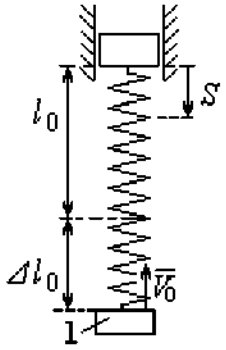


Рис. 4.12. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Одновременно с началом движения груза верхний конец пружины стал совершать гармонические колебания по закону $S = a\sin 10t$, где $a = 0{,}02$ м.

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду собственных колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.13. Направим ось Ox, вдоль которой происходят колебания груза, вертикально вниз. Начало отсчёта координаты x выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.13, *c*, *d*). В произвольном положении груза, обозначенном координатой x, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$.

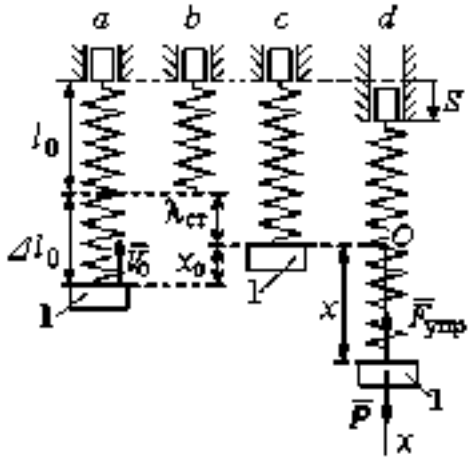


Рис. 4.13. Расчётная схема вынужденных колебаний груза: *a* – положение груза на начало колебаний; *b* – недеформированная пружина; *c* – статическое растяжение пружины под действием веса груза; *d* – положение груза в произвольный момент времени и перемещение точки подвеса пружины

Проекция силы упругости пружины на ось Ox

$$F_{\text{упр}x} = -c\Delta\ell = -c(x + \lambda_{ст} - S),$$

где $\Delta\ell$ – удлинение пружины, включающее её растяжение x относительно начала координат, растяжение $\lambda_{ст}$ при статическом равновесии груза и уменьшение растяжения при смещении верхнего конца, $\Delta\ell = (x + \lambda_{ст} - S)$.

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = P - c(x + \lambda_{ст} - S).$$

В положении статического равновесия выполняется условие равенства сил: $P - c\lambda_{ст} = 0$.

После подстановки его в уравнение движения груза получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} = -cx + cS, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, ω = 19,81 рад/с; h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m}$ = 7,85 м/с^2; p – угловая частота вынужденных колебаний, p = 10 рад/с.

При отсутствии резонанса (здесь $\omega \neq p$) общее решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси Ox. Координата начального положения груза (см. рис. 4.13, *b*) $x_0 = \Delta\ell_0 - \lambda_{ст}$. Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \frac{P}{c}$ = 0,02 м, тогда x_0 = 0,08 м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим: $C_1 = x_0$ = 0,08 м.

Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \frac{hp}{\omega^2 - p^2}\cos pt$. Проекция скорости груза в начальный момент на ось Ox $V_{0x} = -V_0$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_{0x} = -V_0$, получим: $C_2 = -\frac{V_0}{\omega} - \frac{hp}{\omega(\omega^2 - p^2)}$ = – 0,11 м.

Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического равновесия, м.

$$x(t) = 0{,}08\cos 19{,}82t - 0{,}11\sin 19{,}82t - 0{,}03\sin 10t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний $A_{вын} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$ = 0,03 м. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{соб} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ = 0,14 м.

4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой $A(\bar{F})$ силы $\bar{F}$, постоянной по модулю и направлению, на конечном прямолинейном перемещении S_1 точки приложения силы называется величина $A(\bar{F}) = FS_1\cos\alpha$. Если угол α острый, работа силы положительна. Если угол α тупой, – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

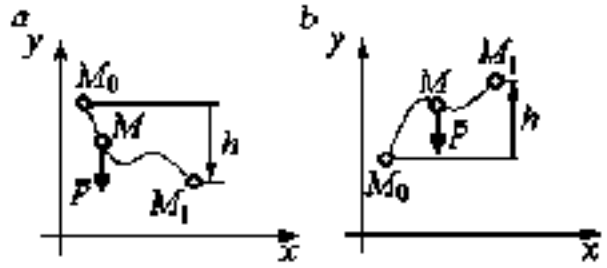


Рис. 4.14. Схема для вычисления работы силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз.
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы тяжести материальной точки (вертикальной силы) при перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – величина вертикального перемещения точки (рис. 4.14). Работа силы тяжести положительная, если начальная точка движения выше конечной, и отрицательная, – если ниже.

Работа силы упругости пружины на прямолинейном перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние h определяется формулой $A(F_{\text{упр}}) = -\dfrac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \dfrac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость. **Теорема об изменении кинетической энергии точки** заключается в том, что изменение кинетической энергии точки за конечный промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\dfrac{mV_1^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ

всех сил, действующих на точку, при её перемещении из положения M_0 в положение M_1.

При несвободном движении точки сумма работ сил включает работу реакций связи. Если движение происходит без трения по неподвижной гладкой поверхности, то реакция связи направлена по нормали к поверхности и её работа при любом перемещении точки равна нулю.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения точки в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат; ρ – радиус кривизны траектории точки.

4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

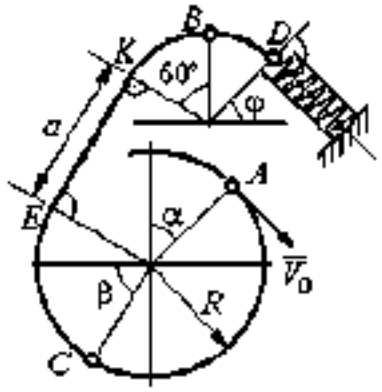
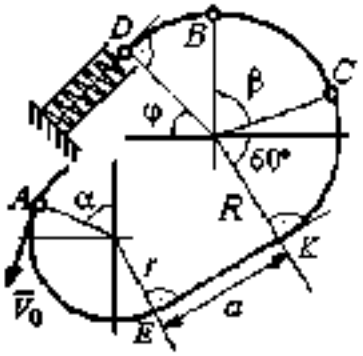
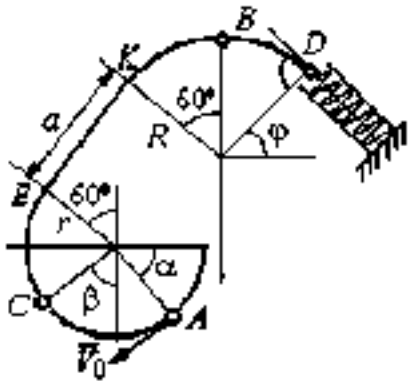
Тонкий стержень с надетым на него шариком массой m расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами r и $R = 2r$, соединённых прямолинейным отрезком EK, сопряжённым с дугами окружностей в точках E и K. В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка $EK = a$.

В точке A, положение которой на дуге окружности определяется углом α, шарику сообщают начальную скорость V_0. По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения f. На участках с вертикальным отрезком EK считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки D, шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью c и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки D определяется углом φ.

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положении траектории – точку B со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C, положение которой на дуге определяется углом β.

Варианты заданий приведены на рис. 4.15, 4.16. Исходные данные задания в табл. 4.3.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
		

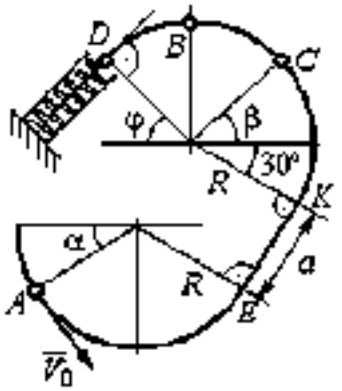
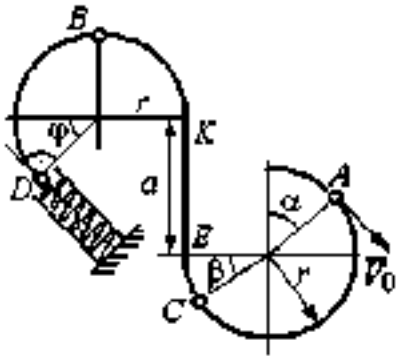
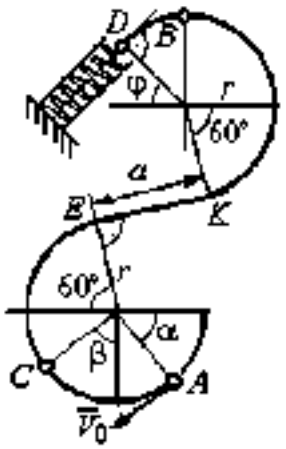
Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
		

Рис. 4.15. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д3

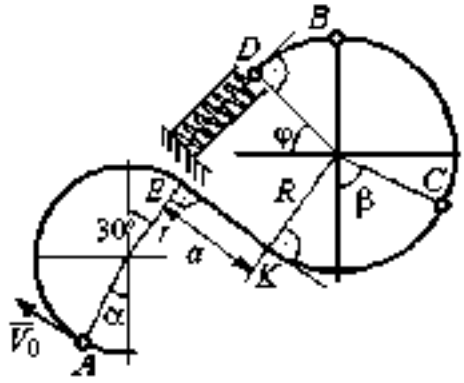
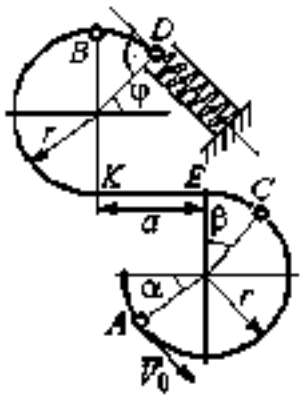
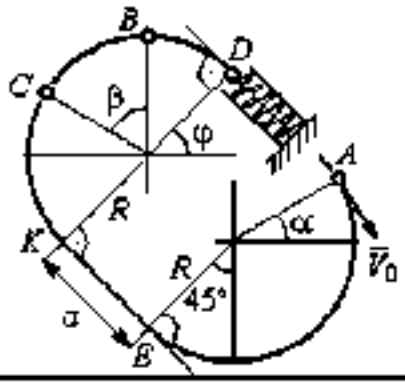
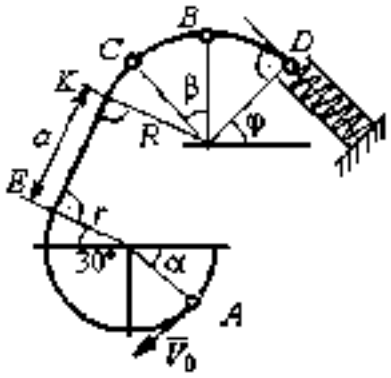
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 4.16. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 4.3

Исходные данные задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m, кг	0,8	0,5	0,6	0,4	1,0	0,6	0,9	0,5	0,3	0,4	0,8	0,6	0,5	0,3	1,0
α, град	30	45	0	30	30	0	0	45	30	0	60	30	30	45	60
β, град	60	30	60	0	60	30	60	60	30	45	30	60	60	30	30
φ, град	0	60	30	0	0	30	45	0	30	45	30	30	0	30	45
r, м	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,8
a, м	0,5	0,6	0,9	1,4	0,8	1,2	0,5	0,5	1,4	0,5	0,8	0,5	0,8	0,6	0,6
f	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3
k	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4
c, Н/м	100	80	90	80	120	100	90	80	60	80	90	60	80	60	110

Окончание табл. 4.3

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m, кг	0,6	0,5	0,6	0,4	0,8	0,5	0,4	1,0	0,6	0,5	0,4	0,8	0,4	0,6	0,8
α, град	60	30	0	45	60	90	90	60	60	90	30	60	60	45	90
β, град	60	30	45	90	60	45	90	60	60	30	30	60	60	0	60
φ, град	45	60	60	60	30	90	0	90	45	60	60	90	30	60	0
r, м	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,4	0,8	0,6	0,4
a, м	0,4	1,2	0,9	1,2	1,2	0,9	0,6	1,5	1,4	0,8	1,2	0,9	0,6	0,8	0,5
f	0,3	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
k	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3
c, Н/м	80	60	90	60	100	90	80	110	80	60	60	80	60	80	100

Пример выполнения задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг окружностей, сопряженных в точках E и K с прямолинейным отрезком EK длиной $a = 0{,}6$ м (рис. 4.17). Радиусы окружностей $R = 1$ м и $r = 0{,}5$ м. Диаметры дуг окружностей, проведённые в точках E и K, составляют с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик массой $m = 0{,}5$ кг. В точке A, положение которой на дуге радиуса R определяется углом $\alpha = 60°$ (см. рис. 4.17), шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он начинает движение. По дугам окружностей шарик скользит без трения. При движении по прямой EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения $f = 0{,}2$. Достигнув точки D на верхней дуге, шарик упирается в пружину жесткостью $c = 100$ Н/м и, двигаясь по сопряжённой прямой без трения, сжимает её. Найти величину максимального сжатия пружины, если наивысшее положение на траектории (точку B) шарик проходит со скоростью $V_B = kV_0$ при $k = 0{,}3$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C, положение которой на дуге определяется углом $\beta = 90°$.

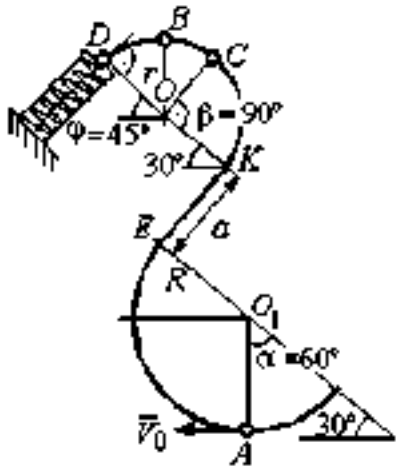


Рис. 4.17. Схема движения шарика

Решение

Рассмотрим движение шарика по стержню из начального положения A в наивысшее положение – точку B.

При движении шарика по дугам окружностей работу совершает только сила тяжести. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня, и потому её работа при перемещении шарика равна нулю.

На участке движении шарика по прямой EK на него действуют сила тяжести $\bar{P}$, нормальная реакция опоры $\bar{N}_{EK}$ и сила трения $\bar{F}_{тр}$ (рис. 4.18, *b*). Работу совершают сила тяжести и сила трения. Работа реакции опоры стержня равна нулю.

Обозначим $h_{(AB)}$ – перепад высот точек A и B на траектории; V_A – начальная скорость шарика в точке A, $V_A = V_0$; V_B – его скорость в точке B, $V_B = 0{,}3V_0$. Для вычисления перепада высот точек A и B имеем выражение (рис. 4.18, *a*):

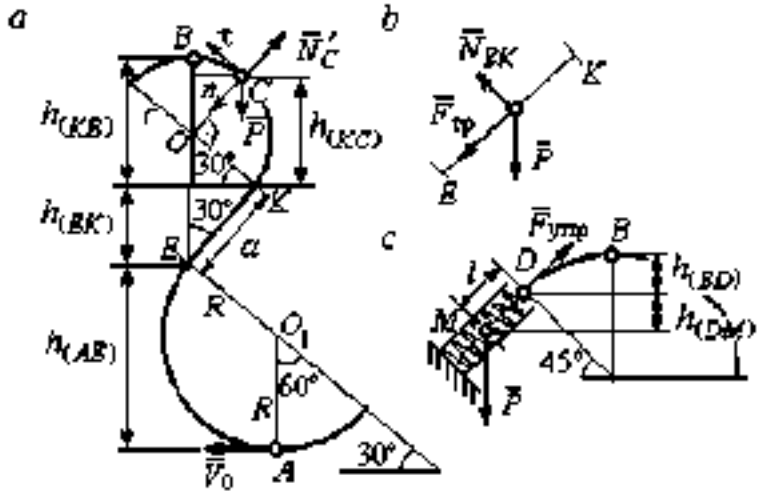


Рис. 4.18. Силы, действующие на шарик во время движения и перепады высот

$$h_{(AB)} = h_{(AE)} + h_{(EK)} + h_{(KB)} =$$

$$R(1+\sin 30^\circ) - a\cos 30^\circ + r(1+\sin 30^\circ).$$

Будем считать шарик материальной точкой. Применяя теорему об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения A в положение B, получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(\bar{P}) + A(\bar{F}_{тр})$, где $A(\bar{P}) = -Ph_{(AB)}$, $A(\bar{F}_{тр}) = -F_{тр}a$ – работы, соответственно, силы тяжести на участке движения AB и силы трения на отрезке EK. Сила трения равна $F_{тр} = f \cdot N_{EK} = f \cdot mg\cos 60^\circ$ (рис. 4.18, *a*, *b*).

В результате, теорема об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в конечное положение B принимает

вид: $\frac{m(0{,}3V_0)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -\,mg\left[(R+r)(1+\sin 30^\circ) + a(\cos 30^\circ + f\cdot\cos 60^\circ)\right]$. После подстановки данных задачи, получим: $0{,}91V_0^2 = 55{,}517$, откуда находим необходимое значение начальной скорости шарика: V_0 = 7,81 м/с.

Найдём давление шарика на стержень в точке C.

Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.18, *а*). Уравнение движения шарика в точке C в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\frac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N'_C$, где V_C – скорость шарика в точке C, N'_C – реакция стержня, приложенная к шарику. Направление реакции на рис. 4.18, *а* соответствует предположению, что шарик давит на стержень в направлении центра дуги окружности.

Для определения скорости шарика в точке C воспользуемся тем, что скорость шарика в точке B уже известна, и применим теорему об изменении кинетической энергии при движении шарика из начального положения C в конечное положение B. На этом участке движения работу совершает только сила тяжести шарика. Получим $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где V_C, V_B – значения скорости шарика в точках C и B; $h_{(CB)}$ – перепад высот точек C и B; $h_{(CB)} = r(1-\sin 30^\circ) = 0{,}5r$ (см. рис. 4.18, *а*). В результате теорема об изменении кинетической энергии принимает вид: $mV_C^2 = mV_B^2 + 2mgh_{(CB)}$ или $V_C^2 = V_B^2 + gr$. Отсюда, при условии $V_B = 0{,}3V_0$ = 2,34 м/с, найдём V_C = 3,22 м/с.

Реакция опоры шарика: $N'_C = P\cos 30^\circ - m\frac{V_C^2}{r}$ = – 6,12 Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика означает, что вектор реакции $\vec{N}'_C$ в точке C (см. рис. 4.18, *а*) направлен в противоположную сторону. Давление шарика на стержень в точке C равно модулю реакции опоры.

Найдём величину максимального сжатия пружины.

Рассмотрим движение шарика на участке от точки B до положения максимально сжатой пружины – точки M. Движение на этом участке происходит по дуге окружности BD и по прямой DM. При этом сила тяжести совершает работу на всём участке движения, а сила упругости – на отрезке сжатия пружины. Обозначим величину максимального сжатия пружины $MD = l$.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения B в M получим: $\frac{mV_M^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{упр}})$, где V_M, V_B – скорость шарика в точках M и B. Работа силы тяжести $A(\vec{P}) = Ph_{(BM)} = $ $= P\left[h_{(BD)} + h_{(DM)}\right] = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right]$. Работа силы упругости на прямолинейном участке DM длиной l: $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{cl^2}{2}$. Условие максимального сжатия пружины означает, что в точке M скорость шарика обращается в нуль: $V_M = 0$, тогда теорема об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\frac{mV_B^2}{2} = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right] - \frac{cl^2}{2}$. Подставляя данные задачи и с учётом того, что скорость шарика в наивысшей точке B найдена из предыдущих рассуждений $V_B = 2{,}34$ м/с, получим квадратное уравнение для определения величины максимального сжатия пружины $50l^2 - 3{,}468l - 2{,}085 = 0$. В качестве ответа принимается положительный корень уравнения $l = 0{,}24$ м.

. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы

Поступательное движение твердого тела описывается теоремой о движении центра масс механической системы. В проекциях на координатные оси дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид: $m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z}_C = \sum F^e_{kz}$, где m – масса тела; x_C, y_C, z_C – координаты центра масс тела; F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на твердое тело.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается теоремой об изменении кинетического момента.

Дифференциальное уравнения вращательного движения тела имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k) \quad \text{или} \quad J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}^e_k),$$

где ω – угловая скорость тела; $\omega = \dot{\varphi}$; φ – угол поворота тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Уравнение вращательного движения можно представить в алгебраической форме: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где ε – угловое ускорение тела; $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается на основании теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}, \quad ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}, \quad J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}^e_k),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F^e_{kx},

F_{ky}^{e} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^{e})$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение тел системы в отдельности, предварительно освободив их от связей и заменив действие связей реакциями. Далее на основании общих теорем динамики системы следует составить уравнения движения каждого тела.

5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

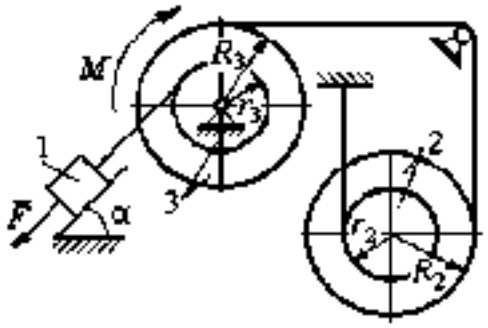
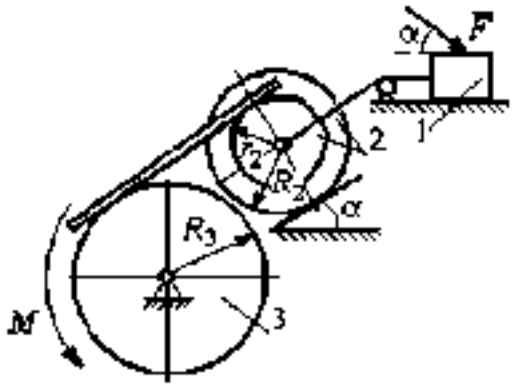
Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α. Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

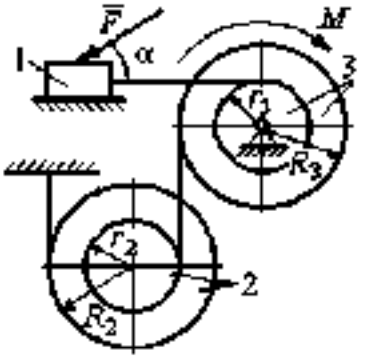
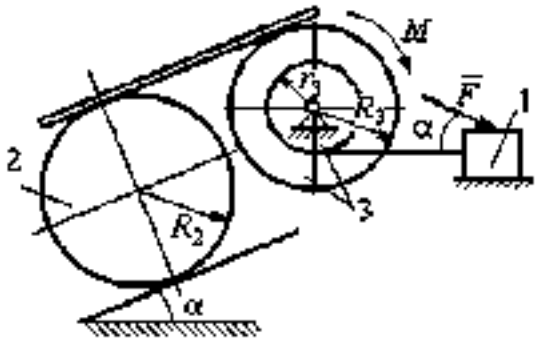
Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены R_2, r_2 и R_3, r_3.

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны i_{z2}, i_{z3}.

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты заданий представлены на рис. 5.1, 5.2. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

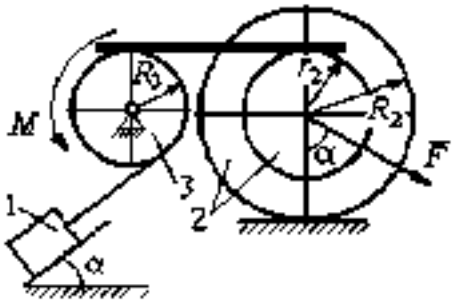
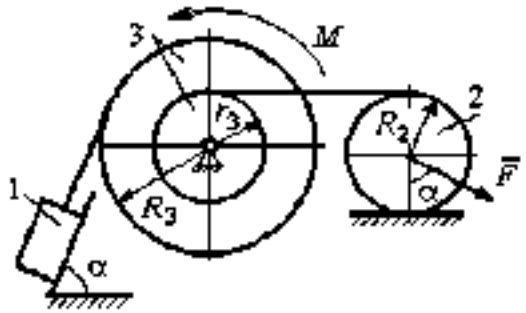
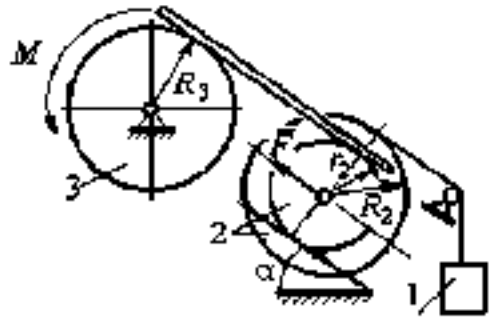
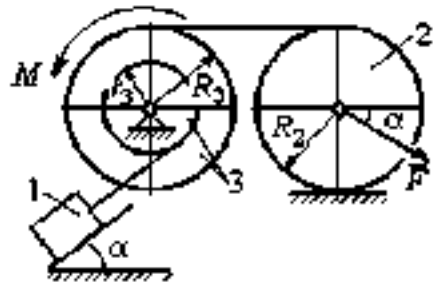
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.1. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

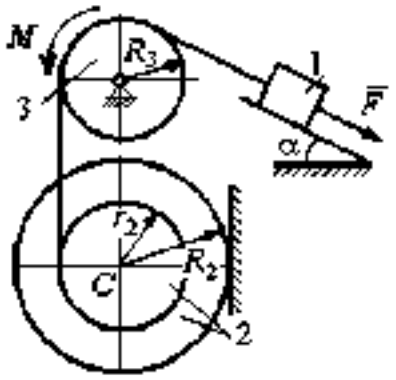
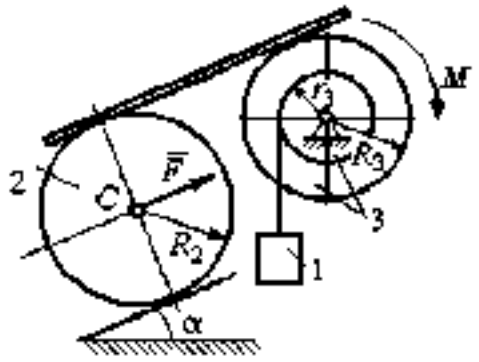
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 5.2. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.1

Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{x2}, м	i_{x3}, м
1	P	P	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
2	$3P$	P	$3P$	$3P$	Pr	30	$2r$	r	$2r$	–	$2r$	–
3	$4P$	$3P$	$4P$	$2P$	$2Pr$	60	$2r$	r	$2r$	r	$2r$	$2r$
4	$2P$	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
5	P	$3P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	r	r		$2r$	–
6	P	$2P$	$4P$	$4P$	$6Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
7	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	45	$3r$	r	r	-	$r\sqrt{3}$	-

Окончание табл. 5.1

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{x2}, м	i_{x3}, м
8	$2P$	$3P$	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
9	$3P$	P	$3P$	P	$2Pr$	30	$2r$	r	$2r$	–	$r\sqrt{2}$	–
10	P	P	$3P$	P	$2Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
11	P	P	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$
12	$2P$	P	$2P$	$4P$	Pr	60	$3r$	r	$3r$	–	$r\sqrt{3}$	–
13	$3P$	P	$3P$	$3P$	$2Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
14	$2P$	P	$3P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$
15	P	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$		$r\sqrt{3}$	
16	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{2}$
17	P	P	$3P$	$2P$	$6Pr$	60	$3r$	r	$3r$	·	$r\sqrt{3}$	
18	$2P$	$2P$	$3P$	P	$3Pr$	60	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
19	$2P$	P	$2P$	$3P$	$4Pr$	30	$3r$	r	$3r$	–	$2r$	–
20	P	P	$3P$	P	$2Pr$	45	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
21	$2P$	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	r	$3r$	r	$r\sqrt{2}$	$2r$
22	P	P	$2P$	$5P$	$2Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$2r$	–
23	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
24	$4P$	P	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
25	P	$3P$	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	r	–	$r\sqrt{3}$	–
26	P	$3P$	$4P$	$3P$	$3Pr$	45	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$
27	P	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	30	$2r$	r	$2r$	·	$r\sqrt{3}$	
28	$2P$	$3P$	$3P$	P	$6Pr$	30	$2r$		$3r$	$2r$		$r\sqrt{2}$
29	$2P$	P	$2P$	$2P$	$2Pr$	45	$2r$	r	r	–	$2r$	–
30	P	P	$4P$	P	$4Pr$	60	$3r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$

Пример выполнения задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Механизм (рис. 5.3) состоит из груза 1, однородного диска – катка 2 и неоднородного диска – блока 3, соединённых друг с другом нерастяжимыми нитями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя.

Движение происходит под действием сил тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, равных по модулю: $P_1 = 2P$, $P_2 = 2P$, $P_3 = 3P$, силы $\bar{F}$, приложенной в центре масс катка 2, равной по величине: $F = 3P$, и пары сил с моментом $M = Pr$, приложенных

к блоку 3. Механизм является неизменяемой механической системой. Радиус катка 2 $R_2 = 2r$. Качение катка по наклонной плоскости происходит без проскальзывания. Радиусы ступенчатого блока 3: $R_3 = 3r$, $r_3 = r$. Радиус инерции блока 3 $i_3 = r\sqrt{3}$.

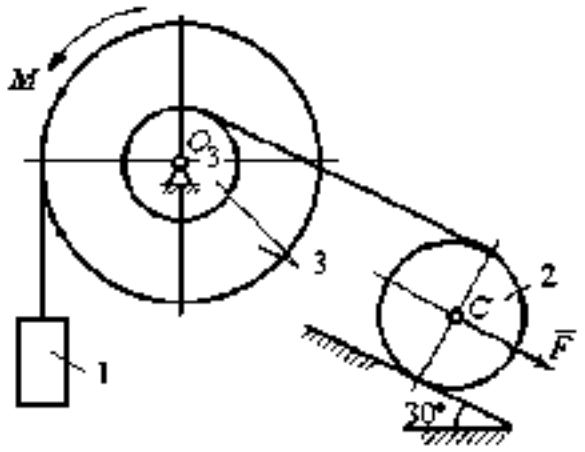


Рис. 5.3. Схема механической системы

Применяя метод динамического расчета механической системы найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось вращающегося блока 3.

Решение

Освобождаем систему от связей. На рис. 5.4 изображены внешние силы, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей.

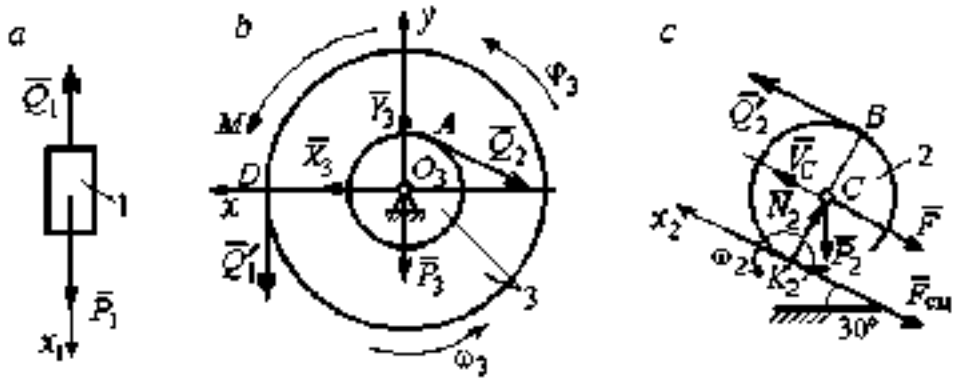


Рис. 5.4. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему:
a – поступательное движение груза 1; *b* – вращательное движение блока 3;
c – плоское движение катка 2

Груз 1 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\bar{P}_1$ и реакция нити $\bar{Q}_1$ (рис. 5.4, *a*). Предположим, груз 1 движется вниз, и направим ось x_1 в сторону движения груза.

Уравнение движения груза в проекции на ось x_1 в соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы имеет вид

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1,$$

где m_1, a_1 – соответственно, масса груза 1 и его ускорение, $m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{2P}{g}$.

Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z, проходящей через его центр масс O_3, перпендикулярно плоскости диска. Направление вращения блока, соответствующее выбранному движению вниз груза 1, показано на рис. 5.4, *b* дуговой стрелкой ω_3.

На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, силы реакции подшипника $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, момент M и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$ (см. рис. 5.4, *b*). При составлении уравнения вращательного движения блока 3 моменты сил считаем положительными, если они поворачивают блок в сторону его вращения.

Уравнение вращения блока 3 имеет вид:

$$J_{zO_3}\varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1'R_3 + M - Q_2r_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2r,$$

где J_{zO_3} – момент инерции блока 3 относительно оси z; ε_3 – угловое ускорение диска 3, $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{P_3}{g}(r\sqrt{3})^2 = \frac{9Pr^2}{g}$.

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$ и реакция наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции опоры $\vec{N}_2$ и силы сцепления катка с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Согласно принципу равенства действия и противодействия, модули сил $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ равны. На рис. 5.4, *c* показаны направления действия сил, приложенных к диску 2. В соответствии с направлением движения груза 1, центр масс катка 2 движется вверх параллельно наклонной плоскости. Направление движения центра масс катка 2 показано направлением оси x_2. Направление вращения катка 2 показано дуговой стрелкой угловой скорости ω_2 (см. рис 5.4, *c*).

Плоскопараллельное движение катка 2 описывается уравнением движения его центра масс и уравнением вращения вокруг оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска. Составляя уравнение движения, получим:

$$m_2 a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2\cos 60^\circ = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P,$$

$$J_C\varepsilon_2 = Q_2'R_2 + F_{\text{сц}}R_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}}2r,$$

где m_2 – масса катка 2, $m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{2P}{g}$; a_C, ε_2 – ускорение центра масс и угловое ускорение катка 2; J_C – момент инерции однородного катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{PR_2^2}{g} = \frac{4Pr^2}{g}$. В уравнении вращательного движения диска момент силы считается положительным, если создаваемый им поворот направлен в сторону вращения диска,

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей. Если предположить, что скорость центра масс катка 2 равна V_C, то угловая скорость катка определится по формуле: $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей (см. рис. 5.4, *c*). Продифференцировав по времени последнее равенство, получим уравнение связи между ускорением центра масс катка 2 и его угловым ускорением: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки B катка 2 (см. рис. 5.4, *c*) $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = \frac{V_C}{R_2} 2R_2 = 2V_C$. Точка B катка 2 и точка A блока 3 соединены нитью (см. рис. 5.3), поэтому их скорости равны. Приравняв скорости точек A и B, получим равенство: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования последнего выражения найдём соотношение между ускорениями: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс диска 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \frac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда $a_1 = 6a_C$.

В результате получены четыре уравнения, описывающие движение тел в системе:

$$\frac{2P}{g}a_1 = 2P - Q_1, \quad \frac{9Pr^2}{g}\varepsilon_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P, \quad \frac{4Pr^2}{g}\varepsilon_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r$$

и три уравнения связей: $\varepsilon_2 = \frac{a_C}{2r}$, $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$, $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения тел получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\frac{12P}{g}a_C = 2P - Q_1, \quad \frac{18P}{g}a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g}a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}, \quad \frac{P}{g}a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

которая может быть решена любым известным из курса математики способом.

Например, исключив из первых двух уравнений величину Q_1, а из третьего и четвёртого уравнений – величину $F_{\text{сц}}$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{54P}{g}a_C = 7P - Q_2, \quad \frac{3P}{g}a_C = 2Q_2 - 4P,$$

откуда $a_C = \frac{10}{111}g$, $Q_2 = \frac{79}{37}P$. Величину натяжения нити Q_1 находим из первого уравнения исходной системы: $Q_1 = \frac{34}{37}P$.

Для вычисления динамической реакции R_3 оси блока 3 заметим, что центр масс блока 3 неподвижен и его ускорение равно нулю, $\vec{a}_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения центра масс блока 3 в проекциях на оси x, y имеют вид :

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \; m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0,$$

где X_3, Y_3, – проекции реакции R_3 оси вращающегося блока 3 на оси x, y (см. рис. 5.4, *b*). Отсюда, с учетом значений $Q_1 = 0{,}919P$ и $Q_2 = 2{,}135P$, проекции динамической реакции оси блока 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ =$

4,98P. Полная величина динамической реакции оси блока 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} =$ 5,31P.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела. **Кинетическая энергия тела при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – угловая скорость тела. Для дисков с равномерно распределённой массой момент инерции относительно оси z, проходящей через центр масс: $J_z = \frac{1}{2} m R^2$, где R – радиус диска. Для тел с неравномерно распределённой массой $J_z = m i_z^2$, где i_z – радиус инерции. **Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении:** $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$ на конечном прямолинейном перемещении S точки приложения силы: $A(F) = FS\cos\alpha$, где α – угол между вектором силы и перемещением. Если угол α острый, работа положительна. Если тупой – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

Работа пары сил с постоянным моментом M при повороте тела на конечный угол φ: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы $\vec{F}$ называют величину $N(F)$, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N(F) = \vec{F} \cdot \vec{V} = = F \cdot V\cos\alpha$, где V – скорость точки приложения силы; α – угол между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы.

При плоском движении тела мощность силы выражается суммой скалярных произведений векторов: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = F \cdot V_O\cos\alpha \pm Fh_O\omega$, где $\vec{V}_O$ – вектор скорости точки, выбранной полюсом; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости тела; $\vec{M}_O$ – вектор момента силы $\vec{F}$ относительно полюса; h_O – плечо силы $\vec{F}$ относительно полюса O.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$, где T – кинетическая энергия системы; $\sum N(\vec{F}_k^e)$, $\sum N(\vec{F}_k^i)$ – сумма мощностей, соответственно, внешних и внутренних сил.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы на её конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$, где T, T_0 – кинетическая энергия системы, соответственно, в текущем и начальном состояниях; $\sum A(\vec{F}_k^e)$, $\sum A(\vec{F}_k^i)$ – сумма работ внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального состояния в текущее.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ внутренних сил и, следовательно, сумма мощностей этих сил равны нулю. Поэтому для таких систем в теореме об изменении кинетической энергии достаточно учитывать только внешние силы.

5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

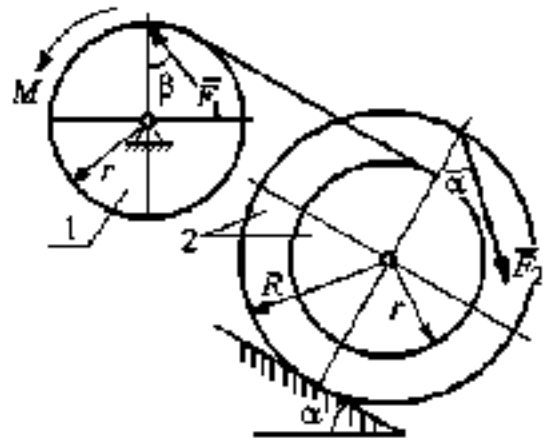
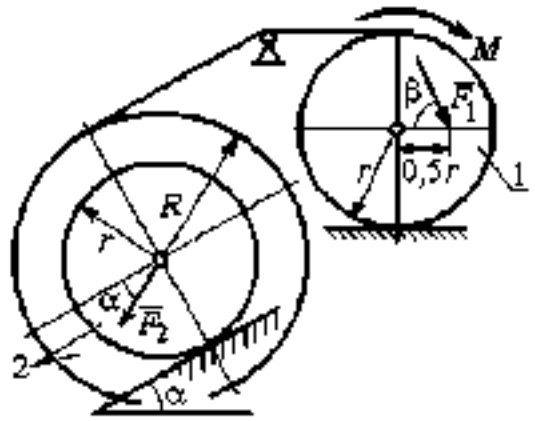
Вес дисков P_1 и P_2. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами α или β, показанными на схемах механизмов.

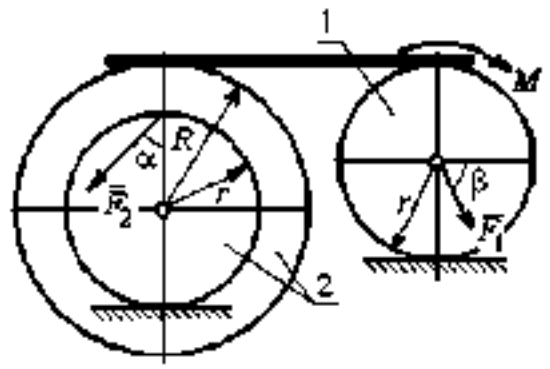
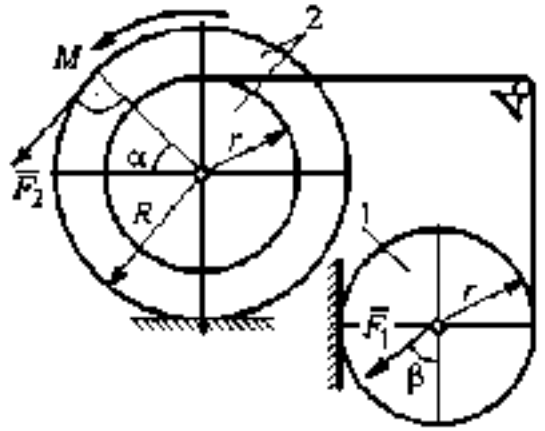
Радиус однородного диска r. Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

1. Найти ускорение центра масс диска 2.

2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты задания приведены на рис. 5.5, 5.6, исходные данные представлены в табл. 5.2.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

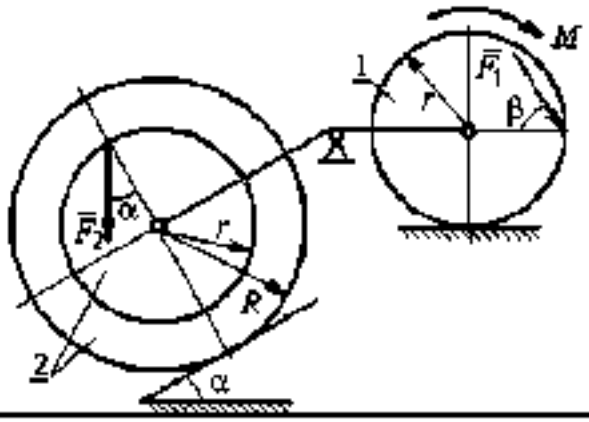
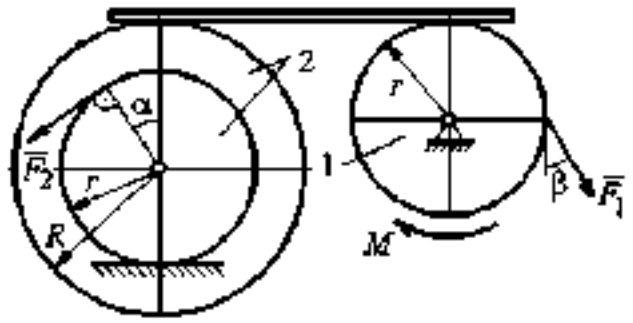
Вариант № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.5. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

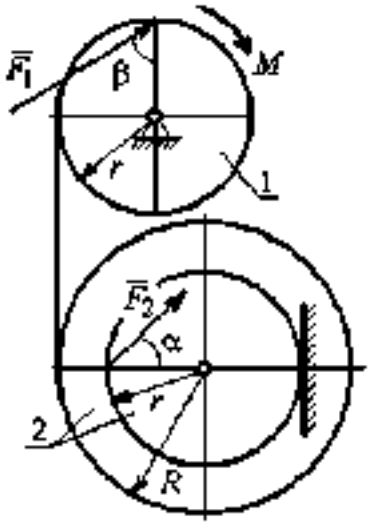
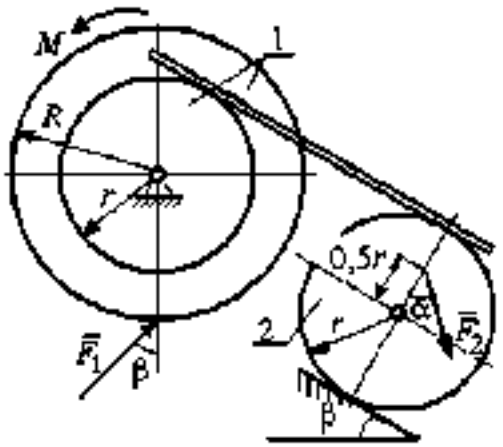
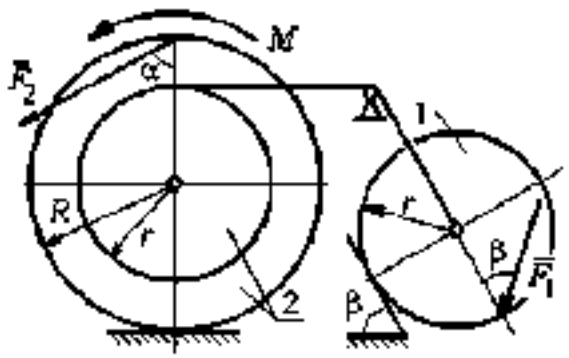
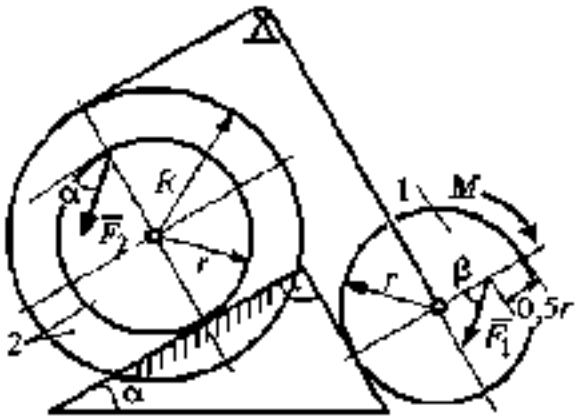
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты 10, 20, 30**
	

Рис. 5.6. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.2

Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н м	α, град	β, град	R, м	r, м	r_2, м
1	10	20	15	20	25	30	60	0,4	0,3	0,3
2	20	30	10	20	20	60	30	0,6	0,3	0,4
3	10	15	12	20	25	60	60	1,2	0,6	0,8
4	12	25	20	25	35	30	30	1,5	0,5	1,2

Окончание табл. 5.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
5	15	20	10	20	30	60	30	0,8	0,4	0,7
6	18	20	18	22	22	45	60	1,2	0,4	0,9
7	15	25	10	8	20	45	45	0,9	0,6	0,7
8	25	22	10	12	30	45	60	1,0	0,8	0,9
9	12	25	18	10	32	30	30	0,8	0,6	0,7
10	10	15	8	10	28	60	30	1,4	0,7	1,2
11	15	22	20	25	30	60	45	0,6	0,4	0,5
12	20	25	15	40	30	30	60	0,8	0,4	0,6
13	10	20	10	25	30	45	30	1,0	0,5	0,9
14	12	15	18	15	25	30	30	0,9	0,3	0,8
15	20	25	20	20	30	45	60	1,0	0,5	0,8
16	10	15	10	15	16	60	45	1,2	0,4	1,1
17	18	25	12	10	30	30	30	1,5	0,9	1,3
18	25	20	10	15	20	60	60	0,8	0,5	0,7
19	12	25	10	10	32	60	60	1,2	0,9	1,1
20	15	20	8	20	25	30	45	0,8	0,4	0,7
21	10	25	25	15	30	45	30	0,7	0,5	0,6
22	18	20	20	20	35	60	45	1,4	0,7	0,9
23	10	15	10	30	30	30	30	1,4	0,7	0,8
24	10	15	12	20	20	30	30	1,2	0,4	0,8
25	12	18	20	18	30	60	30	1,2	0,6	1,1
26	10	12	12	15	15	30	30	0,9	0,3	0,8
27	15	22	10	12	20	45	60	0,8	0,6	0,7
28	22	20	8	16	8	30	45	0,6	0,2	0,4
29	18	25	10	8	32	60	60	1,2	0,8	1,1
30	20	25	8	20	28	30	30	0,8	0,4	0,6

Пример выполнения задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.7). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ определяются углами α и β.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси O_1. Диск 2 катится прямолинейно по горизонтальной поверхности. Качение диска 2 без проскальзывания. Невесомый стержень, соединяющий диски, расположен горизонтально. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует.

Определить ускорение центра масс диска 2, угловое ускорение дисков, усилие в стержне, динамическую реакцию шарнира O_1, реакцию опоры диска 2 (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с поверхностью качения), если модули сил тяжести $P_1 = 40$ Н, $P_2 = 60$ Н, модули сил $F_1 = 80$ Н, $F_2 = 30$ Н, величина момента $M = 35$ Н·м, углы наклона сил $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, радиусы дисков $R = 0{,}8$ м, $r = 0{,}6$ м, радиус инерции диска 2 $i_z = 0{,}4$ м.

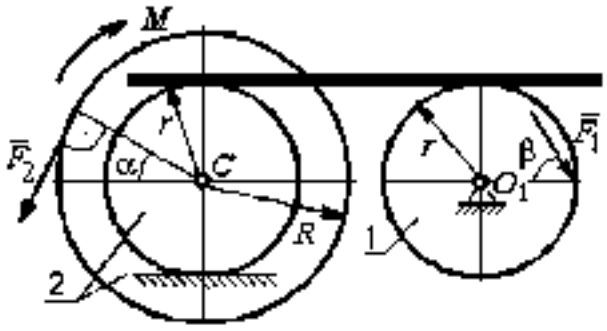


Рис. 5.7. Схема движения механической системы

Решение

Предположим, что во время движения системы диск 1 вращается по ходу часовой стрелки. Угловые скорости ω_1 и ω_2 дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 показаны на рис. 5.8.

На диск 1 действуют силы: $\bar{F}_1$, сила тяжести $\bar{P}_1$ и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\bar{X}_1$, $\bar{Y}_1$. На диск 2: сила $\bar{F}_2$, сила тяжести $\bar{P}_2$, пара сил с моментом M, нормальная реакция опоры $\bar{N}$ и сила сцепления диска 2 с поверхностью $\bar{F}_{сц}$. Направления действия сил показаны на рис. 5.8.

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. По условию задачи рассматриваемая система неизменяемая и, следовательно, сумма мощностей внутренних сил равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид $\frac{dT}{dt} = \sum N(\bar{F}_k^e)$, где T – энергия системы в текущем положении; $\sum N(\bar{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

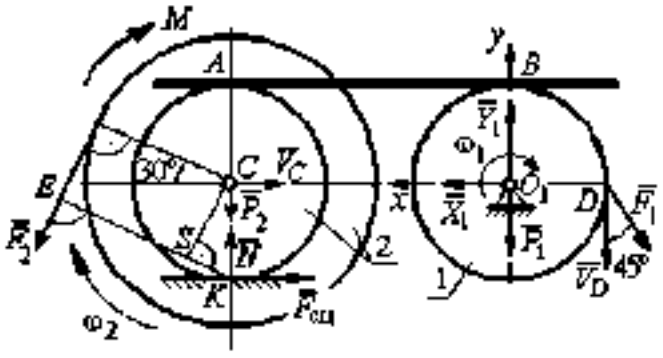


Рис. 5.8. Расчетная схема для исследования движения системы

Найдём кинетическую энергию системы и выразим её через скорость центра масс диска 2.

Кинетическая энергия вращательного движения диска 1: $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$, где ω_1 – угловая скорость диска 1; J_{zO_1} – осевой момент инерции диска 1, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$. Диск 2 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где V_C, ω_2 – скорость центра масс и угловая скорость диска 2; J_{zC} – момент инерции ступенчатого диска 2 относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m_2 i_z^2$.

У диска 2 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.8). Тогда скорость точки C определяется по формуле $V_C = \omega_2 \cdot CK = \omega_2 r$, откуда $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки A $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 2r$, или $V_A = 2V_C$.

Так как нет проскальзывания между стержнем и дисками, скорость точки A на диске 2 равна скорости точки B на диске 1, причём $V_B = \omega_1 r$. Приравнивая скорости $V_B = V_A$, найдем $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

С учетом найденных зависимостей кинетические энергии дисков 1 и 2 и суммарная энергия системы имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1 r^2}{2g} \left(\frac{2V_C}{r} \right)^2 = \frac{P_1}{g} V_C^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} i_z^2 \left(\frac{V_C}{r} \right)^2;$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2.$$

Производная по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = 2V_C \frac{dV_C}{dt}\left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил. Отметим, что мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{сц}$ – нормальной реакции опоры диска 2 и силы сцепления диска с плоскостью также равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого равна нулю. Мощность силы $\vec{P}_2$ равна нулю, так как угол между вектором силы и скоростью точки приложения силы – точки C – равен 90° (см. рис. 5.8). Для определения мощности силы $\vec{F}_2$, приложенной к диску 2, воспользуемся формулой расчета мощности силы при плоскопараллельном движении тела. Выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого $V_K = 0$ (см. рис. 5.8). В этом случае мощность силы $\vec{F}_2$ равна: $N(\vec{F}_2) = \vec{M}_K \cdot \vec{\omega}_2 = -F_2 h_K \omega_2$, где $\vec{M}_K = M_K(\vec{F}_2)$ – вектор момента силы $\vec{F}_2$ относительно центра K; $\vec{\omega}_2$, ω_2 – вектор и модуль угловой скорости диска 2; h_K – плечо силы $\vec{F}_2$ относительно центра K. Мощность силы $\vec{F}_2$ отрицательная, так как направление момента силы $\vec{F}_2$ относительно точки K противоположно направлению угловой скорости диска 2.

В результате, мощность силы $\vec{F}_2$:

$$N(\vec{F}_2) = -F_2 h_K \omega_2 = -F_2(R + r\cos 60^\circ)\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Здесь $h_K = EK = ES + SK = R + r\cos 60^\circ$ (см. рис. 5.8).

Заметим, что для вычисления мощности силы F_2 можно использовать в качестве полюса центр масс диска – точку C. Имеем:

$$N(\vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(F_2) \cdot \vec{\omega}_2 = F_2 V_C \cos 120^\circ - F_2 R\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Момент M направлен в сторону вращения диска 2. Его мощность положительная: $N(M) = M\omega_2 = M\dfrac{V_C}{r}$. Мощность силы $\bar{F}_1$, приложенной в точке D, $N(\bar{F}_1) = F_1 V_D \cos 45^\circ = F_1 V_C \sqrt{2}$. Здесь учтено очевидное равенство $V_D = V_A = 2V_C$ (см. рис. 5.8).

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) - M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2}.$$

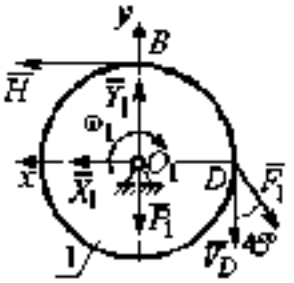


Рис. 5.9. Силы, действующие на диск 1 во время движения

В результате теорема об изменении кинетической энергии системы приводится к виду

$$2V_C\frac{dV_C}{dt}\left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2},$$

откуда ускорение центра масс диска 2:

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = \frac{\left[-F_2\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + \frac{M}{r} + F_1\sqrt{2}\right]g}{\left[2P_1 + P_2\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]}.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим: $a_C = 6{,}85$ м/с^2.

Для определения углового ускорения диска 2 продифференцируем по времени равенство $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r}$. Дифференцирование здесь допустимо, так как во время движения диска 2 расстояние от точки C до мгновенного центра скоростей диска 2 – точки K – не меняется.

Найдем $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \dfrac{\dot{V}_C}{r} = \dfrac{a_C}{r} = 11{,}42$ рад/с^2. Угловое ускорение диска 1 находится путём дифференцирования равенства $\omega_1 = 2\omega_2$. Имеем: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 22{,}84$ рад/с^2.

Для того чтобы определить реакцию стержня, освобождаемся от стержня, заменяем его реакцией $\bar{H}$ и составляем уравнения движения дисков 1 и 2.

Силы, действующие на диск 1 во время движения, показаны на рис. 5.9. Уравнение вращательного движения диска 1 в алгебраической форме: $J_{zO_1}\varepsilon_1 = \sum M_z(\bar{F}_k^e)$, где ε_1 – угловое ускорение диска; J_{zO_1} – момент инерции диска 1 относительно оси z, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости диска, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z.

Считая моменты сил положительными, если они создают поворот диска в сторону его вращения, составим сумму моментов внешних сил относительно оси z: $\sum M_{zO_1}(\bar{F}_k^e) = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$. В результате уравнение вращательного движения диска 1 принимает вид: $\frac{P_1 r^2}{2g}\varepsilon_1 = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$.

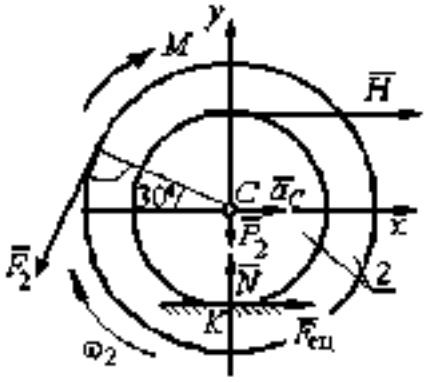


Рис. 5.10. Силы, действующие на диск 2 во время движения

Подставляя в уравнение исходные данные задачи с учетом найденного значения углового ускорения диска 1 $\varepsilon_1 = 22{,}84$ рад/с^2, найдем реакцию стержня $H = 28{,}63$ Н.

Для определения динамической реакции шарнира O_1 диска 1 применим теорему о движении центра масс. Выберем оси координат O_1x и O_1y, как показано на рис. 5.9, и составим уравнение движения центра масс диска 1 в проекциях на оси координат с учётом того, что сам центр масс неподвижен и его ускорение равно нулю.

Получим систему:

$$H + X_1 - F_1\sin 45^\circ = 0,\quad Y_1 - P_1 - F_1\cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда, с учётом найденной величины усилия в стержне $H = 28{,}63$ Н, находим составляющие динамической реакции шарнира: $X_1 = 27{,}94$ Н, $Y_1 = 96{,}57$ Н. Полная реакция шарнира $R_{O_1} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = 100{,}53$ Н.

Для определения величины силы сцепления диска 2 с поверхностью качения

и нормальной составляющей реакции опоры диска используем теорему о движении центра масс. Силы, приложенные к диску 2, и выбранная система координат xCy показаны на рис. 5.10. Уравнения движения центра масс диска 2 в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_2 a_C = H + F_{сц} - F_2 \cos 60^\circ;$$

$$0 = -F_2 \cos 30^\circ - P_2 + N.$$

С учетом найденных значений реакции стержня $H = 28{,}63$ Н и ускорения центра масс диска 2 $a_C = 6{,}85$ м/с^2, находим силу сцепления и нормальную реакцию опоры: $F_{сц} = 28{,}27$ Н, $N = 85{,}98$ Н.

Полная реакция опоры $R_K = \sqrt{N^2 + F_{сц}^2} = 90{,}51$ Н.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения, направленную противоположно этому ускорению $\vec{R}^{и} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

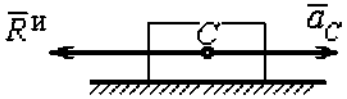


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к главному вектору сил инерции $\vec{R}^{и}$, равному по величине $R^{и} = ma_C$, приложенному в центре масс тела и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции, приведённый к центру масс тела, обращается в нуль (так как ускорение центра масс равно нулю). Таким образом, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $\vec{M}^{и}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения. Величина главного момента сил инерции $M^{и} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

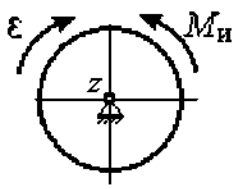


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к силе $\vec{R}^{и}$, равной главному вектору сил инерции, и паре сил с моментом $\vec{M}^{и}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 6.3). Главный

вектор сил инерции равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс: $R^{и} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ центра масс. Главный момент сил инерции равен по величине произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, на угловое ускорение тела: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (см. рис. 6.3).

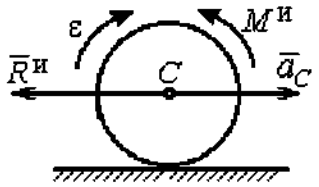


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

Принцип Даламбера для системы. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной. Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия:

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0, \ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, приложенные к системе; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ – момент внешних сил, приложенных к системе, относительно произвольного центра O; $\vec{M}_O^{и}$ – главный момент сил инерции относительно центра O.

Силы, действующие на систему, можно подразделить на активные и реакции связей. **Идеальными связями** в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{акт}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{акт})$ – элементарная работа активных сил на возможном перемещении.

Совместное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений приводит к формулировке общего уравнения динамики.

Общее уравнение динамики. При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к системе, на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения. При этом переменные силы на элементарном перемещении точек их приложения считаются постоянными.

6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом R или r и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом R и r. Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом M. Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами α и β. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым двигаются тела.

Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты задания приведены на рис. 6.4, 6.5. Исходные данные выбираются из табл. 6.1.

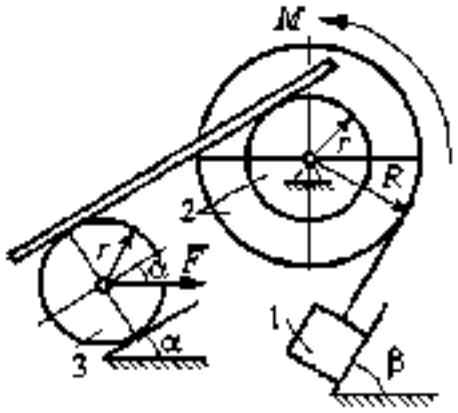
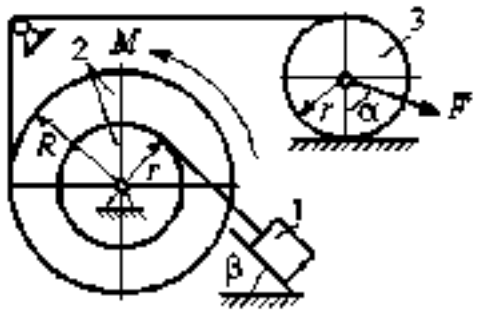
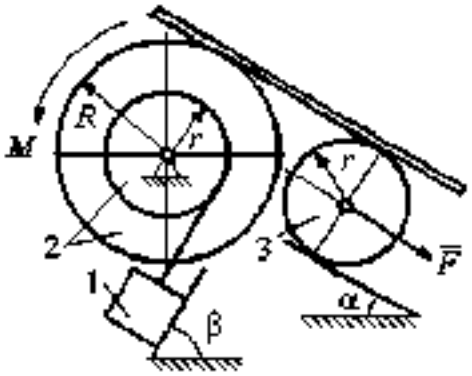
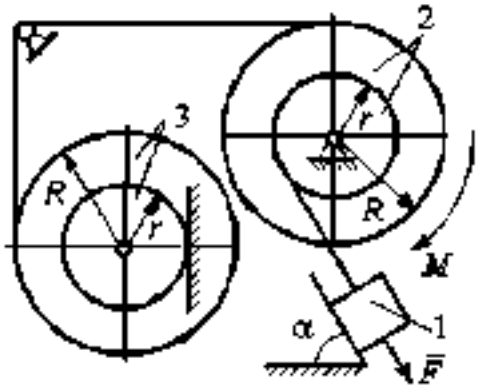
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Варианты 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	

Рис. 6.4. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

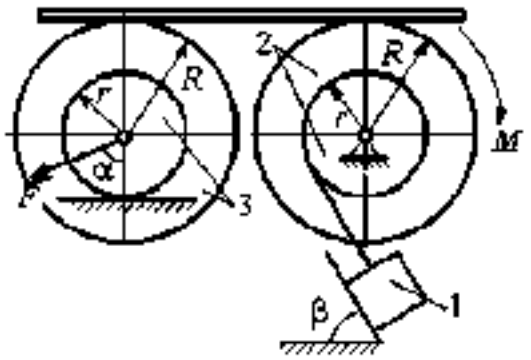
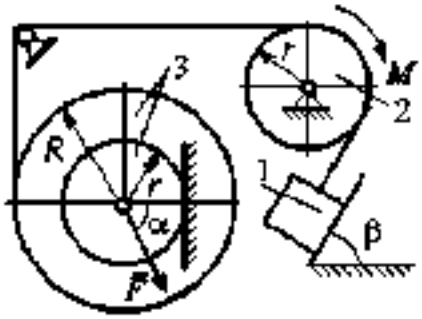
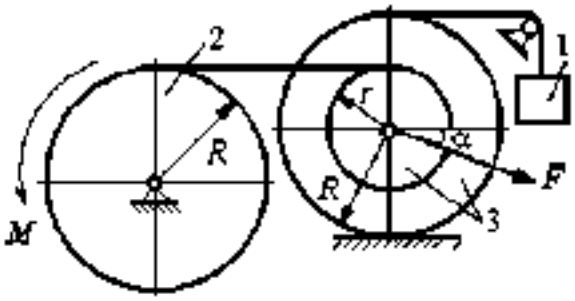
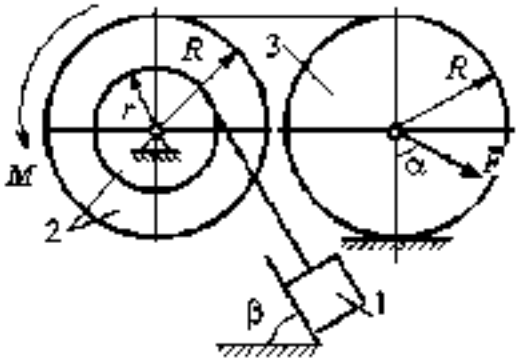
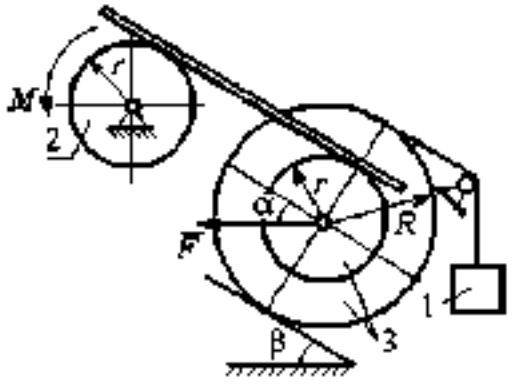
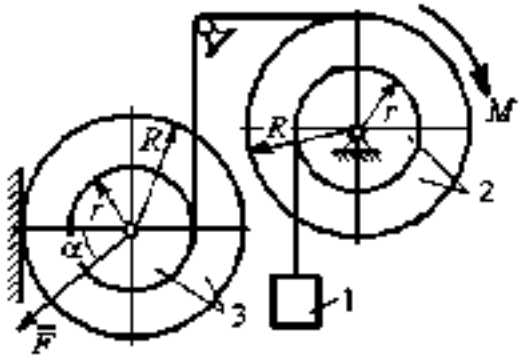
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.5. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 6.1

Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	8	20	$3(2+t^2)$	30	60	0,6	0,3	0,4
2	10	22	15	15	$4(t+3)$	30	30	0,8	0,4	0,6
3	5	18	10	6	$8(t^2+1)$	90	30	0,4	0,3	0,3
4	5	22	10	5	$14(t^2+t+1)$	30	–	0,6	0,5	0,6
5	5	20	16	9	$3(t^2+4)$	45	60	0,6	0,3	0,5
6	10	16	14	15	$4(5+t)$	60	30	1,0	0,6	0,8
7	6	20	20	8	$9(3t^2+2)$	45	–	0,8	0,6	0,8
8	16	25	15	12	$5(t^2+4)$	30	60	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	$4(3+5t)$	60	30	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	10	$5(3t+6)$	30	–	1,0	0,8	0,9
11	4	22	8	15	$2+ t^2$	45	45	0,8	0,4	0,6
12	15	18	15	10	$5(t+3)$	30	60	1,0	0,5	0,7
13	6	20	10	4	$5(t^2+2)$	30	60	0,6	0,5	0,4
14	10	25	15	8	$16(t+2)$	60	–	0,8	0,6	0,7
15	8	18	20	10	$6(t+2)$	30	90	1,2	0,6	1,0
16	8	18	12	12	$5(3+t^2)$	90	60	0,8	0,6	0,7
17	5	20	10	10	$2t^2+20$	60	–	0,9	0,6	0,8
18	20	15	20	15	$3(t+4)$	60	30	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	10	$4(3+t)$	45	45	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	6	$6(3t+4)$	45	–	1,0	0,6	0,9
21	15	25	12	12	$6+t^2$	60	60	0,6	0,3	0,5
22	20	22	18	15	$2(2t+9)$	45	45	0,8	0,4	0,6
23	8	24	12	8	$7(3t^2+2)$	30	45	0,8	0,5	0,6
24	12	20	18	10	$6(t+4)$	90	–	0,5	0,3	0,4
25	5	20	12	12	$9(2+t^2)$	60	30	1,4	0,7	1,2
26	10	12	10	8	$6(2+t)$	30	45	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	14	$8(2t^2+3)$	30	–	0,8	0,2	0,6
28	10	20	20	20	$3(t^2+3)$	45	30	0,6	0,3	0,5
29	10	18	8	12	$5(4+t+ t^2)$	30	60	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	15	$8(t^2+5)$	60	–	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система состоит из груза 1, движущегося поступательно, ступенчатого диска 2 (каток), катящегося по неподвижной поверхности цилиндрической ступенькой, и однородного диска 3 (блок), вращающегося вокруг неподвиж-

ной оси, проходящей через центр масс блока (рис. 6.6). Качение катка 2 без проскальзывания, скольжение груза 1 – без трения. Движение системы происходит под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1 и пары сил с моментом M, приложенной к диску 3.

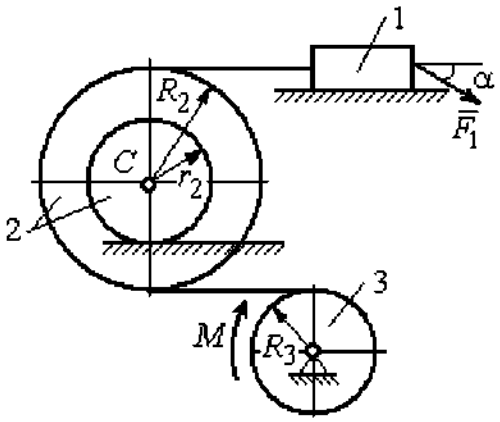


Рис. 6.6. Схема движения механической системы

Найти уравнение движения центра масс катка 2 если движение системы началось из состояния покоя. Определить реакцию шарнира диска 3 в момент t = 1 с, если: P_1 = 10 Н; P_2 = 20 Н; P_3 = 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 6(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; i_{2C} = 0,6 м.

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.7). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности без трения, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, направление движения в системе задаёт пара сил с моментом M, приложенная к блоку 3. Обозначим ω_3, ε_3 – угловая скорость и угловое ускорение блока 3, V_C, a_C – скорость и ускорение центра масс катка 2, V_1, a_1 – скорость и ускорение груза 1. Направления векторов скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и ускорений тел в соответствии с выбранным направлением движения системы показаны на рис. 6.7.

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0.$$

Присоединим к телам системы силы инерции. Груз 1 движется поступательно. Главный вектор сил инерции груза 1 $\bar{R}_1^{и}$ приложен в центре масс груза и направлен в сторону, противоположную ускорению $\bar{a}_1$ груза 1. Модуль главного вектора сил инерции груза 1 $R_1^{и} = m_1 a_1$, где m_1 – масса груза 1; a_1 – величина ускорения груза 1.

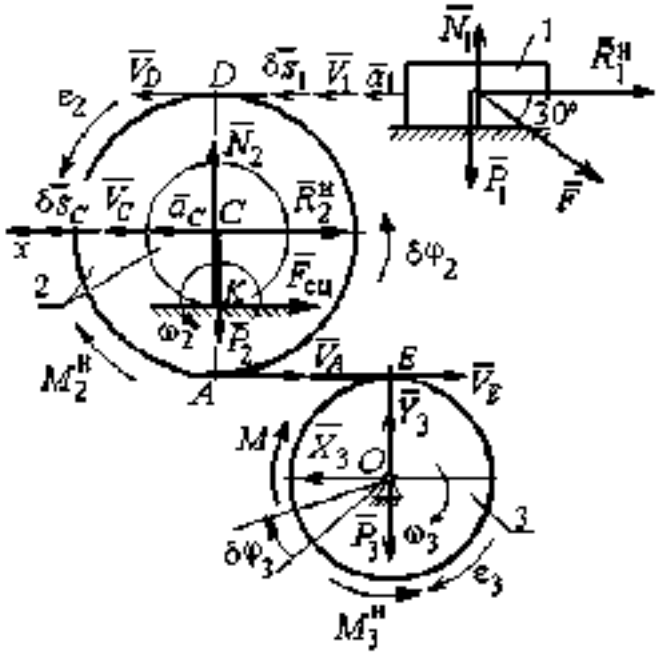


Рис. 6.7. Расчётная схема исследования движения механической системы

Система сил инерции катка 2, приводятся к силе, равной главному вектору сил инерции $\bar{R}_2^{и}$, приложенному в центре масс катка 2, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $\bar{M}_2^{и}$ относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению $\bar{a}_C$, и составляет $R_2^{и} = m_2 a_C$, где m_2 – масса катка 2; a_C – величина ускорения центра масс. Главный момент сил инерции: $M_2^{и} = J_{2C}\varepsilon_2$, где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε_2 – угловое ускорение катка 2. Направлен главный момент сил инерции $M_2^{и}$ в сторону, противоположную угловому ускорению ε_2.

Главный вектор сил инерции, приложенных к блоку 3 и приведённых к центру масс блока, равен нулю, так как блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, и ускорение центра масс блока равно нулю. В результате силы инерции блока 3 приводятся к паре сил, момент которой равен главному

моменту сил инерции $\vec{M}_3^{\text{и}}$ относительно оси вращения. Главный момент сил инерции блока 3 равен по величине $M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3$, где J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения; ε_3 – угловое ускорение блока 3, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε_3. Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.8.

Определим кинематические соотношения между скоростями точек системы и выразим их через скорость V_C центра масс катка 2. Каток 2 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке K касания катка с поверхностью (см. рис. 6.7). Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Скорость точки A катка 2: $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) =$ $V_C \dfrac{R_2 - r_2}{r_2}$. Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2, $V_E = V_A$. Тогда угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = \frac{V_A}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Для того чтобы найти соотношения между перемещениями, выразим кинематические равенства между скоростями в дифференциальном виде и, полагая, что действительное перемещение является возможным, т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$, получим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \quad \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с действительным. Элементарная работа реакций связи на любом возможном перемещении системы равна нулю, так как связи в системе идеальные.

Найдем элементарные работы активных сил и выразим их через перемещение центра масс катка 2. Прежде заметим, что элементарные работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как направления перемещений точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0,\ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0.$$

Элементарная работа силы тяжести блока 3 равна нулю, так как точка приложения силы тяжести блока 3 не перемещается: $\delta A(\vec{P}_3) = 0$.

Элементарная работа пары сил с моментом M, приложенных к блоку 3:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

Сумма элементарных работ всех активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ =$$

$$= \left[6(1+2t)\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}2} \right) - 5(t+1)\left(\frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2} \right) 0{,}866 \right] \delta s_C = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции в зависимости от ускорения a_C центра масс катка 2:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1 (R_2 + r_2)}{g r_2} a_C,\quad R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g},$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = m_2 i_{2C}^2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2},$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3^2}{2g} \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} a_C = \frac{P_3 R_3 (R_2 - r_2)}{2 g r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси. проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – раднус инерции катка 2; J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, $J_{3O} = \dfrac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции на возможном перемещении системы и выразим их в зависимости от перемещения δs_C центра масс катка 2:

$$\delta A(\bar{R}_1^{\text{и}}) = R_1^{\text{и}} \delta s_1 \cos 180^\circ = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\bar{R}_2^{\text{и}}) = R_2^{\text{и}} \delta s_C \cos 180^\circ = -\frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C, \quad \delta A(\bar{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}} \delta \varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C;$$

$$\delta A(\bar{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}} \delta \varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2} \delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum \delta A(\bar{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g} \delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2} \delta s_C - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2} \delta s_C =$$

$$= -\frac{a_C \delta s_C}{g} \left[\frac{10(0{,}8 + 0{,}2)^2}{0{,}2^2} + 20 + \frac{20 \cdot 0{,}6^2}{0{,}2^2} + \frac{15(0{,}8 - 0{,}2)^2}{2 \cdot 0{,}2^2} \right] = -52{,}75\, a_C \delta s_C,$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2.

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид:

$$\sum \delta A(\bar{F}_k^{\text{внеш}}) + \sum \delta A(\bar{R}_k^{\text{и}}) = (23{,}35 + 68{,}35t) \delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0,$$

откуда ускорение центра масс катка 2:

$$a_C = 0{,}44 + 1{,}29t.$$

Выберем ось x по направлению движения центра масс катка 2 (см. рис. 6.7). Проектируя вектор $\vec{a}_C$ ускорения точки C на ось x, получим дифференциальное уравнение $a_C = \ddot{x}_C = 0{,}44 + 1{,}29t$. Интегрируя дважды это уравнение, найдём закон движения: $x_C = 0{,}44\dfrac{t^2}{2} + 1{,}29\dfrac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$. Подставляя сюда начальные условия: $t = 0$, $V_C = 0$, $x_C = 0$, найдём константы интегрирования: $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения центра масс диска 2 представим в виде:

$$x_C = 0{,}22t^2 + 0{,}21t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (см. рис. 6.8). Реакция нити, равная силе натяжения нити, приложена к блоку 3, направлена вдоль нити, связывающей каток 2 и блок 3. Присоединим к блоку 3 силы инерции. Направления сил, моментов пар сил и главного момента сил инерции, действующих на блок 3, показаны на рис. 6.8.

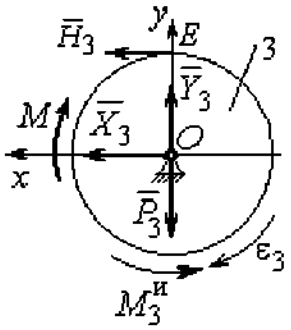


Рис. 6.8. Расчётная схема определения натяжения нити и реакции шарнира блока 3

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил (включая силы инерции) относительно оси вращения. Получим $M - H_3 R_3 - M_3^и = 0$, где $M_3^и = J_{3O}\varepsilon_3 = = \dfrac{P_3 R_3 (R_2 - r_2) a_C}{2 g r_2}$.

Из уравнения находим величину натяжения нити:

$$H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{P_3(R_2 - r_2)a_C}{2gr_2} = \frac{6(1+2t)}{R_3} - \frac{P_3(R_2 - r_2)}{2gr_2}(0{,}44 + 1{,}29t) = 13{,}99 + 27{,}04t.$$

В момент времени $t = 1$ с натяжение нити: $H_3 = 41{,}04$ Н.

Так как главный вектор сил инерции блока 3 равен нулю, то составленные по принципу Даламбера уравнения равновесия блока 3 в виде проекций сил на

вертикальную и горизонтальную оси содержат только внешние силы. Имеем: $X_3 + H_3 = 0$, $Y_3 - P_3 = 0$ (см. рис. 6.8). Отсюда находим составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с: $X_3 = -H_3 = -41{,}04$ Н, $Y_3 = P_3 = 15$ Н. Отрицательное значение горизонтальной составляющей реакции шарнира X_3 означает её противоположное направление.

Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 43{,}69$ Н.

6.3. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами механической системы называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_s$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменяются на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$, называемые вариациями обобщенных координат, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s$. Величина Q_k, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

где T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости; s – число степеней свободы системы.

6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

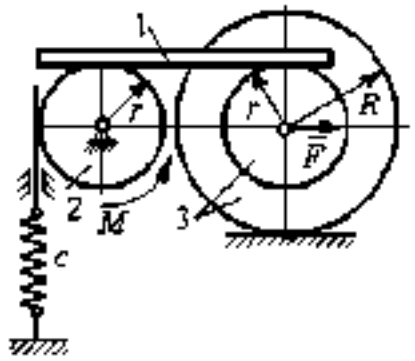
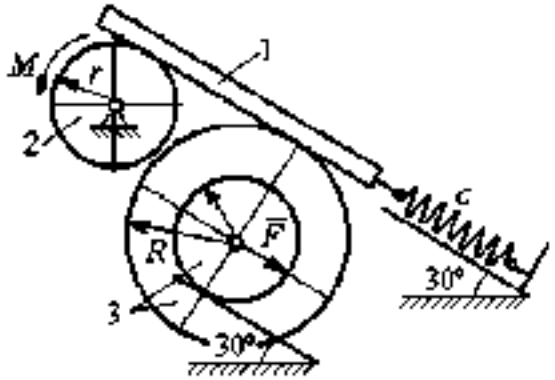
Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

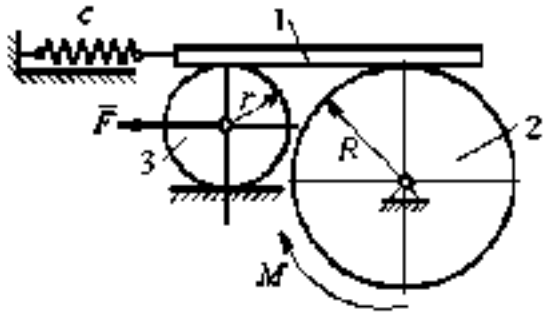
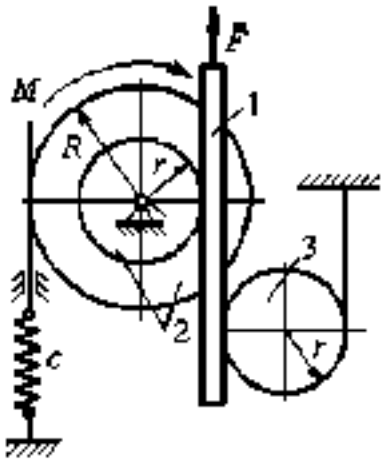
Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M.

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость ω_{20}, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин F или M в табл. 6.2 означают, что при заданных модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента M на схеме следует изменить на противоположные.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

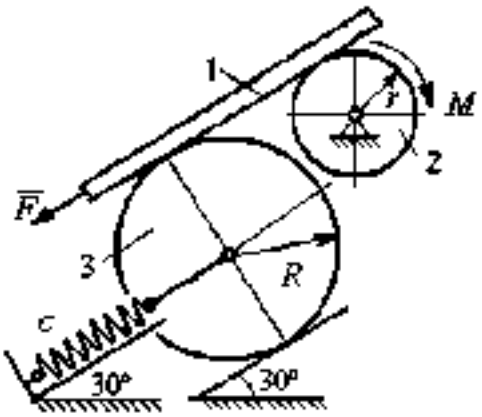
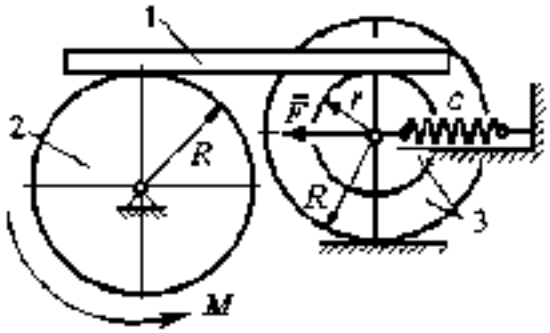
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 6.9. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

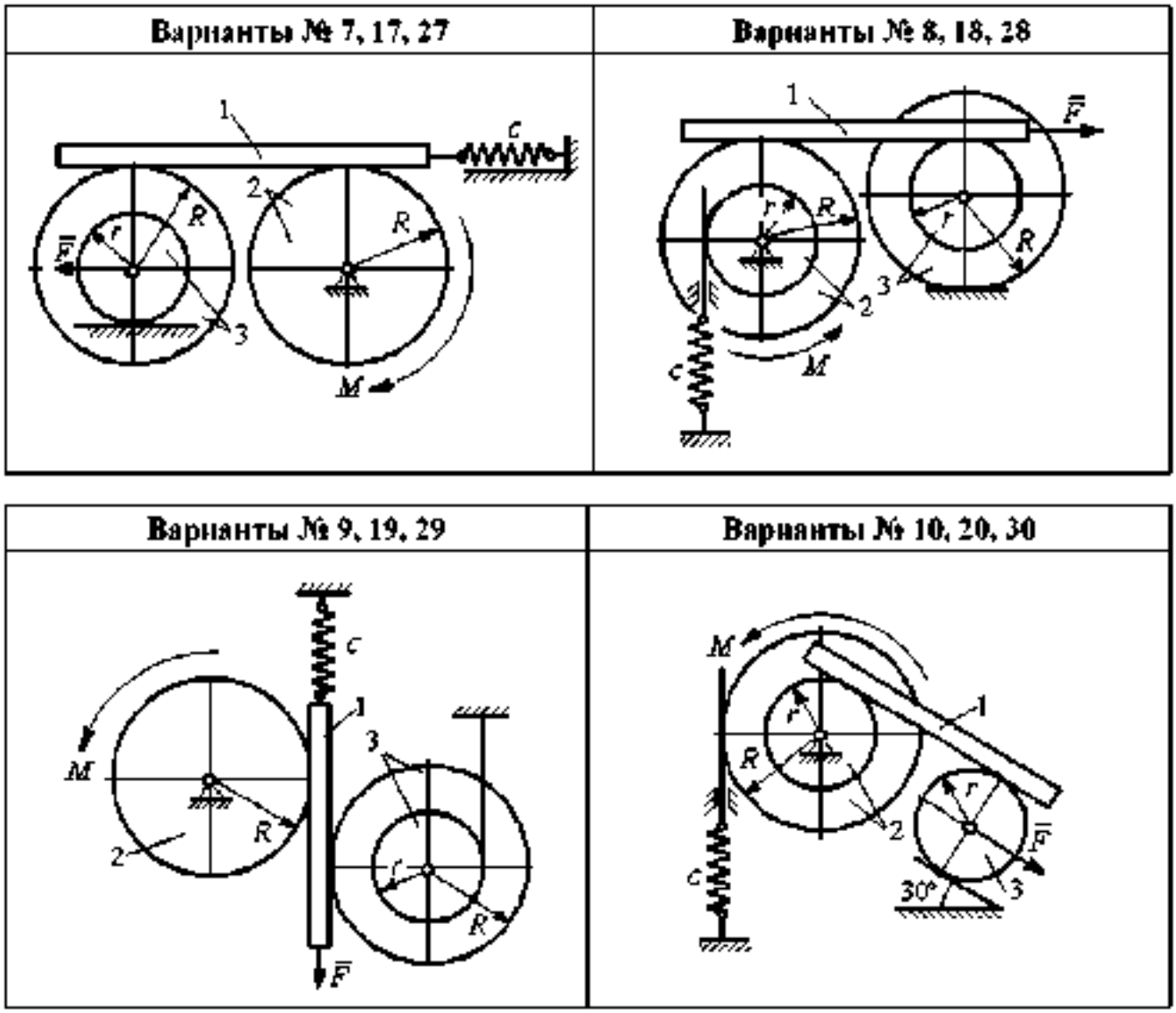


Рис. 6.10. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.2

Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{y0}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
1	8	12	18	15	3	50	0,3	0,6	0,3	0,4
2	10	8	15	12	5	55	0,4	0,8	0,5	0,6
3	5	18	10	8	4	60	0,2	0,5	0,3	-
4	5	20	12	10	6	70	0,5	0,6	0,5	0,6
5	5	8	16	8	8	65	0,2	0,6	0,3	–

Окончание табл. 6.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
6	8	10	14	6	2	50	0,1	1,0	0,6	0,8
7	10	12	15	12	3	65	0,2	0,8	0,6	0,7
8	12	15	15	6	2	50	0,3	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	4	75	0,1	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	5	12	60	0,4	1,0	0,8	0,9
11	4	10	12	–10	–2	60	0,2	0,8	0,4	0,6
12	5	8	15	–8	3	50	0,5	1,0	0,5	0,7
13	6	15	8	–12	–4	65	0,4	0,6	0,5	–
14	10	25	10	6	10	55	0,1	0,8	0,6	0,7
15	8	6	20	–10	2	70	0,2	1,2	0,6	–
16	10	12	12	–5	6	60	0,3	0,8	0,6	0,7
17	12	16	12	–6	–2	55	0,4	0,9	0,6	0,8
18	10	20	20	10	4	60	0,1	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	–10	6	65	0,2	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	–3	6	50	0,24	1,0	0,6	0,9
21	5	12	15	12	–3	55	0,3	0,6	0,5	0,55
22	10	15	18	6	–2	65	0,1	0,8	0,4	0,6
23	8	20	12	–8	2	45	0,2	0,8	0,6	–
24	12	20	18	–4	–8	70	0,4	0,5	0,3	0,4
25	6	10	15	–6	–2	60	0,1	1,4	0,7	–
26	8	12	10	10	–3	65	0,2	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	5	–3	70	0,2	0,8	0,2	0,6
28	8	12	12	–6	2	65	0,3	0,6	0,3	0,5
29	10	18	20	–10	4	60	0,2	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	8	6	75	0,1	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3 (рис. 6.11). Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r, радиус однородного диска r. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Движение катка 3 по неподвижной поверхности происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. Передача движения от пружины блоку 2 производится посредством невесомого вертикального стержня

без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z.

Исходные данные задачи: $P_1 = P$ Н, $P_2 = 2P$ Н, $P_3 = P$ Н, $F = 2P$ Н, $M = Pr$ Н·м, $R = 1{,}5r$ м, $i_z = r\sqrt{2}$ м, $c = P/r$ Н/м.

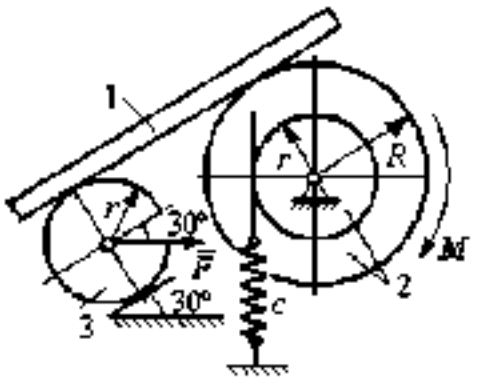


Рис. 6.11. Механическая система с одной степенью свободы

Определить законы движения блока 2 и бруса 1 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_{20} = 0{,}5$ рад/с, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.11) имеет одну степень свободы, так как в системе не допускается независимое друг от друга движение тел. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня, при котором пружина длиной l_0 находилась в нерастянутом состоянии (рис. 6.12). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

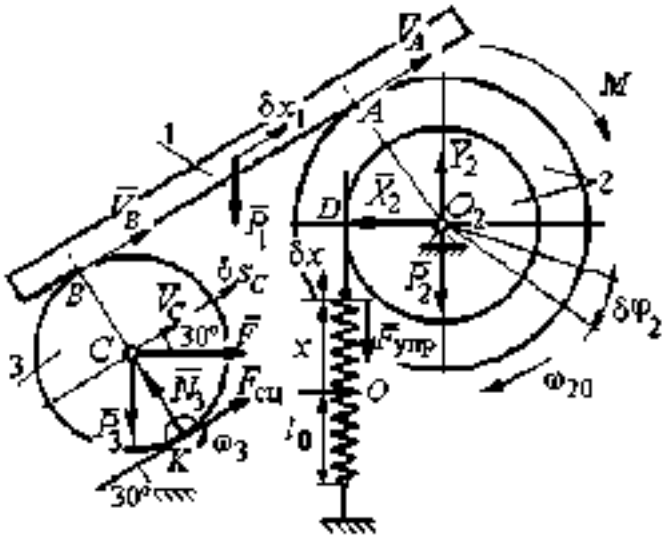


Рис. 6.12. Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы с одной степенью свободы, имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы, Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате x.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий бруса, блока и катка: $T = T_1 + T_2 + T_3$. Кинетическая энергия поступательного движения бруса 1: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где m_1, V_1 – масса и скорость бруса. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока, J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z, $J_{2z} = m_2 i_z^2$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C – скорость центра масс катка 3; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка; ω_3 – угловая скорость катка.

Выразим скорость V_1 бруса 1, угловые скорости ω_2, ω_3 блока 2 и катка 3, а также скорость V_C центра масс катка 3 через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки D блока 2 равна скорости верхнего края пружины $V_D = \dot{x}$. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость бруса 1 равна скорости точки A блока 2 и вычисляется по формуле $V_1 = V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x} R}{r}$. Так как брус совершает поступательное движение, то $V_B = V_1$. Угловая скорость катка 3 $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_1}{2r} = \frac{\dot{x} R}{2r^2}$. Здесь при определении угловой скорости катка 3 учтено, что точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей катка. Скорость центра катка 3 $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x} R}{2r}$.

Подставляя исходные данные задачи с учётом найденных кинематических соотношений, получим кинетическую энергию тел системы

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{P}{2g}\left(\frac{\dot{x} R}{r}\right)^2 = 1{,}125 \frac{P}{g} \dot{x}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(r\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = 2 \frac{P}{g} \dot{x}^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x} R}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{P r^2}{2g} \left(\frac{\dot{x} R}{2r^2} \right)^2 = 0{,}422 \frac{P}{g} \dot{x}^2 .$$

Тогда полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 3{,}547 \frac{P}{g} \dot{x}^2 .$$

Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой x, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине, находящейся в произвольном положении, возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси x (см. рис. 6.12). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$: $\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{r}$, брус 1 переместится на расстояние δx_1: $\delta x_1 = \frac{\delta x R}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние δS_C: $\delta S_C = \frac{\delta x R}{2r}$. Все перемещения получены из установленных ранее кинематических соотношений и показаны на рис. 6.12.

При заданном возможном перемещении системы работу совершают силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ бруса 1 и катка 3, пара сил с моментом M, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины (см. рис. 6.12). Элементарная работа вращающего момента M, приложенного к блоку 2, будет $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\frac{\delta x}{r}$. Работа силы тяжести бруса 1 определяется равенством $\delta A(P_1) = P_1 \delta x_1 \cos 120^\circ = -P_1 \delta x_1 \cos 60^\circ = -\frac{P_1 \delta x R}{2r}$. Работы силы тяжести катка 3 и силы F: $\delta A(P_3) = P_3 \delta s_C \cos 120^\circ = -P_3 \frac{\delta x R}{4r}$, $\delta A(F) = F \frac{\delta x R}{2r} \cos 30^\circ$. Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние x: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.12). Работа силы упругости при перемещении вдоль линии действия на расстояние δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}} \delta x \cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи составляет

$$\delta A = \delta A(M) + \delta A(P_1) + \delta A(P_3) + \delta A(F) + \delta A(F_{\text{упр}}) =$$

$$= M\frac{\delta x}{r} - \frac{P_1 \delta x R}{2r} - P_3\frac{\delta x R}{4r} + F\frac{\delta x R}{2r}\cos 30^\circ - cx\delta x = P(1{,}174 - 5x)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P(1{,}174 - 5x)$.

Составим уравнения Лагранжа. Вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{x}$ и координате x: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7{,}094\frac{P}{g}\dot{x}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Определим полную производную по времени: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x}$. Результаты расчетов подставим в уравнения Лагранжа II рода и получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x} = P(1{,}174 - 5x), \text{ или при } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2,\ \ddot{x} + 6{,}91x = 1{,}62.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{6{,}91} = 2{,}63$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{частн}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим $b = 0{,}23$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 2{,}63t + C_2 \cos 2{,}63t + 0{,}23$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость ω_{20}, то $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}23$.

Вычисляем скорость движения пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 2{,}63C_1\cos 2{,}63t - 2{,}63C_2\sin 2{,}63t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}038$. Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}038\sin 2{,}63t - 0{,}23\cos 2{,}63t + 0{,}23$ м.

Уравнения колебательных движений бруса 1 и блока 2 найдём из ранее полученных кинематических соотношений:

$$x_1 = \frac{xR}{r} = 1{,}5\,x(t) = 0{,}057\sin 2{,}63t - 0{,}34\cos 2{,}63t + 0{,}34 \text{ м};$$

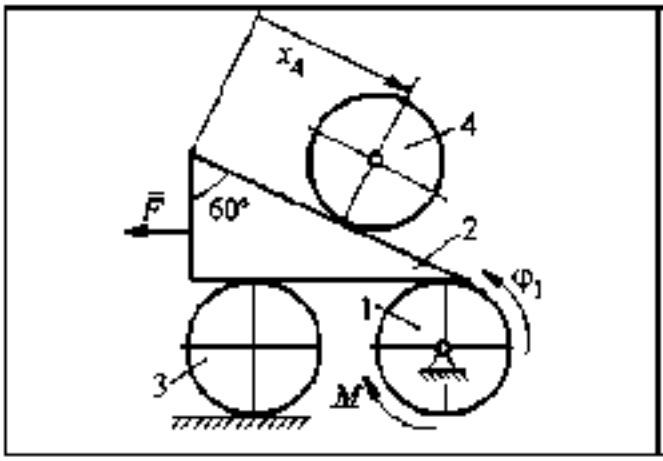
$$\varphi_2 = \frac{x}{r} = 5\,x(t) = 0{,}19\sin 2{,}63t - 1{,}15\cos 2{,}63t + 1{,}15 \text{ рад}.$$

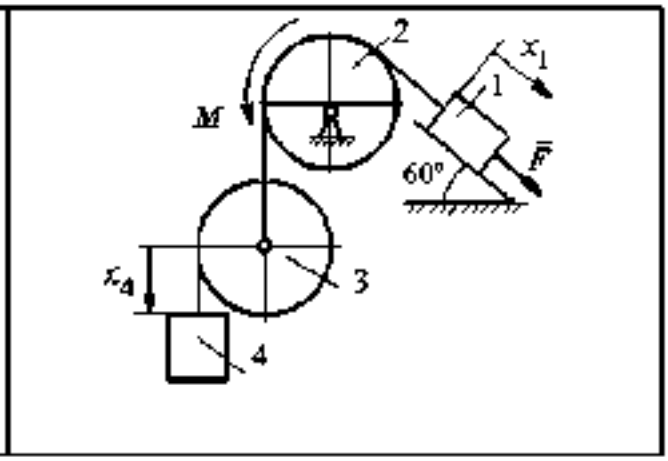
Амплитуда колебаний бруса $A = \sqrt{0{,}057^2 + 0{,}34^2} = 0{,}35$ м.

6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы

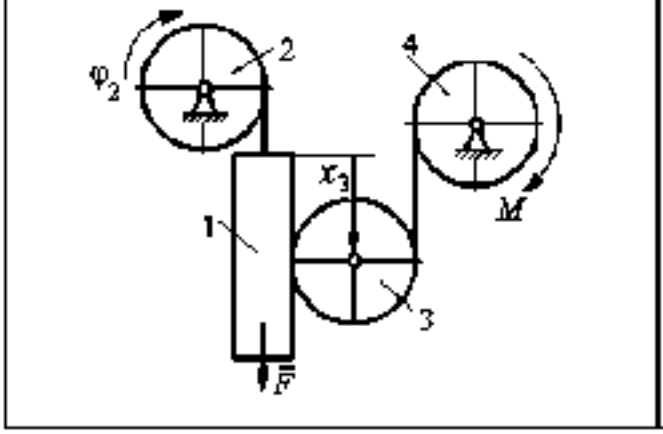
Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны R. Найти уравнения движения системы в обобщённых координатах. Варианты заданий и рекомендуемые обобщённые координаты даны на рис. 6.13, 6.14, варианты исходных данных – в табл. 6.3.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**

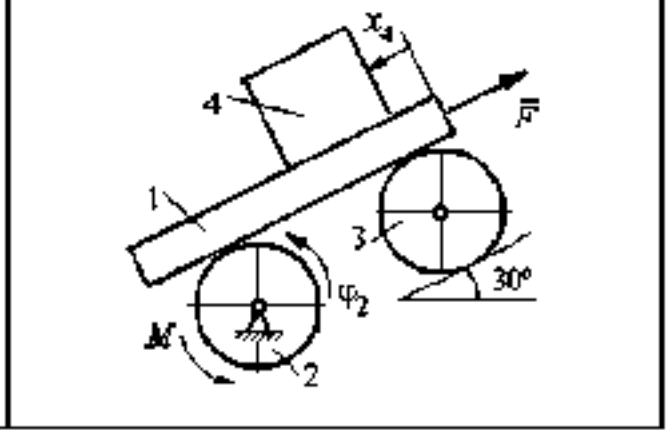




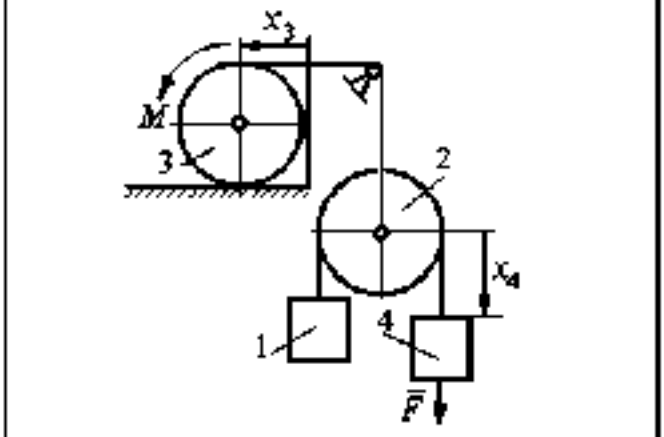
Варианты № 3, 13, 23



Варианты № 4, 14, 24



Варианты № 5, 15, 25



Варианты № 6, 16, 26

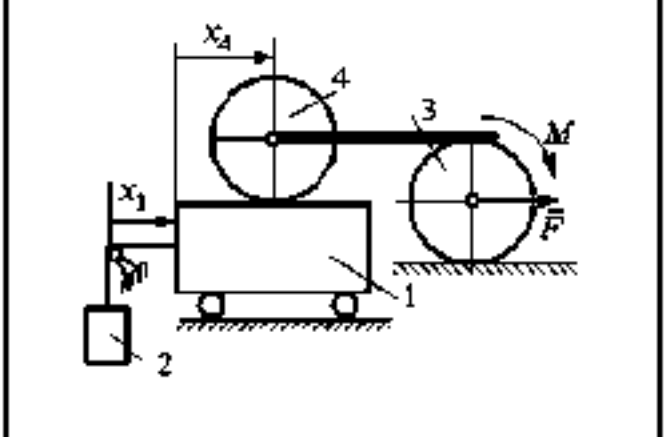
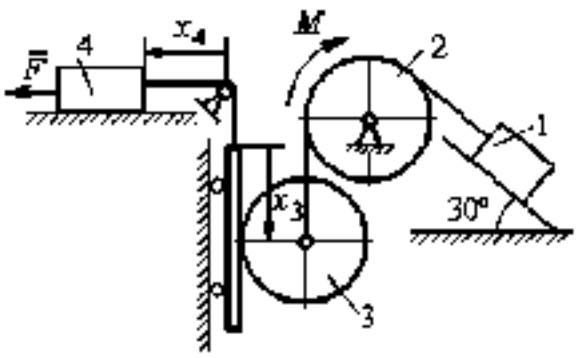
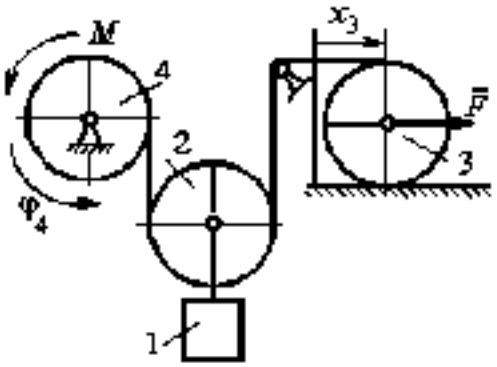


Рис. 6.13. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

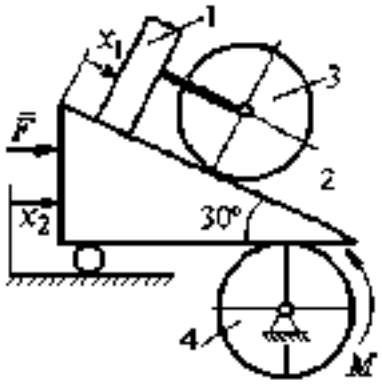
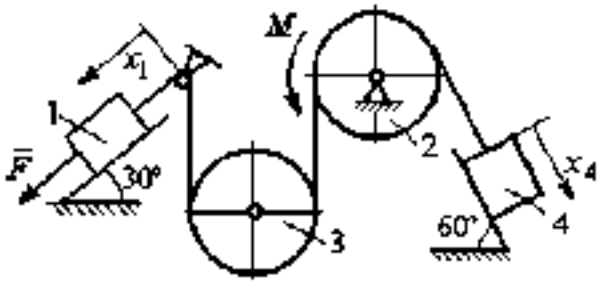
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.14. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.3

Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Номер варианта задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P_1, Н	P	$2P$	P	$1{,}5P$	P	$3P$	P	$1{,}2P$	$3P$	P	$2P$	P	P	$2P$	P
P_2, Н	$3P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	$4P$	$3P$
P_3, Н	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$
P_4, Н	$2P$	P	P	$2P$	$3P$	$3P$	P	P	$2P$	P	P	P	$2P$	$2P$	$2P$
R, м	$2r$	$1{,}5r$	$2{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	r	$1{,}5r$	r	$2r$	r	$1{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	$2r$	$2r$
F, Н	P	$2P$	P	$3P$	P	P	$2P$	$4P$	P	$2P$	P	$2P$	$1{,}5P$	$4P$	$2P$
M, Н·м	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Окончание табл. 6.3

Номер варианта задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P_1, Н	$4P$	$1{,}5P$	P	$2P$	P	P	$1{,}5P$	$1{,}5P$	$2P$	P	P	$2P$	$1{,}2P$	$3P$	$1{,}2P$
P_2, Н	$2P$	$2P$	$2P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	$2P$	$1{,}2P$	$2P$	$3P$	$2P$
P_3, Н	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	P	P	$3P$
P_4, Н	$1{,}5P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	P	$2P$	P	$2P$
R, м	$1{,}5r$	r	$1{,}5r$	$2r$	r	$1{,}2r$	$2r$	$1{,}5r$	$2r$	r	$1{,}5r$	$2r$	r	$1{,}2r$	$2r$
F, Н	$2P$	$2P$	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	P	$3P$	$1{,}5P$	$4P$	$2P$	$3P$
M, Н·м	$3Pr$	$2Pr$	$4Pr$	Pr	$4Pr$	$4Pr$	$2Pr$	Pr	$4Pr$	$2Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Пример выполнения задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Платформа 3 лежит горизонтально на катке 5 и блоке 4 одинакового радиуса R (рис. 6.15). На платформу действует горизонтальная сила $\vec{F}$. К блоку 4, вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена пара сил с моментом M. Каток 5 катится по горизонтальной поверхности. К краю платформы одним концом прикреплена горизонтальная нить, а к другому концу, переброшенному через невесомый блок, прикреплён груз 6, движущийся вертикально. На платформе 3 установлен каток 2 радиуса R. К центру катка прикреплена нить, расположенная параллельно платформе и натянутая грузом 1, движущимся вертикально (см. рис. 6.15). Движение системы началось из состояния покоя. Качение тел без проскальзывания. Определить уравнения движения системы в обобщённых координатах, если $R = 2r$, веса тел $P_1 = P_6 = P$, $P_3 = 3P$, $P_4 = P_5 = P_2 = 2P$, $F = P$, $M = 3Pr$.

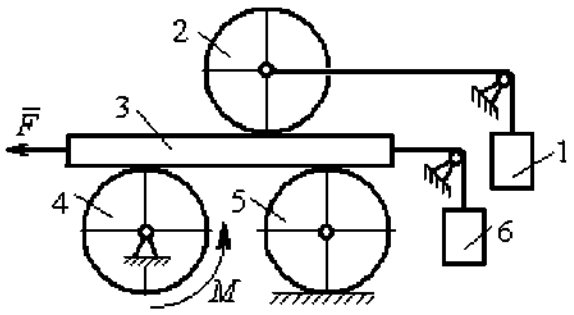


Рис. 6.15. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

Рассматриваемая механическая система, включающая катки 2, 5, платформу 3, блок 4 и грузы 1, 6, имеет две степени свободы, так как перемещение катка 2 относительно платформы 3 не зависит от перемещения самой платформы. За обобщенные координаты выберем перемещение x_2 центра масс катка 2 относительно

края платформы и перемещение x_3 платформы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.16). Обобщенные скорости – скорость $\dot{x}_2$ центра масс катка 2 относительно края платформы и скорость платформы $\dot{x}_3$ относительно неподвижной вертикали. Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_{x_2},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_3}=Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_2}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел.

Платформа 3 совершает поступательное движение. Кинетическая энергия платформы $T_3=\frac{P_3}{2g}V_3^2$, где V_3 – скорость платформы, причём, в соответствии с выбором обобщённых координат и скоростей, $V_3=\dot{x}_3$.

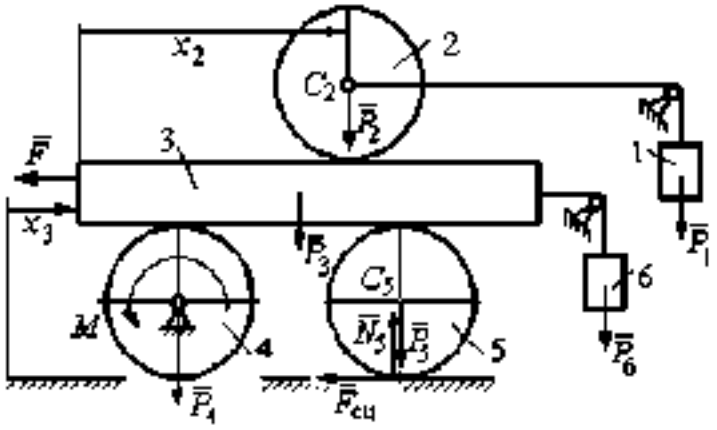


Рис. 6.16. Действующие силы и обобщённые координаты механической системы

Блок 4 вращается вокруг неподвижной оси. Энергия вращательного движения блока $T_4=\frac{1}{2}J_4\omega_4^2$, где J_4, ω_4 – осевой момент инерции блока 4 и его угловая скорость. Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_3}{R_4}=\frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Каток 5 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия вычисляется по формуле: $T_5=\frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2+\frac{1}{2}J_5\omega_5^2$, где J_5 – момент инерции катка относительно оси вращения, проходящей через его центр масс; ω_5, V_{C_5} – угловая скорость и скорость центра масс катка 5. Для определения скорости центра масс

катка 5 заметим, что точка касания катка с платформой имеет скорость, равную скорости платформы, а точка K касания катка с неподвижной горизонтальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Следовательно, скорость центра катка равна половине скорости платформы: $V_{C_5} = \frac{1}{2}V_3 = \frac{1}{2}\dot{x}_3$. Угловая скорость катка 5 $\omega_5 = \frac{V_3}{2R_5} = \frac{\dot{x}_3}{4r}$ (рис. 6.17, *a*).

При расчёте кинетической энергии катка 2 необходимо учитывать, что каток совершает сложное движение. Качение катка по поверхности платформы является относительным движением, перемещение его вместе с платформой – переносным. Абсолютная скорость V_{C_2} центра масс катка 2 представляется в виде векторной суммы $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_2r} + \vec{V}_{C_2e}$ (рис. 6.17, *b*), где $\vec{V}_{C_2e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости платформы, $V_{C_2e} = V_3 = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{C_2r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине скорости центра масс катка 2 относительно края платформы, $V_{C_2r} = \dot{x}_2$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 2 равен сумме $V_{C_2} = V_{C_2r} + V_{C_2e} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$ (рис. 6.17, *b*).

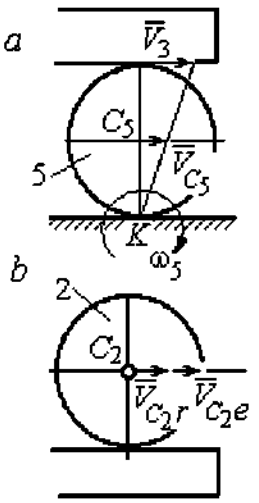


Рис. 6.17. Скорости центров катков 2 и 5

Угловая скорость переносного движения катка 2 равна нулю, поскольку переносное движение катка – это поступательное движение платформы. В результате угловая скорость катка 2 равна его угловой скорости в относительном движении: $\omega_2 = \frac{V_{C_2r}}{R_2} = \frac{\dot{x}_2}{2r}$. Кинетическая энергия катка 2 рассчитывается по формуле: $T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$, где J_2 – осевой момент инерции катка 2; ω_2 – угловая скорость катка; V_{C_2} – абсолютная скорость центра масс катка 2.

Движение грузов 1 и 6 поступательное, их кинетические энергии вычисляются по формулам: $T_1 = \frac{P_1}{2g} V_1^2$, $T_6 = \frac{P_6}{2g} V_6^2$. При этом скорость груза 1 равна абсолютной скорости центра катка 2: $V_1 = V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, а скорость груза 6 равна скорости платформы: $V_6 = V_3 = \dot{x}_3$.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщенные скорости. Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 =$$

$$= \frac{P_1}{2g} V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g} V_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 +$$

$$\frac{P_3}{2g} V_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 +$$

$$\frac{1}{2}\frac{P_5}{g} V_{C_5}^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2 + \frac{P_6}{2g} V_6^2,$$

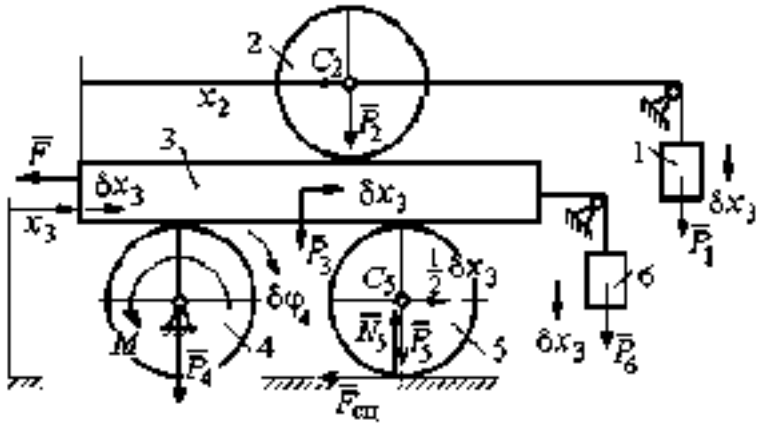


Рис. 6.18. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_3 > 0$, $\delta x_2 = 0$

где значения скоростей: $V_1 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $\omega_2 = \frac{\dot{x}_2}{2r}$, $V_3 = \dot{x}_3$, $\omega_4 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$, $V_{C_5} = \frac{1}{2}\dot{x}_3$, $\omega_5 = \frac{\dot{x}_3}{4r}$, $V_6 = \dot{x}_3$. Значения осевых моментов инерции катков: $J_2 = \frac{P_2 R_2^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$, $J_4 = \frac{P_4 R_4^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$, $J_5 = \frac{P_5 R_5^2}{2g} = \frac{4Pr^2}{g}$. Подставляя значения скоростей, моментов инерции и данные задачи, получим выражение кинетической энергии системы в виде

$$T = \frac{P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_2}{2r}\right)^2 + \frac{3P}{2g}\dot{x}_3^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{4r}\right)^2 + \frac{P}{2g}\dot{x}_3^2 -$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{23P}{8g}\dot{x}_3^2 = \frac{2P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_2\dot{x}_3 + \frac{35P}{8g}\dot{x}_3^2.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_2 без изменения: $\delta x_3 > 0$, $\delta x_2 = 0$ (рис. 6.18). При таком перемещении каток 2

стоит на платформе и движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$ катков 2, 5 и платформы 3 равна нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил (см. рис. 6.18). Работа силы тяжести $\bar{P}_4$ равна нулю, так как точка приложения силы лежит на неподвижной оси вращения блока 4.

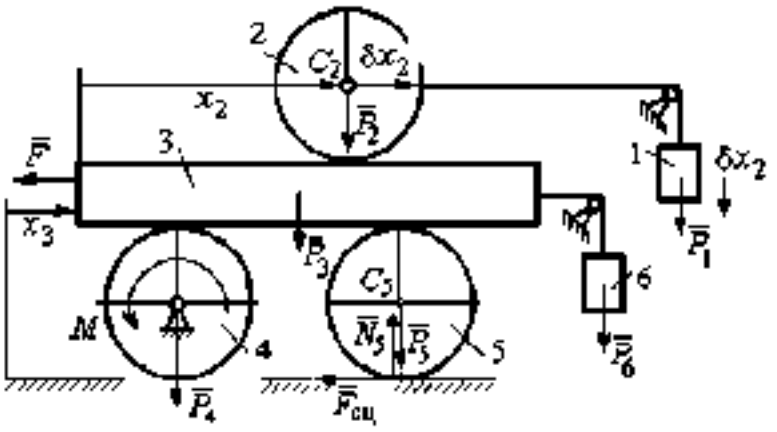


Рис. 6.19. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_2>0$, $\delta x_3=0$

Работу будут производить сила $\bar{F}$, пара сил с моментом M и силы тяжести грузов $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_6$. Суммарная работа сил на перемещении δx_3: $\delta A = -F\delta x_3 - M\delta\varphi_4 + P_1\delta x_3 + P_6\delta x_3$.

Представим полученное ранее соотношение $\omega_4 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$ в дифференциальном виде: $d\varphi_4 = \frac{dx_3}{2r}$. Поскольку дифференциалы координат также являются возможными перемещениями, получим нужное соотношение $\delta\varphi_4 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Теперь элементарную работу сил на возможном перемещении δx_3 с учётом значений сил можно представить в виде:

$$\delta A = -P\delta x_3 - 3Pr\frac{\delta x_3}{2r} + P\delta x_3 + P\delta x_3 - -\frac{1}{2}P\delta x_3,$$

отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -\frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_2, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_2 > 0$, $\delta x_3 = 0$ (рис. 6.19).

При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 2, который катится по поверхности неподвижной платформы, и груза 1, который опускается вертикально вниз. Работу совершает только сила тяжести груза 1. Выражая

работу в виде $\delta A = P_1 \delta x_2 = P \delta x_2$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_2: $Q_{x_2} = P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}_3$ и $\dot{x}_2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = \frac{3P}{g}\dot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\dot{x}_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{4P}{g}\dot{x}_2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_3$$

и по обобщённым координатам: $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$

Определим полные производные по времени от частных производных кинетической энергии по скоростям:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{3P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\ddot{x}_3, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{4P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{3P}{g}\ddot{x}_3.$$

Подставляя результаты расчётов в уравнения Лагранжа с учётом вычисленных значений обобщённых сил, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в обобщённых координатах:

$$12\ddot{x}_2 + 35\ddot{x}_3 = -2g, \quad 4\ddot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 = g.$$

Алгебраическим решением системы служат значения ускорений:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{5}{26}g = -0{,}19g \text{ и } \ddot{x}_2 = \frac{41}{104}g = 0{,}39g.$$

Полученные выражения представляют собой дифференциальные уравнения, проинтегрировав которые дважды с нулевыми начальными условиями (движение началось из состояния покоя), найдём уравнения абсолютного движения платформы и относительного движения центра масс катка 2:

$$x_3 = -0{,}095gt^2, \quad x_2 = 0{,}195gt^2.$$

Отрицательное значение координаты x_3 означает, что движение платформы происходит в отрицательном направлении оси x_3 (см. рис. 6.16).

Абсолютное движение центра катка 2 представляется суммой относительного и переносного движений: $x_{C_2} = x_2 + x_3 = 0{,}1gt^2$.

Уравнение вращательного движения катка 2 находится на основании выражения $\varphi_2 = \frac{1}{R_2} x_2 = \frac{1}{2r} x_2 = 0{,}097 \frac{gt^2}{r}$. Вращение блока 4 описывается уравнением

$$\varphi_4 = \frac{1}{R_4} x_3 = \frac{1}{2r} x_3 = -0{,}047 \frac{gt^2}{r}$$

Движение катка 5 описывается двумя уравнениями: уравнением движения центра масс катка $x_{C_5} = \frac{1}{2} x_3 = -0{,}047 gt^2$ и уравнением вращательного движения катка $\varphi_5 = \frac{x_3}{2R_5} = -0{,}024 \frac{gt^2}{r}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1 2. СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: в 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., Лятцев С. А. Лекции по теоретической механике. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебн. для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

сборник заданий для расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов, выполнению практических и контрольных работ

Министерство науки и высшего
образования РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный
горный университет»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие
и контрольные задания для выполнения РГР
и самостоятельной работы
студентов специальности
21.05.04 Горное дело

Екатеринбург
2019

А 94
Рецензент: *Н.М.Суслов*, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

А. А. Чиркова, А. П. Золкин, Д. Н. Суслов, А. И. Афанасьев
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ: учебно-методическое пособие и контрольные задания для выполнения РГР и самостоятельной работы студентов специальности *21.05.04 Горное дело.*– Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 84 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Осевое нагружение стержней переменного сечения. Определение деформаций при осевом нагружении», «Расчет вала на прочность при кручении. Определение углов закручивания вала – расчет на жесткость», «Расчет на прочность балки при изгибе. Подбор сечения балки», «Расчет на жесткость балки при изгибе. Определение формы изогнутой оси балки», «Расчет стержней на устойчивость», «Расчет статически неопределимых балок», «Расчет статически неопределимых рам».

© Чиркова А. А., Золкин А. П.,
Суслов Д.Н.,Афанасьев А. И. 2019
© Уральский государственный
горный университет, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Задача №1. Осевое нагружение стержней 4
Задача №2. Расчёт вала на кручение и жёсткость.....11
Задача №3. Расчёт балки на прочность при изгибе 17
Задача №4. Расчёт балки на жёсткость 23
Задача №5. Геометрические характеристики плоского симметричного сечения.....30
Задача № 6. Расчёт статически неопределемых стержневых систем.....36
Задача 7.Расчет статически неопределимых балок 43
Задача №8. Расчет стержней на устойчивость.....67
Задача №9. Расчет статически неопределимых рам.....70
Оформление расчетно-графической работы. 84
Список рекомендуемой литературы 84

Задача № 1. Осевое нагружение стержней

Для стального стержня из условия прочности подобрать площади поперечных сечений при условии, что отношение площади большего участка к меньшему равно $k = S_m/S_x$. Построить эпюры: осевой силы N; нормальных напряжений σ и продольных перемещений Δ. Модуль упругости стали $E = 200000$ МПа. Предел текучести стали σ_m. Коэффициент запаса прочности по пределу текучести – n_m. Исходные данные сведены в табл. 1, расчетные схемы даны на рис. 1.

Таблица 1

Исходные данные к задаче № 1

№ п/п	Сила, кН				Длина участка, м				$\sigma_т$, МПа	$n_т$	$k = S_m/S_x$	Номер схемы
	P_1	P_2	P_3	P_4	L_1	L_2	L_3	L_4				
1	150	660	440	990	2,0	1,4	1,3	2,3	200	1,5	1,5	1
2	620	700	920	130	3,1	2,2	1,5	1,9	240	2,0	2,0	2
3	600	880	170	200	2,4	3,0	2,3	1,6	280	2,5	2,5	3
4	80	130	600	610	1,6	2,9	1,7	2,4	320	3,0	3,0	4
5	990	380	630	390	2,8	1,8	2,5	1,7	360	1,5	3,5	5
6	290	570	170	900	1,9	2,6	2,7	1,3	400	2,0	1,5	6
7	920	630	160	740	2,7	2,0	2,6	1,4	440	2,5	2,0	7
8	840	500	490	550	1,5	2,8	2,1	2,5	480	3,0	2,5	8
9	990	110	90	470	1,6	2,4	2,9	2,2	520	1,5	3,0	9
10	340	390	890	330	1,7	2,3	2,3	3,0	560	2,0	3,5	10
11	820	290	800	90	2,2	2,4	3,1	1,8	600	2,5	1,5	11
12	380	720	720	850	2,5	3,2	2,1	1,9	200	3,0	2,0	12
13	960	630	580	800	3,3	2,6	2,0	1,3	240	1,5	2,5	13
14	360	940	300	530	1,4	1,4	2,7	1,9	280	2,0	3,0	14
15	70	590	790	800	1,5	1,8	1,5	2,8	320	2,5	3,5	15
16	460	510	960	840	1,6	1,7	2,9	1,6	360	3,0	1,5	16
17	680	630	740	680	1,6	3,0	1,7	1,7	400	1,5	2,0	17
18	670	880	30	270	3,1	1,8	1,5	1,8	440	2,0	2,5	18
19	380	200	760	370	1,9	3,2	1,4	1,9	480	2,5	3,0	19
20	770	510	830	260	2,0	2,0	3,3	1,3	520	3,0	3,5	20
21	760	750	160	190	2,2	3,3	2,1	1,4	560	1,5	1,5	21
22	320	840	670	440	2,2	3,2	1,5	2,2	600	2,0	2,0	22
23	390	720	270	960	2,3	1,6	2,3	3,1	200	2,5	2,5	23
24	910	310	870	470	1,7	2,4	3,0	2,4	240	3,0	3,0	24
25	840	540	380	810	2,5	1,8	2,9	2,5	280	1,5	3,5	25
26	160	350	720	470	2,5	2,6	1,9	2,8	320	2,0	1,5	26
27	660	660	800	510	2,6	2,7	2,7	2,0	360	2,5	2,0	1
28	450	410	540	420	1,5	2,4	3,6	1,8	400	1,5	1,5	1
29	430	510	840	350	1,9	2,8	3,5	1,7	440	2,0	2,0	2

Окончание табл. 1

№ п/п	Сила, кН				Длина участка, м				$\sigma_т$, МПа	$n_т$	$k = S_m/S_z$	Номер схемы
	P_1	P_2	P_3	P_4	L_1	L_2	L_3	L_4				
30	520	900	620	820	2,3	2,4	3,0	2,2	480	2,5	2,5	3
31	690	500	790	740	2,7	2,0	2,6	2,6	520	3,0	3,0	4
32	860	240	260	490	3,1	1,6	2,3	2,4	560	1,5	3,5	5
33	990	60	930	580	3,5	2,1	2,7	1,8	600	2,0	1,5	6
34	30	870	740	280	2,9	2,7	1,9	2,3	200	2,5	2,0	7
35	900	610	570	60	2,3	2,1	1,3	1,7	240	3,0	2,5	8
36	360	200	350	470	2,5	1,6	2,9	2,3	280	1,5	3,0	9
37	940	560	980	660	1,8	2,5	1,9	2,0	320	2,0	3,5	10
38	990	620	370	840	2,7	2,4	3,2	1,6	360	2,5	1,5	11
39	650	310	430	890	3,0	1,7	1,8	2,4	400	3,0	2,0	12
40	870	560	80	360	1,6	1,6	2,2	2,2	440	1,5	2,5	13
41	580	280	210	540	2,8	2,1	2,0	3,3	480	2,0	3,0	14
42	720	410	750	290	1,5	2,4	2,7	1,8	520	2,5	3,5	15
43	240	860	590	420	1,9	2,4	2,3	2,6	560	3,0	1,5	16
44	70	570	650	450	2,0	3,1	2,5	1,9	600	1,5	2,0	17
45	160	450	830	680	1,4	2,1	2,3	2,5	200	2,0	2,5	18
46	450	430	400	470	3,2	2,2	2,6	2,1	240	2,5	3,0	19
47	870	440	190	330	3,0	1,4	2,3	2,2	280	3,0	3,5	20
48	370	390	190	740	2,2	1,7	1,8	2,4	320	1,5	1,5	21
49	890	210	920	260	2,2	2,4	2,5	1,6	360	2,0	2,0	22
50	350	820	330	210	2,7	2,3	2,3	2,6	200	2,5	2,5	23
51	710	150	300	570	1,5	2,6	2,4	2,2	240	3,0	3,0	24
52	900	110	730	680	2,4	2,7	2,1	2,5	280	1,5	3,5	25
53	860	630	550	730	2,8	2,0	2,6	2,3	320	2,0	1,5	26
54	520	40	640	600	1,9	2,7	2,9	2,2	360	2,5	2,0	13
55	830	760	920	820	2,8	1,8	3,0	2,1	400	3,0	2,5	14
56	720	730	300	250	2,0	2,9	1,7	3,1	440	1,5	3,0	1
57	120	860	670	500	1,9	3,2	3,0	1,6	480	2,0	3,5	2
58	980	80	940	390	2,8	3,3	1,5	3,1	520	2,5	1,5	3
59	240	60	20	540	2,4	1,4	3,2	2,6	560	3,0	2,0	4
60	820	300	790	130	1,3	3,3	2,5	2,7	600	1,5	2,5	5
61	450	340	220	210	2,7	2,3	2,3	2,6	200	2,5	2,5	23
62	440	360	240	570	1,5	2,6	2,4	2,2	240	3,0	3,0	24
63	470	370	260	680	2,4	2,7	2,1	2,5	280	1,5	3,5	25
64	580	380	270	730	2,8	2,0	2,6	2,3	320	2,0	1,5	26
65	600	390	280	600	1,9	2,7	2,9	2,2	360	2,5	2,0	13
66	670	450	290	820	2,8	1,8	3,0	2,1	400	3,0	2,5	14
67	770	550	300	250	2,0	2,9	1,7	3,1	440	1,5	3,0	1
68	800	570	310	500	1,9	3,2	3,0	1,6	480	2,0	3,5	2
69	870	580	320	390	2,8	3,3	1,5	3,1	520	2,5	1,5	3
70	900	590	330	540	2,4	1,4	3,2	2,6	560	3,0	2,0	4
71	340	600	390	130	1,3	3,3	2,5	2,7	600	1,5	2,5	5

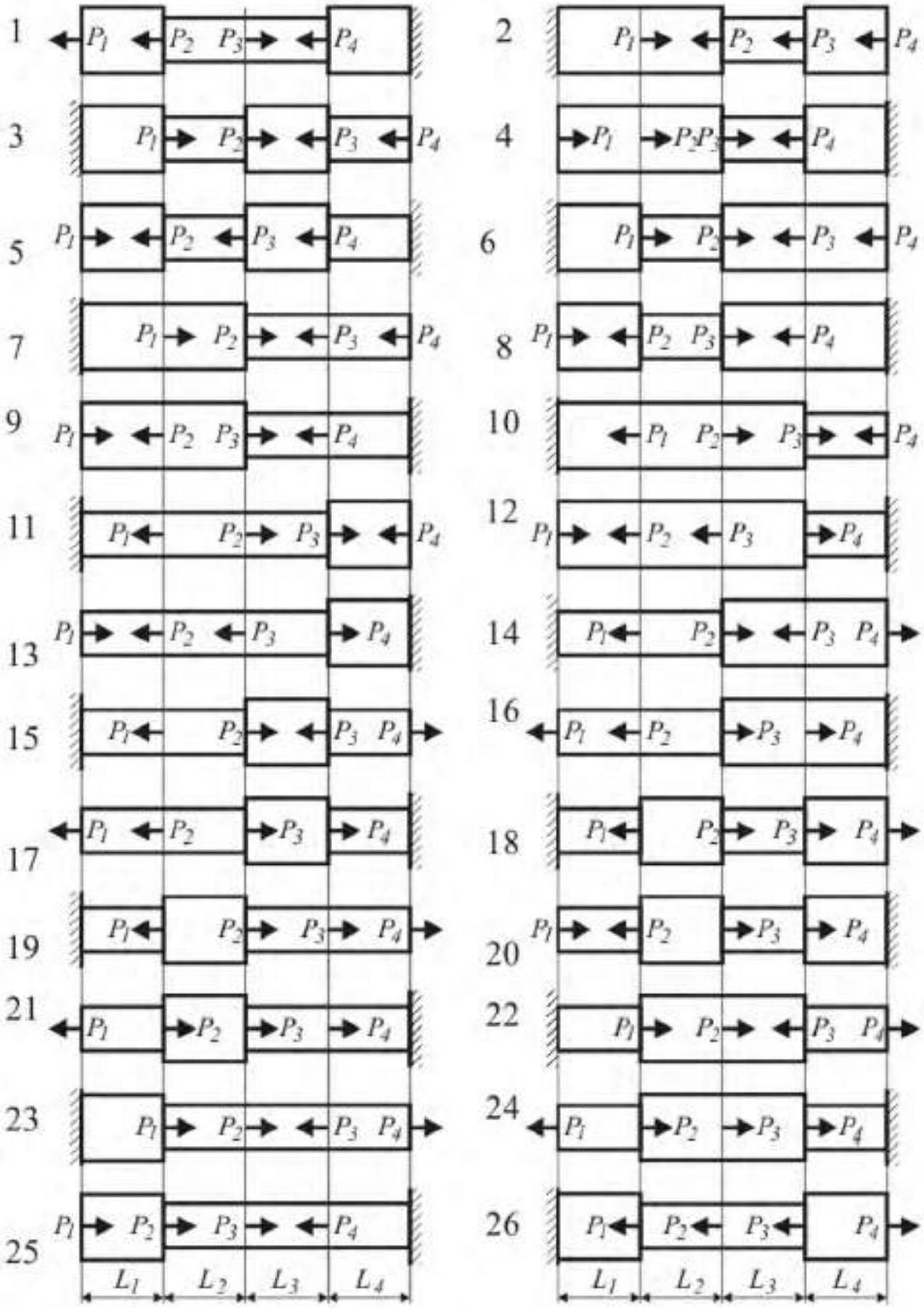


Рис. 1. Расчетная схема стержня

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 1

Стальной стержень нагружен в сечениях 1 – 4 осевыми силами $P_1 = 600$ кН, $P_2 = 900$ кН, $P_3 = 600$ кН, $P_4 = 900$ кН и заделан в сечении 5 (рис. 2, *а*). Длины участков равны: $L_1 = 0{,}75$ м, $L_2 = 1{,}25$ м, $L_3 = 1{,}75$ м, $L_4 = 2{,}25$ м. Выбрать из условия прочности площади поперечных сечений при дополнительном (конструктивно-технологическом) требовании, чтобы отношение площадей толстого и худого участков равнялось $k = S_m/S_x = 2{,}5$. Построить эпюры: осевой силы N; нормальных напряжений σ и продольных перемещений Δ. Модуль упругости $E = 200000$ МПа. Предел текучести стали $\sigma_m = 360$ МПа. Коэффициент запаса прочности по пределу текучести $n_m = 1{,}5$.

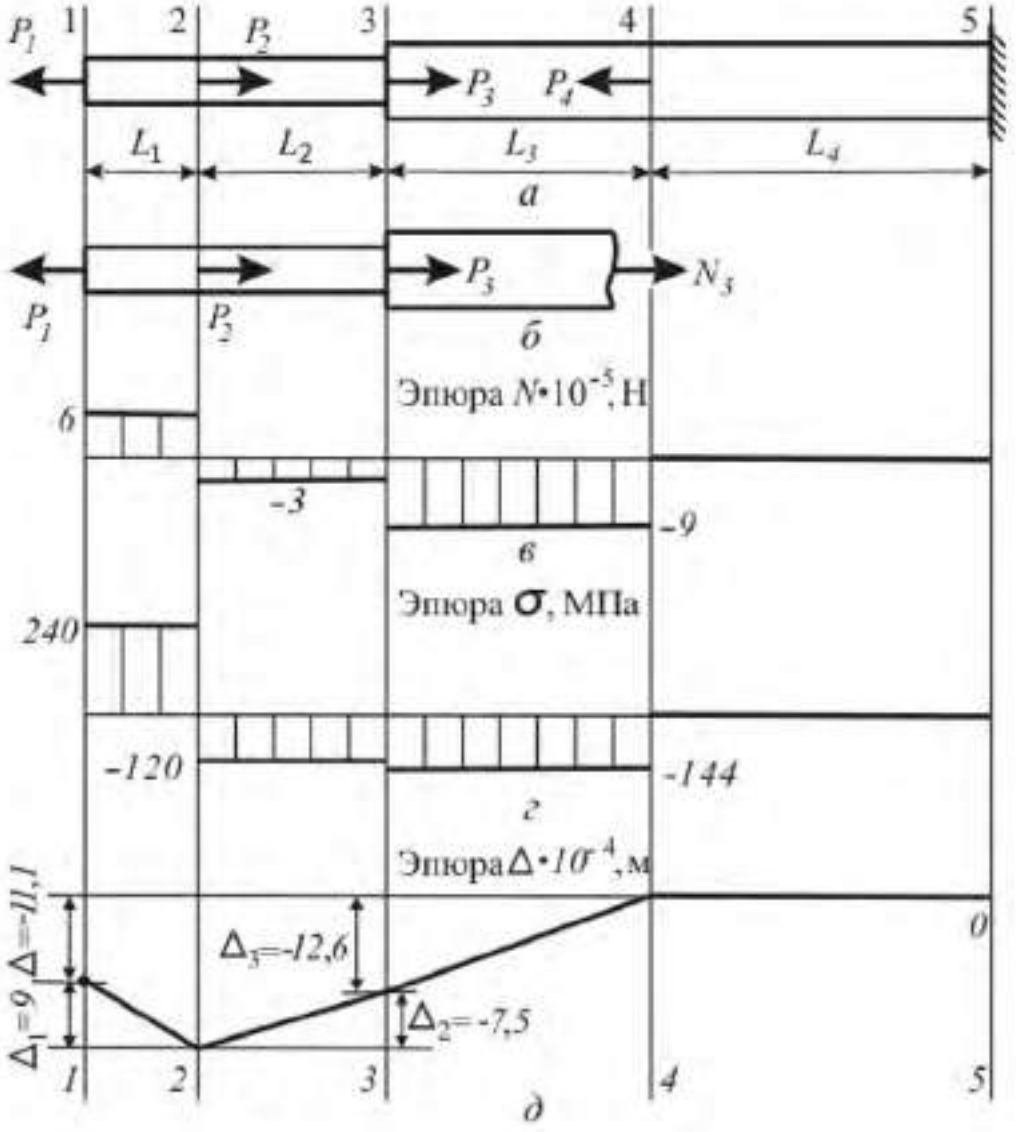


Рис. 2. Эпюры продольных сил, напряжений и перемещений

РЕШЕНИЕ

1. Силы переводим в ньютоны [Н]: $P_1 = 6 \cdot 10^5$; $N_2 = 9 \cdot 10^5$; $N_3 = 6 \cdot 10^5$; $N_4 = 9 \cdot 10^5$.

2. Модуль упругости E и предел текучести σ_m переводим в паскали [Па]:

$$E = 2 \cdot 10^{11}\ ;\ \sigma_m = 3{,}6 \cdot 10^8.$$

3. Допускаемые напряжения $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \sigma_m / n_m = 3{,}6 \cdot 10^8 / 1{,}5 = \ 2{,}4 \cdot 10^8 \text{ [Па]}.$$

4. Строим эпюру осевых сил методом сечений. Разрезаем стержень на участке i. Из двух полученных кусков выбираем свободный незакреплённый. В нашем случае свободен левый кусок. В разрезанном сечении прикладываем положительную растягивающую осевую силу N_i. Положительная осевая сила направлена наружу из отрезанного куска. Величину N_i находим из условия равенства нулю алгебраической суммы N_i и сил P_i, приложенных к левому куску разрезанного стержня.

Пусть $i = 3$. На левый кусок действуют силы $P_1 - P_3$ и осевая сила N_3, приложенная в сечении (рис. 2, *б*). Из уравнения равновесия левого куска $N_3 + P_3 + P_2 - P_1 = 0$, находим $N_3 = -P_3 - P_2 + P_1 = -6 \cdot 10^5 - 9 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^5 = -9 \cdot 10^5$ [Н]. Знак «минус» указывает, что сила N_3 направлена внутрь куска (в сторону, обратную изначально выбранной). Участок 3 сжат. Найденное значение осевой силы откладываем на эпюре осевых сил. Для этого: отмечаем на оси абсцисс координату сечения, через неё проводим нормаль, и на нормали откладываем в выбранном масштабе значение $N_3 = -9 \cdot 10^5$ [Н] (рис. 2, *в*). Уравнение равновесия левого куска не зависит от положения сечения, в котором разрезан участок 3. Следовательно, осевая сила сохраняет постоянное значение в любом нормальном сечении участка 3. Через точку с ординатой $N_3 = -9 \cdot 10^5$ между вертикалями 3 и 4 проводим прямую, параллельную оси стержня.

5. Для других участков получаем: $N_1 = 6 \cdot 10^5$ [Н]; $N_2 = -3 \cdot 10^5$ [Н]; $N_3 = -9 \cdot 10^5$ [Н]; $N_4 = 0$ [Н]. Эпюра осевых сил дана на рис. 2, *г*.

6. По эпюре осевых сил находим наибольшие по модулю осевые силы, действующие на толстом и тонком участках

$$N_m = \max\{|N_3|, N_4\} = \max\{|-9 \cdot 10^5|, 0\} = 9 \cdot 10^5 \text{ [Н]},$$
$$N_x = \max\{N_1, |N_2|\} = \max\{6 \cdot 10^5, |-3 \cdot 10^5|\} = 6 \cdot 10^5 \text{ [Н]}.$$

7. Необходимая по условию прочности площадь толстого участка

$$S_{\sigma m} = N_m / [\sigma] = \ 9 \cdot 10^5 / 2{,}4 \cdot 10^8 = 3{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ [м}^2\text{]},$$

необходимая по условию прочности площадь тонкого участка

$$S_{\sigma x} = N_x / [\sigma] = \ 6 \cdot 10^5 / 2{,}4 \cdot 10^8 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ [м}^2\text{]}.$$

8. Выполнить конструктивные требования можно двумя способами:

способ 1: для толстого участка взять площадь $S_{\sigma m}$, необходимую по условию прочности, для тонкого участка взять площадь толстого, уменьшенную в k раз, $S_{kx} = S_{\sigma m}/k = 3{,}75 \cdot 10^{-3}/2{,}5 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ [м^2];

способ 2: для тонкого участка взять площадь $S_{\sigma x}$, необходимую по условию прочности, для толстого участка взять площадь тонкого, увеличенную в k раз, $S_{km} = k\,S_{\sigma x} = 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ [м^2].

В первом случае площадь тонкого участка, взятая из конструктивных требований, меньше площади, необходимой по условию прочности.

$$S_{kx} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} < S_{\sigma x} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

При первом способе не выполнено условие прочности для тонкого участка. Во втором случае конструктивная площадь толстого участка больше площади, необходимой по условию прочности

$$S_{km} = k\,S_{\sigma x} = 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} > S_{\sigma m} = 6{,}25 \cdot 10^{-3}.$$

При втором способе условие прочности выполнено. Назначаем площади

$$S_x = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ [\text{м}^2];\ S_m = 6{,}25 \cdot 10^{-3}\ [\text{м}^2].$$

9. Напряжения, действующие на участке i, определяем по формуле

$$\sigma_i = N_i/S_{x(m)},$$

где N_i – значение осевой силы на участке i, взятое со своим знаком с эпюры N (рис. 2, *г*); $S_{x(m)}$ – назначенная площадь участка.

Пусть $i = 3$, $N_3 = -9 \cdot 10^5$ [Н], $S_m = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ [м^2]. Напряжения равны

$$\sigma_3 = N_3/S_ж = -9 \cdot 10^5/6{,}25^{-3} = -1{,}44 \cdot 10^8\ [\text{Н/м}^2].$$

10. На остальных участках напряжения равны:

$$\sigma_1 = N_1/S_x = 6 \cdot 10^5/(2{,}5 \cdot 10^{-3}) = 2{,}4 \cdot 10^8\ [\text{Н/м}^2];$$
$$\sigma_2 = N_2/S_x = -3 \cdot 10^5/6{,}25^{-3} = -1{,}2 \cdot 10^8\ [\text{Н/м}^2];$$
$$\sigma_4 = N_4/S_ж = 0/6{,}25^{-3} = 0\ [\text{Н/м}^2].$$

Эпюра напряжений построена на рис. 2, *д*.

11. Удлинение Δ_i [м] участка i определяем по формуле

$$\Delta_i = N_i\,L_i/(E\,S_{x(m)}).$$

Получаем:

$$\Delta_1 = N_1\,L_1/(E\,S_x) = 6 \cdot 10^5 \cdot 0{,}75/(2 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}) = 9{,}00 \cdot 10^{-4};$$
$$\Delta_2 = N_2\,L_2/(E\,S_x) = -3 \cdot 10^5 \cdot 1{,}25/(2 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}) = -7{,}50 \cdot 10^{-4};$$
$$\Delta_3 = N_3\,L_3/(E\,S_ж) = -9 \cdot 10^5 \cdot 1{,}75/(2 \cdot 10^{11} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-3}) = -1{,}26 \cdot 10^{-3};$$
$$\Delta_4 = N_4\,L_4/(E\,S_ж) = 0 \cdot 1{,}75/(2 \cdot 10^{11} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-3}) = 0.$$

12. Строим эпюру перемещений. Сечение 5, в котором стержень защемлён, неподвижно. Проводим ось стержня Z и отмечаем как 0 точку её пересечения с вертикалью 5. На вертикали 4 следует отложить вверх в принятом масштабе удлинение Δ_4 участка 4. Поскольку $\Delta_4 = 0$, сечение 4 не смещается. Отмечаем точку пересечения оси Z с вертикалью 4. Соединяем

жирной линией нули вертикалей 5 и 4.

Участок 3 сжался на $\Delta_3 = -1{,}26 \cdot 10^{-3}$ м. На вертикали 3 откладываем вниз из точки её пересечения с осью Z отрезок Δ_3. Соединяем конец этого отрезка с нулём вертикали 4.

Участок 2 укоротился на $\Delta_2 = -7{,}5 \cdot 10^{-4}$. На вертикали 2 из точки с ординатой Δ_3 откладываем вниз отрезок Δ_2. Ордината полученного отрезка равна $\Delta_2 + \Delta_3 = -7{,}5 \cdot 10^{-4} - 1{,}26 \cdot 10^{-3} = -2{,}01 \cdot 10^{-3}$ м. Соединяем прямой концы отрезков, отложенных на вертикалях 2 и 3.

Участок 1 удлинился на $\Delta_1 = 9{,}00 \cdot 10^{-4}$. Проектируем на вертикаль 1 отрезок, построенный на вертикали 2, из конца проекции откладываем вверх отрезок Δ_1. Длина отрезка, построенного на вертикали 1, будет $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 9 \cdot 10^{-4} - 7{,}5 \cdot 10^{-4} - 1{,}26 \cdot 10^{-3} + 0 = -1{,}11 \cdot 10^{-3}$. Соединяем между собой концы отрезков, построенных на вертикалях 1 и 2 (рис. 2, *д*).

Задача № 2. Расчёт вала на кручение и жёсткость

Стальной вал, на котором жестко закреплены 5 шкивов (рис. 3, *а*), вращается со скоростью n [об/мин]. Нумерация шкивов – слева направо. Участку вала между шкивами присвоен номер левого шкива. Участки 1 и 4 имеют одинаковое круглое поперечное сечение, участки 2 и 3 — кольцевое. Отношение внутреннего диаметра кольца к наружному равно $\delta = 0{,}65$. На шкив 3 подана мощность N_3 [кВт]. Шкивы 1, 2, 4, 5 отбирают мощности (кВт): N_1, N_2, N_4, N_5. Выбрать диаметры участков стального вала из условия прочности по допускаемому касательному напряжению [τ] и условия жёсткости по допускаемому относительному углу закручивания $[\theta^\circ]$. Построить эпюру углов закручивания вала. Длины участков $(L_1 - L_4)$ в [м] заданы. Модуль сдвига стали равен $G = 80000$ МПа.

Таблица 2

Исходные данные к задаче № 2

№ п/п	n, об/мин	δ	Мощность, кВт					Длина участка, м				[τ], МПа	$[\theta^\circ]$, град/м
			N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	L_1	L_2	L_3	L_4		
1	120	0,40	3	5	15	4	3	0,75	2,00	0,75	2,00	30	0,25
2	160	0,45	4	7	20	6	3	1,00	2,25	1,00	1,75	40	0,50
3	200	0,50	4	7	25	8	6	1,25	2,50	1,25	1,50	50	0,75
4	240	0,55	7	8	30	9	6	1,50	0,75	1,50	1,25	60	1,00
5	280	0,60	8	11	35	9	7	1,75	1,00	1,75	1,00	70	1,25
6	320	0,65	8	13	40	10	9	2,00	1,25	2,00	0,75	80	1,50
7	360	0,70	9	15	45	13	8	2,25	1,50	0,75	2,00	90	1,75
8	400	0,75	9	16	50	17	8	2,50	1,75	1,00	1,75	100	2,00
9	440	0,80	10	17	55	16	12	2,75	2,00	1,25	1,50	110	2,25
10	480	0,85	12	18	60	22	8	0,75	2,25	1,50	1,25	120	2,50
11	520	0,90	12	24	65	16	13	1,00	2,50	1,75	1,00	130	2,75
12	560	0,95	16	22	70	19	13	1,25	0,75	2,00	0,75	30	3,00
13	600	0,40	18	25	75	20	12	1,50	1,00	2,25	2,00	40	3,25
14	640	0,45	16	22	80	28	14	1,75	1,25	0,75	1,75	50	3,50
15	680	0,50	18	26	85	24	17	2,00	1,50	1,00	1,50	60	3,75
16	120	0,55	18	30	90	25	17	2,25	1,75	1,25	1,25	70	4,00
17	160	0,60	19	30	95	25	21	2,50	2,00	1,50	1,00	80	0,25
18	200	0,65	3	5	15	4	3	2,75	2,25	1,75	0,75	90	0,50
19	240	0,70	4	7	20	6	3	0,75	2,50	2,00	2,00	100	0,75
20	280	0,75	4	7	25	8	6	1,00	0,75	2,25	1,75	110	1,00
21	320	0,80	7	8	30	9	6	1,25	1,00	0,75	1,50	120	1,25
22	360	0,85	8	11	35	9	7	1,50	1,25	1,00	1,25	130	1,50
23	400	0,90	8	13	40	10	9	1,75	1,50	1,25	1,00	30	1,75
24	440	0,95	9	15	45	13	8	2,00	1,75	1,50	0,75	40	2,00
25	480	0,40	9	16	50	17	8	2,25	2,00	1,75	2,00	50	2,25
26	520	0,45	10	17	55	16	12	2,50	2,25	2,00	1,75	60	2,50

Окончание табл. 2

№ п/п	n, об/мин	δ	Мощность, кВт					Длина участка, м				[τ], МПа	$[\theta^{\circ}]$, град/м
			N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	L_1	L_2	L_3	L_4		
27	560	0,50	12	18	60	22	8	2,75	2,50	2,25	1,50	70	2,75
28	600	0,55	12	24	65	16	13	0,75	0,75	0,75	1,25	80	3,00
29	640	0,60	16	22	70	19	13	1,00	1,00	1,00	1,00	90	3,25
30	680	0,65	18	25	75	20	12	1,25	1,25	1,25	0,75	100	3,50
31	120	0,70	16	22	80	28	14	1,50	1,50	1,50	2,00	110	3,75
32	160	0,75	18	26	85	24	17	1,75	1,75	1,75	1,75	120	4,00
33	200	0,80	18	30	90	25	17	2,00	2,00	2,00	1,50	130	0,25
34	240	0,85	19	30	95	25	21	2,25	2,25	2,25	1,25	30	0,50
35	280	0,90	3	5	15	4	3	2,50	2,50	0,75	1,00	40	0,75
36	320	0,95	4	7	20	6	3	2,75	0,75	1,00	0,75	50	1,00
37	360	0,40	4	7	25	8	6	0,75	1,00	1,25	2,00	60	1,25
38	400	0,45	7	8	30	9	6	1,00	1,25	1,50	1,75	70	1,50
39	440	0,50	8	11	35	9	7	1,25	1,50	1,75	1,50	80	1,75
40	480	0,55	8	13	40	10	9	1,50	1,75	2,00	1,25	90	2,00
41	520	0,60	9	15	45	13	8	1,75	2,00	2,25	1,00	100	2,25
42	560	0,65	9	16	50	17	8	2,00	2,25	0,75	0,75	110	2,50
43	600	0,70	10	17	55	16	12	2,25	2,50	1,00	2,00	120	2,75
44	640	0,75	12	18	60	22	8	2,50	0,75	1,25	1,75	130	3,00
45	680	0,80	12	24	65	16	13	2,75	1,00	1,50	1,50	30	3,25
46	120	0,85	16	22	70	19	13	0,75	1,25	1,75	1,25	40	3,50
47	160	0,90	18	25	75	20	12	1,00	1,50	2,00	1,00	50	3,75
48	200	0,95	16	22	80	28	14	1,25	1,75	2,25	0,75	60	4,00
49	240	0,40	18	26	85	24	17	1,50	2,00	0,75	2,00	70	0,25
50	280	0,45	18	30	90	25	17	1,75	2,25	1,00	1,75	80	0,50
51	320	0,50	19	30	95	25	21	2,00	2,50	1,25	1,50	90	0,75
52	360	0,55	3	5	15	4	3	2,25	0,75	1,50	1,25	100	1,00
53	400	0,60	4	7	20	6	3	2,50	1,00	1,75	1,00	110	1,25
54	440	0,65	4	7	25	8	6	2,75	1,25	2,00	0,75	120	1,50
55	480	0,70	7	8	30	9	6	0,75	1,50	2,25	2,00	130	1,75
56	520	0,75	8	11	35	9	7	1,00	1,75	0,75	1,75	30	2,00
57	560	0,80	8	13	40	10	9	1,25	2,00	1,00	1,50	40	2,25
58	600	0,85	9	15	45	13	8	1,50	2,25	1,25	1,25	50	2,50
59	640	0,90	9	16	50	17	8	1,75	2,50	1,50	1,00	60	2,75
60	680	0,95	10	17	55	16	12	2,00	0,75	1,75	0,75	70	3,00
61	120	0,40	13	22	60	16	9	2,00	2,25	1,00	2,25	80	3,25
62	160	0,45	11	21	65	23	10	1,75	2,50	1,25	0,75	90	3,50
63	200	0,50	15	19	70	23	13	1,50	2,75	1,50	1,00	100	3,75
64	240	0,55	14	21	75	25	15	1,25	0,75	1,75	1,25	110	4,00

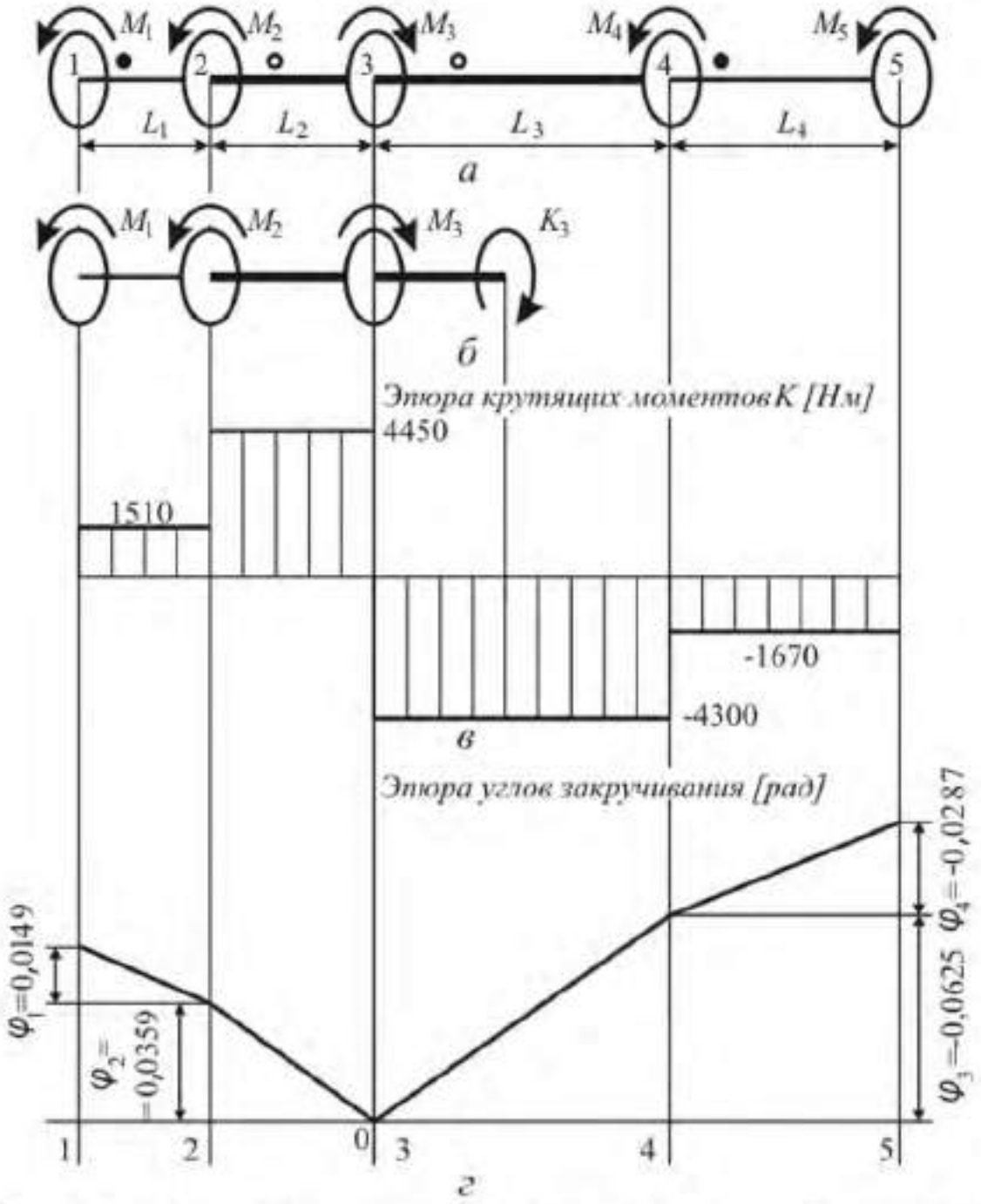


Рис. 3. Расчетная схема вала, эпюры момента и углов закручивания

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 2

Стальной вал, несущий 5 шкивов (см.рис. 3, *а*), вращается со скоростью $n = 360$ об/мин. Шкивы пронумерованы слева направо. Участку вала между шкивами присвоен номер левого шкива. Участки 1 и 4 имеют одинаковое круглое сечение, участки 2 и 3 — кольцевое. Отношение внутреннего диаметра кольца к наружному равно $\delta = 0{,}65$. На шкив 3 подана мощность $N_3 = 110$ кВт. Шкивы 1, 2, 4, 5 отбирают мощности [кВт]: $N_1 = 19$, $N_2 = 37$, $N_4 = 33$, $N_5 = 21$. Выбрать диаметры участков вала из условий прочности и жёсткости, если допускаемые касательные напряжения $[\tau] = 70$ МПа, а допускаемый

относительный угол закручивания $[\theta^{\circ}] = 1{,}75$ град/м. Построить эпюру углов закручивания вала. Длины участков [м]: $L_1 = 1{,}00$; $L_2 = 1{,}25$; $L_3 = 2{,}25$; $L_4 = 1{,}75$. Модуль сдвига стали $G = 80000$ МПа.

РЕШЕНИЕ

1. Мощности переводим в ватты [Вт]: $N_1 = 1{,}9 \cdot 10^4$; $N_2 = 3{,}7 \cdot 10^4$; $N_3 = 1{,}1 \cdot 10^5$; $N_4 = 3{,}3 \cdot 10^4$; $N_5 = 2{,}1 \cdot 10^4$.

2. Модуль сдвига G и допускаемые касательные напряжения $[\tau]$ переводим в паскали [Па]: $G = 8 \cdot 10^{10}$; $[\tau] = 7 \cdot 10^7$.

3. Допускаемый относительный угол закручивания $[\theta^{\circ}]$ задаём в [рад/м]

$$[\theta] = \pi/180\,[\theta^{\circ}] = 3{,}14/180 \cdot 1{,}75 = 0{,}0305.$$

4. Угловая скорость вала:

$$\omega = 2\pi n/60 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 360/60 = 12{,}6\ [\text{рад/с}].$$

5.Моменты [Н · м], приложенные к шкивам, находим по формуле

$$M_i = N_i/\omega,\ (i = 1,2,\ldots,5).$$

Получаем: $M_1 = 1510$, $M_2 = 2940$, $M_3 = -8750$, $M_4 = 2630$, $M_5 = 1670$.

6.Строим эпюру крутящих моментов методом сечений. Разрезаем вал на участке i, выбираем левый кусок и прикладываем в разрезанном сечении крутящий момент K_i, вращающий вал по ходу стрелок часов. Величину K_i находим из условия равенства нулю алгебраической суммы момента K_i и моментов M_i, приложенных к шкивам, находящимся на левом куске вала.

Пусть $i = 3$. На левый кусок действуют момент K_3 и моменты $M_1 - M_3$, приложенные к шкивам $1 - 3$ (рис. 3, *б*). Из уравнения равновесия куска

$$K_3 + M_3 - M_2 - M_1 = 0$$

получаем

$$K_3 = -M_3 + M_2 + M_1 = -8750 + 2940 + 1510 = -4300.\ [\text{Н} \cdot \text{м}].$$

Найденное значение крутящего момента откладываем на эпюре крутящих моментов K. Для этого отмечаем на оси абсцисс координату сечения и из отмеченной точки откладываем вниз перпендикулярно оси (в выбранном масштабе) значение $K_3 = -4300$. Участок 3 разрезан произвольно, поэтому полученный результат справедлив для любого выбранного на участке 3 сечения. Между вертикалями 3 и 4 через построенную точку K_3 проводим прямую, параллельную оси вала (рис. 3, *в*).

7. Расчётный момент для подбора диаметра круглого вала из условия прочности. $M_к = \max\{K_1, |K_4|\} = \max\{1510, |-1670|\} = 1670$. [Н· м].

Расчётный момент для подбора диаметра кольцевого вала из условия прочности. $M_m = \max\{K_2, |K_3|\} = \max\{4450, |-4300|\} = 4450$ [Н· м].

8. Диаметр круглого вала из условия прочности

$$D_{\text{кт}} = \sqrt[3]{16\,M_{\text{к}}/(\pi\,[\tau])} = (16 \cdot 1670/(3{,}14 \cdot 7 \cdot 10^7))^{1/3} = 0{,}0576\,[\text{м}].$$

9. Диаметр круглого вала из условия жёсткости

$$D_{\text{к}\theta} = \sqrt[4]{32\,M_{\text{к}}/(\pi\,G\,[\theta])} = \sqrt[4]{32 \cdot /(3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0305} = 0{,}0575[\text{м}].$$

Выбираем большее из чисел $D_{\text{кт}}$ и $D_{\text{к}\theta}$, переводим в миллиметры и округляем в большую сторону до стандартного (кратного 5 мм) значения. $D_{\text{кт}} \cdot 10^3 = 0{,}0576 \cdot 10^3 < 60$ мм. Диаметр участков 1 и 4 выбираем равным $D_{\text{к}} = 60{,}0\,[\text{мм}] = 0{,}06\,[\text{м}]$.

10. Ищем полярный момент инерции круглого вала

$$J_{p\text{к}} = \pi\,D_{\text{к}}^4/32 = 3{,}14 \cdot 0{,}06^4/32 = 1{,}27 \cdot 10^{-6}\,[\text{м}^4].$$

11. Вычисляем углы закручивания [рад] участков 1 и 4 по формуле

$$\varphi_i = M_i \cdot L_i/(G \cdot J_{p\text{к}}),\quad (i = 1{,}4).$$

Получаем:

$$\varphi_1 = M_i \cdot L_i/(G \cdot J_{p\text{к}}) = 1510 \cdot 1{,}00/(8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-6}) = 0{,}0149,$$

$$\varphi_4 = M_1 \cdot L_1/(G \cdot J_{p\text{к}}) = -1670 \cdot 1{,}75/(8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-6}) = -0{,}0287.$$

12. Диаметр вала кольцевого сечения из условия прочности

$$D_{m\tau} = \sqrt[3]{16\,M_m/\left(\pi\,[\tau]\left(1-\delta^4\right)\right)} =$$

$$= \left(16 \cdot 4450/\left(3{,}14 \cdot 7 \cdot 10^7 \cdot (1-0{,}65^4)\right)\right)^{1/3} = 0{,}0687\ [\text{м}].$$

13. Диаметр вала кольцевого сечения из условия жёсткости:

$$D_{m\theta} = \sqrt[4]{32\,M_m/\left(\pi\,G[\theta]\left(1-\delta^4\right)\right)} =$$

$$= \sqrt[4]{32 \cdot 4450/\left(3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0305 \cdot (1-0{,}65^4)\right)} = 0{,}0689\ [\text{м}].$$

14. Большее из значений $D_{m\tau}$ и $D_{m\theta}$ переводим в миллиметры и округляем в большую сторону до стандартного (кратного 5 мм) значения. $D_{m\theta} \cdot 1000 = 0{,}0689 \cdot 1000 = 68{,}9 < 70$ мм. Наружный диаметр вала кольцевого сечения назначаем равным $D_{\text{m}} = 70{,}0\,[\text{мм}] = 0{,}07\,[\text{м}]$.

15. Внутренний диаметр кольцевого сечения вала

$$d_m = \delta\,D_m = 0{,}65 \cdot 0{,}07 = 0{,}0455\,[\text{мм}].$$

16. Ищем полярный момент инерции кольцевого сечения

$$J_{pm} = \pi\,D_m^4\,(1-\delta^4)/32 = 3{,}14 \cdot 0{,}07^4 \cdot (1-0{,}65^4)/32 = 1{,}94 \cdot 10^{-6}\,[\text{м}^4].$$

17. Вычисляем углы закручивания [рад] участков 2 и 3:

$$\varphi_2 = M_2 \cdot L_2/(G \cdot J_{p\,кр}) = 4450 \cdot 1{,}25/(8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}94 \cdot 10^{-6}) = 0{,}0359;$$
$$\varphi_3 = M_3 \cdot L_3/(G \cdot J_{p\,кр}) = -4300 \cdot 2{,}25/(8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}94 \cdot 10^{-6}) = -0{,}0625.$$

18. Строим эпюру углов закручивания вала. Вал равномерно вращается. Ведущий шкив 3 считаем условно неподвижным. Проводим ось вала Z и точку её пересечения с вертикалью 3 отмечаем как 0.

На вертикали 2 откладываем вверх в принятом масштабе величину φ_2. Соединяем прямой линией точки с ординатами 0 и φ_2. На этот угол повернулся шкив 2 относительно ведущего шкива 3. Вместе со шкивом 2 на тот же угол повернулся как целое участок 1 – 2 вала со шкивом 1.

Поворот шкива 1 относительно ведущего шкива 3 складывается из поворота участка вала 1 – 2 как жёсткого целого плюс поворот из-за деформации участка 1 – 2. Проектируем на вертикаль 1 отрезок φ_2 и из его конца откладываем отрезок φ_1. Расстояние $\varphi_1 + \varphi_2$ от оси Z до конца суммарного отрезка, построенного на вертикали 1, пропорционально углу поворота шкива 1 относительно шкива 3. Концы отрезков, построенных на вертикалях 1 и 2, соединяем прямой.

Построение углов поворота дисков 4 и 5 относительно диска 3 подобно приведённому. На вертикали 4 откладываем вниз отрезок φ_3 – пропорциональный углу закручивания участка 3 – 4 вала. Конец этого отрезка соединяем прямой с нулём вертикали 3. Проектируем отрезок φ_3 на вертикаль 5 и из конца проекции откладываем вниз отрезок φ_4, пропорциональный углу закручивания участка 4 – 5 вала. Отрезок $\varphi_3 + \varphi_4$ представляет угол поворота шкива 5 относительно ведущего шкива 3. Концы отрезков на вертикалях 4 и 5 соединяем прямой. Эпюра углов закручивания вала дана на рис. 3, *г*.

Задача № 3. Расчёт балки на прочность при изгибе

Двутавровая балка закреплена на двух опорах: подвижной в осевом направлении – правой и неподвижной – левой (рис. 4.1 – 4.4). Балка нагружена сосредоточенной нагрузкой P, изгибающим моментом M и равномерно распределенной нагрузкой q. Балка работает на изгиб. Построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и по заданным допускаемым напряжениям [σ] подобрать стандартный двутавр и брус прямоугольного сечения с соотношением сторон 1:2 (высота в 2 раза больше ширины). Сравнить массы 1 м двутавра и прямоугольного бруса.

Таблица 3

Исходные данные к задаче № 3

Номер схемы	Нагрузка			Длина участка, м				[σ], МПа
	P, кН	M, кН · м	q, кН/м	L_0	L_1	L_2	L_3	
1	75,0	125	20	0	2,0	1,4	1,3	200
2	65,0	215	60	0	3,1	2,2	1,5	240
3	60,0	130	40	0	2,4	3,0	2,3	280
4	80,0	220	24	0	2,6	2,9	1,7	320
5	90,0	135	56	0	2,8	1,8	2,5	360
6	95,0	225	38	0	2,9	2,6	2,7	400
7	95,0	140	28	0	2,7	2,0	2,6	440
8	85,0	220	52	0	2,5	2,8	2,1	480
9	90,0	145	36	0	2,6	2,4	2,9	520
10	35,0	215	32	0	2,7	2,3	2,3	560
11	82,0	150	48	0	2,2	2,4	3,1	600
12	38,0	210	34	0	2,5	3,2	2,1	640
13	96,0	155	36	0	3,3	2,6	2,0	680
14	36,0	205	44	0	2,4	1,4	2,7	200
15	70,0	160	32	0	2,5	1,8	1,5	240
16	46,0	200	40	0	2,6	1,7	2,9	280
17	68,0	165	40	0	2,6	3,0	1,7	320
18	67,0	195	30	0	3,1	1,8	1,5	360
19	38,0	170	44	0	2,9	3,2	1,4	400
20	43,0	215	56	0	2,9	2,8	3,0	240
21	76,0	175	28	0	2,2	3,3	2,1	480
22	32,0	185	48	0	2,2	3,2	1,5	520
23	39,0	180	32	0	2,3	1,6	2,3	560
24	91,0	225	26	0	2,7	2,4	3,0	600
25	68,0	125	52	0	2,5	2,6	2,5	640
26	66,0	220	26	0	2,6	2,7	3,2	680
27	45,0	130	24	0	2,5	2,4	1,5	200
28	43,0	215	56	0	2,9	2,8	3,0	240
29	52,0	135	22	0	2,3	2,4	1,7	280
30	69,0	210	22	0	2,7	2,0	3,0	320
31	86,0	140	60	0	3,1	1,6	2,9	360

Окончание табл. 3

Номер схемы	Нагрузка			Длина участка, м				[σ], МПа
	P, кН	M, кН · м	q, кН/м	L_0	L_1	L_2	L_3	
32	99,0	205	18	1,6	3,5	2,1	2,6	400
33	30,0	145	20	1,8	2,9	2,7	2,1	440
34	90,0	200	58	2,0	2,3	2,1	2,4	480
35	36,0	150	60	2,2	2,5	1,6	2,3	520
36	94,0	195	40	2,4	2,8	2,5	2,5	560
37	99,0	155	54	2,6	2,7	2,4	1,8	600
38	65,0	190	55	2,8	3,0	1,7	2,3	640
39	87,0	160	42	3,0	2,6	1,6	2,6	680
40	58,0	185	50	3,0	2,8	2,1	2,3	200
41	72,0	165	50	2,8	2,5	2,4	2,5	240
42	24,0	180	44	2,6	1,9	2,4	2,3	280
43	70,0	170	46	2,4	2,0	3,1	2,7	320
44	46,0	175	45	2,2	2,4	2,1	2,0	360
45	45,0	175	46	2,0	3,2	2,2	2,2	400
46	87,0	165	42	1,8	3,0	1,4	1,8	440
47	37,0	180	40	1,6	2,2	1,7	3,2	480
48	89,0	160	48	1,6	2,2	2,4	1,9	520
49	35,0	185	38	1,8	2,7	2,3	2,9	560
50	71,0	155	35	2,0	2,5	2,6	1,3	600
51	90,0	190	50	2,2	2,4	2,7	1,9	640
52	86,0	150	34	2,4	2,8	2,0	2,7	680
53	52,0	195	30	2,6	2,9	2,7	2,3	200
54	83,0	145	52	2,8	2,8	1,8	2,6	240
55	72,0	200	30	3,0	2,0	2,9	3,0	280
56	82,0	140	25	3,0	2,9	3,2	3,5	320
57	98,0	205	54	2,8	2,8	3,3	3,6	360
58	47,0	135	26	2,6	2,4	1,4	2,7	400
59	82,0	210	22	2,4	2,3	3,3	1,9	440
60	65,0	130	30	3,2	2,5	1,7	2,3	480
61	46,0	175	26	2,6	2,4	1,9	2,1	520
62	69,0	140	45	2,0	2,4	2,2	1,4	560
63	34,0	200	38	2,2	2,8	2,6	1,8	600
64	68	215	32	1,8	3,0	2,4	1,8	640

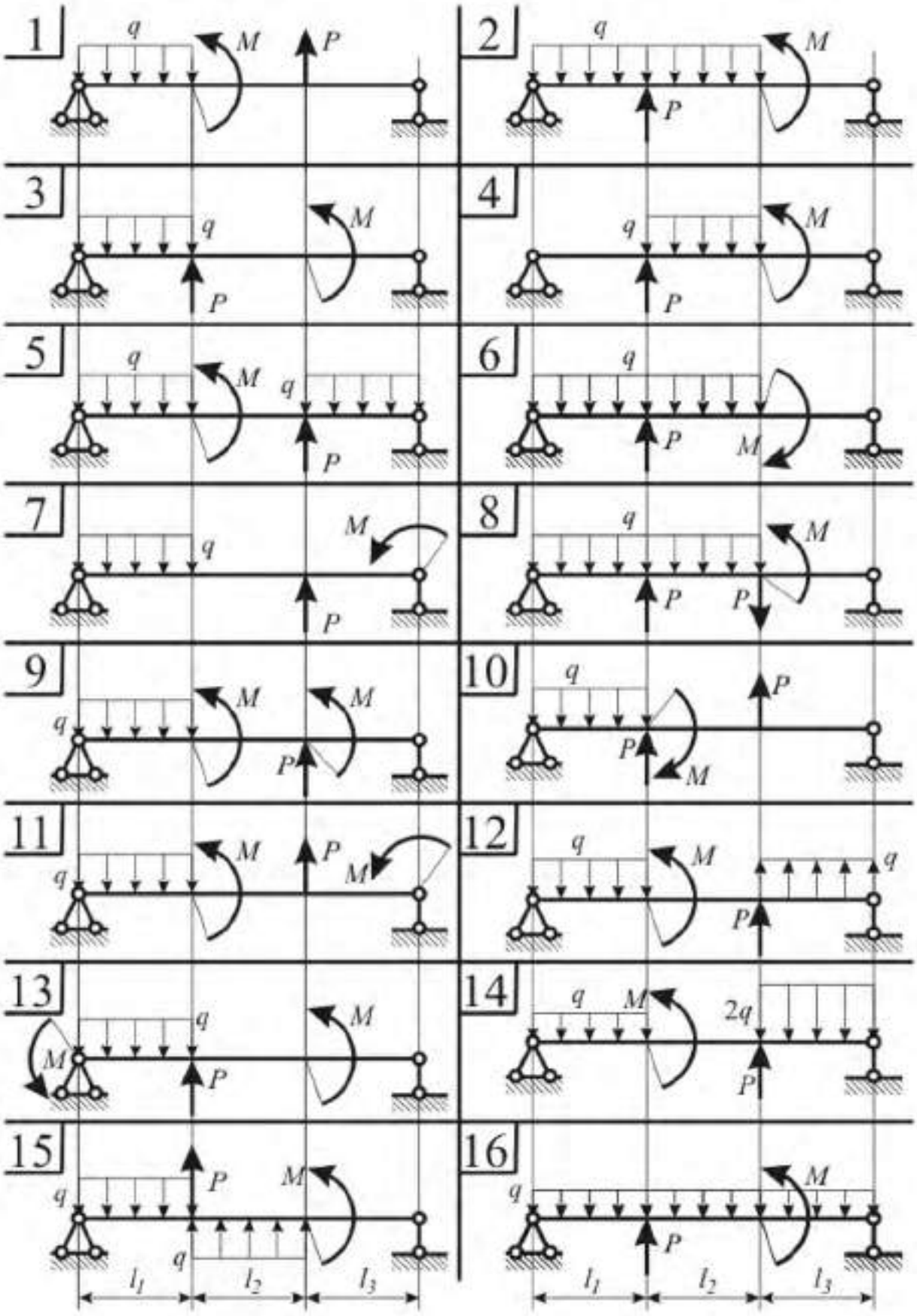


Рис. 4.1. Исходные данные к задачам 3, 4. Варианты 1 - 16

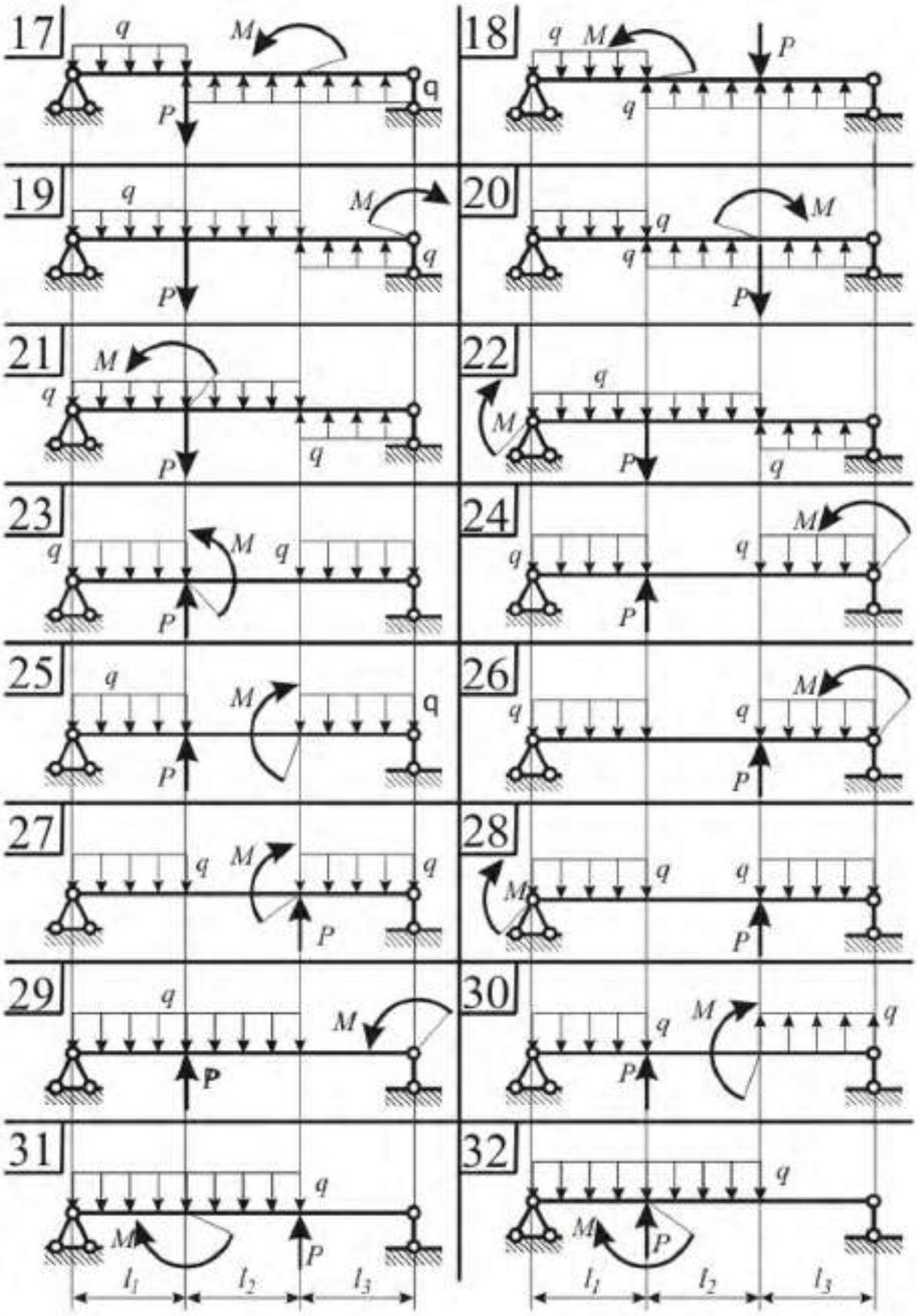


Рис. 4.2. Исходные данные к задачам 3, 4. Варианты 17 - 32

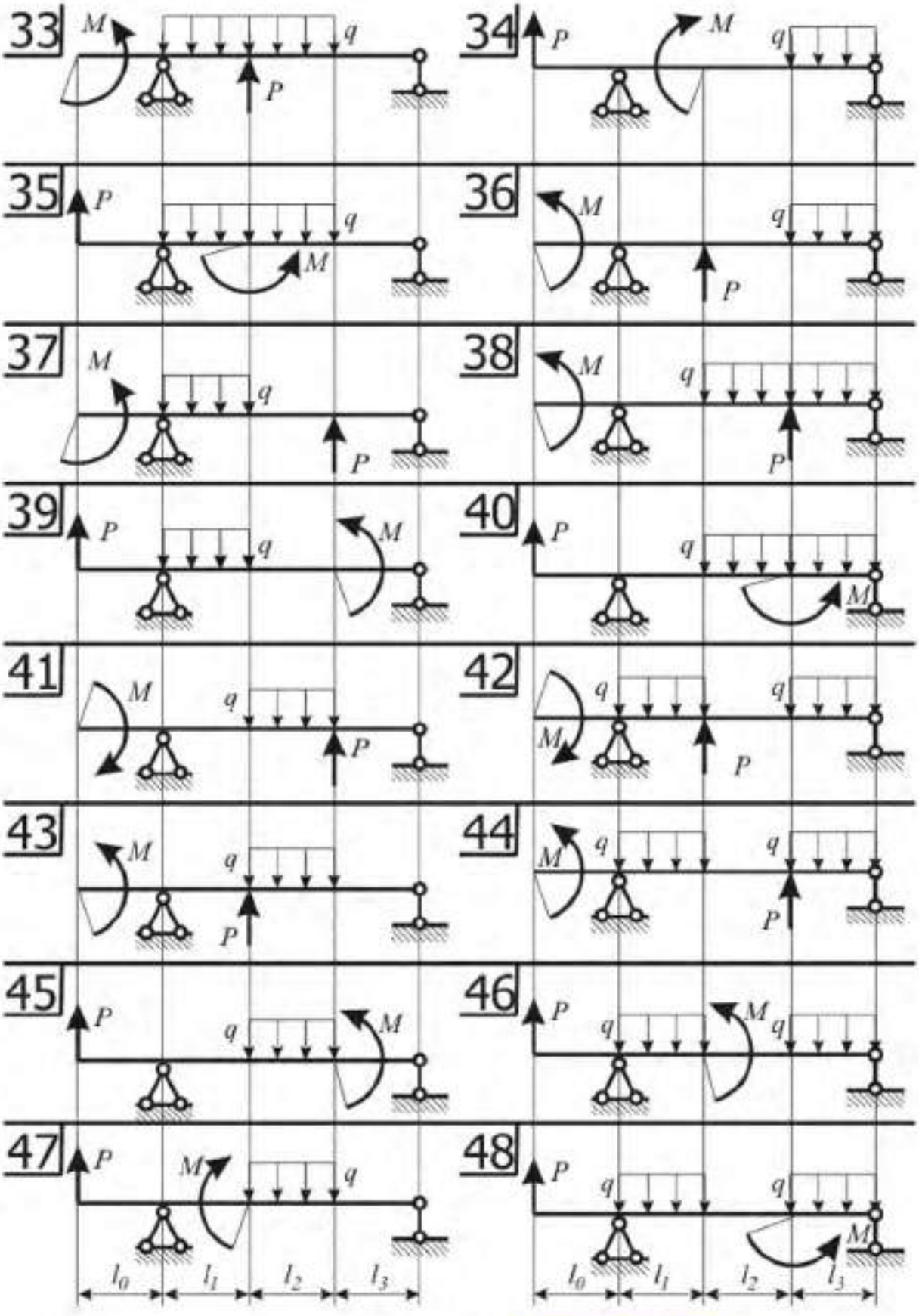


Рис. 4.3. Исходные данные к задачам 3, 4. Варианты 33 - 48

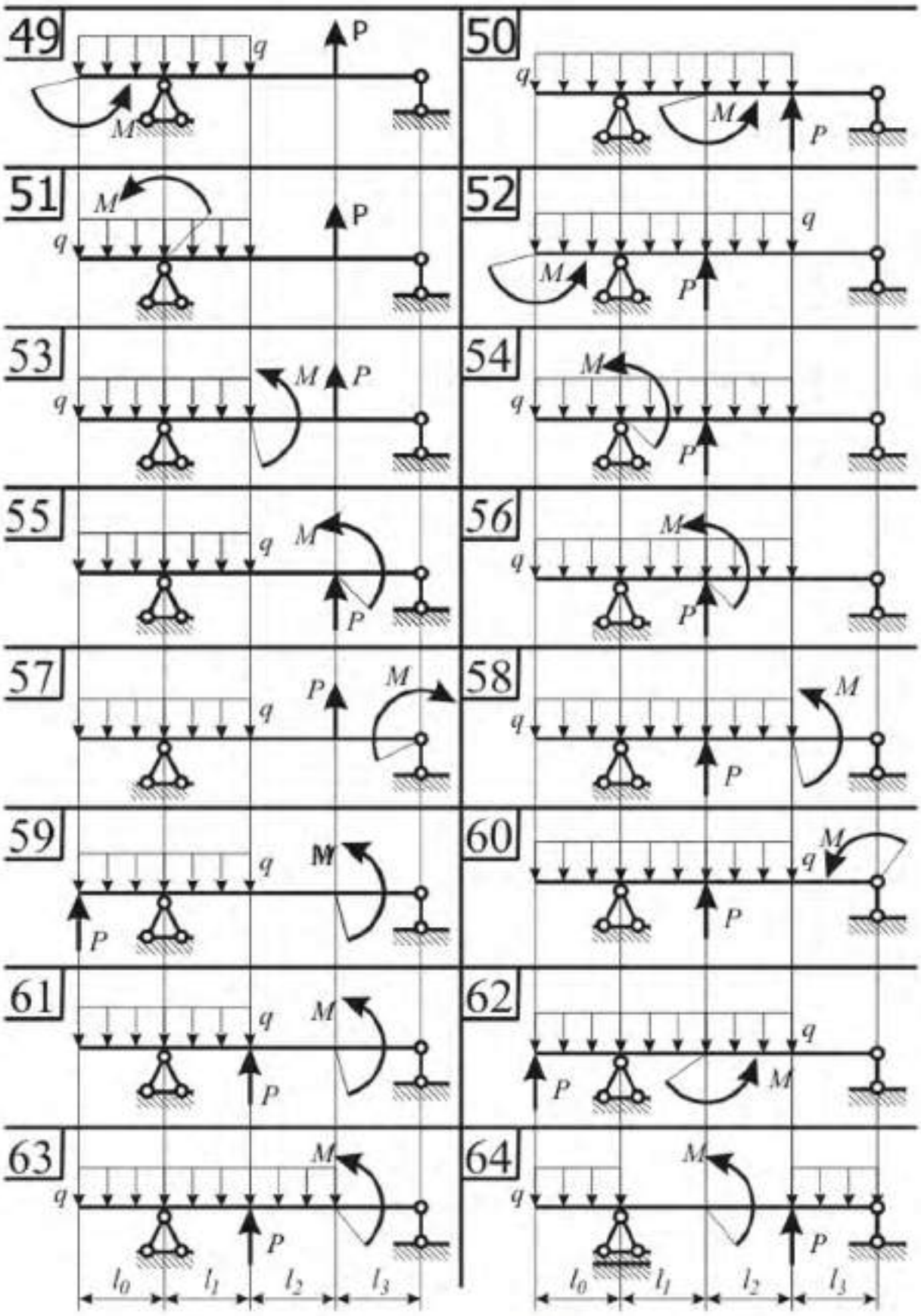


Рис. 4.4. Исходные данные к задачам 3, 4. Варианты 49 - 64

Задача № 4. Расчёт балки на жёсткость

Двутавровая балка закреплена на двух опорах: подвижной в осевом направлении – правой и неподвижной – левой (рис. 4.1 – 4.4). Балка нагружена сосредоточенной силой P, изгибающим моментом M и равномерно распределенной нагрузкой q. Балка работает на изгиб. По результатам расчетов задачи № 3, т. е. известному моменту инерции двутавровой балки, построить её изогнутую ось. Прогибы и углы поворота сечения балки определять в точках приложения сил реакций и внешних сил, моментов и по середине пролета, в котором приложена распределенная нагрузка. Найти максимальный прогиб и сравнить с допускаемым, который принят равным 1/200 длины максимального пролета (длины консоли или расстояния между опорами). Расчет производить методом начальных параметров. Исходные данные для решения задачи приведены в табл. 3.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ № 3 и 4

Стальная двутавровая балка (рис. 4.5), шарнирно опёртая в крайних сечениях 1 и 5, нагружена: силами $P_1 = 40$ [кН], $P_2 = 40$ [кН], приложенными в сечениях 2, 3; изгибающим моментом $M = 50$ [кН·м], приложенным в сечении 4; нагрузкой интенсивности $q = 20$ [кН/м], равномерно распределённой на участке 1 – 4. Сечения, в которых приложены нагрузки, разбивают балку на 4 участка. Номер участка совпадает с номером левого сечения. Длины участков: $l_1 = 2$ [м], $l_2 = 2{,}5$ [м], $l_3 = 3{,}5$ [м], $l_4 = 3$[м]. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 200$ [МПа]. Подобрать из условия прочности двутавр по ГОСТ 8239-89.

Допустимый прогиб $L/200$, где $L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 11$ [м] – длина пролёта. Найти упругую линию балки. Сравнить максимальный прогиб с допускаемым.

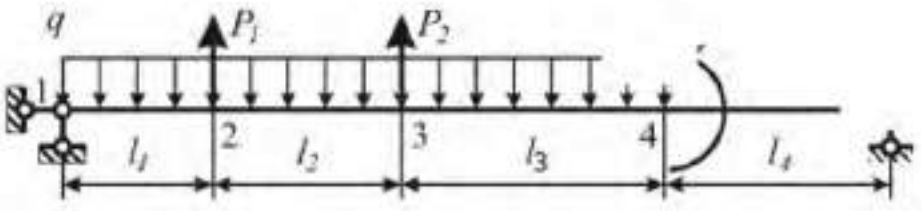


Рис. 4.5. Схема нагружения однопролетной балки

РЕШЕНИЕ

1. Находим опорные реакции из уравнений моментов относительно опор: $\sum mom_1 = 0$; $\sum mom_5 = 0$. Положительное направление реакций определяется правилом знаков (рис. 4.6).

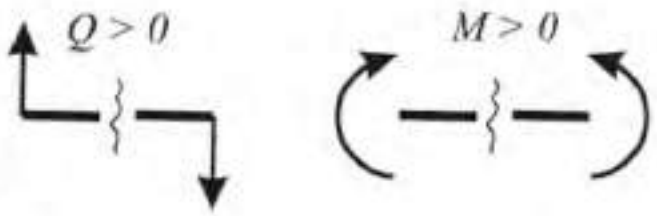


Рис. 4.6. Правило знаков для внутренних силовых факторов

Выбранные направления реакций показаны на рис. 4.7, *б*. Если получено отрицательное значение реакции, то её истинное направление противоположно выбранному.

$$R_5 L - q\,(l_1 + l_2 + l_3)^2/2 + P_1 l_1 + P_2(l_1 + l_2) + M = 0;$$
$$-R_1 L + q\,(l_1 + l_2 + l_3)((l_1 + l_2 + l_3)/2 + l_4) - P_1(l_2 + l_3 + l_4) - $$
$$-P_2(l_3 + l_4) + M = 0.$$

Решая уравнения, получаем:

$$R_5 = 1/L\ (q\ (l_1 + l_2 + l_3)^2/2 - P_1 l_1 - P_2\,(l_1 + l_2) - M) =$$
$$= 1/11\ \ (20\ \ (2 + 2{,}5 + 3{,}5)^2/2) - 40 \cdot 2 - 40\ \ (2 + 2{,}5) - 50) = 30\ [\text{кН}];$$
$$R_1 = 1/L\ (q\,(l_1 + l_2 + l_3)\,((l_1 + l_2 + l_3)/2 + l_4) -$$
$$-P_1\ (l_2 + l_3 + l_4) - P_2\ (l_3 + l_4) + M) =$$
$$= 1/11\,(20\ \ (2 + 2{,}5 + 3{,}5)\ \ ((2 + 2{,}5 + 3{,}5)/2 + 3) -$$
$$-40\,(2{,}5 + 3{,}5 + 3) - 40\,(3{,}5 + 3) + 50) = 50\,[\text{кН}].$$

2. Проверка – обязательный этап. Для проверки составляем уравнение моментов относительно любой точки или (что проще, но не всегда гарантирует правильность вычислений) уравнение суммы проекций всех сил на вертикаль. Запишем сумму моментов относительно точки 4:

$$\sum mom_4 = -R_0\ (l_0 + l_1 + l_2) -$$
$$-P_1\ \ (l_1 + l_2) - P_2 l_2 + q\ \ (l_0 + l_1 + l_2)^2/2 + M + R_4 l_3 =$$
$$= -50\,(2 + 2{,}5 + 3{,}5) - 40\,(2{,}5 + 3{,}5) - 40 \cdot 3{,}5 +$$
$$+20\ \ (2 + 2{,}5 + 3{,}5)^2/2 + 50 + 30 \cdot 3 = 0\,.$$

3. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Границами участков являются точки, в которых приложены силы и моменты, или начинаются участки с распределённой нагрузкой. Если участок разрезать в произвольной точке, полученный результат будет справедлив для любой точки сечения (по граничным точкам разрезать балку нельзя). Внешние нагрузки, приложенные к балке, и опорные реакции образуют уравновешенную систему сил. Разрезав балку, получим два куска, каждый из которых нагружен неуравновешенной системой сил. Мысленное разрезание не может нарушить равновесия кусков. Равновесие обеспечивают внутренние силы и моменты, действующие в разрезах. По третьему закону Ньютона силы, приложенные к полученным кускам, равны по величине и направлены в разные стороны.

Величины находим из условий равновесия любого из кусков. Для этого составляем сумму проекций нагрузок на вертикаль и сумму моментов нагрузок, приложенных к куску, относительно центра масс разреза.

3.1. Участок 4 (рис. 4.7, *в*). Рассматриваем равновесие правого куска. Правило знаков дано на рис. 4.6. Координату сечения отсчитываем от точки 4 (которая является границей разрезанного участка на правом куске). При этом выборе точки отсчёта координата сечения меняется в пределах длины исследуемого участка ($0 \le z_4 \le l_4 = 3$ [м]).

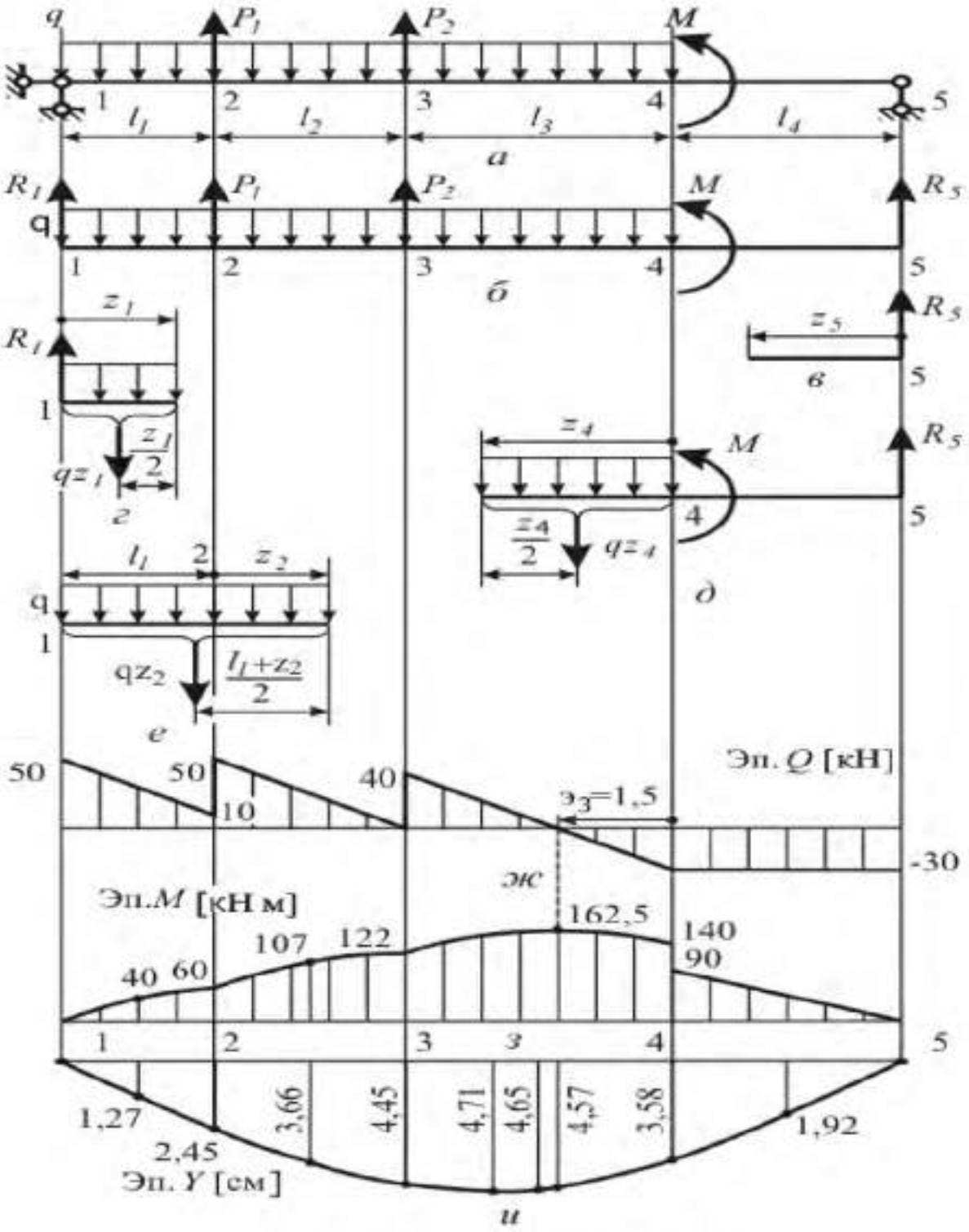


Рис. 4.7. Изгиб балки. Эпюры Q, M, Y

Получаем $Q_4(z_5) = -R_5$. Поперечная сила постоянна вдоль участка 4 (рис. 4.7, *ж*).

Изгибающий момент $M_4(z_5) = R_5\, z_5$. Он является линейной функцией координаты z_5. Вычисляем значения в начале и конце участка 4: $M_4(0) = R_5 \cdot 0 = 0$; $M_4(l_4) = R_5\, l_4 = 30 \cdot 3 = 90$ [кН·м]. Строим эпюру изгибающего момента (рис. 4.7, *з*).

3.2. Участок 1 (рис. 4.7, *г*). Рассматриваем равновесие левого куска. Правило знаков дано на рис. 4.6. Расстояние до разреза (координату сечения) отсчитываем от точки 1 ($0 \le z_1 \le l_1 = 2$ [м]). Получаем $Q_1(z_1) = R_1 - q\, z_1$. Поперечная сила меняется по линейному закону вдоль участка 1 (рис. 4.7, *ж*). Находим значения $Q_1(z_1)$ в начале и в конце участка

$$Q_1(0) = R_0 - q \cdot 0 = 50\ [\text{кН}];$$

$$Q_1(l_0) = R_0 - q\ l_0 = 50 - 20 \cdot 2 = 10\ [\text{кН}].$$

Значение $z_0 = e_1$, при котором поперечная сила равна 0, находим решая уравнение $Q_1(e_1) = R_1 - q\, e_1 = 0$. Получим: $e_1 = R_1/q = 50/2 = 2{,}5$ [м]. Корень лежит вне участка 1. Функция $Q_1(z_1)$ не обращается в нуль на этом участке.

Изгибающий момент на участке 1 равен $M_1(z_1) = R_1 z_1 - q\, z_1^2/2$. Момент $M_1(z_1)$ является квадратичной функцией координаты z_1. Кривые вычерчивают по трём точкам. Вычисляем значения в начале и конце участка:

$$M_1(0) = R_1 0 - q\, 0^2/2 = 0;$$

$$M_1(l_1) = R_1 l_1 - q\, l_1^2/2 = 50 \cdot 2 - 20 \cdot 2^2/2 = 60\ [\text{кН}\cdot\text{м}].$$

В качестве третьей точки берут точку участка 1, в которой поперечная сила обращается в нуль. Если $Q_1 \neq 0$ на участке 1, ищем момент посередине участка: $M_1(l_1/2) = R_1\, l_1/2 - q\, (l_1/2)^2/2 = 50 \cdot 1 - 20 \cdot 1^2/2 = 40$ [кН·м]. Строим эпюру изгибающего момента (рис. 4.7, *з*).

3.3. Участок 3 (рис. 4.7, *д*). Разрезаем балку между сечениями 3 и 4. Рассматриваем равновесие правого куска балки. Расстояние до разреза отсчитываем от точки 4 (которая ограничивает участок 3 справа). При этом ($0 \le z_4 \le l_3 = 3{,}5$ [м]).

Поперечная сила $Q_3(z_4)$ изменяется вдоль участка 3 (рис. 4.7, *ж*) по линейному закону $Q_3(z_4) = -R_5 + q\, z_4$. На концах участка 3 получаем: $Q_3(0) = -R_5 + q \cdot 0 = -30$; $Q_3(l_3) = -R_5 + q\ l_3 = -30 + 20 \cdot 3{,}5 = 40$ кН. Поперечная сила Q_3 обращается в нуль в точке $e_3 = R_5/q = 30/20 = 1{,}5$ м.

Изгибающий момент на участке 3 равен

$$M_3(z_4) = M + R_5(z_4 + l_4) - q\, z_4^2/2.$$

Находим значения изгибающего момента на концах участка и в точке e_3:

$$M_3(0) = M + R_4(0 + l_4) - q\ \cdot 0^2/2 =$$

$$= 50 + 30\ (0 + 3) - 20 \cdot 0^2/2 = 140\ [\text{кН}\cdot\text{м}];$$

$$M_3(l_3) = M + R_4(l_3 + l_4) - q\, l_3^2/2 =$$

$$= 50 + 30\ \ (3{,}5 + 3) - 20 \cdot 3{,}5^2/2 = 122\ [\text{кН}\cdot\text{м}];$$

$$M_3(e_3) = M + R_4(e_3 + l_4) - q\ (e_3)^2/2 =$$
$$= 50 + 30\ (1{,}5 + 3) - 20 \cdot 1{,}5^2/2 = 162{,}5\ [\text{кН}\cdot\text{м}].$$

Момент в середине участка 3 практически не отличается от экстремального:

$$M_3(l_3/2) = M + R_4(l_3/2 + l_4) - q\ \ (l_3/2)^2/2 =$$
$$= 50 + 30\ \ (1{,}75 + 3) - 20 \cdot 1{,}75^2/2 = 161{,}9\ [\text{кН} \cdot \text{м}].$$

Строим эпюру изгибающего момента (рис. 4.7, *з*).

3.4. Участок 2 (рис. 4.7, *е*). Режем балку в любой точке, лежащей между точками 2 и 3. Рассматриваем равновесие левого куска. Расстояние до разреза (координату z_2) отсчитываем от точки 2 (границы участка на левом куске). При этом $0 \le z_2 \le l_2 = 2{,}5$ [м].

Поперечная сила $Q_2(z_2)$ меняется вдоль участка 2 (см. рис. 3.8, *ж*) по закону $Q_2(z_2) = R_1 + P_1 - q\ (l_1 + z_2)$.

Её значения на концах участка равны

$$Q_2(0) = R_1 + P_1 - q\ (l_1 + 0) = 50 + 40 - 20 \cdot 2 = 50[\text{кН}];$$
$$Q_2(l_2) = R_1 + P_1 - q\ (l_1 + l_2) = 50 + 40 - 20 \cdot (2 + 2{,}5) = 0[\text{кН}].$$

Поперечная сила $Q_2(z_2)$ обращается в нуль на правой границе участка 2:

$$e_2 = l_2 = 2{,}5\ [\text{м}].$$

Изгибающий момент $M_2(z_2)$ в точке z_2 участка 2 находим по формуле

$$M_2(z_2) = R_1 \cdot (z_2 + l_1) + P_1 \cdot z_2 - q\ (z_2 + l_1)^2/2.$$

Вычисляем значения момента на концах участка 2:

$$M_2(l_2) = R_1\ (l_1 + l_2) + P_1\ l_2 - q\ (l_1 + l_2)^2 = 50\ \ (2 + 2{,}5) + 40\ \ 2{,}5 -$$
$$-20\ \ (2 + 2{,}5)^2/2 = 122$$

[кН ·м].

$$M_2(0) = R_1\ \ (0 + l_1) + P \cdot 0 - q\ \ (0 + l_1)^2/2 =$$
$$= 50\ \ (0 + 2) + 40 \cdot 0 - 20\ \ (0 + 2)^2/2 = 60\ [\text{кН}\cdot\text{м}];$$
$$M_2(l_2) = R_1\ \ (l_1 + l_2) + P_1 \cdot l_2 - q\ \ (l_1 + l_2)^2 =$$
$$= 50 \cdot (2 + 2{,}5) + 40 \cdot 2{,}5 - 20 \cdot (2 + 2{,}5)^2/2 = 122\ [\text{кН}\cdot\text{м}].$$

Точка экстремума $e_2 = 2{,}5$ [м] совпадает с правой границей участка 2. Момент в ней уже найден, поэтому в качестве третьей точки при построении эпюры $M_2(z_2)$ берём середину участка $z_2 = l_2/2 = 2{,}5/2 = 1{,}25$ [м].

Получаем

$$M_2(l_2/2) = R_1\ \ (l_2/2 + l_1) + P_1\ l_2/2 - q\ \ (l_2/2 + l_1)^2/2 =$$
$$= 50\ \ (1{,}25 + 2) + 40 \cdot 1{,}25 - 20\ \ (1{,}25 + 2)^2/2 = 107\ [\text{кН}\cdot\text{м}].$$

Строим эпюру изгибающего момента (рис. 4.7, *з*).

4. Выбор двутавра из условия прочности $\sigma_m = M_m/W \le [\sigma]$. Здесь: $M_m = 162{,}5\ [\text{кН}\cdot\text{м}] = 1{,}625 \cdot 10^5\ [\text{Н}\cdot\text{м}]$ – наибольший по модулю изгибающий момент в балке (найденный в п. 3);

$[\sigma] = 200\ [\text{МПа}] = 2 \cdot 10^8\ [\text{Н/м}^2]$ – допускаемые напряжения.

Требуемый по условию прочности момент сопротивления изгибу $W = M_m/[\sigma] = 1{,}625 \cdot 10^5/2 \cdot 10^8 = 8{,}12 \cdot 10^{-4}[\text{м}^3] = 8{,}12 \cdot 10^2[\text{см}^3]$.

По ГОСТ 8239-89 находим двутавр с ближайшим большим моментом

сопротивления изгибу: двутавр № 40, $W_x = 953{,}0$ [см^3]. Его момент инерции $J_x = 19062$ [см^4].

5. Находим максимальные напряжения изгиба
$\sigma_{max} = M_{max}/W_x = 1{,}625 \cdot 10^5/9{,}53 \cdot 10^{-4} = 1{,}71 \cdot 10^8$ [Н/м^2] $= 171$ [МПа].
Определяем коэффициент запаса прочности по допускаемым напряжениям
$$k_{[\sigma]} = [\sigma]/\sigma_{max} = 2 \cdot 10^8/1{,}71 \cdot 10^8 = 1{,}17.$$

6. Уравнение упругой линии балки $y(z)$:
$$Y(z) = \theta_0 \cdot z + R_1 \cdot z^3/(6 \cdot E \cdot J_x) - $$
$$- q \cdot z^4/(24 \cdot E \cdot J_x) + P_1(z - l_1)^3/(6 \cdot E \cdot J_x) \cdot H(z - l_1) +$$
$$+ P_2 \cdot (z - l_1 - l_2)^3/(6 \cdot E \cdot J_x) \cdot H(z - l_1 - l_2) -$$
$$- M(z - l_1 - l_2 - l_3)^2/(2 \cdot E \cdot J_x) \cdot H(z - l_1 - l_2 - l_3) +$$
$$+ q(z - l_1 - l_2 - l_3)^4/(6 \cdot E \cdot J_x) \cdot H(z - l_1 - l_2 - l_3),$$
где θ_0 – неизвестный угол поворота балки на левой опоре; $H(z)$ – функция Хевисайда. $H(z) = \begin{cases} 0, & при\ z < 0 \\ 1, & при\ z \geq 0 \end{cases}$. Её график приведён на рис. 4.8.

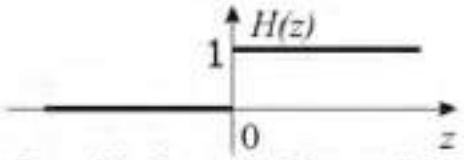


Рис. 4.8. Функция Хевисайда

Начало координат взято на левой опоре.

7. Угол θ_0 поворота на левой опоре находим из условия отсутствия прогиба на правой опоре:
$$Y(L) = \theta_0 \cdot L + R_1 \cdot L^3/(6 \cdot E \cdot J_x) -$$
$$- q \cdot L^4/(24 \cdot E \cdot J_x) + P_1(L - l_1)^3/(6 \cdot E \cdot J_x) \cdot H(L - l_1) +$$
$$+ P_2(L - l_1 - l_2)^3/(6 \cdot E \cdot J_x) \cdot H(L - l_1 - l_2) -$$
$$- M(L - l_1 - l_2 - l_3)^2/(2 \cdot E \cdot J_x) \cdot H(L - l_1 - l_2 - l_3) +$$
$$+ q(L - l_1 - l_2 - l_3)^4/(24 \cdot E \cdot J_x) \cdot H(L - l_1 - l_2 - l_3) = 0.$$

Решаем линейное уравнение относительно неизвестного угла θ_0:
$$\theta_0 = (-R_1 L^3/(6EJ_x) + qL^4/(24EJ_x) - P_1(L - l_1)^3/(6EJ_x) -$$
$$- P_2(L - l_1 - l_2)^3/(6EJ_x) + M(L - l_1 - l_2 - l_3)^2/(2EJ_x) -$$
$$- q(L - l_1 - l_2 - l_3)^4/(24EJ_x))/L =$$
$$= (-50 \cdot 10^3 \cdot 11^3/(6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}9062 \cdot 10^{-4}) +$$
$$+ 20 \cdot 10^3 \cdot 11^4/(24 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}9062 \cdot 10^{-4}) -$$
$$- 40 \cdot 10^3(11 - 2)^3/(6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}9062 \cdot 10^{-4}) -$$
$$- 40 \cdot 10^3(11 - 2 - 2{,}5)^3/(6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}9062 \cdot 10^{-4}) +$$
$$+ 50 \cdot 10^3(11 - 2 - 2{,}5 - 3{,}5)^3/(2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}9062 \cdot 10^{-4}) -$$
$$- 20 \cdot 10^3(11 - 2 - 2{,}5 - 3{,}5)^4/(24 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}9062 \cdot 10^{-4}))/11 =$$
$$= -0{,}0129 \text{ [рад]}.$$

8. Находим упругую линию. Вычисляем жёсткость при изгибе

$$EJ_x = 2 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}9062 \cdot 10^{-4} = 3{,}81 \cdot 10^7 \quad [\text{Н}\cdot\text{м}^2].$$

Чтобы найти прогиб в середине участка 3, подставим в уравнение упругой линии координату этой середины

$$z = l_1 + l_2 + l_3/2 = 2 + 2{,}5 + 3{,}5/2 = 6{,}25 \text{ [м]}.$$

Получаем

$$Y(6{,}25) = -0{,}0129 \cdot 6{,}25 + 50 \cdot 10^3 \cdot 6{,}25^3/(6 \cdot 3{,}81 \cdot 10^7) - $$
$$-20 \cdot 10^3 \cdot 6{,}25^4/(24 \cdot 3{,}81 \cdot 10^7) +$$
$$+40 \cdot 10^3(6{,}25-2)^3/(6 \cdot 3{,}81 \cdot 10^7) \cdot H(6{,}25-2) +$$
$$+40 \cdot 10^3(6{,}25-2-2{,}5)^3/(6 \cdot 3{,}81 \cdot 10^7) \cdot H(6{,}25-2-2{,}5) =$$
$$= 0{,}0465 \text{ [м]}.$$

В двух последних членах уравнения упругой линии аргументы функции $H(z)$ отрицательны и $H(z) = 0$. Подобные вычисления проведены для границ и середин всех участков. Упругая линия построена на рис. 4.7, *и*. Величина максимального прогиба 4,71 [см] и не превышает допустимый прогиб, равный $L|200 = 1100/200 = 5{,}5$ [см]. Следовательно, жесткость данной балки достаточна.

Задача № 5. Геометрические характеристики плоского симметричного сечения

Для симметричного сечения, составленного из прокатных профилей, найти площадь, осевые моменты инерции, моменты сопротивления изгибу и радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей. Схемы сечений приведены на рис. 5.1, номера прокатных профилей и размеры поперечных сечений указаны в табл. 5.1.

Совместная работа прокатных профилей в составных сечениях, данных на схемах I, II, III и IX рис. 5.1, обеспечена соединительными планками, показанными пунктиром.

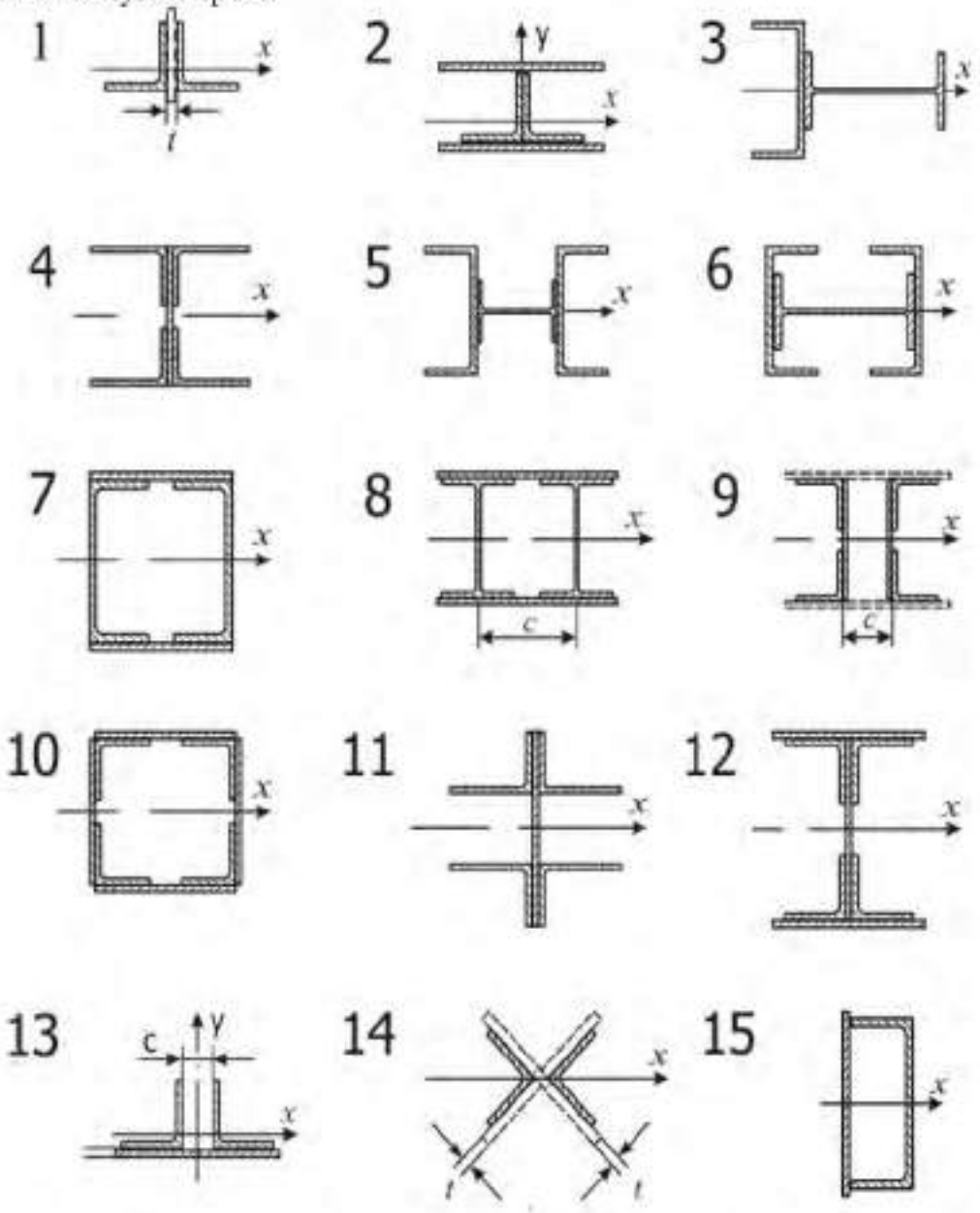


Рис. 5.1. Схемы поперечных сечений 1 – 15

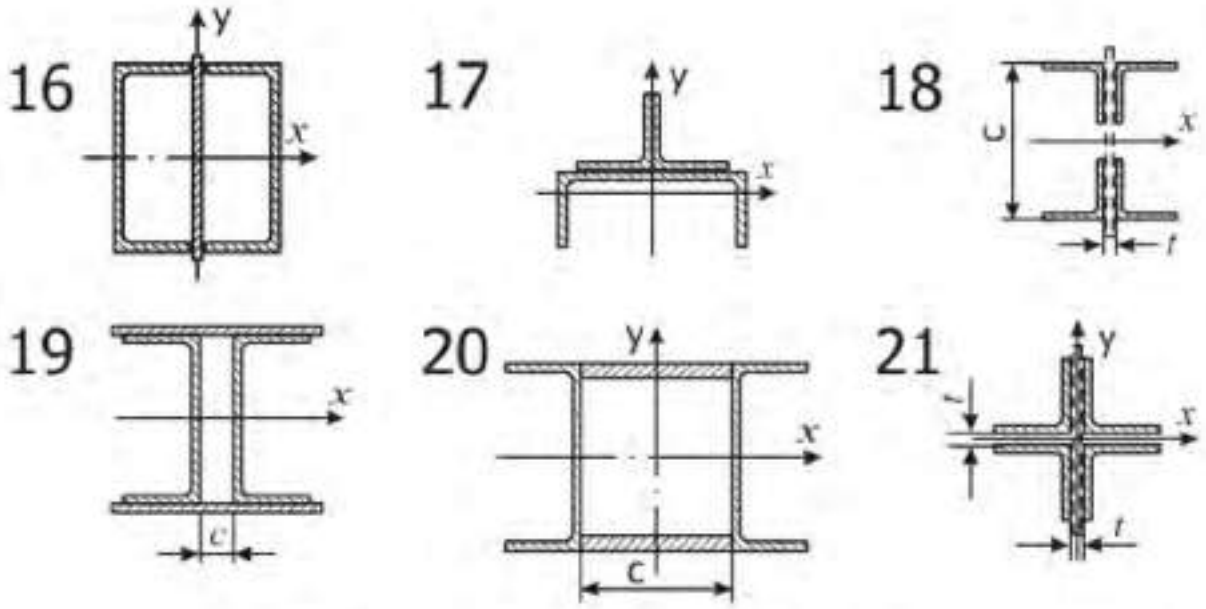


Рис. 5.2. Схемы поперечных сечений 16– 21

Исходные данные к задаче 5 Табл. 5.1

Схема 1			
Задание номер	1	22	43
Состав сечения	2 уголка 100x100x10 $t = 10$	2 уголка 80x80x8 $t = 8$	2 уголка 180x180x12 $t = 12$
Схема 1			
Задание номер	64	–	–
Состав сечения	2 уголка 125x125x10 Планка $t = 10$	–	–
Схема 2			
Задание номер	2	23	44
Состав сечения	2 уголка 100x100x10 2 листа 250x10	2 уголка 125x125x9 2 листа 200x8	2 уголка 180x180x12 2 листа 300x12
Схема 3			
Задание номер	3	24	45
Состав сечения	Швеллер № 18 Двутавр № 20	Швеллер № 14 Двутавр № 16	Швеллер № 24 Двутавр № 27
Схема 4			
Задание номер	4	25	46
Состав сечения	4 уголка 140x90x10 Лист 240x12	4 уголка 110x70x8 Лист 200x10	4 уголка 200x125x14 Лист 240x12
Схема 5			
Задание номер	5	26	47
Состав сечения	2 швеллера № 36 Двутавр № 16	2 швеллера № 30 Двутавр № 14	2 швеллера № 24 Двутавр № 12

Схема 6			
Задание номер	6	27	48
Состав сечения	2 швеллера № 33 Двутавр № 16	2 швеллера № 27 Двутавр № 14	2 швеллера № 22 Двутавр № 12

Продолжение табл. 5.1

Схема 6			
Задание номер	6	27	48
Состав сечения	2 швеллера № 33 Двутавр № 16	2 швеллера № 27 Двутавр № 14	2 швеллера № 22 Двутавр № 12
Схема 7			
Задание номер	7	28	49
Состав сечения	2 швеллера № 36 2 листа 300х12	2 швеллера № 30 2 листа 250х10	2 швеллера № 24 2 листа 200х8
Схема 8			
Задание номер	8	29	50
Состав сечения	2 двутавра № 36 2 листа 300х12 $c = 180$	2 двутавра № 30 2 листа 250х10 $c = 150$	2 двутавра № 24 2 листа 200х8 $c = 120$
Схема 9			
Задание номер	9	30	51
Состав сечения	4 уголка 50х50х5 2 листа 200х6 $c = 130$	4 уголка 90х90х8 2 листа 350х10 $c = 160$	4 уголка 125х125х10 2 листа 450х12 $c = 180$
Схема 10			
Задание номер	10	31	52
Состав сечения	4 уголка 70х70х6 4 листа 200х6	4 уголка 100х100х10 4 листа 250х10	4 уголка 125х125х12 4 листа 300х6
Схема 11			
Задание номер	11	32	53
Состав сечения	4 уголка 75х50х5 Лист 200х5	4 уголка 100х63х8 Лист 250х10	4 уголка 160х100х12 Лист 300х12
Схема 12			
Задание номер	12	33	54
Состав сечения	4 уголка 80х80х7 2 полки 250х10 Стенка 600х8	4 уголка 100х100х8 2 полки 300х12 Стенка 900х8	4 уголка 100х100х8 2 полки 350х12 Стенка 1200х10
Схема 13			
Задание номер	13	34	55
Состав сечения	2 уголка 80х80х7 Лист 220х8 $c = 40$	2 уголка 75х75х7 Лист 175х8 $c = 40$	2 уголка 125х125х10 Лист 320х12 $c = 50$
Схема 14			
Задание номер	14	35	56

Состав сечения	2 уголка 180x180x12 Планка t = 10	2 уголка 125x125x9 Планка t = 10	2 уголка 100x100x8 Планка t = 10
Схема 15			
Задание номер	15	36	57
Состав сечения	Швеллер № 14 Лист 150x5	Швеллер № 20 Лист 210x7	Швеллер № 33 Лист 340x8

Продолжение табл. 5.1

Схема 16			
Задание номер	16	37	58
Состав сечения	2 швеллера № 16 Лист 170x5	2 швеллера № 20 Лист 210x6	2 швеллера № 27 Лист 280x6
Схема 17			
Задание номер	17	38	59
Состав сечения	Швеллер № 12 2 уголка № 6,5	Швеллер № 18 2 уголка № 8	Швеллер № 27 2 уголка № 12,5
Схема 18			
Задание номер	18	39	60
Состав сечения	4 уголка 80x80x7 c =320; t = 8	4 уголка 110x110x8 c =650; t = 10	4 уголка 140x140x12 c = 950; t = 12
Схема 19			
Задание номер	19	40	61
Состав сечения	2 швеллера № 16 2 листа 80x8; c = 80	2 швеллера № 24 2 листа 120x10; c = 120	2 швеллера № 36 2 листа 160x10; c = 160
Схема 20			
Задание номер	20	41	62
Состав сечения	2 швеллера № 16 2 листа 80x8; c = 80	2 швеллера № 24 2 листа 120x10; c = 120	2 швеллера № 36 2 листа 160x10; c = 160
Схема 21			
Задание номер	21	42	63
Состав сечения	4 уголка 160x160x14 t = 12	4 уголка 63x63x5 t = 6	4 уголка 110x110x8 t = 10

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 5

Найти главные оси сечения, составленного из уголков стальных горячекатанных равнополочных 75 x 75 x 8 ГОСТ 8509 – 93 и двух уголков стальных горячекатанных неравнополочных 100 x 63 x 8 ГОСТ 8510 – 86

(рис. 5.2). Высота сечения $h = 300 = 30{,}0$ см. Толщина соединительной планки $\delta = 8 = 0{,}8$см. Вычислить относительно этих осей главные моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции.

Для работы составного сечения как жёсткого целого, уголки соединены планками, показанными на рис. 5.2 пунктиром. Расстояние между планками выбирается равным $40\, i_{min}$. При вычислении геометрических характеристик составного сечения соединительные планки не учитываются.

РЕШЕНИЕ

1.Вычерчиваем поперечное сечение в масштабе (рис. 5.3). Прокатные радиусы и сварные швы на рис. 5.2 не указываем.

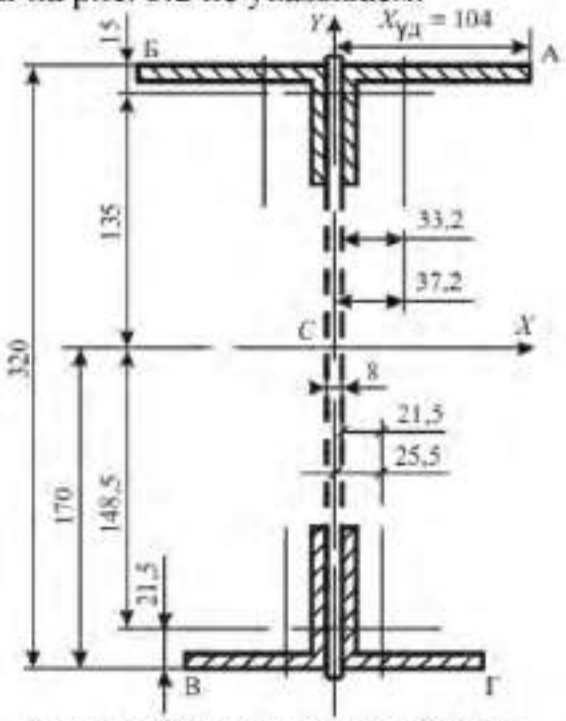


Рис. 5.3. Сечение составной балки

2. Приводим чертёжи прокатных профилей, взятые из ГОСТ 8509-93 «Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент» (рис. 5.4,а) и ГОСТ 8510-86 «Уголки стальные горячекатаные не равнополочные. Сортамент» (рис. 5.4,б).

На рис. 5.4 внесены следующие изменения по сравнению с чертежами ГОСТ: не указаны прокатные радиусы R и r уголков; главные оси равнополочного уголка обозначены u, v вместо x_0, y_0; размеры, оси, координаты центра масс, относящиеся к равнополочному уголку, помечены нижним индексом 1, а к неравнополочному уголку – нижним индексом 2, соответственно.

Выписываем из ГОСТ длины и толщины полок уголков. Размеры переводим из миллиметров в сантиметры.

Уголок равнополочный: ширина полки – $b_1 = 75$мм $= 7{,}5$см, толщина – $t_1 = 0{,}8$ см, расстояние от внешней грани полки до центра масс – $x_0 = 2{,}15$ см,

площадь – $F_1 = 11{,}50$ см^2, моменты инерции относительно центральных осей x_1 и y_1, параллельных полкам – $J_{x1} = 59{,}84$ см^4.

Уголок неравнополочный: ширина длинной полки – $B = 100 = 10$ см, ширина короткой полки – $b_2 = 63$ мм $= 6{,}3$ см, толщина полок – $t = 8$ мм $= 0{,}8$ см, расстояние от внешней грани длинной полки до центра масс – $x_0 = 1{,}50$ см, расстояние от внешней грани короткой полки до центра масс – $y_0 = 3{,}32$ см,площадь сечения – $F_2 = 12{,}57$ см^2, момент инерции сечения относительно оси x– $J_{x2} = 126{,}96$ см^4,момент инерции сечения относительно оси $J_{y2} = 39{,}21$ см^4.

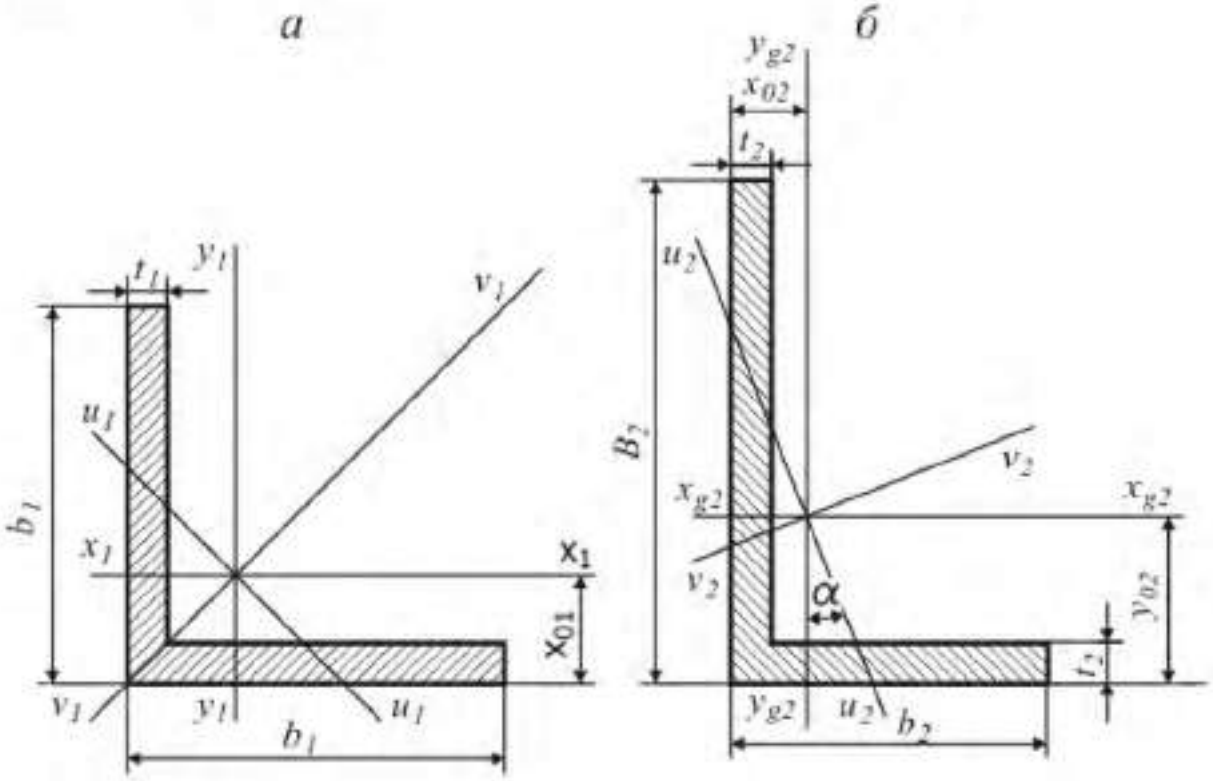


Рис. 5.4. Составные части поперечного сечения балки: а – равнополочный уголок ГОСТ 8509-93; б – неравнополочный уголок ГОСТ 8510-86.

В сопротивлении материалов расчёты выполняют с точностью 5%. Эту точность обеспечивают три первых значащих цифры. Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Отсчёт начинают с первой, отличной от нуля. Для J_{x2} достаточно принять $J_{x2} = 127$, но при оформлении расчётов величины нужно записывать так, как они заданы в официальных документах $J_{x2} = 126{,}96$.

3. Площадь поперечного сечения равна

$$F = k_1 F_1 + k_2 F_2 = 2 \cdot 11{,}50 + 2 \cdot 12{,}57 = 48{,}1 \text{ см}^2.$$

4. Ищем координаты центра масс сечения. Вертикальная ось CY является осью симметрии сечения. Любая ось симметрии сечения является его главной осью. Центр масс лежит на оси симметрии, следовательно, $X_c = 0$. Статический момент сечения относительно горизонтальной оси X_H, проходящей через нижнюю грань равнополочного уголка, равен

$$S_{XH} = k_1 \cdot F_1 \cdot x_{01} + k_2 \cdot F_2 \cdot (h - x_{02}) =$$
$$= 2 \cdot 11{,}50 \cdot 2{,}15 + 2 \cdot 12{,}57 \cdot (30 - 1{,}50) = 816 \text{ см}^3.$$

Расстояние от нижней грани равнополочного уголка до центра масс сечения равно $Y_c = S_{XH}/F = 816/48{,}1 = 17{,}0$ см. Центр масс сечения обозначаем буквой C и указываем на рис. 5.3.

5. Строим главные центральные оси сечения. Для этого, через точку C проводим ось CX, перпендикулярную оси CY. В качестве положительного на оси CX выберем направление слева направо, а на оси CY положительным будем считать направление снизу вверх. Оси CXY являются главными центральными осями сечения.

Расстояние от верхних граней неравнополочных уголков до оси CX равно $Y_в = h - Y_c = 30 - 17{,}0 = 13{,}0$ см. Крайние точки Л и П длинных полок неравнополочных уголков удалены от оси CY на расстояние $|X_л| = X_п = = \delta/2 + B = 0{,}8/2 + 10{,}0 = 10{,}4$ см.

Координаты центров масс уголков в системе осей CXY :

$$Y_1 = -Y_C + x_{01} = -17{,}0 + 2{,}15 = -14{,}8 \text{ см},$$

$$Y_2 = h - Y_C - x_{02} = 30{,}0 - 17{,}0 - 1{,}50 = 13{,}5 \text{ см},$$

$$X_1 = \delta/2 + x_{01} = 0{,}8/2 + 2{,}15 = 2{,}55 \text{ см},$$

$$X_2 = \delta/2 + x_{02} = 0{,}8/2 + 3{,}32 = 3{,}72 \text{см}.$$

6. Осевые моменты инерции сечения вычисляем по формуле Гюйгенса

$$J_X = \sum_{i=1}^{K} \left(J_{xi} + F_i \cdot a_i^2\right),$$

где K – количество элементов в сечении; J_{xi} – момент инерции относительно центральной оси элемента i, параллельной оси X; F_i – площадь элемента i; a_i – расстояние между осью X и параллельной ей центральной осью элемента i.

Учитываем, что неравнополочный уголок повёрнут относительно изображения, показанного на на рис. 5.4, на 90° (или 270°) относительно чертежа из ГОСТ. Параллельной для оси CX является местная центральная ось $\boldsymbol{y_2}$, а для оси CY параллельной будет местная центральная ось $\boldsymbol{x_2}$.
Получаем:

$$J_X = k_1 \cdot (J_{x1} + F_1 \cdot Y_1^2) + k_2 \cdot (J_{y2} + F_2 \cdot Y_2^2) = 2 \cdot (59{,}84 + 11{,}50 \cdot ((-14{,}8)^2) +$$

$$+2 \cdot (39{,}21 + 12{,}57 \cdot 13{,}5^2) = 9850 \text{ см}^4;$$

$$J_Y = k_1 \cdot (J_{y1} + F_1 X_1^2) + k_2 \cdot (J_{x2} + F_2 X_2^2) = 2 \cdot (59{,}84 + 11{,}50 \cdot 2{,}55^2) +$$

$$2 \cdot (126{,}96 + 12{,}57 \cdot 3{,}72\text{^}2) = 871 \text{ см}^4.$$

7. Ось $\boldsymbol{CY}$ является осью симметрии сечения. Осевой момент сопротивления для оси $\boldsymbol{CY}$ равен $\boldsymbol{W_Y = J_Y / X_{max} = 871/10{,}4 = 83{,}8}$ см^3.

Здесь $\boldsymbol{X_{max} = |X_л| = |X_л| = X_п = 10{,}4}$ см – расстояние до оси $\boldsymbol{CY}$ от крайних левых и правых волокон.

Главная ось $\boldsymbol{CX}$ не является осью симметрии. Момент сопротивления изгибу для нижних волокон $\boldsymbol{W_{Xн} = J/Y_н = 9850/17{,}0 = 581}$ см^3. Для верхних волокон получаем $\boldsymbol{W_{Xв} = J_X / Y_в = 9850/13{,}0 = 655}$ см^3.

8. Радиус инерции сечения относительно оси определяется по формуле

$$\boldsymbol{i = \sqrt{J/F}}.$$

Для заданного сечения получаем $\boldsymbol{i_X = \sqrt{J_X/F = \sqrt{9850/48{,}1 = 14{,}3}}}$ см,

$\boldsymbol{i_Y = \sqrt{J_Y/F = \sqrt{871/48{,}1 = 4{,}25}}}$ см.

Задача № 6. Расчёт статически неопределимых стержневых систем

Для заданной статически неопределимой системы определить допускаемое значение силы P при допускаемом напряжении для стальных стержней $[\sigma]=160$ МПа.

Плита BC схемы (рис.6.1) абсолютно жесткая.

На рисунке 6.1 изображена абсолютно жесткая балка BC, нагруженная посередине силой P. Балка удерживается в горизонтальном положении шарнирно – подвижной опорой C и тремя стальными стержнями. Заданы площади сечений стержней A_1= 4 см^2; A_2 = 3 см^2; A_3 = 2 см^2. Определить допускаемое значение силы P , если допускаемое напряжение для материала стержней, равное $[\sigma]$ = 160МПа , одинаково при растяжении и сжатии.

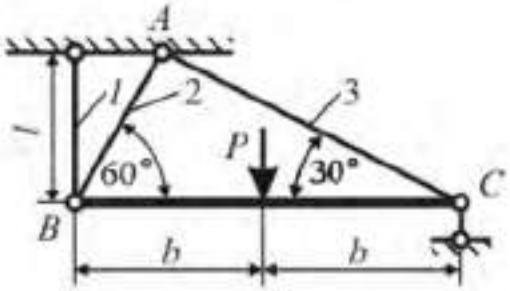


Рис.6.1. Статически неопределимая система

РЕШЕНИЕ

Допускаемая нагрузка (сила P) определяется по условию прочности наиболее напряженного стержня. Полагая значение силы P известным, найдем напряжения в сечениях стержней системы, выразив их через силу P. Исходные данные для решения задач приведены в табл.6.1 и рис.6.

Мысленно рассекаем стержни и, полагая стержни растянутыми, изображаем силы, приложенные к отсеченной части (рис. 1.5).

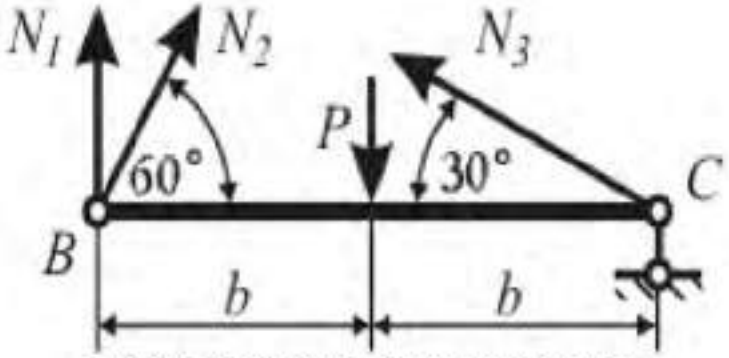


Рис.6.2. Уравновешенная система сил

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\Sigma X_i = 0; \quad N_2 \cos 60^\circ - N_3 \cos 30^\circ = 0. \\ &\Sigma Y_i = 0; \quad N_1 + N_2 \sin 60^\circ + N_3 \sin 30^\circ + Y_C - P = 0. \\ &\Sigma m_c = 0; \quad N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot 2a \sin 60^\circ - Pa = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Система (6.1) содержит 4 неизвестных величины: N_1, N_2, N_3 и Y_C. Лишь второе уравнение содержит реакцию опоры C, величина которой не влияет на значение допускаемой нагрузки, а потому ограничимся первым и третьим уравнениями.

Двух уравнений системы (6.1) недостаточно для определения трех продольных сил. Необходимо дополнить их уравнением совместности деформаций. По условию задачи брус BC является абсолютно жестким. Значит, перемещение системы осуществляется лишь за счет деформации стержней. Опора C допускает только горизонтальное смещение узла C. Следует учесть, что истинные перемещения точек B и C в сотни раз меньше размеров бруса BC. Поэтому перемещения точек стержней при их поворотах изображены не дугами окружностей, а прямыми отрезками, перпендикулярными стержням. Заметим, что стержень 3 по предположению растянут, но на рисунке изображено его укорочение, значит изображенная деформация его не Δl_3, а - Δl_3.

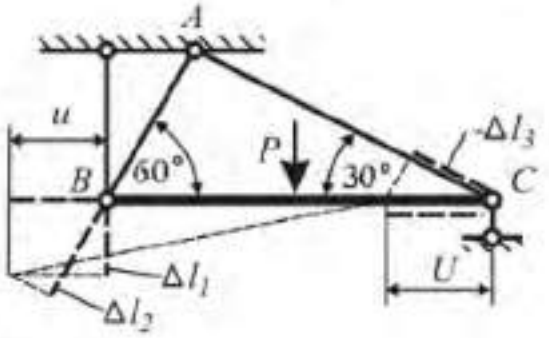


Рис.6.3. Деформации и перемещения

По рисунку 6.3

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos 30^\circ + u \cos 60^\circ .$$

При $u = -\Delta l_3 / \cos 30^\circ$ получаем геометрическую связь деформаций

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos 30^\circ - \Delta l_3 tg 30^\circ . \tag{6.2}$$

В соответствии с законом Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 l}{EA_1},$$
$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 l}{EA_2 \sin 60^\circ}, \qquad (6.3)$$
$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{N_3 l}{EA_3 \sin 30^\circ}.$$

Подстановкой выражений (6.3) в равенство (6.2) получим уравнение, дополняющее систему(6.1).

$$\frac{N_2 l}{EA_2 \sin 60^\circ} = \frac{N_1 l}{EA_1}\cos 30^\circ - \frac{N_3 l}{EA_3 \sin 30^\circ} tg30^\circ. \qquad (6.4)$$

После подстановки значений A_1, A_2, A_3и упрощения уравнений (6.1) и (6.3) получим систему

$$\begin{aligned} &N_2 - 1,732N_3 = 0; \\ &N_1 + 0,866N_2 = 0,5P; \\ &9N_1 - 16N_2 - 24N_3 = 0. \end{aligned} \qquad (6.5)$$

Решение уравнений (6.5)

$N_1 = 0,396P$, $N_2 = 0,119P$, $N_3 = 0,069P$.

При заданных сечениях стержней

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,396P}{4} = 0,0991P;$$
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,119P}{3} = 0,0398P;$$
$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0,069P}{2} = 0,0395P.$$

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 0,0991P.$$

По условию прочности $\sigma_{max} \le [\sigma]$ допускаемая нагрузка

$$[P] = \frac{[\sigma]}{0,0991} = \frac{16}{0,0991} = 161 \text{ кН}.$$

$$[P] = 161 \text{ кН}.$$

Исходные данные сведены в табл. 6.1, расчетные схемы даны на рис.6.4.

Таблица 6.1.

Исходные данные для задачи №6

№	Площадь сечения стержней, см^2			Номер схемы	№	Площадь сечения стержней, см^2			Номер схемы
	A_1	A_2	A_3			A_1	A_2	A_3	
1	2	3	4	1	26	4	2	1	6
2	3	4	2	2	27	6	3	2	5
3	5	6	7	3	28	8	4	3	4
4	6	7	5	4	29	10	5	4	3
5	3	17	1	5	30	1	6	5	2
6	4	1	2	6	31	2	7	6	1
7	5	6	3	7	32	12	8	7	2
8	6	15	4	8	33	14	9	8	4
9	7	15	5	9	34	16	16	9	6
10	8	14	6	10	35	3	16	10	8
11	9	13	7	2	36	5	15	11	10
12	10	12	8	4	37	7	14	12	9
13	11	8	9	6	38	9	13	13	7
14	12	9	10	8	39	11	12	14	5
15	13	7	11	10	40	13	11	15	3
16	14	6	12	1	41	15	10	16	1
17	15	5	13	3	42	7	9	14	10
18	16	4	17	5	43	5	8	13	9
19	3	12	16	7	44	3	7	12	8
20	4	11	15	9	45	1	6	11	7
21	5	12	14	10	46	2	5	10	6
22	6	13	13	9	46	6	4	9	5
23	6	14	12	8	48	8	3	8	4
24	7	15	11	7	49	4	2	7	3
25	9	12	10	3	50	4	25	11	6

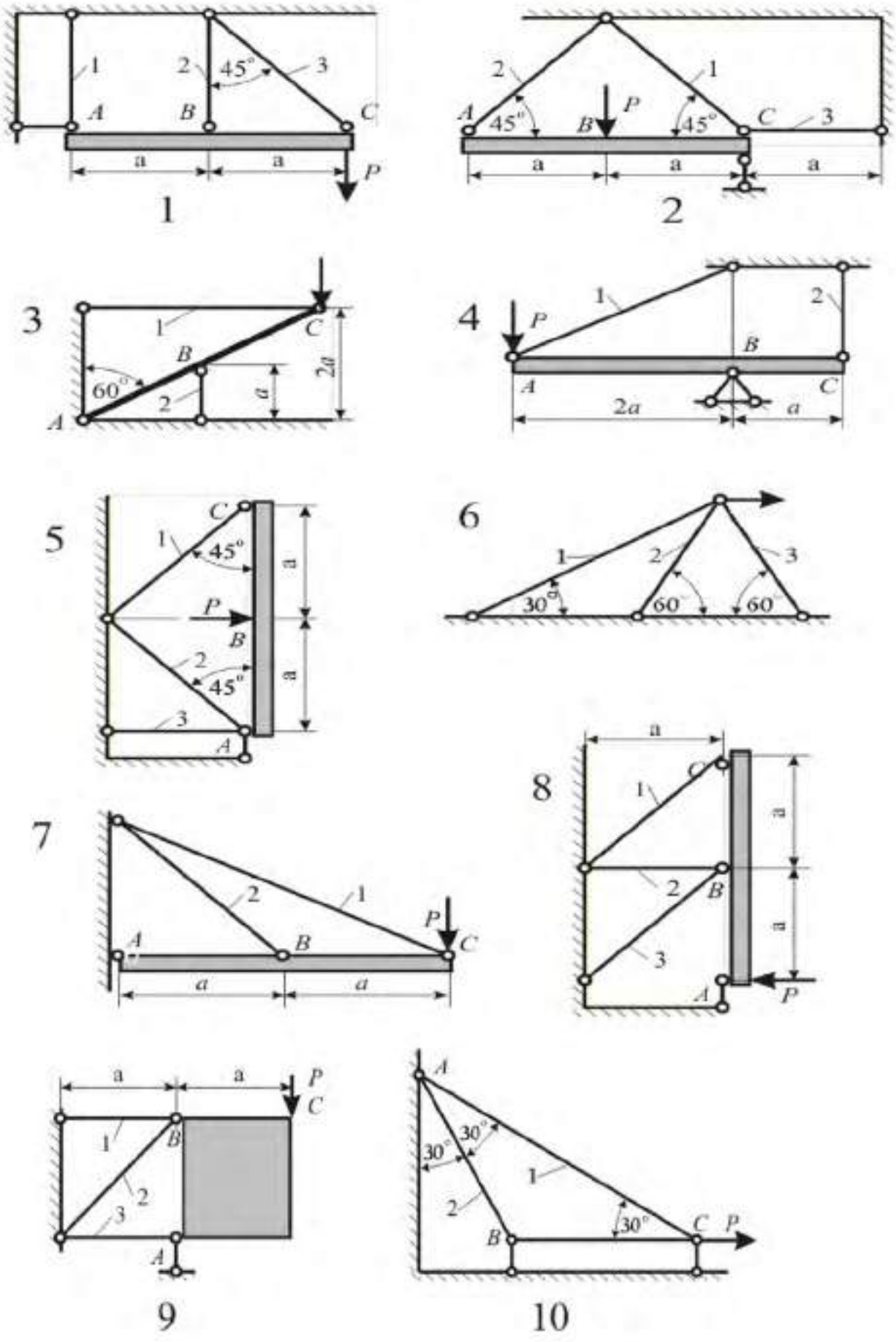


Рис.6.4. Схемы 1 – 10 стержневых систем

Задача № 7.Расчет статически неопределимых балок

Подобрать из условия прочности сечение многопролётной неразрезной балки (рис. 7.1 – 7.4). Сечение – двутавр ГОСТ 8239-89. Допускаемые напряжения стали σ = 200 [МПа]. Данные для расчёта взять из табл. 7.

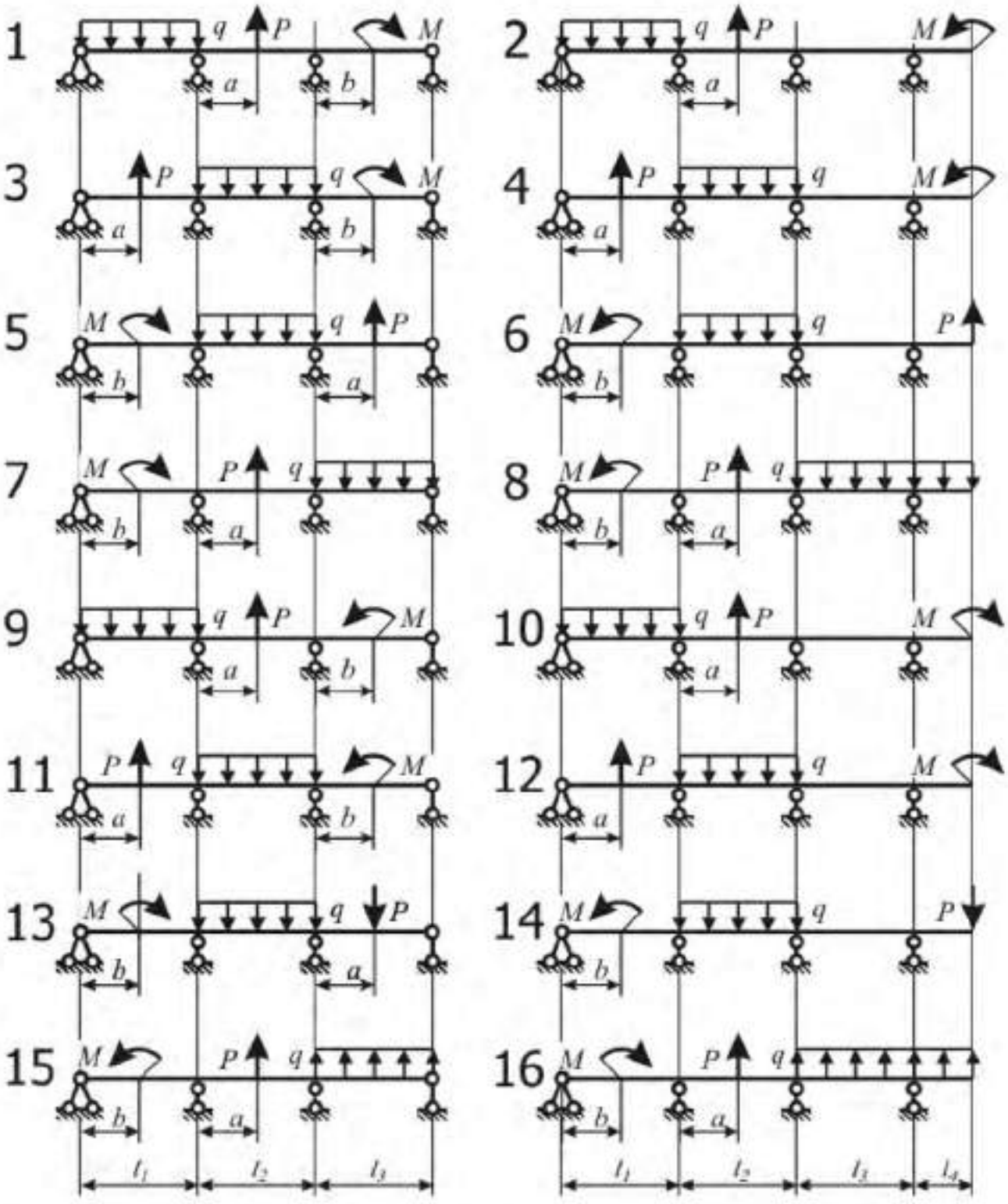


Рис. 7.1. Многопролётная неразрезная балка (варианты 1 – 16)

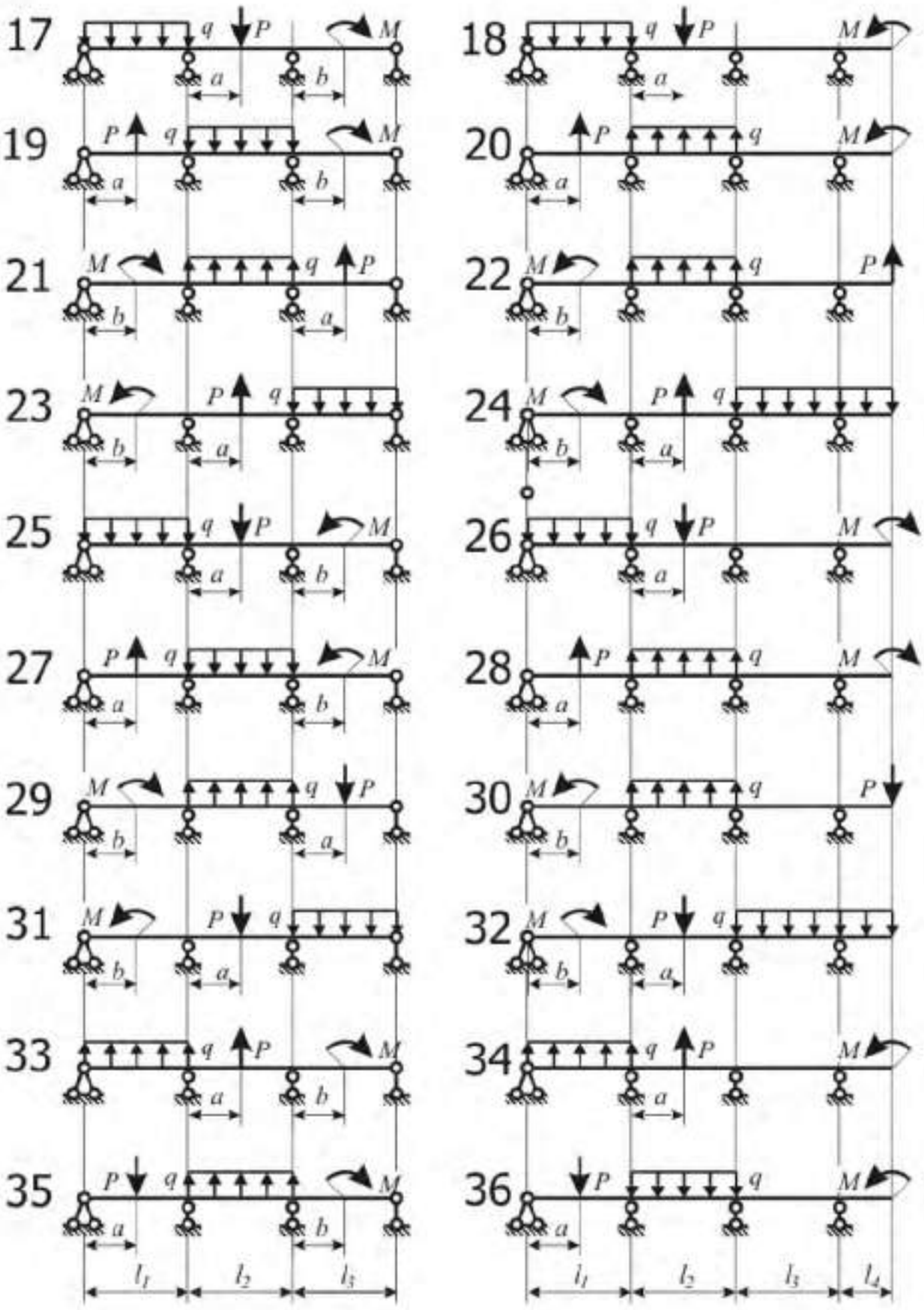


Рис. 7.2. Многопролётная неразрезная балка (варианты 17 – 36)

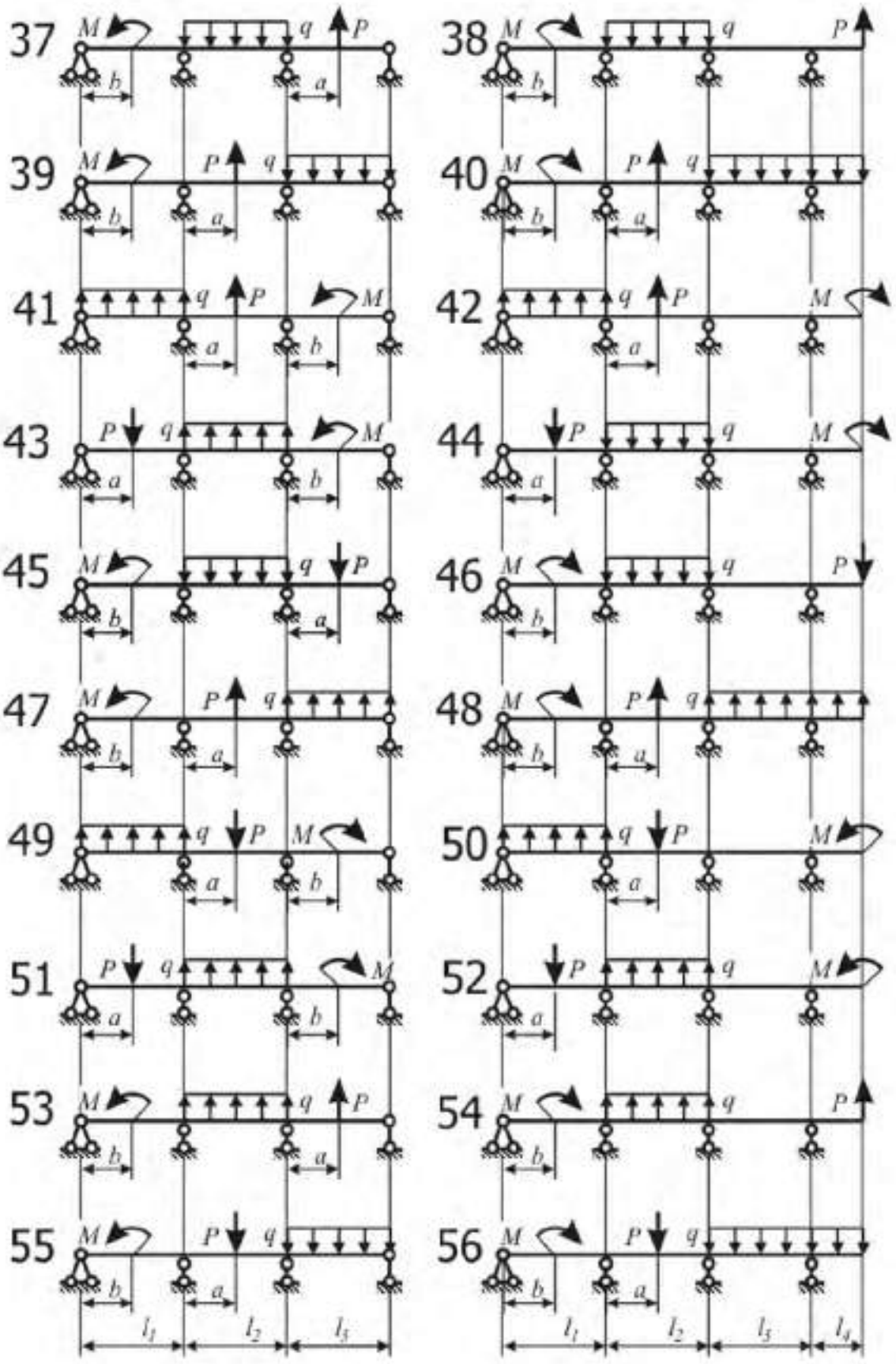


Рис. 7.3. Многопролётная неразрезная балка (варианты 37 – 56)

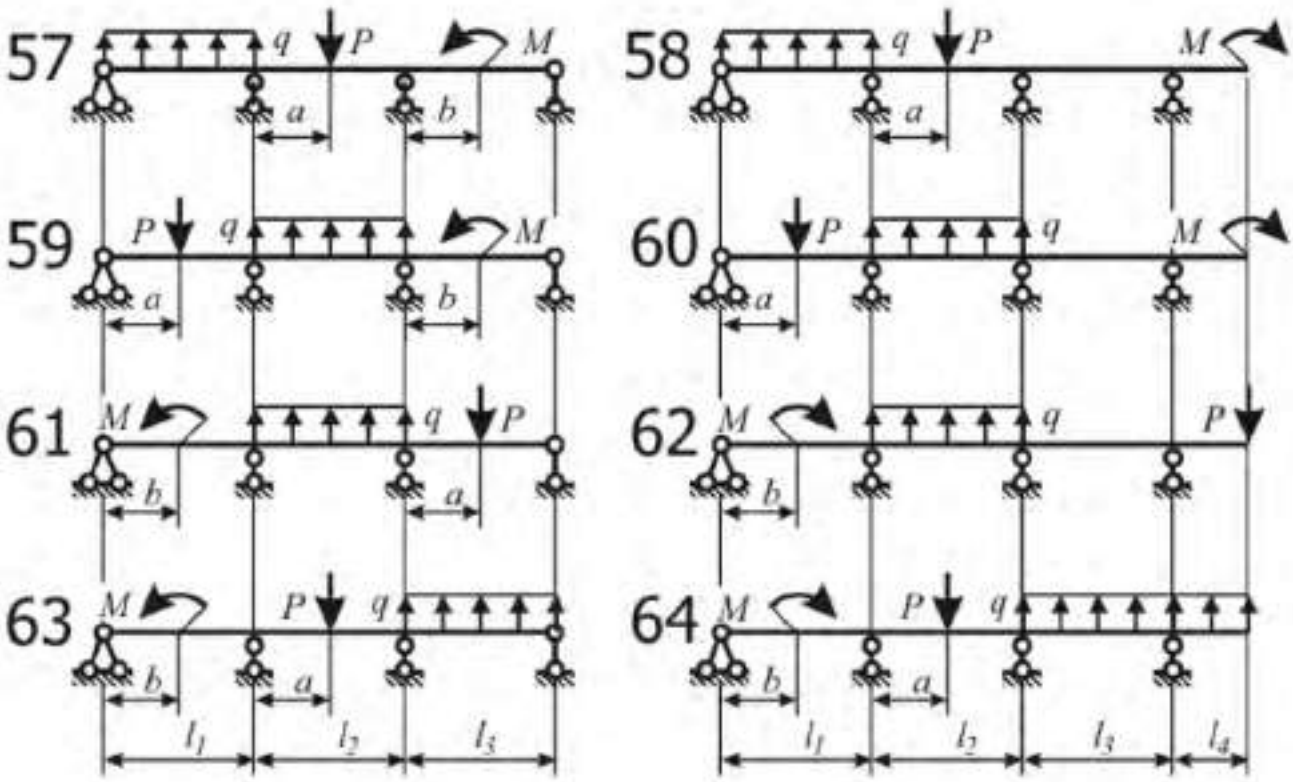


Рис. 7.4. Многопролётная неразрезная балка (варианты 57 – 64)

Исходные данные к задаче 7 Таблица 7

Номер задания	Длина участка, м				Нагрузка			Координата точки приложения, м	
	l_1	l_2	l_3	l_4	P, кН	M, кН·м	q, Н/м	силы, a	момента, b
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4,0	5,0	3,0	–	80	165	20	3,0	2,0
2	3,5	5,5	3,5	1,5	90	175	25	2,0	–
3	3,0	6,0	4,0	–	90	185	30	1,5	2,0
4	3,0	6,0	4,5	2,0	80	195	35	2,0	–
5	3,5	5,5	5,0	–	70	105	30	2,0	1,5
6	4,0	5,0	5,5	2,5	60	115	30	–	2,0
7	4,5	4,5	6,0	–	50	125	25	3,0	2,5
8	5,0	4,0	6,0	3,0	40	135	25	2,5	3,0
9	5,5	3,5	5,5	–	40	145	20	2,0	2,5
10	6,0	3,5	5,0	3,0	59	155	20	1,5	–
11	6,0	4,0	4,5	–	60	165	25	4,0	3,0
12	5,5	4,5	4,0	2,5	70	175	20	3,5	–
13	5,0	5,0	3,5	–	80	185	35	1,5	3,5
14	4,5	5,5	3,0	2,0	90	195	35	–	1,5
15	4,0	6,0	3,0	–	90	105	15	4,0	2,0
16	3,5	6,0	3,5	1,5	80	115	20	3,5	1,5
17	3,5	5,5	4,0	–	70	125	25	3,0	1,5
18	4,0	5,0	4,5	1,5	60	135	30	2,5	–
19	4,5	4,5	5,0	–	50	145	35	3,0	2,0

Продолжение табл. 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	5,0	4,0	5,5	2,0	40	155	35	2,0	–
21	5,5	3,5	6,0	–	40	165	30	3,5	4,5
22	6,0	3,5	6,0	2,5	59	175	25	–	4,0
23	6,0	4,0	5,5	–	60	185	20	3,0	3,5
24	5,5	4,5	5,0	3,0	70	195	15	2,5	3,0
25	5,0	5,0	4,5	–	80	105	15	2,0	2,5
26	4,5	5,5	4,0	3,0	90	115	20	1,5	–
27	4,0	6,0	3,5	–	90	125	25	1,5	2,0
28	3,5	6,0	3,0	2,5	80	135	30	2,0	–
29	3,5	5,5	3,0	–	70	145	35	1,5	2,5
30	4,0	5,0	3,5	2,0	60	155	35	–	2,0
31	4,5	4,5	4,0	–	50	165	30	3,0	1,5
32	5,0	4,0	4,5	1,5	40	175	25	2,5	3,5
33	5,5	3,5	5,0	–	40	185	20	2,0	3,5
34	6,0	3,5	5,5	1,5	59	195	15	1,5	–
35	6,0	4,0	6,0	–	60	105	15	4,5	4,0
36	5,5	4,5	6,0	2,0	70	115	20	4,0	–
37	5,0	5,0	5,5	–	80	125	25	3,0	2,5
38	4,5	5,5	5,0	2,5	90	135	30	–	2,0
39	4,0	6,0	4,5	–	90	145	35	4,5	1,5
40	3,5	6,0	4,0	3,0	80	155	35	4,0	2,0
41	3,5	5,5	3,5	–	70	165	30	3,5	1,5
42	4,0	5,0	3,0	3,0	60	175	25	3,0	–
43	4,5	4,5	3,0	–	50	185	20	3,5	2,0
44	5,0	4,0	3,5	2,5	40	195	15	3,0	–
45	5,5	3,5	4,0	–	40	105	15	2,5	3,0
46	6,0	3,5	4,5	2,0	59	115	20	–	2,5
47	6,0	4,0	5,0	–	60	125	25	2,5	2,0
48	5,5	4,5	5,5	1,5	70	135	30	2,0	1,5
49	5,0	5,0	6,0	–	80	145	35	1,5	2,5
50	4,5	5,5	6,0	1,5	90	155	35	4,0	–
51	4,0	6,0	5,5	–	90	165	30	2,5	3,0
52	3,5	6,0	5,0	2,0	80	175	25	2,0	–
53	3,5	5,5	4,5	–	70	185	20	2,0	3,5
54	4,0	5,0	4,0	2,5	60	195	15	–	3,0
55	4,5	4,5	3,5	–	50	105	15	3,5	2,5
56	5,0	4,0	3,0	3,0	40	115	20	3,0	2,0
57	5,5	3,5	3,0	–	40	125	25	2,5	1,5
58	6,0	3,5	3,5	3,0	59	135	30	2,0	–
59	6,0	4,0	4,0	–	60	145	35	1,5	2,0
60	5,5	4,5	4,5	2,5	70	155	35	4,5	–
61	5,0	5,0	5,0	–	80	165	30	1,5	3,0
62	4,5	5,5	5,0	2,0	90	175	25	–	2,5
63	4,0	6,0	5,5	–	90	185	20	4,5	2,0
64	3,5	6,0	6,0	1,5	80	195	15	4,0	1,5

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 7

Раскрыть статическую неопределимость неразрезной трёхпролётной балки (рис. 7.5). Нагрузки и длину пролёта принять равными: $P = 20$ кН; $M = 20{,}0$ кНм; $q = 10{,}0$кН/м; $L = 2{,}00$ м. Построить эпюры внутренних силовых факторов.

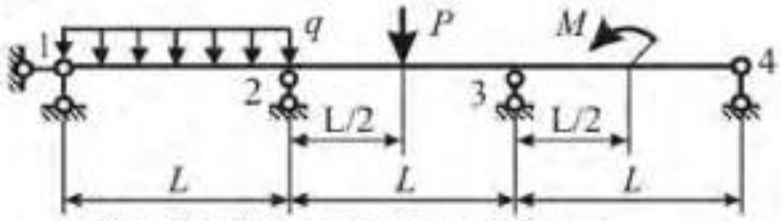


Рис. 7.5. Схема неразрезной балки

1. Чертим схему балки в масштабе (рис. 7.6, а). Нумеруем опорные узлы. Шарнирно неподвижную опору 1 изображаем в виде горизонтального и вертикального опорных стержней (1в) и (1г).

2. Находим степень статической неопределимости $N_{нс}$ балки. Для этого определяем число опорных стержней $N_{ст} = 5$ (два опорных стержня в шарнирно неподвижной опоре 1 и по одному в шарнирно подвижных опорах 2, 3, 4). Из числа опорных стержней вычитаем число уравнений статики $N_{ур}$ (три – в рассматриваемом случае плоского изгиба балки).

Получаем $N_{нс} = N_{ст} - N_{ур} = 5 - 3 = 2$.

Балка дважды статически неопределима.

3. Выбираем основную систему. Основная система должна быть статически определимой и неизменяемой. Чтобы балка (см. рис. 7.6, а) стала статически определимой, отбросим два любых вертикальных опорных стержня. Например, при удалении стержней 3 и 4 получаем основную систему, показанную на рис. 7.6, б. Если отбросить стержни 1в и 4, то основная система, примет вид, данный на рис. 7.6, в. Горизонтальный стержень 1г отбрасывать нельзя, так как при его удалении система становится изменяемой (рис. 7.6, г). Степень статической неопределимости системы можно понизить путём отбрасывания внутренних связей.

Выберем основную систему, указанную на рис. 7.6, б.

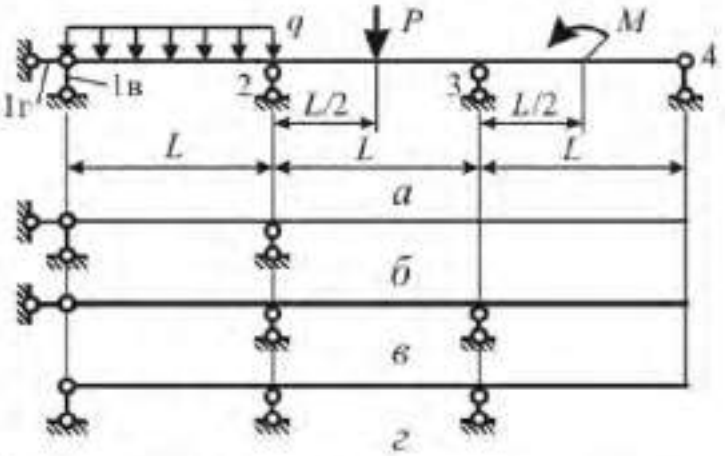


Рис. 7.6. К выбору основной системы

4. Эквивалентной системой называют основную систему, к которой приложены внешние нагрузки и неизвестные реакции отброшенных связей. Прикладываем неизвестные реакции X_1, X_2 в точках крепления отброшенных опорных стержней 4 и 3. Линии действия этих реакций совпадают с осями отброшенных стержней, направление реакций вдоль их линий действия выбираем произвольно. Если выбранное направление реакции не совпадёт с истинным, то полученное при раскрытии статической неопределимости значение избыточного неизвестного будет отрицательным. Эквивалентная система приведена на рис. 7.7.

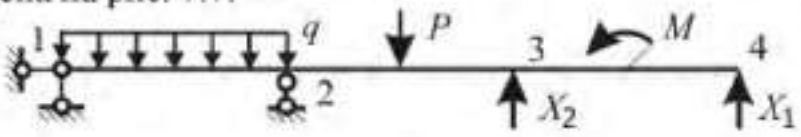


Рис. 7.7. Эквивалентная система

5. Идея раскрытия статической неопределимости методом сил состоит в следующем. Эквивалентная система деформируется так же, как исходная. Так как опорные стержни 3 и 4 являются абсолютно жёсткими, вертикальные перемещения точек 3 и 4 равны нулю. К уравнениям равновесия добавлены два дополнительных уравнения, из которых можно определить избыточные неизвестные X_1, X_2 (чаще их называют «лишними»).

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0, \\ y_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (7.1)$$

Используя принцип независимости действия сил, представим перемещение каждой точки как сумму трёх перемещений: от силы X_1, от силы X_2 и от внешней нагрузки. Система уравнений примет вид (7.5). Первый индекс указывает номер отброшенной связи, второй индекс указывает причину, вызывающую смещение в направлении этой связи.

$$\left.\begin{array}{l} y_{11} + y_{12} + y_{1z} = 0, \\ y_{21} + y_{22} + y_{2z} = 0 \end{array}\right\}. \qquad (7.2)$$

Перемещение y_{iz} по направлению отброшенной связи i, вызванное действующей на эквивалентную систему внешней нагрузкой, называют грузовым членом канонического уравнения и обозначают заглавной греческой буквой «дельта» $\Delta_i = y_{iz}$. Его определяют с помощью интеграла перемещений

$$\Delta_i = \int_0^{3L} ((M_z(z)\overline{M_i}(z))/(EJ))dz, \qquad (7.3)$$

Где: 3L – длина балки; $M_z(z)$ – грузовой момент в балке (момент от внешней нагрузки); $\overline{M_i}(z)$ – единичный момент (момент от единичной силы, совпадающей по направлению с силой X_i и приложенной в той же точке i); $EJ(z)$ – изгибная жёсткость балки.

6. Строим эпюру грузового момента в порядке, изложенном при рассмотрении задачи 3.

6.1. Отбрасываем опорные стержни, их действие заменяем опорными реакциями R_{1z} и R_{2z}. Здесь и далее первый индекс указывает точку, в которой

приложена реакция, второй индекс указывает причину, вызвавшую реакцию. Выбранное направление реакций указано на рис. 7.8, б. Сумма проекций внешних нагрузок на горизонтальную ось Ozравна нулю. Следовательно горизонтальная реакция на опоре 1 (в стержне 1г) равна нулю и поэтому на рис. 7.8, б не указана.

6.2. Составляем уравнения равновесия моментов относительно опорных точек 1 и 2 (при таком выборе центров моментов система двух уравнений равновесия расщепляется на два независимых уравнения)

$$\left.\begin{aligned} L\,R_{2z} - (qL^2)/2 - 1{,}5\,LP + M = 0, \\ -L\,R_{1z} + (qL^2)/2 - 0{,}5\,LP + M = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (7.4)$$

6.3. Решаем систему

$$\left.\begin{aligned} R_{1z} = ((qL^2)/2 - 0{,}5\,LP + M)/L = 10\ кН, \\ R_{2z} = ((qL^2)/2 + 1{,}5\,LP - M)/L = 30\ кН \end{aligned}\right\}. \qquad (7.5)$$

6.4. Для проверки составляем уравнение моментов относительно точки Щ (середины пролёта 1-2)

$$-0{,}5\,L\,R_{1z} + 0{,}5\,L\,R_{2z} - L\,P + M = 0. \qquad (7.6)$$

$$-0{,}5 \cdot 2 \cdot 20 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 30 - 2 \cdot 20 + 20 = 0.$$

6.5. Запишем аналитическое выражение для эпюры грузового момента. Ось балки обозначим Oz и направим слева направо. Начало координат z выберем в самой левой точке балки (опоре 1).

$$M_z(z) = R_{1z}z - (qz^2)/2 + (R_{2z}(z-l) + q(z-l)^2/2)\,H(z-l) -$$

$$-P \cdot \left(z - {}^3/_2\,l\right) H\left(z - {}^3/_2\,l\right) - MH(z - {}^5/_2\,l). \qquad (7.7)$$

Эпюра грузового момента может быть построена как методом сечений, так и путём вычислений по формуле (7.7). Эпюра грузового момента представлена на рис. 7.8, в.

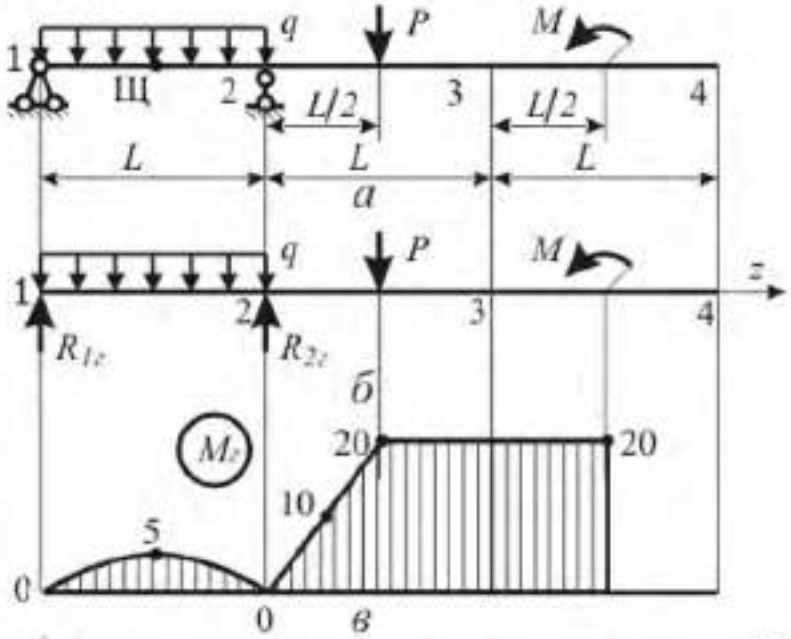


Рис. 7.8. К построению эпюры грузового момента M_z

7. Строим эпюру изгибающего момента от единичной силы, которая приложена в точке 4 и совпадает по направлению с избыточной неизвестной X_1 (полагаем неизвестную $X_1 = 1$). Момент от действия неизвестной $X_1 = 1$ называют единичным и выделяют надчёркиванием символа M. Построение эпюр изгибающих моментов рассмотрено в п. 6, а также в задаче 3. В случае консольной балки, нагруженной только на консоли, эпюру моментов можно построить без определения опорных реакций, Моменты на опоре 1 и в точке нагружения 4 (в которой к консоли приложена сила X_1) равны нулю: $\overline{M_1}(z_1) = 0$, $\overline{M_1}(z_4) = 0$. Момент силы $X_1 = 1$ на опоре 2 равен $\overline{M_1}(z_2) = 2 \cdot L = 2 \cdot 2 = 4$ Н·м.

Проводим ось Oz. На вертикали 2 откладываем вверх (в выбранном масштабе) отрезок, равный значению $\overline{M_1}(z_2)$. Верхнюю точку отложенного отрезка соединяем прямыми с нулями точек 1 и 4 (рис. 7.9, в).

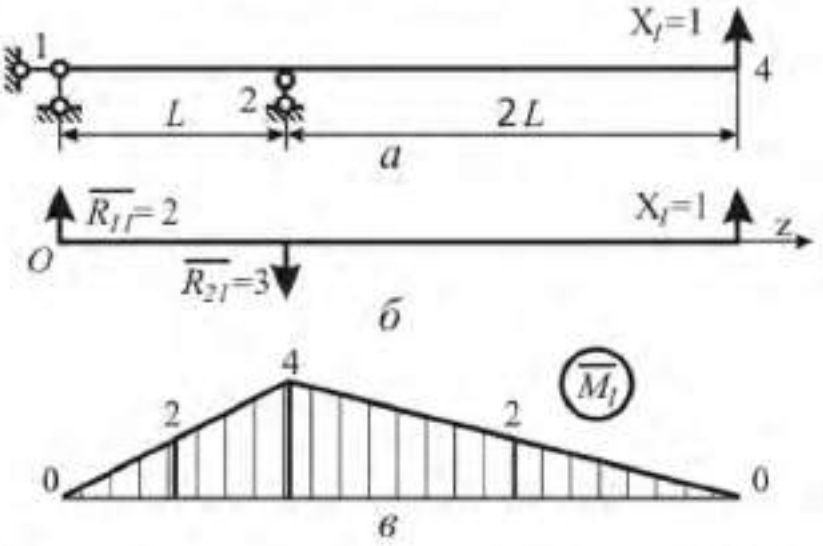


Рис. 7.9. К построению единичного момента $\overline{M_1}$

Аналитическое выражение для единичного момента запишем в виде

$$\overline{M_1(z)} = \overline{R_{11}}\, z - \overline{R_{21}}(z - L)\, H(z - L), \qquad (7.8)$$

где начало координат для оси Oz взято в левом сечении балки (на опоре 1); реакции опор $\overline{R_{11}}$ и $\overline{R_{21}}$ от единичной силы $X_1 = 1$ найдены из уравнений равновесия моментов относительно опорных точек 2 и 1

$$\left.\begin{aligned} -L\,\overline{R_{11}} + 2\,L\,X_1 &= 0, \\ -L\,\overline{R_{21}} + 3\,l\,X_1 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Получаем $\overline{R_{11}} = 2$ и $\overline{R_{21}} = 3$. Направления реакций указаны на рис. 7.9, б.

8. Построение эпюры единичного момента $\overline{M_2}$ от единичной силы, приложенной в точке 3 и совпадающей по направлению с избыточной неизвестной X_2 ($X_2 = 1$), схоже с построением $\overline{M_1}$ (см. рис. 7.9).

Моменты на опоре 1 и в точке 3 равны нулю: $\overline{M_2}(z_1) = \overline{M_2}(z_3) = 0$. Момент на опоре 2 от силы $X_2 = 1$ равен $\overline{M_2}(z_2) = 1 \cdot L = 2$. Проводим ось Oz. На вертикали 2 откладываем вверх (в выбранном масштабе) отрезок, равный

значению $\overline{M_2}(z_2)$. Верхнюю точку отложенного отрезка соединяем прямыми с нулями точек 1 и 3. Справа от точки 3 нагрузки отсутствуют, поэтому $\overline{M_2} \equiv 0$ на участке 3 - 4 (рис. 7.10, в).

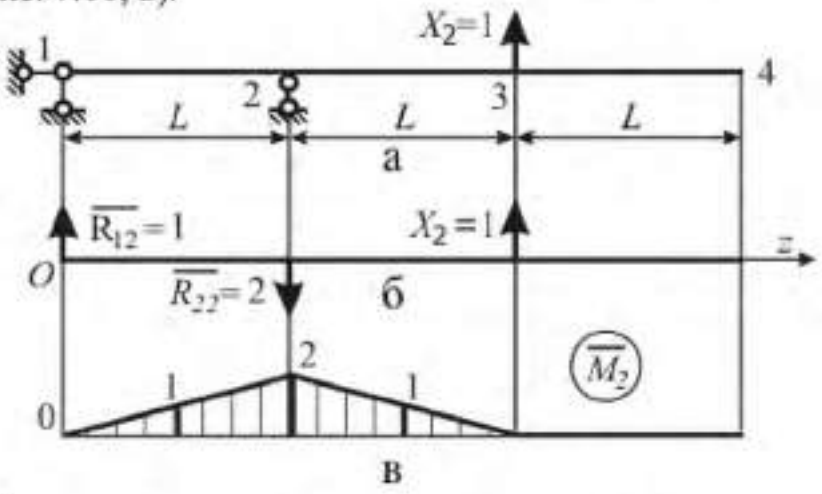


Рис. 7.10. К построению эпюры $\overline{M_2}$

Аналитическое выражение для единичного момента запишем в виде

$$\overline{M_2(z)} = \overline{R_{12}}\, z - \overline{R_{22}}(z - L)\, H(z - L) + 1 \cdot (z - 2L)\, H(z - 2L), \quad (7.9)$$

где начало координат для оси Oz взято в левом сечении балки (на опоре 1); реакции опор $\overline{R_{12}}$ и $\overline{R_{22}}$ от единичной силы $X_1 = 1$ найдены из уравнений равновесия моментов относительно опорных точек 2 и 1

$$\left.\begin{aligned} -L\,\overline{R_{12}} + L\,X_2 &= 0, \\ -L\,\overline{R_{22}} + 2L\,X_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Получаем $\overline{R_{12}} = 1$ и $\overline{R_{22}} = 2$. Направления реакций указаны на рис. 7.10, б.

9. Перемещение эквивалентной системы в направлении избыточного неизвестного X_1; под действием внешней нагрузки (грузовой член Δ_i системы уравнений метода сил) вычисляем по формуле (7.6), в которую подставлены выражения моментов (7.8),(7.9),(7.12). В результате вычислений получаем

$$\Delta_1 = \int_0^{3L} M_z(z) \cdot \overline{M_1}(z)/(EJ) \cdot dz = 127/(EJ);$$

$$\Delta_2 = \int_0^{3L} M_z(z) \cdot \overline{M_2}(z)/(EJ) \cdot dz = 30.0/EJ.$$

Расчёты проведены с использованием системы аналитических вычислений «Математика 5». Отметим, что подобные вычисления могут быть сделаны с использованием других систем символьной математики (MATHCAD, MAPLE).

Вычислим грузовые коэффициенты применяя формулу Симпсона. Получаем

$$\Delta_1 = 2/(6EJ)(0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 0) + 1/(6EJ)(4 \cdot 0 + 4 \cdot 3{,}5 \cdot 10 + 3 \cdot 20) +$$
$$+ 2/(6EJ)(3 \cdot 20 + 4 \cdot 2 \cdot 20 + 1 \cdot 20) + 1/(6EJ)(2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) =$$
$$= 127/EJ.$$

$$\Delta_2 = 2/(6EJ)(0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0) + 1/(6EJ)(2 \cdot 0 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 10 + 1 \cdot 20) +$$
$$+ 1/(6EJ)(1 \cdot 20 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 20 + 0 \cdot 20) = 30{,}0/EJ.$$

10. При определении перемещения y_{ij} эквивалентной системы в направлении избыточного неизвестного X_{1i} под действием избыточного неизвестного X_{1j} интеграл перемещений примет вид

$$y_{ij} = X_j \int_0^{3L} \overline{M_i}(z)\,\overline{M_j}(z)/(EJ)\,. \qquad (7.10)$$

Здесь используется принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции). Изгибающий момент от избыточного неизвестного X_j представлен как произведение модуля этого неизвестного на момент от единичной силы, приложенной в точке jи действующей по направлению силы X_j.

Интеграл в формуле (7.10) называют коэффициентом при неизвестном системы канонических уравнений метода сил и обозначают δ_{ij}. Из свойств определённого интеграла вытекают следующие свойства матрицы коэффициентов при неизвестных системы канонических уравнений метода сил: матрица коэффициентов при неизвестных симметрична

$$\delta_{ij} = \delta_{ji};$$

диагональные члены матрицы коэффициентов при неизвестных положительны $\delta_{ii} > 0$.

Канонические уравнения метода сил примут вид с учётом принятых обозначений:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_1 = 0,\\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.11)$$

Коэффициенты при неизвестных вычислены по формуле Симпсона

$$\delta_{11} = L/(6EJ)(0 + 4\cdot 2^2 + 4^2) + 2\,L/(6EJ)(0 + 4\cdot 2^2 + 4^2) = 32/(EJ);$$

$$\delta_{22} = 2\cdot 2/(6EJ)\,(0 + 4\cdot 1 + 2^2)/(6EJ) = 5{,}33/(EJ);$$

$$\delta_{12} = 2/(6EJ)(0 + 4\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 2) + 2/(6EJ)(4\cdot 2 + 4\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 0) = 12/EJ\,.$$

11. Система канонических уравнений метода сил

$$\left.\begin{aligned} 32{,}0\,X_1 + 12{,}0\,X_2 + 127 = 0\,,\\ 12{,}0\,X_1 + 5{,}33\,X_2 + 30{,}0 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Корни этой системы равны $X_1 = -11{,}8$, $X_1 = 21{,}0$. Избыточное неизвестное X_1 отрицательно, следовательное его направление и направление реакций $\overline{R_{11}}$и $\overline{R_{21}}$ обратно принятому на рис. 7.10, б.

12. Определяем опорные реакции. В соответствии с направлениями реакций (рис. 7.19, б – 7.10, б) получаем

$$R_1 = R_{1z} + X_1\overline{R_{11}} + X_2\overline{R_{12}} = 10{,}0 - 11{,}8\cdot 2 + 21{,}0\cdot 3 = 7{,}33;$$

$$R_2 = R_{2z} - X_1\overline{R_{21}} - X_2\overline{R_{22}} = 30 - (-11{,}8)\cdot 1 - 21{,}0\cdot 2 = 23{,}5.$$

Строим истинную эпюру поперечной силы Q (рис. 7.11, ж).

13. Истинную эпюру изгибающих моментов, в неразрезной балке находим по формуле

$$M(z) = M_z(z) + X_1\overline{M_1}(z) + X_2\overline{M_2(z)}\,.$$

Эпюра изгибающего момента дана на рис. 7.11, з.

14. Выбор двутавра из условия прочности $\sigma_m = M_m/W \le [\sigma]$. Здесь: $M_m = 11{,}8$ [кН·м] $= 11{,}8\cdot 10^3$ [Н·м] – наибольший по модулю изгибающий

момент в балке (найденный в п. 3); $[\sigma] = 200$ [МПа] $= 2 \cdot 10^8$ [Н/м^2] – допускаемые напряжения.

Требуемый по условию прочности момент сопротивления изгибу $W = M_m/[\sigma] = 11{,}8 \cdot 10^3/2 \cdot 10^8 = 5{,}9 \cdot 10^{-5}$[м^3]$= 59$[см^3]. В ГОСТ 8239-89 находим двутавр с ближайшим большим моментом сопротивления изгибу: двутавр № 14, $W_x = 81{,}7{,}0$ [см^3]. Его момент инерции $J_x = 572$ [см^4].

15. Находим максимальные напряжения изгиба

$$\sigma_{max} = M_{max}/W_x = 11{,}8 \cdot 10^3/81{,}7 \cdot 10^{-6} = 1{,}45 \cdot 10^8 \text{ [Н/м}^2\text{]}.$$

Определяем коэффициент запаса прочности по допускаемым напряжениям $k_{[\sigma]} = [\sigma]/\sigma_{max} = 2 \cdot 10^8/1{,}45 \cdot 10^8 = 1{,}38$.

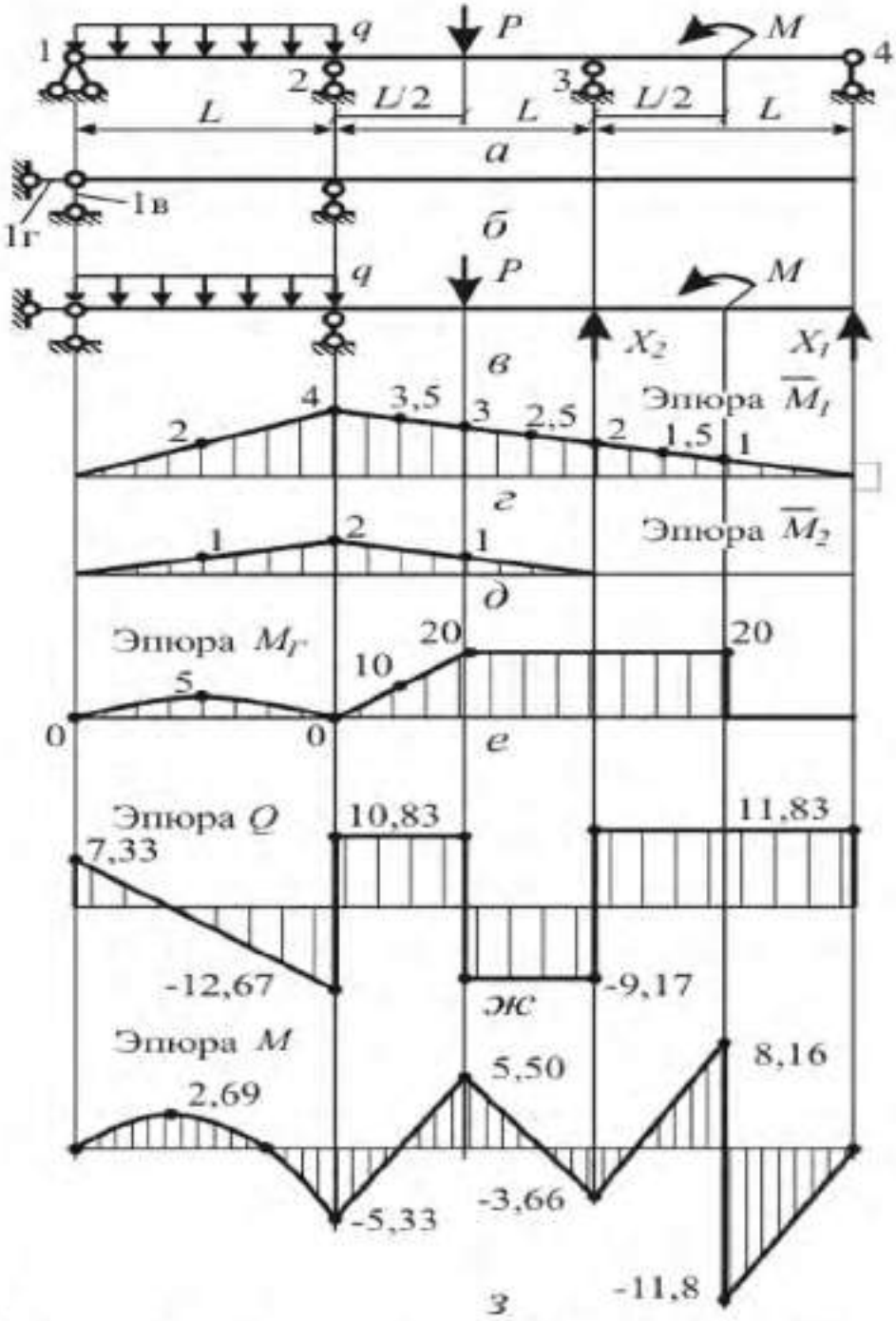


Рис. 7.11. Раскрытая методом сил статическая неопределимость

Задача №8. Расчет стержней на устойчивость

Из расчёта на устойчивость подобрать размеры поперечного сечения стального стержня, сжатого осевой силой P. Способ закрепления стержня и коэффициент приведённой длины μ указаны на рис. 8.1. Схемы сечений даны на рис. 8.2 и 8.3. Данные для расчёта сведены в табл. 8.1. Коэффициент продольного изгиба Приведен в табл.8.2.

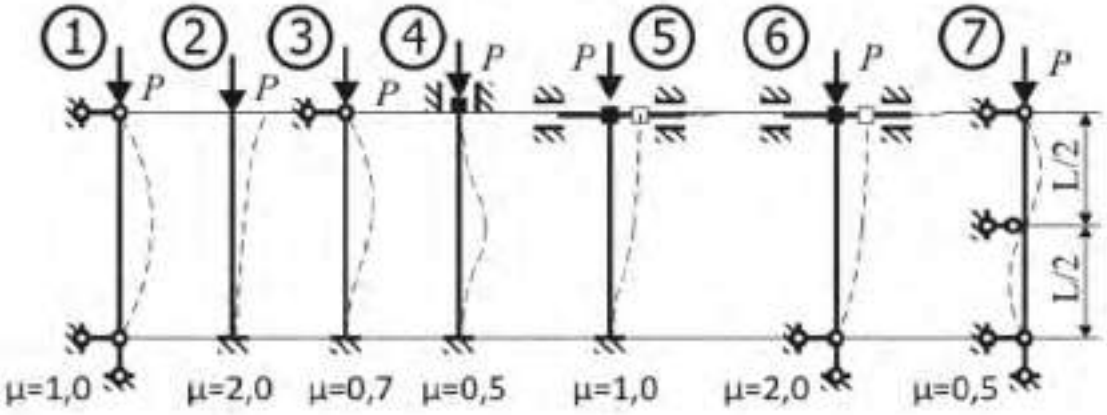


Рис. 8.1. Способ закрепления стержня и коэффициент приведённой длины μ

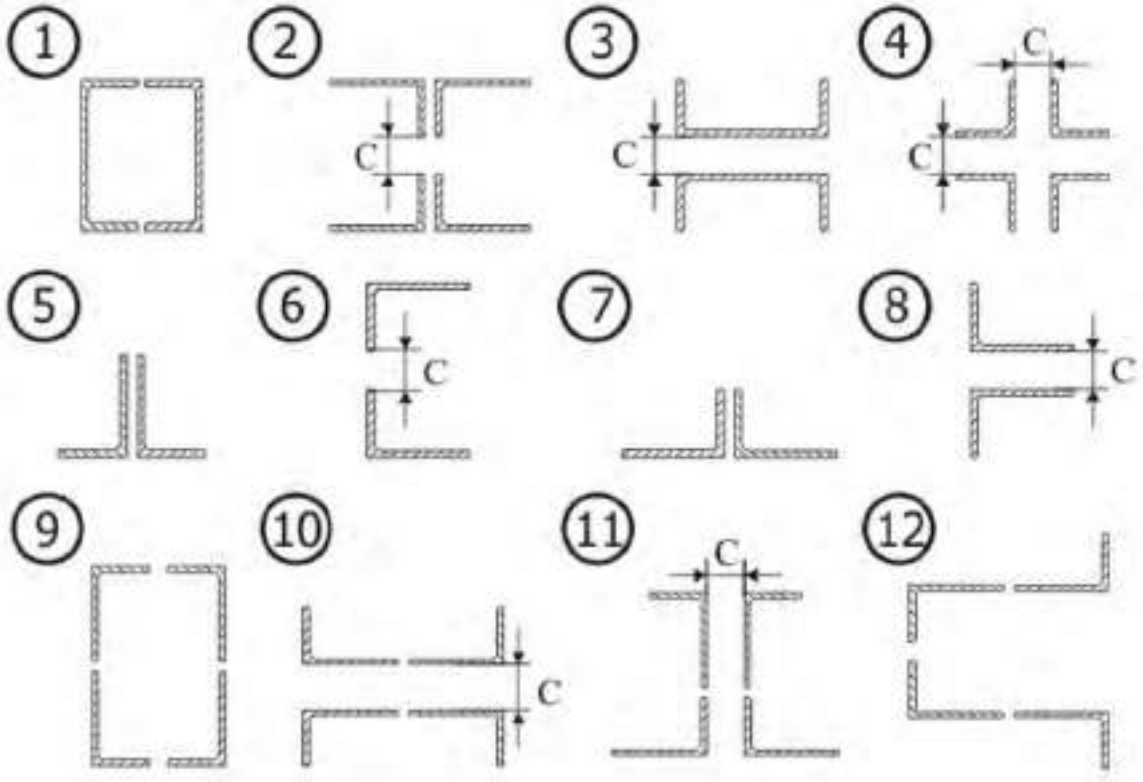


Рис. 8.2. Схемы поперечных сечений 1 – 12 стержня

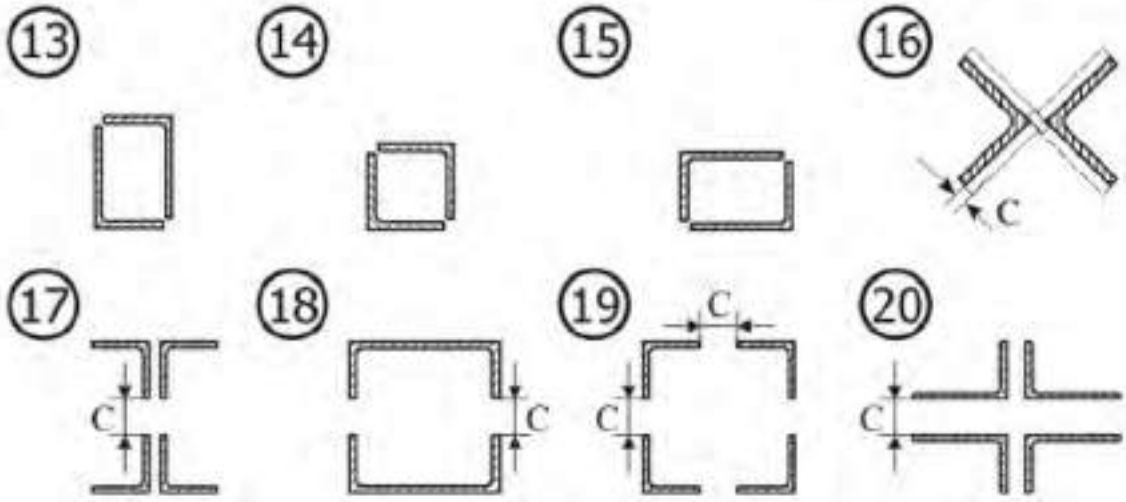


Рис. 8.3. Схемы поперечных сечений 13 – 20 стержня

Таблица 8.1

Исходные данные к задаче № 8

Номер варианта	Номер схемы закрепления	Номер сечения	Длина L, м	c, м	Осевая сила P, кН	Допускаемые напряжения сжатия $[\sigma]$, МПа
1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	6,0	–	500	240
2	2	2	2,5	70	550	280
3	3	3	6,5	75	600	320
4	4	4	7,0	80	650	360
5	5	5	7,5	–	95	400
6	6	6	3,0	55	90	440
7	7	7	8,0	–	85	480
8	1	8	6,0	60	80	520
9	2	9	3,5	–	700	560
10	3	10	6,5	65	750	600
11	4	11	7,0	70	800	640
12	5	12	7,5	–	850	240
13	6	13	4,0	–	75	280
14	7	14	8,0	–	70	320
15	1	15	6,0	–	65	360
16	2	16	2,5	75	60	400
17	3	17	6,5	80	900	440
18	4	18	7,0	55	500	480
19	5	19	7,5	60	550	520
20	6	20	3,0	65	600	560
21	7	1	8,0	–	650	600
22	1	2	6,0	70	700	640
23	2	3	3,5	75	750	240
24	3	4	6,5	80	800	280

Окончание таблицы 8.1

Номер варианта	Номер схемы закрепления	Номер сечения	Длина L, м	c, мм	Осевая сила P, кН	Допускаемые напряжения сжатия $[\sigma]$, МПа
1	2	3	4	5	6	7
25	4	5	7,0	–	55	320
26	5	6	7,5	55	95	360
27	6	7	4,0	–	90	400
28	7	8	8,0	60	85	440
29	1	9	6,0	–	850	480
30	2	10	2,5	65	900	520
31	3	11	6,5	70	500	560
32	4	12	7,0	–	550	600
33	5	13	7,5	–	80	640
34	6	14	3,0	–	75	240
35	7	15	8,0	–	70	280
36	1	16	6,0	75	65	320
37	2	17	3,5	80	600	360
38	3	18	6,5	55	650	400
39	4	19	7,0	60	700	440
40	5	20	7,5	65	750	480
41	6	1	4,0	–	800	520
42	7	2	8,0	70	850	560
43	1	3	6,0	75	900	600
44	2	4	2,5	80	500	640
45	3	5	6,5	–	60	240
46	4	6	7,0	55	55	280
47	5	7	7,5	–	95	320
48	6	8	3,0	60	90	360
49	7	9	8,0	–	550	400
50	1	10	6,0	65	600	440
51	2	11	3,5	70	650	480
52	3	12	6,5	–	700	520
53	4	13	7,0	–	85	560
54	5	14	7,5	–	80	600
55	6	15	4,0	–	75	640
56	7	16	8,0	75	70	240
57	1	17	6,0	80	750	280
58	2	18	2,5	55	800	320
59	3	19	6,5	60	850	360
60	4	20	7,0	65	900	400
61	5	1	7,5	–	500	440
62	6	2	3,0	70	550	480
63	7	3	8,0	75	600	520
64	1	4	6,0	80	650	560

Таблица 8.2.

Коэффициент продольного изгиба

Гибкость, λ	Значение коэффициента φ				
	Материал				
	Ст.4, Ст.3	Ст.5	Ст.СПБ	чугун	дерево
0	1	1	1	1	1
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,95	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,8
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,6
80	0,75	0,7	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,2	0,38
100	0,63	0,51	0,43	0,16	0,31
130	0,4	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,019	0,15	-	0,1
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Подобрать размеры поперечного сечения стальной трубчатой колонны, нагруженной осевой силой $P = 475$ кН. Высота колонны $l = 2{,}5$ м. Отношение внутреннего диаметра трубы к наружному равно $k = d_в/d = 0{,}5$. Схема закрепления колонны № 2 в табл. 7.1. Коэффициент приведённой длины $\mu = 2$. Допускаемые напряжения сжатия для материала колонны $[\sigma] = 440$ МПа.

1. Переводим: осевую силу в ньютоны $P = 4{,}75 \cdot 10^5$Н; допускаемые напряжения в Паскали: $[\sigma] = 4{,}4 \cdot 10^8$ Па.

2. Определяем приведённую длину колонны: $L = \mu l = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ м.

3. Шаг 1 подбора сечения методом последовательных приближений. Задаём начальное значение коэффициента снижения запаса при продольном изгибе φ_1 по сравнению с коэффициентом запаса прочности при сжатии. Начальное значение коэффициента φ_1 рекомендуется выбирать в интервале 0,5 – 0,7. Принимаем $\varphi_1 = 0{,}5$.

4. По формуле

$$S_1 = P/(\varphi_1\,[\sigma]) \qquad (8.1)$$

определяем площадь сечения, при которой обеспечивается устойчивость

$$S_1 = P/(\varphi_1\,[\sigma]) = 4{,}75 \cdot 10^5/(0{,}5 \cdot 4{,}4 \cdot 10^8) = 0{,}00216 \text{ м}^2.$$

5. Наружный диаметр сечения кольца, площадь которого равна S_1, находим по формуле

$$d_i = 2\sqrt{S_i/(\pi(1-k^2))}. \quad (8.2)$$

Получаем

$$d_1 = 2\sqrt{S_1/(\pi(1-k^2))} = 2\sqrt{0{,}00216/(3{,}14\cdot(1-0{,}5^2))} = 0{,}0605 \text{ м}.$$

6. Радиус инерции кольца

$$i = d\sqrt{1+k^2}/4. \quad (8.3)$$

Для выбранного кольца радиус инерции

$$i_1 = d_1\sqrt{1+k\text{^}2}/4 = 0{,}0605\sqrt{1+0{,}5\text{^}2}/4 = 0{,}0169 \text{ м}.$$

7. Гибкость стержня определяется по формуле

$$\lambda = L/i. \quad (8.4)$$

Сечение, выбранное на первом шаге, имеет гибкость

$$\lambda_1 = L/i_1 = 5/0{,}0169 = 295.$$

8. По табл. 8.3 определяем коэффициент снижения запаса по устойчивости по сравнению с коэффициентом запаса прочности при сжатии. Для стали СПБ (с повышенными прочностными характеристиками) наибольшее значение гибкости, при котором определён коэффициент φ, равно $\lambda = 200$. Принимаем значение коэффициента запаса для стержня, выбранного на шаге 1, равным $\Phi_1 = 0$. Различие значений коэффициента снижения запаса устойчивости $\varphi_1 = 0{,}5$ и $\Phi_1 = 0$ относительно велико.

9. Шаг 2.

9.1. Начальное значение коэффициента φ на следующем шаге принимаем равным среднему значению начального и конечного значений коэффициентов предыдущего шага. Для шага 2 имеем

$$\varphi_2 = (\varphi_1 + \Phi_1)/2 = (0{,}5+0)/2 = 0{,}25. \quad (8.5)$$

9.2. По формулам (8.1) – (8.4) находим площадь, наружный диаметр, радиус инерции и гибкость стержня при принятом для шага 2 значении φ_2.

Получаем для шага 2:

площадь

$$S_2 = P/(\varphi_2\,[\sigma]) = 4{,}75\cdot 10^5/(0{,}25\cdot 4{,}4\cdot 10^8) = 0{,}00432 \text{ м}^2;$$

диаметр

$$d_2 = 2\sqrt{S_2/(\pi(1-k^2))} = 2\sqrt{0{,}00432/(3{,}14\cdot(1-0{,}5^2))} = 0{,}0856 \text{ м};$$

радиус инерции

$$i_2 = d_2\sqrt{1+k\text{^}2}/4 = 0{,}0856\sqrt{1+0{,}5\text{^}2}/4 = 0{,}0239 \text{ м};$$

гибкость

$$\lambda_2 = L/i_2 = 5/0{,}0239 = 209.$$

9.3. Гибкость λ_2 превышает значение гибкости, для которой составлена табл. 8.3. Принимаем коэффициент снижения допускаемых напряжений при расчёте на устойчивость по отношению к допускаемым напряжениям при сжатии $\Phi_2 = 0$.

10. Шаг 3.

10.1. По аналогии с формулой (8.5) для шага 3 получаем

$$\varphi_3 = (\varphi_2 + \Phi_2)/2 = (0{,}25+0)/2 = 0{,}125.$$

10.2. По формулам (7.1) – (7.4) находим площадь, наружный диаметр, радиус инерции и гибкость стержня при принятом для шага 3 значении φ_3.

Получаем для шага 3:

площадь

$$S_3 = P/(\varphi_3\,[\sigma]) = 4{,}75\cdot 10^5/(0{,}125\cdot 4{,}4\cdot 10^8) = 0{,}00864\ \text{м}^2;$$

диаметр

$$d_3 = 2\sqrt{S_3/(\pi(1-k^2))} = 2\sqrt{0{,}00864/(3{,}14\cdot(1-0{,}5^2))} = 0{,}121\ \text{м};$$

радиус инерции

$$i_3 = d_3\sqrt{1+k\text{^}2}/4 = 0{,}121\sqrt{1+0{,}5\text{^}2}/4 = 0{,}0338\ \text{м};$$

гибкость

$$\lambda_3 = L/i_3 = 5/0{,}0338 = 148.$$

10.3. По табл. 8.3 для стали СПБ находим с помощью линейной интерполяции значение коэффициента Φ_3. Для начального $\lambda_н$ и конечного $\lambda_к$ значений границ интервала, в коем лежит найденная гибкость λ, выписываем из табл. 8.3 соответствующие им значения $\varphi_н$ и $\varphi_к$. По формуле линейной интерполяции

$$\Phi = \varphi_н + (\varphi_к - \varphi_н)(\lambda - \lambda_н)/(\lambda_к - \lambda_н) \qquad (8.6)$$

получаем для шага 3:

$$\lambda_{н3} = 140\,;\ \lambda_{к3} = 150;$$
$$\varphi_{н3} = 0{,}23;\ \varphi_{к3} = 0{,}21;$$
$$\lambda_3 = 148.$$

Подставляя эти значения в (7.6), получаем

$$\Phi_3 = \varphi_{н3} + (\varphi_{к3} - \varphi_{н3})(\lambda_3 - \lambda_{н3})/(\lambda_{к3} - \lambda_{н3}) =$$
$$= 0{,}23 + (0{,}21 - 0{,}23)(148 - 140)/(150 - 140) = 0{,}215.$$

10.4. Определяем критическую силу по формуле

$$P = \Phi\, S\,[\sigma]. \qquad (8.7)$$

Получаем

$$P_3 = \Phi_3 S_3\,[\sigma] = 0{,}215\cdot 0{,}00864\cdot 4{,}4\cdot 10^8 = 8{,}15\cdot 10^5\ \text{Н}.$$

10.5. По формуле

$$\Delta_i = (P_i - P)/P \qquad (8.8)$$

ищем относительную погрешность подбора сечения.

Получаем

$$\Delta_i = (P_i - P)/P = (8{,}15\cdot 10^5 - 4{,}75\cdot 10^5)/4{,}75\cdot 10^5 — 0{,}716.$$

При подборе поперечного сечения колонны следует стремится к тому, чтобы относительная погрешность подбора лежала в пределах $\mp 0{,}05$.

11. Шаг 4

11.1. По формуле (8.5) для шага 4 получаем

$$\varphi_4 = (\varphi_3 + \Phi_3)/2 = (0{,}125 + 0{,}215)/2 = 0{,}170.$$

11.2. По формулам (8.1) – (8.4) находим площадь, наружный диаметр, радиус инерции и гибкость стержня при принятом для шага 4 значении φ_4.

Получаем для шага 4:

площадь

$$S_4 = P/(\varphi_4\,[\sigma]) = 4{,}75\cdot 10^5/(0{,}170\cdot 4{,}4\cdot 10^8) = 0{,}00636\ \text{м}^2;$$

диаметр

$$d_4 = 2\sqrt{S_4/(\pi(1-k^2))} = 2\sqrt{0{,}00636/(3{,}14\cdot(1-0{,}5^2))} = 0{,}104\ \text{м};$$

радиус инерции

$$i_з = d_з\sqrt{1+k\text{^}2}/4 = 0{,}104\sqrt{1+0{,}5\text{^}2}/4 = 0{,}0290 \text{ м};$$

гибкость

$$\lambda_з = L/i_з = 5/0{,}0290 = 172.$$

11.3. По табл. 8.3 для стали СПБ находим значение коэффициента Φ_4. Для начального $\lambda_н$ и конечного $\lambda_к$ значений границ интервала, в коем лежит найденная гибкость $\lambda_з$ выписываем из табл. 8.3 соответствующие им значения $\varphi_н$ и $\varphi_к$. По формуле линейной интерполяции

$$\Phi = \varphi_н + (\varphi_к - \varphi_н)(\lambda - \lambda_н)/(\lambda_к - \lambda_н) \qquad (8.9)$$

получаем для шага 4:

$$\lambda_{н4} = 170;\ \lambda_{к4} = 180;$$
$$\varphi_{н4} = 0{,}17;\ \varphi_{к4} = 0{,}15;$$
$$\lambda_4 = 172.$$

Подставляя эти значения в (8.9), получаем

$$\Phi_4 = \varphi_{н4} + (\varphi_{к4} - \varphi_{н4})(\lambda_4 - \lambda_{н4})/(\lambda_{к4} - \lambda_{н4}) =$$
$$= 0{,}17 + (0{,}15 - 0{,}17)(172 - 170)/(180 - 170) = 0{,}166.$$

11.4. Определяем критическую силу по формуле

$$P = \Phi S\,[\sigma]. \qquad (8.10)$$

Получаем

$$P_4 = \Phi_4 S_4[\sigma] = 0{,}166 \cdot 0{,}00636 \cdot 4{,}4 \cdot 10^8 = 4{,}64 \cdot 10^5 \text{Н}.$$

11.5. По формуле (8.8) ищем относительную погрешность подбора сечения. Получаем

$\Delta_1 = (P_1 - P)/P = (4{,}64 \cdot 10^5 - 4{,}75 \cdot 10^5)/4{,}75 \cdot 10^5 = 0{,}0242.$

Критическая сила для стержня меньше действующей силы на 2,42%. Полученное значение лежит в пределах принятой в сопротивлении материалов погрешности в 5 %.

12. Выбрана труба с внешним диаметром 105 мм и внутренним диаметром 52,5 мм.

Задача № 9. Расчёт статически неопределимых рам

Раскрыть статическую неопределимость рамы (рис. 9.1). Построить эпюры внутренних силовых факторов, действующих в поперечных сечениях. Выбрать сечение двутавровой балки при заданном допускаемом напряжении $[\sigma] = 160$ МПа. Данные для расчёта взять из табл. 9.1.

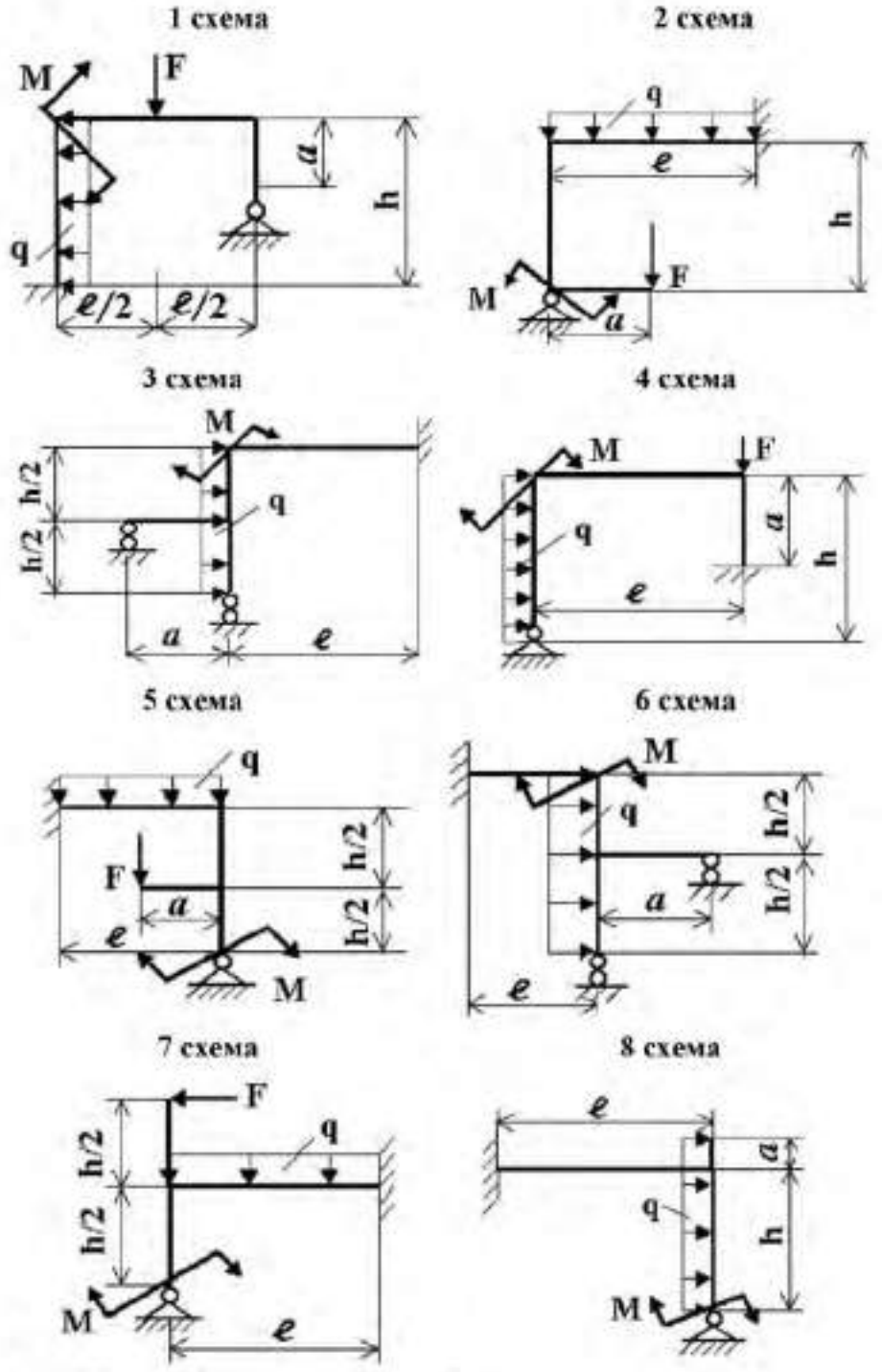


Рис. 9.1 Рама: схемы 1 … 8

Табл. 9.1

Номер задания	Схема по рис.9.1	Параметры	Числовые значения вариантов									
1	**1**	***h*, м**	**2,5**	**3,0**	**2,0**	**2,0**	**2,5**	**2,5**	**3,0**	**3,0**	**3,0**	**3,0**
2	**2**	***a*, м**	**1,8**	**1,0**	**1,5**	**1,6**	**1,0**	**1,2**	**1,5**	**1,0**	**2,0**	**1,8**
3	**3**	**M, кНм**	**30**	**40**	**20**	**20**	**40**	**26**	**25**	**60**	**30**	**20**
4	**4**	**F, кН**	**24**	**25**	**35**	**65**	**30**	**30**	**30**	**50**	**65**	**35**
5	**5**	**q, кН/м**	**30**	**30**	**30**	**10**	**10**	**35**	**20**	**35**	**15**	**10**
6	**6**	***h*, м**	**3,0**	**3,0**	**2,5**	**3,0**	**2,5**	**3,0**	**2,5**	**2,0**	**3,0**	**2,5**
7	**7**	***l*, м**	**4,0**	**4,0**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**4,0**	**3,0**	**3,0**	**2,0**	**4,0**
8	**8**	**M, кНм**	**30**	**45**	**25**	**30**	**25**	**24**	**35**	**20**	**35**	**20**
Номер варианта			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Раскрыть статическую неопределимость рамы (рис. 9.2. *а*). Размеры $l = 4$ м; $h = 4$ м. Нагрузки: $P = 20$ [кН]; $q = 5$ [кН/м]. Сечения стержней – двутавр. Выбрать номер двутавра, если допускаемые напряжения равны $[\sigma] = 160$ МПа.

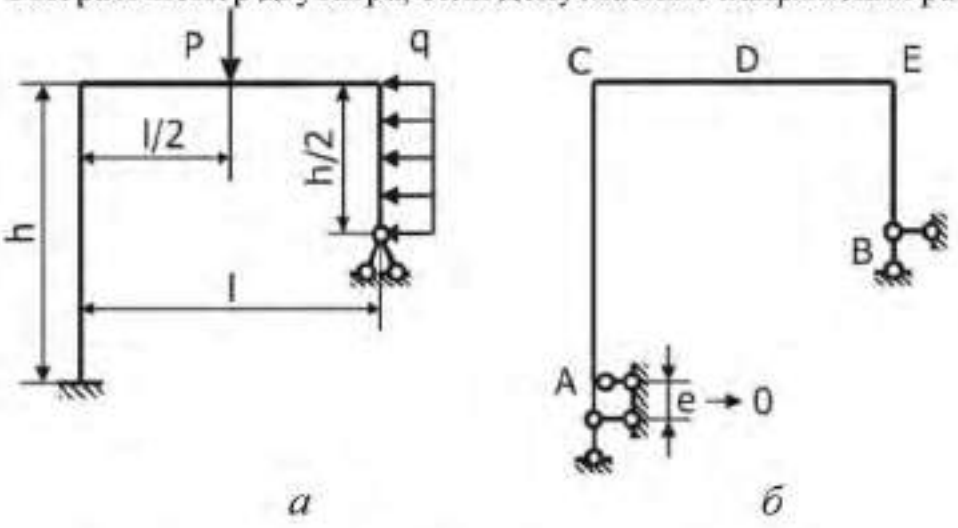


Рис. 9.2 Рама: а) схема; б) количество опорных стержней

РЕШЕНИЕ

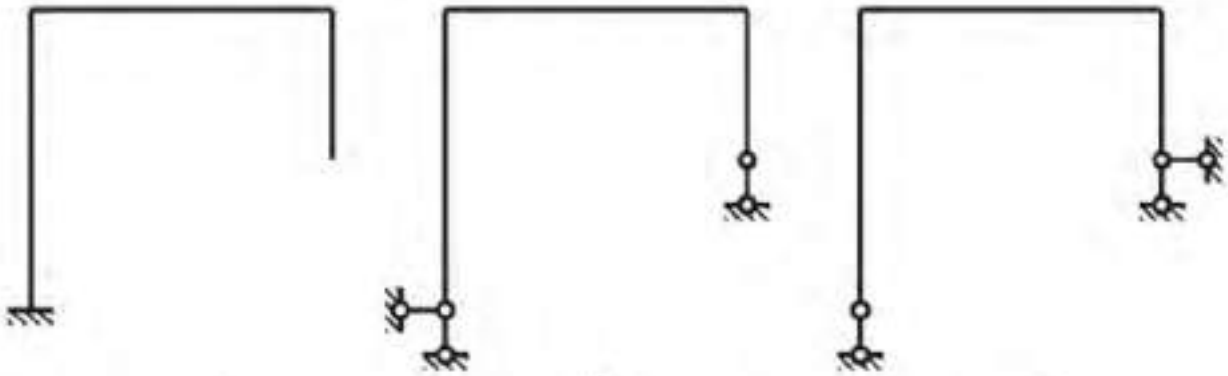
1. *Степень статической неопределимости рамы.* Число опорных стержней равно 5 (заделка эквивалентна 3 опорным стержням (рис. 9.2. *б*), шарнирно-неподвижная опора образована 2 стержнями). Для определения опорных реакций плоской рамы имеем 3 уравнения статики. **Степенью статической неопределимости** называется разность между числом опорных стержней и числом уравнений статики. Рама дважды статически неопределима

$$N_{\text{неоп}} = K_{\text{реак}} - K_{\text{ур}} = 5 - 3 = 2.$$

2. *Выбор основной системы.* Удалив в заданной системе 2 опорных стержня, получим необходимое условие статической определимости

$$K_{\text{реак.}} - K_{\text{ур}} = 0.$$

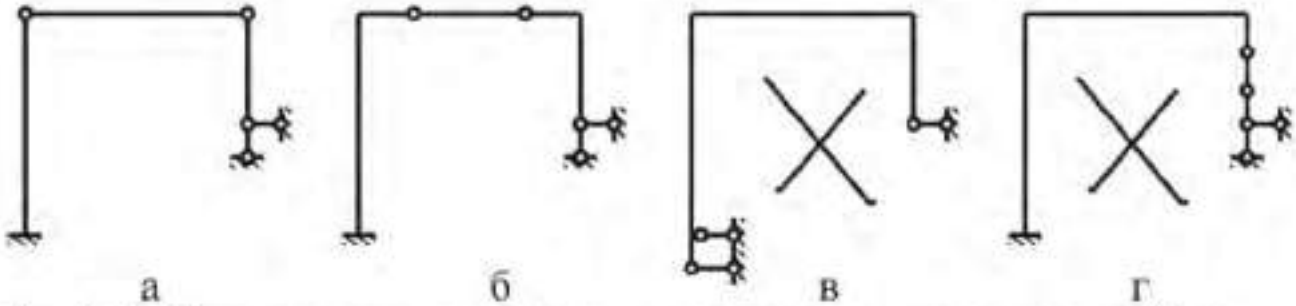
Основной системой называется **неизменяемая** статически определимая система, полученная из заданной системы отбрасыванием избыточных связей. На рис. 9.3 приведены основные системы, полученные отбрасыванием двух лишних опорных стержней.



а б в

Рис. 9.3 Основные системы, полученные отбрасыванием опорных стержней

Основную систему можно получить удалением внутренних связей в узлах рамы или в самих стержнях. В основной системе (рис. 9.4.а) в узлах рамы удалены внутренние связи, передающие изгибающий момент. В системе (рис. 9.4.б) в двух сечениях удалены внутренние связи, воспринимающие изгибающие моменты. **Основная система должна быть неизменяемой**. Система (рис. 9.4.в), полученная удалением вертикальных опорных стержней, изменяема. Система (рис. 9.4.г), в правую стойку которой врезаны два шарнира, мгновенно изменяема.



а б в г

Рис. 9.4.а Основные системы, полученные удалением внутренних связей: а) в узлах, б) в стержнях, в) изменяемая система, г) мгновенно изменяемая система

3. *Выбор эквивалентной системы.* В качестве основной системы, выберем систему, показанную на рис. 9.3.а. Нагрузим её внешними нагрузками P, q согласно схеме, приведённой на (рис. 9.2.а). Действие удалённых опорных стержней, заменим **лишними неизвестными** силами X_1, X_2, приложенными в точке B. **Эквивалентной системой** называют основную систему, к которой

приложены заданные внешние нагрузки и лишние неизвестные X_1, X_2. Эквивалентная система рамы приведена на рис. 9.5.

Рис. 9.5 Эквивалентная система

4. *Эпюры моментов.* При построении эпюр изгибающих моментов методом сечений применяем правило знаков для момента в балке, закреплённой горизонтально (рис. 9.6).

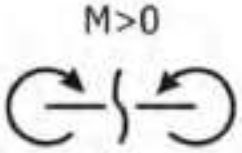


Рис. 9.6 Правило знаков для M

Перед применением этого правила к построению эпюры моментов на участке рамы с осью иного направления необходимо:

выбрать горизонтальный участок рамы и провести ниже оси этого участка пунктирную линию;

не пересекая оси рамы продолжить этот пунктир на прочих участках, параллельно их осям.

Разрезав раму и выбрав кусок, равновесие которого будет изучаться, следует повернуть кусок так, чтобы на нём ось разрезанного участка стала горизонтальной и пунктирная линия лежала ниже оси.

Пунктирная линия для рамы приведена на рис. 9.7.

Рама разбита на 4 участка: BE, ED, DC, CA. Границами участков являются: концы A и B, узлы C и E, точка D приложения силы.

4.1. *Эпюра* $\bar{M}_1$. Схема нагружения рамы силой $\bar{X}_1$ дана на рис. 9.7. Эпюру единичного изгибающего момента строим методом сечений. Правило для определения знака момента на горизонтальном участке CDE дано на рис. 9.6.

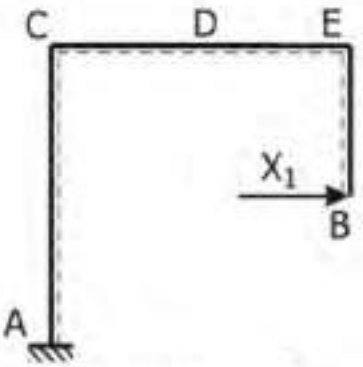


Рис. 9.7 К построению $\bar{M}_1$

4.1.1. *Эпюра $\bar{M}_1$ на участке BE.* Разрежем раму на участке BE в сечении S, лежащем на расстоянии S_B (рис. 9.8.а) и рассмотрим равновесие свободного (незакреплённого) куска. Повернём кусок SB в горизонтальное положение так, чтобы пунктирная линия лежала ниже оси (рис. 9.8.б). Момент силы $\bar{X}_1$ относительно точки равен $\bar{M}_1(S_B) = \bar{X}_1 S_B$. Сила вращает кусок SB в положительном направлении (против хода стрелок часов). По правилу знаков для моментов (рис. 9.6) это направление момента считается положительным для правого куска. Для вычисления интеграла перемещений по формуле Симпсона найдём значения момента в начале, середине, конце участка SB и построим эпюру изгибающего момента на участке. Положительные значения момента в машиностроении принято откладывать на сжатых волокнах. Представим, что кусок SB защемлён в сечении S. Сила $\bar{X}_1$ изогнёт кусок так, что правые волокна окажутся короче левых (рис. 9.8.в). Эпюру $\bar{M}_1(S_B)$ строим справа от оси стержня BE (рис. 9.8.г).

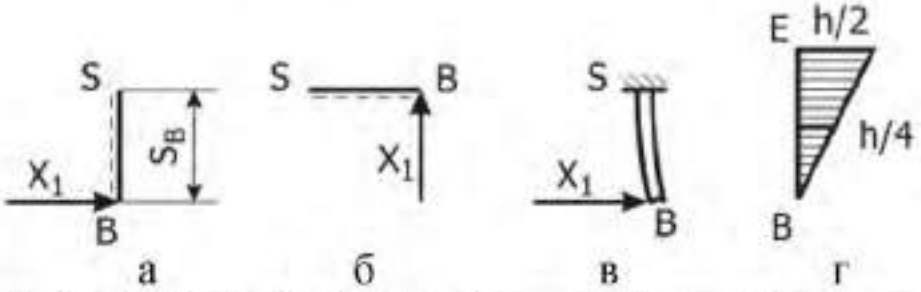


Рис. 9.8. Эпюра $\bar{M}_1$ на участке BE: а) отрезанный кусок; б) повёрнутый кусок; в) сжатые волокна; г) эпюра на участке

4.1.2. *Эпюра $\bar{M}_1$ на участке ED.* Разрежем раму на участке BE в сечении S, лежащем S_E на расстоянии от точки E (рис. 9.9.а). Рассматриваем равновесие правого (свободного) куска. Кусок не поворачиваем, так как пунктирная линия лежит ниже сплошной. Сила $\bar{X}_1$ уравновешена осевой силой N_{ES}, приложенной в сечении S. Эта пара сил создаёт в сечении S положительный изгибающий момент $\bar{M}_1(S_E)=\bar{X}_1 h/2$, постоянный на участке ED.

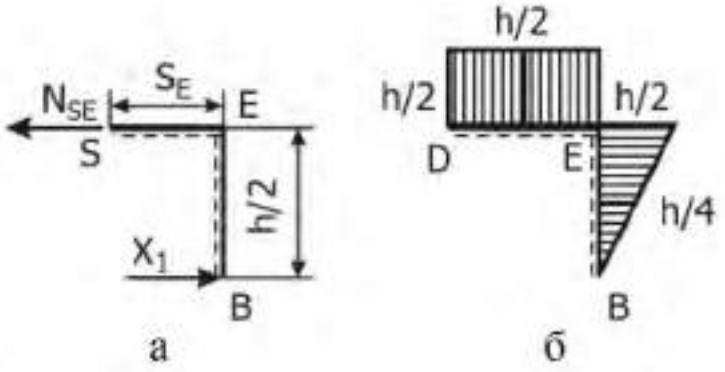


Рис. 9.9 Эпюра $\bar{M}_1$ на участке ED: а) отрезанный кусок; б) эпюра

4.1.3. *Эпюра $\bar{M}_1$ на участке DC.* Эпюра на участке DC строится аналогично предыдущему. Результаты построения даны на рис. 9.10.

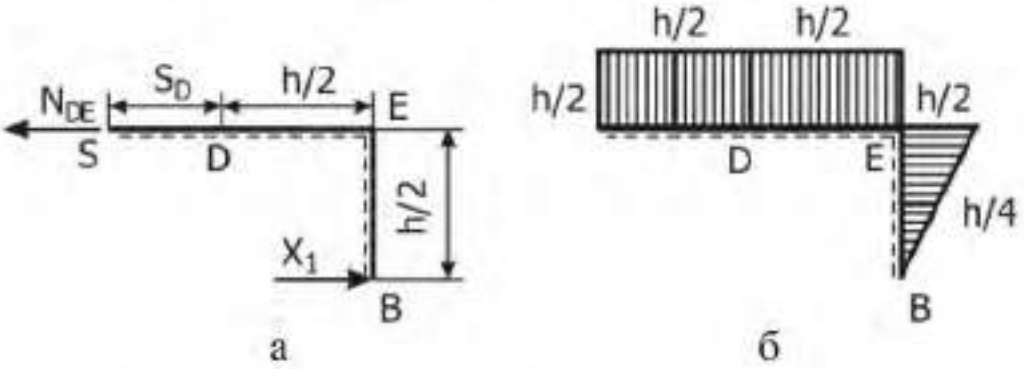
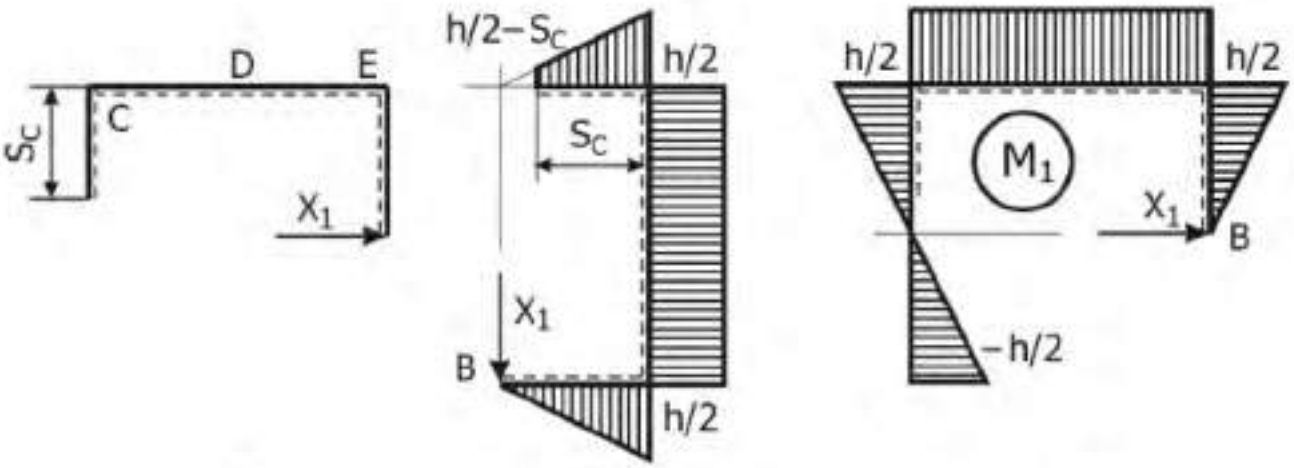


Рис. 9.10 К построению эпюры $\bar{M}_1$ на участке DC: а) отрезанный кусок; б) эпюра

4.1.4. *Эпюра $\bar{M}_1$ на участке CA.* Разрежем раму в сечении S, лежащем на расстоянии S_C (рис. 9.11.а) от точки C. Рассмотрим равновесие свободного куска. Повернём кусок так, чтобы участок SC стал горизонтальным и пунктирная линия лежала ниже сплошной (рис. 9.11.б). Сила $\bar{X}_1$ уравновешивается поперечной силой Q, приложенной в сечении S. Пара сил $\bar{X}_1$ и Q создаёт в этом сечении S момент равный $\bar{M}_1(S_C) = \bar{X}_1(h/2 - S_C)$. Значения момента в начале, середине, конце участка CA равны $\bar{M}_1(0) = h/2$, $\bar{M}_1(h/2) = 0$, $\bar{M}_1(0) = -h/2$ и строим эпюру изгибающего момента на участке (рис. 9.11.в).



а б в

Рис. 9.11 К построению эпюры $\bar{M}_1$ на участке CA: а) отрезанный кусок; б) повёрнутый кусок; в) эпюра

4.1.5. *Аналитические выражения для эпюры* $\bar{M}_1$ применяются в случае аналитического интегрирования:

$$\bar{M}_1 = \begin{cases} s_B; & \text{участок } BE \quad 0 \le s_B \le h/2; \\ h/2; & \text{участок } ED \quad 0 \le s_E \le h/2; \\ h/2; & \text{участок } DC \quad 0 \le s_D \le h/2; \\ h/2 - s_C; & \text{участок } CA \quad 0 \le s_D \le h/2. \end{cases}$$

4.2. *Эпюра* $\bar{M}_2$. Схема приложения силы $\bar{X}_2$ к раме дана на рис. 9.12.

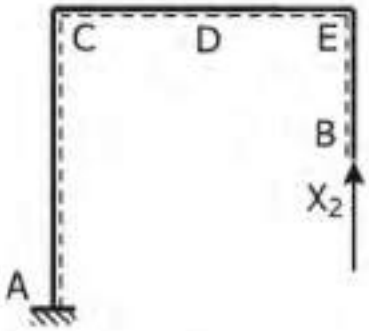


Рис. 9.12 К построению эпюры $\bar{M}_2$

4.2.1. *Участок* BE. Разрезаем в сечении S, лежащем на расстоянии s_B от точки B. Рассматриваем равновесие нижнего от разреза (свободного) куска (рис. 9.12). Сила $\bar{X}_2$ действует вдоль оси стержня BE. Момент $\bar{M}_2$ на участке равен нулю.

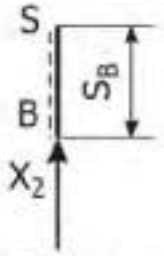
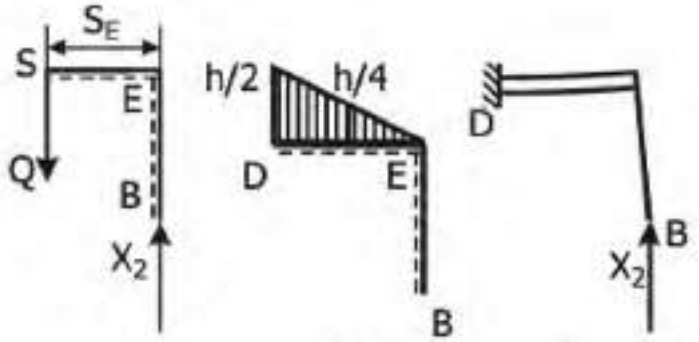


Рис. 9.12 К построению $\bar{M}_2$ на участке BE

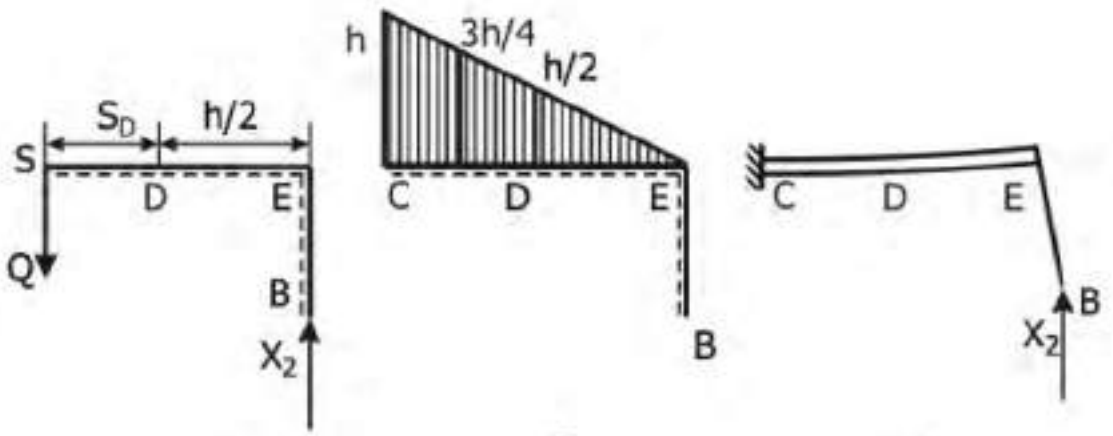
4.2.2. *Участок ED*. Разрезаем в сечении S, лежащем на расстоянии s_E от точки E. Рассматриваем равновесие свободного куска (рис. 9.13). Пунктирная линия на разрезанном участке лежит ниже сплошной, поэтому поворот не нужен. Поперечная сила Q, приложенная в сечении S, уравновешивает силу $\bar{X}_2$ и образует вместе с ней пару сил с моментом $\bar{M}_2 = \bar{X}_2 S_E = S_E$, вращающую кусок в положительном направлении. Значения момента в начале, середине, конце участка равные $\bar{M}_2(0) = 0$, $\bar{M}_2(h/4) = h/4$ и $\bar{M}_2(h/2) = h/2$ отложены на сжатых волокнах.



а б в

Рис. 9.13 К построению $\bar{M}_2$ на участке ED: а) отрезанный кусок; б) эпюра; в) положение сжатых волокон

4.2.3. *Участок DC*. Разрезаем в сечении S, лежащем на расстоянии S_D от точки D. Рассматриваем равновесие свободного куска (рис. 9.14.а). Пунктирная линия на разрезанном участке лежит ниже сплошной, поэтому поворот не нужен. Поперечная сила Q, приложенная в сечении S, уравновешивает силу $\bar{X}_2$ и образует вместе с ней пару сил с моментом $\bar{M}_2 = S_E + h/2$, вращающую кусок в положительном направлении. Значения момента в начале, середине, конце участка равные $\bar{M}_2(0) = h/2$, $\bar{M}_2(h/4) = 3h/4$ и $\bar{M}_2(h/2) = h$ отложены на сжатых волокнах (рис. 9.14.б).



а б в

Рис. 9.14 Эпюра $\bar{M}_2$ на участке DC: а) отрезанный кусок; б) эпюра; в) положение сжатых волокон

4.2.4. *Участок* CA. Разрежем раму в сечении S, лежащем на расстоянии S_C (рис. 9.15.а) от точки C. Повернём свободный кусок так, чтобы участок SC был горизонтальным и пунктирная линия лежала ниже сплошной. Сила $\bar{X}_2$ и уравновешивающая её осевая сила $N(S_C)$ образуют пару сил. Момент пары равен $\bar{M}_2(S_C) = \bar{X}_2 h$. Значения момента постоянны по длине участка CA. Строим эпюру изгибающего момента на сжатых волокнах.

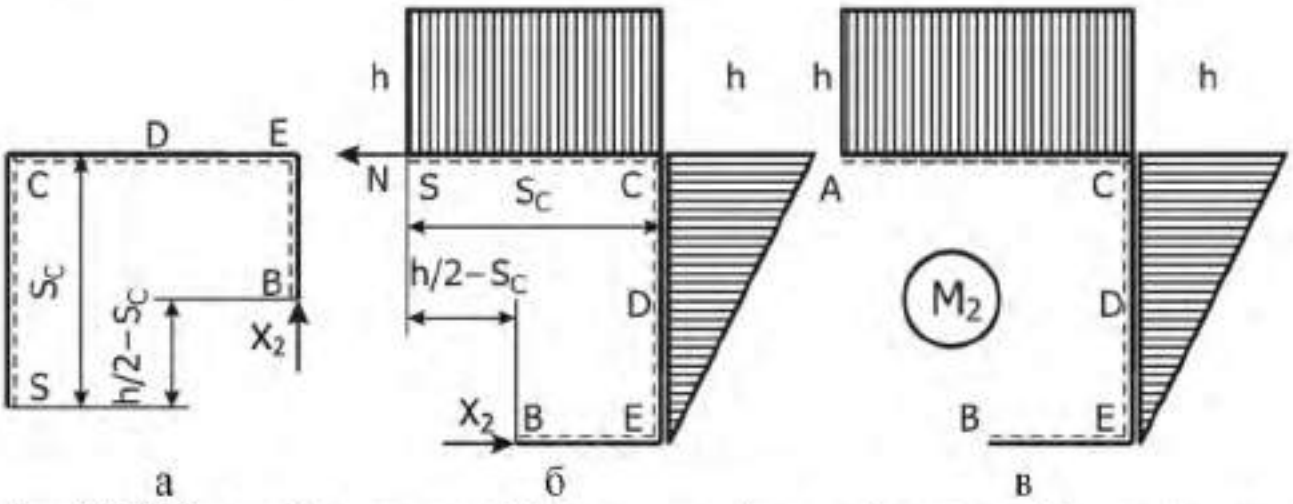


Рис. 9.15 Эпюра $\bar{M}_2$ на участке CA: а) отрезанный кусок; б) повёрнутый кусок; в) эпюра

4.2.5. *Аналитические выражения для эпюры* $\bar{M}_2$ применяются в случае аналитического интегрирования:

$$\bar{M}_2 = \begin{cases} 0; & \text{участок } BE \quad 0 \le s_B \le h/2; \\ S_E; & \text{участок } ED \quad 0 \le S_E \le h/2; \\ S_D + h/2; & \text{участок } DC \quad 0 \le S_D \le h/2; \\ h; & \text{участок } CA \quad 0 \le S_C \le h/2. \end{cases}$$

4.3. *Эпюра грузового момента* M_F. Рассматриваем раму основной системы, нагруженная силой P и равномерно распределённой нагрузкой q (рис. 9.16). Строим эпюру грузового момента от совместного действия P и q. (Возможно раздельное построение эпюр от P и эпюры от q с последующим суммированием полученных результатов).

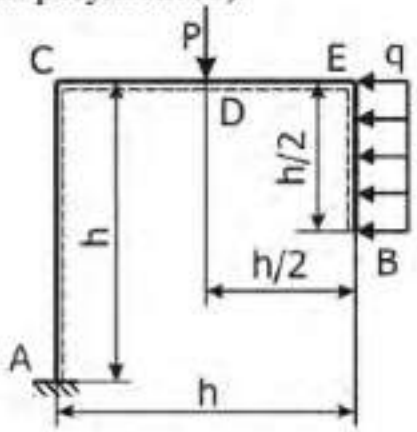


Рис. 9.16 К построению эпюры грузового момента $M_г$

4.3.1. *Участок BE*. Положительный момент вращает против часовой стрелки. Координата сечения $0 \le S_B \le h/2$ (рис. 9.17.а). Повернём кусок BS в «рабочее» положение (рис. 9.17.б). В «рабочем» положении ось разрезанного участка BS с горизонтальна и подчёркнута пунктиром. Заменим нагрузку q, действующую на кусок, эквивалентной силой qS_B. Эквивалентная сила приложена посередине участка на расстоянии $S_B/2$ от разреза S (рис. 9.17.в). Момент равен $M_г(S_B) = -qS_B^2/2$. Значения грузового момента в начале, конце, середине участка равны (кН·м):

$$M_г(0) = -qS_B^2/2 = -5 \cdot \frac{0^2}{2} = 0; \quad M_г(2) = -qS_B^2/2 = -5 \cdot \frac{2^2}{2} = -10;$$

$$M_г(1) = -qS_B^2/2 = -5 \cdot \frac{1^2}{2} = -2{,}5.$$

Эпюра приведена на (рис. 9.17.г).

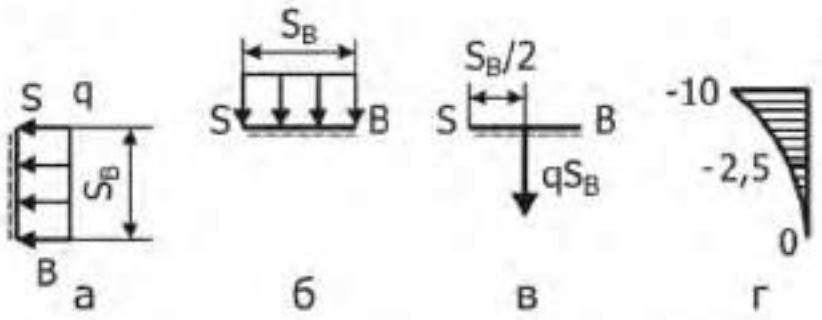


Рис. 9.17 Эпюра грузового момента $M_г$ на участке BE

4.3.2. *Участок ED*. Отрезанный кусок и выбор координаты сечения S_E показаны на (рис. 9.18.а). Координата изменяется в пределах $0 \le S_E \le h/2$. Поворот не нужен, так как разрезанный участок находится в «рабочем» положении. Заменим нагрузку q, действующую на кусок, эквивалентной силой . Эквивалентная сила приложена посередине участка BE. Её плечо относительно разреза S равно $h/4$ (рис. 9. 18.б). Момент имеет постоянное значение на участке ED равное $M_г(S_E) = -qh^2/8 = -5 \cdot 4^2/8 = -10$ (кН·м).
Эпюра приведена на (рис. 9. 18.в).

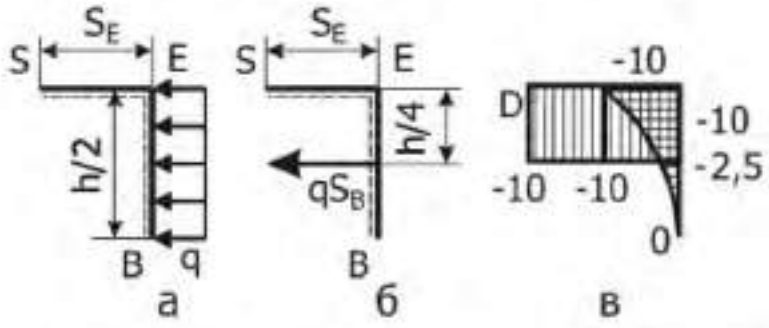


Рис. 9.18 Эпюра грузового момента $M_г$ на участке ED

4.3.3. *Участок DC*. Отрезанный кусок и выбор координаты разреза S_D показаны на (рис. 9.19.а). Координата изменяется в границах $0 \le S_D \le h/2$.

Поворот не нужен, так как разрезанный участок находится в «рабочем» положении (ось DC горизонтальна, пунктир лежит ниже оси). Заменим нагрузку q, действующую на кусок, эквивалентной силой . Плечо эквивалентной силы относительно разреза S равно $h/4$, а плечо силы P равно S_D (рис. 9.19.б). Момент в сечении с координатой S_D равен $M_г(S_D) = -qh^2/8 - PS_D$. Значения грузового момента в начале, конце, середине участка DC равны (кН·м):

$M_г(0) = -qh^2/8 - PS_D = -5 \cdot 4^2/8 - 20 \cdot 0 = -10;$

$M_г(2) = -qh^2/8 - PS_D = -5 \cdot 4^2/8 - 20 \cdot 2 = -50;$

$M_г(1) = -qh^2/8 - PS_D = -5 \cdot 4^2/8 - 20 \cdot 1 = -30.$

Эпюра приведена на (рис. 9.19.в).

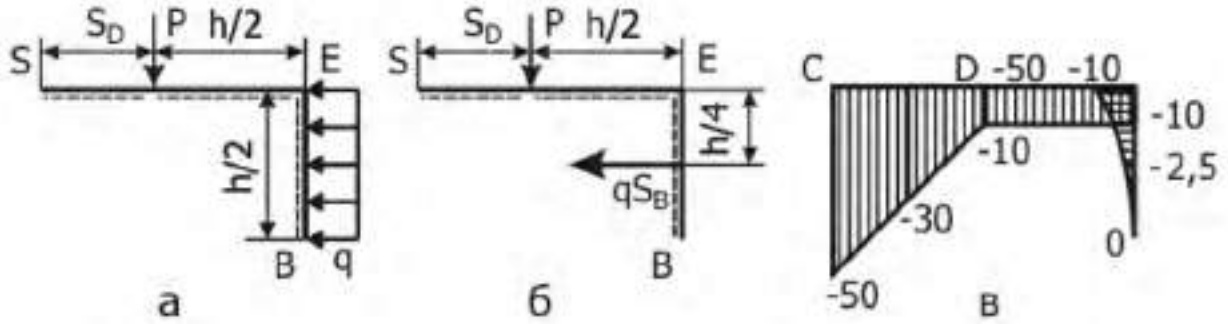


Рис. 9.19 Эпюра грузового момента $M_г$ на участке DC

4.3.4. *Участок CA.* Отрезанный кусок и выбор координаты разреза S_C показаны на (рис. 9.20.а). Координата изменяется в границах $0 \le S_C \le h$. Поворачиваем кусок и приводим разрезанный участок CA в «рабочее» положение (ось CA горизонтальна, пунктир лежит ниже оси). Заменим нагрузку q, действующую на кусок, эквивалентной силой . Плечо эквивалентной силы относительно разреза S равно $-h/4 + S_C$. Плечо силы P равно (рис. 9.20.б). Момент в сечении с координатой S_C равен . Значения грузового момента в начале, конце, середине участка DC равны, соответственно (кН·м): -50; -30; -10. Эпюра приведена на (рис. 9.20.в).

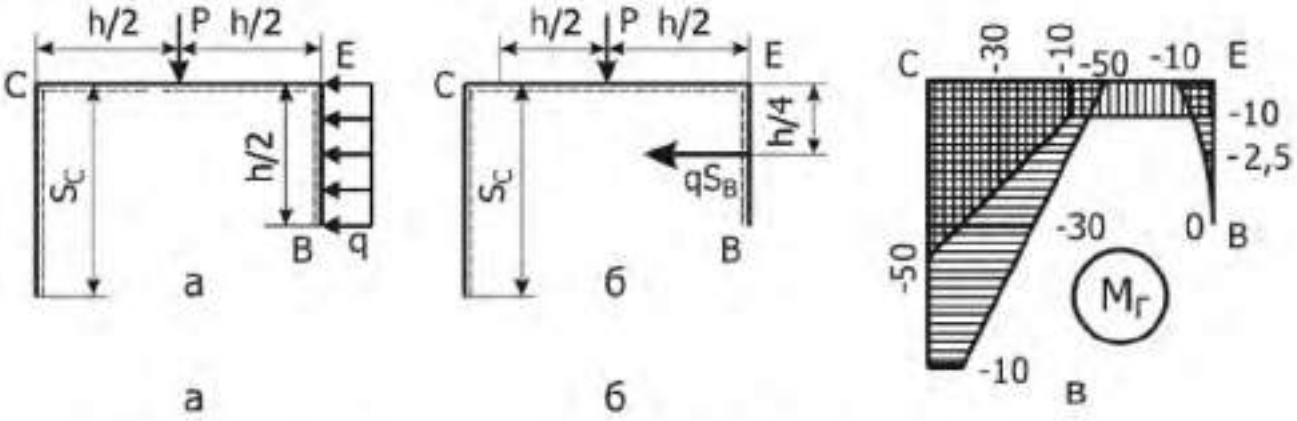


Рис. 9.20 Эпюра грузового момента $M_г$ на участке AC

4.5. *Аналитические выражения для эпюры $M_г$* применяются в случае аналитического интегрирования:

$$M_\Gamma = \begin{cases} qs_B^2/2; & \text{участок } BE \quad 0 \le s_B \le h/2; \\ qh^2/8; & \text{участок } ED \quad 0 \le S_E \le h/2; \\ -pS_D - qh^2/8; & \text{участок } DC \quad 0 \le S_D \le h/2; \\ -p\,h/2 - qh^2/8 + qhs_c; & \text{участок } CA \quad 0 \le S_C \le h/2. \end{cases}$$

5. *Вычисление коэффициентов системы канонических уравнений*

5.1. *Коэффициенты при неизвестных*

Интегралы вычисляем по формуле Симпсона

$$I = \int_0^l f(s)g(s)ds = l/6\left(f(s_н)g(s_н) + 4f(s_c)g(s_c) + f(s_к)g(s_к)\right),$$

где $s_н$, s_c, $s_к$ – координаты начала, середины и конца участка интегрирования.

$\delta_{11} = 1/EJ\left(\int_B^E \bar{M}_1^2(s_B)ds_B + \int_E^D \bar{M}_1^2(s_E)ds_E + \int_D^C \bar{M}_1^2(s_D)ds_D + \int_C^A \bar{M}_1^2(s_C)ds_C\right)$. Стержни рамы имеют одинаковую жёсткость, поэтому при раскрытии статической неопределимости жёсткость можно не учитывать.

$$\delta_{11} = 2/6\,(0^2 + 4\cdot 1^2 + 2^2) + 2/6\,(2^2 + 4\cdot 2^2 + 2^2) + 2/6\,(2^2 + 4\cdot 2^2 + 2^2) + 4/6\,(2^2 + 4\cdot 0^2 + (-2)^2) = 24$$

;

$$\delta_{12} = \int_B^E \bar{M}_1(s_B)\bar{M}_2(s_B)ds_B + \int_E^D \bar{M}_1(s_E)\bar{M}_2(s_E)ds_E + + \int_D^C \bar{M}_1(s_D)\bar{M}_2(s_D)ds_D + \int_C^A \bar{M}_1(s_C)\bar{M}_2(s_C)ds_C$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 2/6\,(0\cdot 0 + 4\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 0) + 2/6\,(2\cdot 0 + 4\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2) + 2/6\,(2\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 4) + 4/6\,(2\cdot 4 + 4\cdot 0\cdot 4 + (-2)\cdot 4) = 16;$$

$\delta_{22} = \int_B^E \bar{M}_2^2(s_B)ds_B + \int_E^D \bar{M}_2^2(s_E)ds_E + \int_D^C \bar{M}_2^2(s_D)ds_D + \int_C^A \bar{M}_2^2(s_C)ds_C.$

$$\delta_{22} = 2/6\,(0^2 + 4\cdot 0^2 + 0^2) + 2/6\,(0^2 + 4\cdot 1^2 + 2^2) + 2/6\,(2^2 + 4\cdot 3^2 + 4^2) + 4/6\,(4^2 + 4\cdot 4^2 + 4^2) = 85{,}3.$$

5.2. *Грузовые коэффициенты.*

$$\Delta_1 = \int_B^E \bar{M}_1(s_B)M_\Gamma(s_B)ds_B + \int_E^D \bar{M}_1(s_E)M_\Gamma(s_E)ds_E + + \int_D^C \bar{M}_1(s_D)M_\Gamma(s_D)ds_D + \int_C^A \bar{M}_1(s_C)M_\Gamma(s_C)ds_C;$$

$$\Delta_1 = 2/6(0\cdot 0 + 4\cdot 1\cdot(-2{,}5) + 2\cdot(-10)) - 2/6\,(2\cdot 10 + 4\cdot 2\cdot 10 + 2\cdot 10) - -2/6\,(2\cdot 10 + 4\cdot 2\cdot 30 + 2\cdot 50) - 4/6\,(2\cdot 50 + 4\cdot 0\cdot 30 + (-2)\cdot 10) = -22300;$$

$$\Delta_2 = \int_B^E \bar{M}_2(s_B)M_\Gamma(s_B)ds_B + \int_E^D \bar{M}_2(s_E)M_\Gamma(s_E)ds_E + + \int_D^C \bar{M}_2(s_D)M_\Gamma(s_D)ds_D + \int_C^A \bar{M}_2(s_C)M_\Gamma(s_C)ds_C;$$

$$\Delta_2 = -2/6\,(0\cdot 0 + 4\cdot 0\cdot 2{,}5 + 2\cdot 10) - 2/6\,(0\cdot 10 + 4\cdot 1\cdot 10 + 2\cdot 10) - -2/6\,(2\cdot 10 + 4\cdot 3\cdot 30 + 4\cdot 50) - 4/6\,(4\cdot 50 + 4\cdot 4\cdot 30 + 4\cdot 10) = -693.$$

6. *Решение системы канонических уравнений метода сил.*

Получена система канонических уравнений метода сил

$$\begin{cases} 24X_1 + 16\,X_2 - 22300 = 0; \\ 16\,X_1 + 85{,}3X_2 - 693 = 0. \end{cases}$$

Корни системы: $X_1 = 4{,}44$; и $X_2 = 7{,}29$.

7. *Эпюры внутренних силовых факторов в заданной раме.*

7.1. *Изгибающий момент.* Действующий в раме момент находим по формуле:

$$M(s) = M_F(s) + X_1\bar{M}_1(s) + X_2\bar{M}_2(s).$$

Моменты, действующие на отдельных стержнях рамы, равны:

$M(s_B = 0) = 0 + 4{,}44 \cdot 0 + 7{,}29 \cdot 0 = 0$;

$M(s_B = 1) = -2{,}5 + 4{,}44 \cdot 1 + 7{,}29 \cdot 0 = 1{,}94$;

$M(s_B = 2) = M(s_E = 0) = -10 + 4{,}44 \cdot 2 + 7{,}29 \cdot 0 = -1{,}11$;

$M(s_E = 1) = -10 + 4{,}44 \cdot 2 + 7{,}29 \cdot 1 = 6{,}18$;

$M(s_E = 2) = M(s_D = 0) = -10 + 4{,}44 \cdot 2 + 7{,}29 \cdot 2 = 13{,}5$;

$M(s_D = 1) = -30 + 4{,}44 \cdot 2 + 7{,}29 \cdot 3 = 0{,}764$;

$M(s_D = 2) = M(s_C = 0) = -50 + 4{,}44 \cdot 2 + 7{,}29 \cdot 4 = -11{,}9$;

$M(s_C = 2) = -30 + 4{,}44 \cdot 0 + 7{,}29 \cdot 2 = -0{,}833$;

$M(s_C = 4) = -10 + 4{,}44 \cdot (-2) + 7{,}29 \cdot 4 = 10{,}3$.

Эпюра изгибающих моментов в статически неопределимой раме построена на рис. 9.21.а

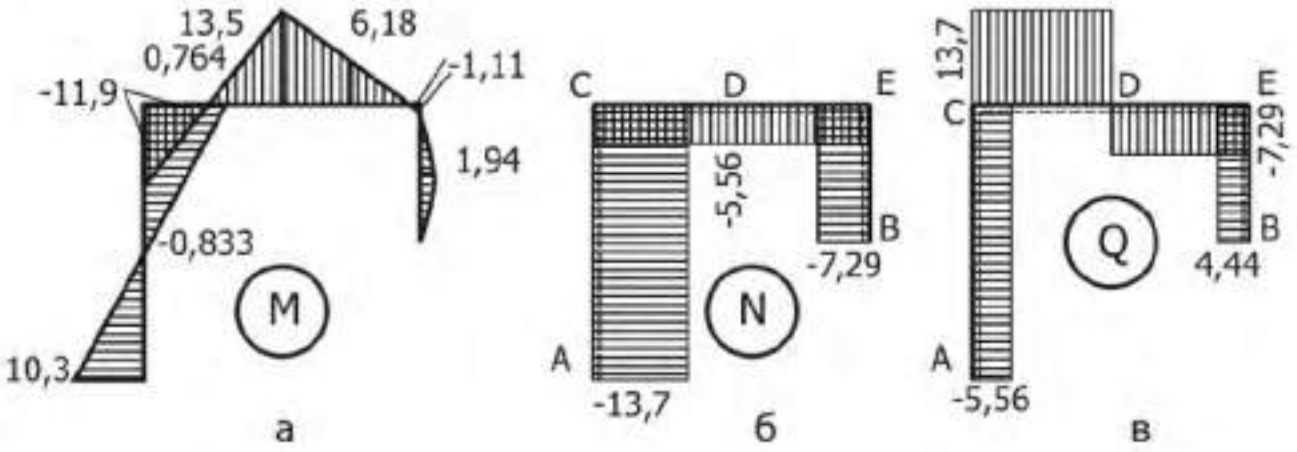


Рис. 9.21 Эпюры момента M, осевой силы N, поперечной силы Q

7.2. *Опорные реакции X_A,Y_A.* Из уравнений равновесия получаем:

$\sum X = 0$; $X_A = q\,h/2 - X_1 = 5 \cdot 4/2 - 4{,}44 = 5{,}56$ кН;

$\sum Y = 0$; $Y_A = P - X_2 = 20 - 7{,}29 = 12{,}7$ кН.

7.3. *Эпюра осевых сил N.* Растягивающую силу считаем положительной и откладываем на наружных волокнах стержня (рис. 9.21.б).

7.4. *Эпюра поперечной силы Q.* Поперечной сила считается положительной, если она вместе с внешней нагрузкой поворачивает отрезанный кусок по ходу стрелок часов. Эпюра Q приведена на рис. 9.21.в.

8. *Деформационная проверка.* Проверка состоит в проверке выполнения условий обращения в нуль интегралов:

$D1 = \sum 1/EJ \int M(s)\bar{M}_1(s)ds$; $D2 = \sum 1/EJ \int M(s)\bar{M}_2(s)ds$.

В результате вычислений получаем: $D1 = -0{,}0000553, \quad D2 = 0{,}000213.$

9. *Подбор сечения двутавровой балки.*
$W = M_{max}/[\sigma] = 13{,}510^3/1{,}610^8 = 8{,}43 \cdot 10^{-5}$ м^3 . Выбираем двутавр №16.
$W_{16} = 109 \cdot 10^{-4}$ м^3

ОФОРМЛЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Расчётно-пояснительная записка дипломного проекта выполняется на листах формата А4 (210х297 мм) в соответствии с ГОСТ 2.301-68. ЕСКД.

Листы должны иметь нумерацию. При оформлении записки на титульном листе указать тему РГР, фамилию, инициалы студента, специальность и группу.

При выполнении задания все преобразования и числовые расчёты должны быть последовательно проделаны с необходимыми пояснениями.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ицкович Г. М., Минин Л. С., Винокуров А. И.*Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. М.:Высшая школа,1999.

2. *Мокрушин Н. В., Ляпцев С. А.*Конспект лекций по сопротивлению материалов. Екатеринбург, Издание УГГУ, 2005.

3. *Степин П.А.* Сопротивление материалов. М.: Лань, 2010.

Учебное издание

Чиркова Алена Анатольевна, Золкин Анатолий Павлович,
Суслов Дмитрий Николаевич, Афанасьев Анатолий Ильич.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие
и контрольные задания для выполнения РГР
и самостоятельной работы студентов специальности *21.05.04 Горное дело*

Редактор *В.В. Баклаева*

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 5,2 Уч. изд. л. 1,72 Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Специальность

21.05.04 Горное дело

Авторы: Двинин Л.А., доцент, к.т.н., Двинина Л. Б., доцент, к.т.н.

Екатеринбург
2019

Методические указания адресованы студентам, обучающимся по направлению подготовки 21.05.04 Горное дело, и призваны обеспечить эффективную самостоятельную работу по курсу «ГИДРОМЕХАНИКА»

ОБЪЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Суммарный объем часов на СРО *очной формы обучения* составляет 116 часов.

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Единица измерения	Норма времен. час	Расчетная трудоемкость СРО по нормам, час.	Принятая трудоемкость СРО, час.
Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям					89
1	Повторение материала лекций	1 час	0,1-4,0	0, 5 х 32= 16	16
2	Самостоятельное изучение тем курса	1 тема	1.0-8.0	6.0 х 4 = 24	24
3	Ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля)	1 тема	0,3-0,5	0,5 х 10 = 5	5
4	Подготовка к практическим занятиям	1 занятие	0,3-2,0	1 х 32= 32	32
5	Подготовка к контрольным работам	1 работа	1,0-25.0	3 х 4 = 12	12
Другие виды самостоятельной работы					27
7	Подготовка к экзамену	1 экзамен		27	27
	Итого				116

Суммарный объем часов на СРО *заочной формы* обучения составляет 168 час.

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Единица измерения	Норма времен. час	Расчетная трудоемкость СРО по нормам. час.	Принятая трудоемкость СРО, час.
Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям					101
1	Повторение материала лекций	1 час	0.1-4,0	4,0 х 6= 24	24
2	Самостоятельное изучение тем курса	1 тема	1.0-8,0	8,0 х 4 = 32	32
3	Ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля)	1 тема	0.3-0,5	0,5 х 16 = 8	8
4	Подготовка к практическим занятиям	1 занятие	0,3-2,0	2 х 6 = 12	12
5	Подготовка к контрольной работе	1 работа	1,0-25,0	25 х 1 = 25	25
Другие виды самостоятельной работы					67
6	Подготовка и написание расчетно-графической работы	1 работа	58	58 х 1 – 58	58
	Подготовка к экзамену	1 экзамен		9	9
	Итого				168

Форма контроля самостоятельной работы студентов – проверка на практическом занятии, контрольные работы, экзамен.

ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа по темам 1-4

Расчетно-графическая работа:

1.Кинематический анализ механизма. Кинетостатический анализ механизма.
2.Анализ и синтез кулачковых механизмов.
3. Зубчатые передачи и расчет их основных параметров.
4. Расчеты на прочность заклепочных и сварных соединений.
5. Расчеты на прочность резьбовых, шпоночных и зубчатых соединений.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, владений (опыта деятельности), характеризующие формирование компетенций

Ознакомление обучающихся с процедурой и алгоритмом оценивания (в начале изучения дисциплины).

Проверка ответов на задания, выполненных работ.

Сообщение результатов оценивания обучающимся, обсуждение результатов.

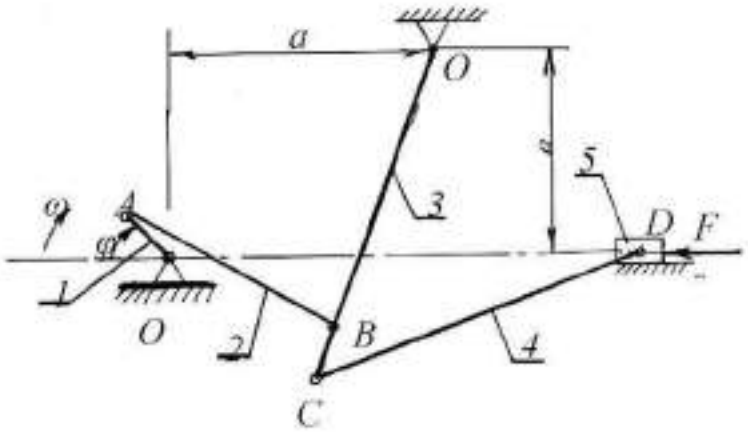
Оформление необходимой документации.

Подготовка к контрольной работе проводится студентом самостоятельно в рамках часов, выделенных на самостоятельную работу в учебном плане.

Контрольная работа № 1 по теме 2

Кинематический анализ плоского механизма (инерционный конвейер).

Инерционный конвейер состоит из кривошипа 1. шатуна 2, коромысла 3, шатуна 4 и рештака (ползуна) 5.

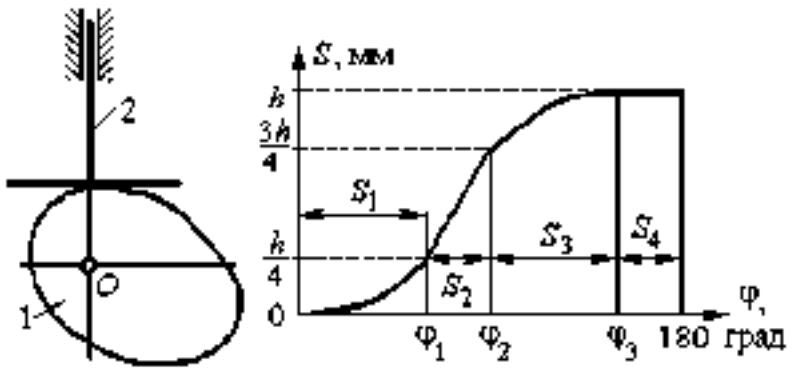


№ варианта	φ - Угол поворота кривошипа, град	*a, мм.*	*в, мм.*	*O_1A, мм.*	*AB, мм.*	*O_2B, мм.*	*O_2C, мм.*	*CD, мм*	Скорость вращения кривошипа, об/мин
1	45	900	700	200	800	1000	1200	1200	190
2	90	900	700	200	800	1000	1200	1200	95
3	235	60	40	100	110	120	100	250	200
4	255	40	60	100	110	120	120	250	180
5	120	150	50	100	290	250	150	300	150
6	115	350	110	100	230	250	250	400	170
7	140	40	60	100	110	120	150	400	250
8	50	75	0	100	110	120	120	300	190
9	148	800	600	240	920	840	900	1450	100

10	150	800	600	250	1060	8760	500	650	120

Контрольная работа № 2 по теме 3

Построить профиль кулачка по заданному закону движения толкателя



$S_{max} = h$

Вид законов движения толкателя по фазам движения кулачка

1-й участок: $0 \le \varphi \le \varphi_1$

Парабола с вершиной при $\varphi = 0$.

2-й участок: $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

Линейный закон движения

3-й участок: $\varphi_2 \le \varphi \le \varphi_3$

Парабола с вершиной при $\varphi = \varphi_3$

4-й участок: $\varphi_3 \le \varphi \le 180^\circ$.

Движения нет, $S_4 = h$

Параметры	Обозначение	Варианты исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Максимальный ход толкателя, мм	h	12	18	16	22	18	16	15	18	20	12
Границы фаз движения толкателя, рад	φ_1	60	85	75	80	65	90	85	68	82	92
	φ_2	100	125	100	115	100	125	135	102	125	130
	φ_3	160	165	145	160	150	160	170	162	162	170

Контрольная работа № 3 по теме 4

Выполнить проектировочный расчет одноступенчатой зубчатой передачи на усталостную прочность. Передача длительной эксплуатации. Двигатель передает мощность P при оборотах n_1, равных оборотам ведущего вала-шестерни, передаточное число редуктора равно u. Конструкции узла с симметричным расположением колеса относительно точек опоры вала даны на рис. 1 Материал вала сталь 45Х, термообработка – улучшение. Предел прочности материала σ_B. Допустимое напряжение смятия шпонок $[\sigma]_{см}$ = 100 МПа

Обозначения, принятые на схемах конструкций узлов:

l, $d_к$ - длина и диаметр консольной части вала;

$l_п$, $d_п$ – длина и диаметр участка вала в месте посадки подшипника;

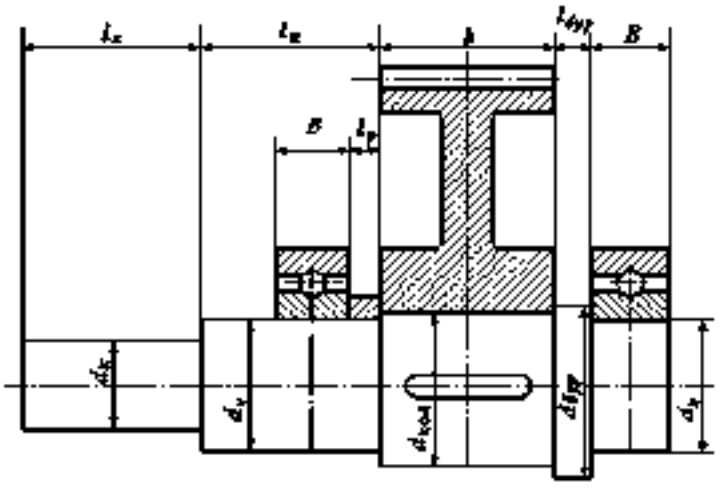
B - ширина подшипника;

$d_{ст}$ - диаметр вала под зубчатым колесом;

b - ширина зубчатого колеса;

$l_{бр}$, $d_{бр}$ - длина и диаметр буртика на валу;

$l_р$ - длина распорной втулки.

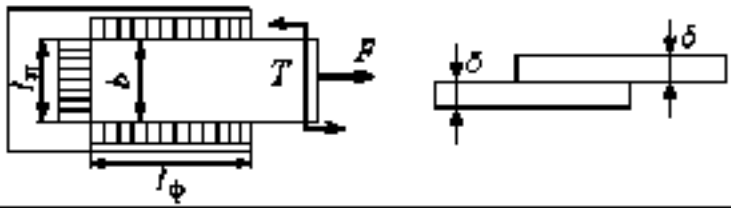


Исходные данные для зубчатой передачи

Параметр	Варианты заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P, кВт	7,51	11	15	18,5	22	30	3	4	5,5	7,5
n_1,об/мин	1455	1460	1465	1465	1470	1470	700	720	720	730
u	8	9	6,3	7,1	4,5	5,6	2,8	3,55	4	4,5
$\sigma_в$, МПа	750	700	650	750	700	650	750	700	650	700

Контрольная работа № 4 по теме 5

Рассчитать сварное соединение, нагруженное центральным растягивающим усилием F и парой сил с моментом T, действующим в плоскости свариваемых листов. Материал скрепляемых листов (основного металла) - Ст3, Ст5 или Ст6. Толщина листов δ, запас прочности сварного шва s. Характер нагрузки статический. Сварка автоматическая под слоем флюса или ручная дуговая электродами Э42, Э50

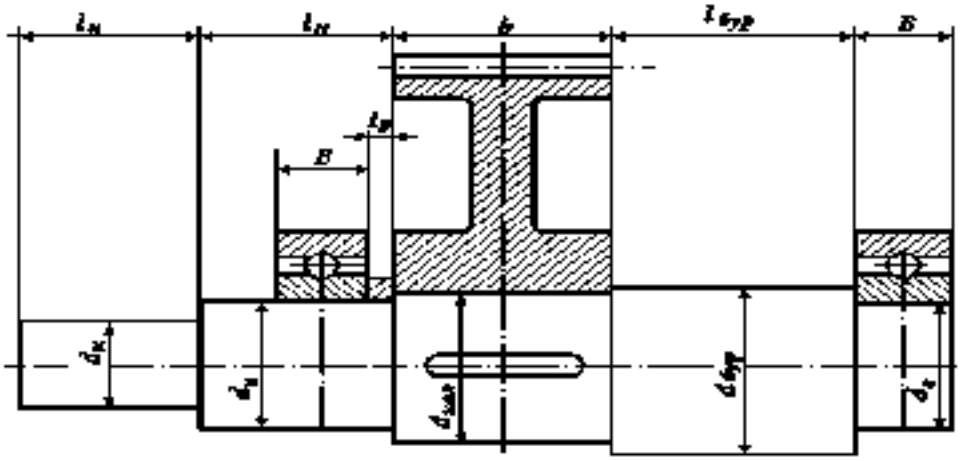


Параметры соединения	Номер задания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Материал	Ст5	Ст6	Ст3	Ст6	Ст5	Ст6	Ст3	Ст5	Ст6	Ст3
F, кН	23	26	20	31	27	29	18	25	32	18
T, кНм	8	10	6	10	8	10	12	10	14	8
δ, мм	6	8	10	12	14	16	8	10	12	14
Запас прочн-ти s	1,4	1,5	1,6	1,5	1,6	1,4	1,6	1,4	1,5	1,6
Сварка	РучнЭ 50А	РучнЭ 42	Авто-маги-	РучнЭ 50А	РучнЭ 50	РучнЭ 42А	РучнЭ 50	Авто-маги-	РучнЭ 50	РучнЭ 42

электрод			ческая					ческая		

Контрольная работа № 5 по теме 6

Выполнить расчет шпоночного соединения тихоходного вала цилиндрического одноступенчатого редуктора. Двигатель передает мощность P при оборотах n_1, равных оборотам ведущего вала-шестерни, передаточное число редуктора равно u. Конструкции узла с несимметричным расположением колеса относительно точек опоры вала даны на рис. 2. Материал вала сталь 40Х, улучшение. Предел прочности материала σ_B. Допустимое напряжение смятия шпонок $[\sigma]_{см}$ = 120 МПа.



Обозначения, принятые на схемах конструкций узлов:

$l_в$, $d_в$ - длина и диаметр консольной части вала;

$l_п$, $d_п$ – длина и диаметр участка вала в месте посадки подшипника;

B - ширина подшипника;

$d_{кол}$ - диаметр вала под зубчатым колесом;

b - ширина зубчатого колеса;

$l_{бур}$, $d_{бур}$ - длина и диаметр буртика на валу;

$l_р$ - длина распорной втулки.

Исходные данные для шпоночного соединения

Параметр	Варианты заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P, кВт	11	15	18.5	22	30	37	45	4	5.5	7.5
n_1, об/мин	730	730	730	730	740	740	735	950	965	960
u	2.8	3.55	2	4	4,5	3.5	6	3.55	4	4.5
σ_B, МПа	750	650	700	750	650	700	750	650	650	700

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ГИДРОМЕХАНИКА

Специальность

21.05.04 Горное дело

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2019

Авторы: Двинин Л.А., доцент, к.т.н., Двинина Л. Б., доцент, к.т.н.

Екатеринбург
2019

Методические указания адресованы студентам, обучающимся по направлению подготовки 21.05.04 Горное дело, и призваны обеспечить эффективную самостоятельную работу по курсу «ГИДРОМЕХАНИКА»

ОБЪЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Суммарный объем часов на СРО *очной формы обучения* составляет 96 часов.

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Единица измерения	Норма времен. час	Расчетная трудоемкость СРО по нормам, час.	Принятая трудоемкость СРО. час.
Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям					92
1	Повторение материала лекций	1 час	0,1-4,0	1 х 32= 32	32
2	Самостоятельное изучение тем курса	1 тема	1.0-8,0	8,0 х 3 = 24	24
3	Ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля)	1 тема	0.3-0,5	0,5 х 20 = 10	10
4	Подготовка к практическим занятиям	1 занятие	0.3-2,0	1,2 х 16= 19.2	20
5	Подготовка к контрольным работам	1 работа	1.0-25.0	2 х 3 = 6	6
Другие виды самостоятельной работы					4
7	Подготовка к зачету	1 зачет		4	4
	Итого				96

Суммарный объем часов на СРО *заочной формы* обучения составляет 132 час.

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Единица измерения	Норма времен. час	Расчетная трудоемкость СРО по нормам. час.	Принятая трудоемкость СРО. час.
Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к аудиторным занятиям					128
1	Повторение материала лекций	1 час	0,1-4,0	4,0 х 6= 24	24
2	Самостоятельное изучение тем курса	1 тема	1,0-8,0	8,0 х 6 = 48	48
3	Ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля)	1 тема	0,3-0,5	0,5 х 46 = 23	23
4	Подготовка к практическим занятиям	1 занятие	0.3-2,0	2 х 6 = 12	12
5	Подготовка к контрольной работе	1 работа	1,0-25.0	25 х 1 = 25	25
Другие виды самостоятельной работы					4
	Подготовка к зачету	1 зачет		4	4
	Итого				132

Форма контроля самостоятельной работы студентов – проверка на практическом занятии, контрольные работы, экзамен.

ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа по темам 1-4

Расчетно-графические работы выполняются по методической литературе, изданной кафедрой.

Часс С. И. [Текст]: Гидромеханика Сборник задач. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010 – 145 с.

Часс С. И. [Текст]: Гидравлика Гидромеханика Сборник задач и контрольных заданий. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2009.– 137 с.

Номера вариантов берутся по номеру в списке группы или назначаются преподавателем, номера заданий берутся по таблице.

Методические рекомендации для решения задач и примеры для самостоятельного решения приведены в учебных пособиях.

Бебешина Т.П. Гидромеханика: Конспект лекций. Екатеринбург. Изд-во УГГУ. 2016. 224 с.

Часс С. И.: Гидравлика, гидромеханика Механика жидкости и газа. Учебное пособие – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013 – 215 с

Для подготовки к практическим занятиям преподаватель может привлекать дополнительную литературу, а также раздаточный материал

Подготовка к контрольной работе проводится студентом самостоятельно в рамках часов, выделенных на самостоятельную работу в учебном плане

Контрольная работа № 1 (Гидростатика)

№1

1.Дать понятие вязкости жидкости. Представить коэффициенты, характеризующие вязкость жидкости, единицы измерения коэффициентов Записать закон Ньютона

2 Представить давление p=720 мм рт ст в единицах измерения системы СИ

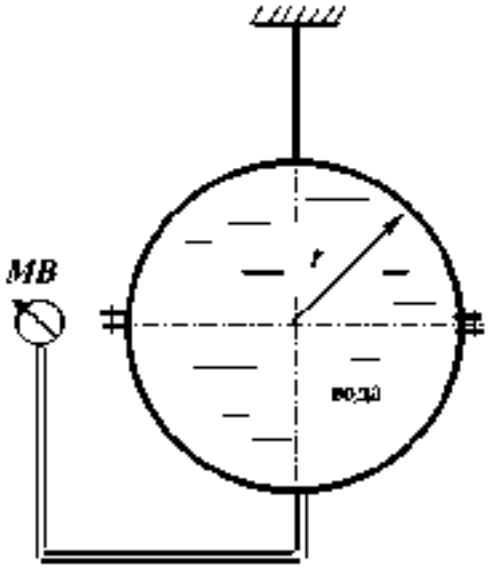
3.Определить какое давление – манометрическое или вакуум – показывает мановакуумметр, если абсолютное давление в измеряемой области равно 68 кПа. Величину давления представить в барах.

4 Определить давление в резервуаре, заполненном водой, на глубине h = 1,2 м, если избыточное давление на поверхности жидкости $p_{изб}$=62 кПа

5.Сформулировать закон Архимеда.

Задача

Шаровой сосуд радиусом r = 0,4 м, заполненный водой, висит на тяге, прикрепленной к его верхней половине. Найти давление в центре сосуда (показание пружинного мановакуумметра MB), при котором нижнюю половину сосуда, имеющую силу тяжести G =1500 Н, можно не закреплять. Каким должно быть показание прибора, если силу тяжести не учитывать?



№2

1 Записать формулу связи коэффициентов вязкости: динамического μ и кинематического ν

2.Представить давление p = 1,2 ат в единицах измерения системы СИ.

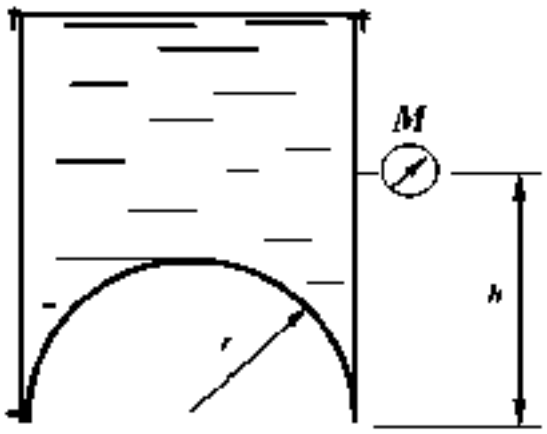
3 Определить абсолютное давление в резервуаре, заполненном воздухом, если показание вакуумметра, установленного на резервуаре, равно $p_{вак}$=0.6 ат

4.Определить каким будет показание манометра (в бар), установленного на глубине h =1,2 м открытого резервуара, заполненного бензином. Плотность бензина ρб= 700 кг/м^3

5 Записать дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Задача

Определить силу давления воды на полусферическое дно резервуара радиуса r = 1 м, если показание манометра M, установленного на расстоянии h = 1,3 м, равняется $p_{ман}$= 0,2 бар.


M
h
r

№3.

1 Дать понятие физического свойства жидкости *сжимаемость*.
Привести формулу коэффициента объемного сжатия

2 Представить давление p = 196 кПа в атмосферах технических (ат)

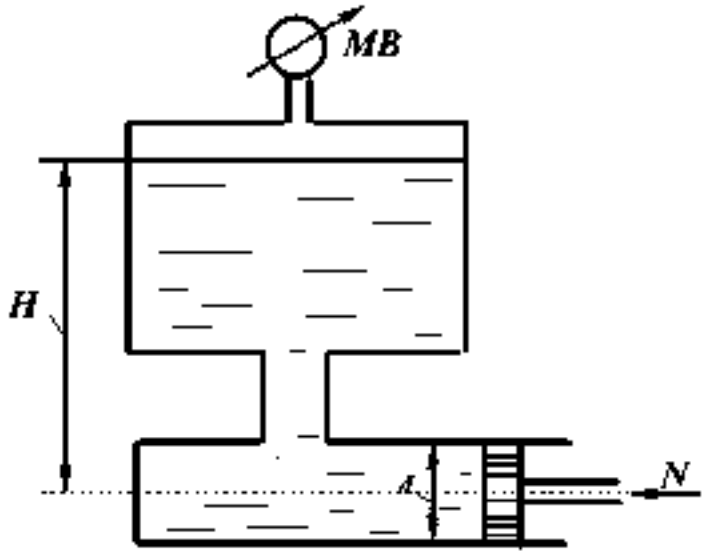
3.Манометрическое давление в измеряемой области равно $p_{изб}$ = 32 кПа. Записать величину абсолютного давления в области измерения.

4 Избыточное давление на поверхности масла в закрытом резервуаре равно $p_{изб}$= 0.13 ат. На какой глубине h установлен манометр, если его показание равно $p_{изб}$= 0,31 ат. плотность масла $\rho_м$= 900 кг/м^3.

5 Записать гидростатический закон распределения давления

Задача

Определить усилие N, которое надо приложить к штоку поршня для удержания его на месте, если показание мановакуумметра $p_{мв}$= 0,5 ати, диаметр штока d = 100 мм, высота уровня масла над осью штока H = 1,5 м, плотность масла $\rho_м$ = 800 кг/м^3.



№4

1 Дать понятие физического явления *кавитация*.
2 Представить давление p = 500 мм рт ст. в единицах измерения системы СИ.

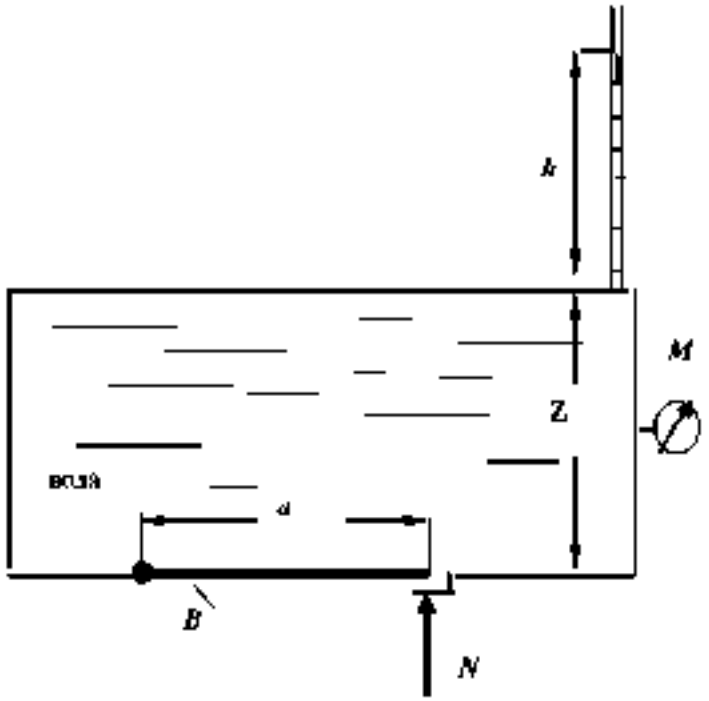
3 Вакуумметрическое давление в измеряемой области равно $p_{вак}$=38 кПа, записать величину абсолютного давления в области измерения.

4 Определить, каким должно быть давление на поверхности масла закрытого резервуара, если показание манометра на глубине h = 0,8 м равно $p_{ман}$= 0,12 ат. Плотность масла принять равной $\rho_м$ =900 кг/м^3.

5 Сформулировать закон Паскаля

Задача

Определить показание манометра M в центре боковой стенки резервуара с водой, а также усилие N, приложенное к запорному устройству плоской квадратной крышки B при следующих данных: Z = 3 м; h = 2 м; a = 1 м.



№5

1 Дать понятие гидростатического давления. Свойства гидростатического давления. Единицы измерения давления в системе СИ.

2 Представить давление p = 200 мм рт. ст. в Па.

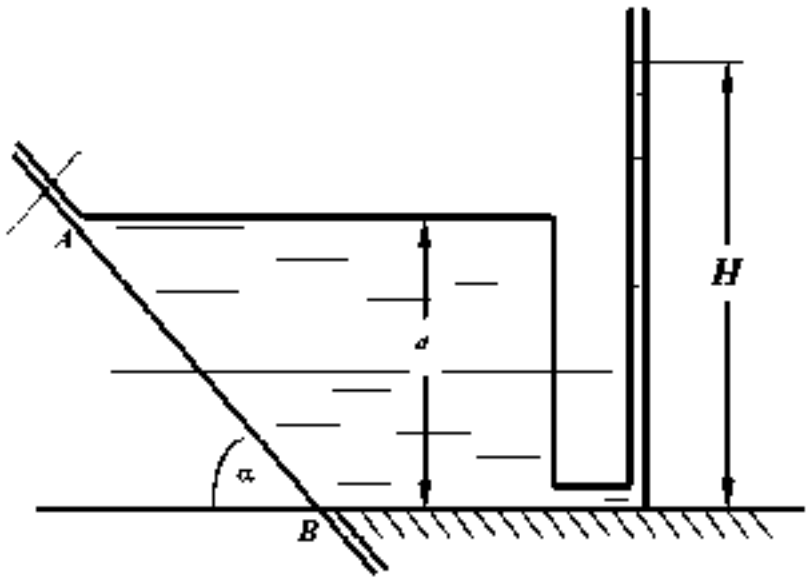
3 Определить, какое давление, манометрическое или вакуум, показывает мановакуумметр и его величину, если абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$ = 0,8 ат

4 Определить, каким будет показание мановакуумметра на глубине h = 2,2 м закрытого резервуара, заполненного водой, если на поверхности жидкости действует вакуумметрическое давление $p_{вак}$ = 0,1 ат

5 Дать определение свойства жидкости *вязкость*.

Задача

Определить силу давления на крышку маслобака AB, если показание пьезометра H = 400 мм, угол наклона крышки α = 45° В сечении бак имеет форму квадрата со стороной a = 200 мм Плотность масла ρ_M = 900 кг/м^3



№6

1. Дать понятие плоскости уровня, представить уравнение плоскости уровня.

2. Представить перевод давления p =1,2 ат в м вод.ст., в Па.

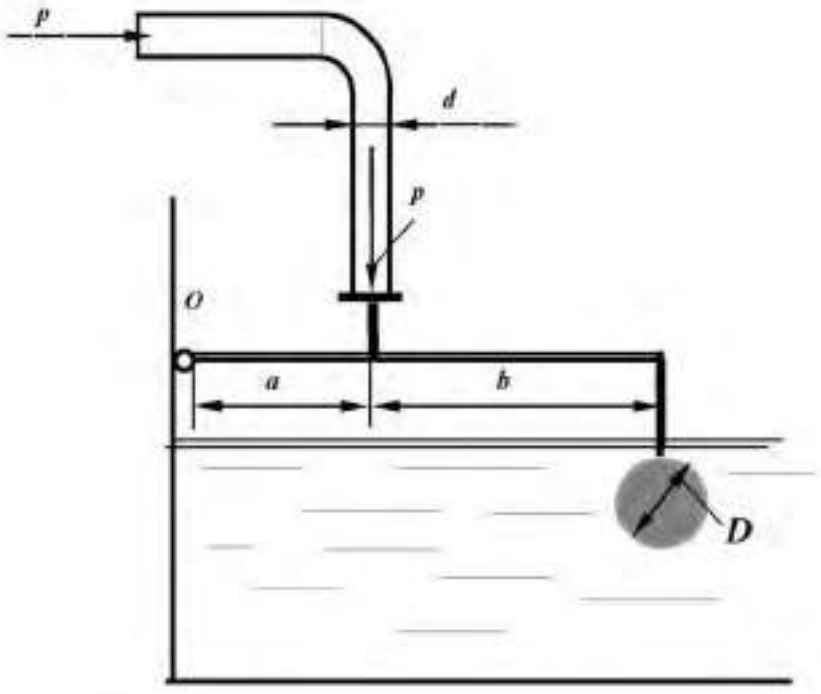
3. Дать понятие абсолютного давления. Записать абсолютное давление при манометрическом давлении $p_{ман}$= 32 кПа.

4. Показание манометра на определенной глубине в открытом резервуаре с водой равно $p_{ман}$=0,14 ат. Определить, как изменится показание манометра на той же глубине, если резервуар заполнить маслом плотностью $\rho_м$= 800 кг/м^3.

5. Нарисовать схему пьезометра для измерения абсолютного давления.

Задача

Вода, подаваемая под давлением p = 2,5 ати по трубе d = 150 мм, заполняет резервуар. Определить минимально необходимый диаметр D шарообразного поплавка, обеспечивающий автоматическое закрытие клапана при наполнении резервуара, если: a = 100 мм; b = 500 мм. Собственным весом рычага, клапана и поплавка пренебречь



№7

1. Записать основное уравнение гидростатики, пояснить все входящие в него параметры.

2. Представить давление p = 1,6 ат в единицах измерения системы СИ.

3. Дать понятие абсолютного давления. Записать величину абсолютного давления при вакуумметрическом давлении $p_{вак}$= 38 кПа.

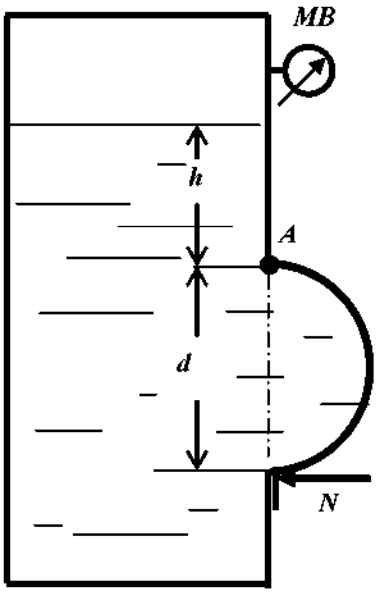
4. Показание манометра на определенной глубине открытого резервуара, заполненного бензином плотностью $\rho_{бен}$= 700 кг/м^3, равно $p_{ман}$= 0,12 ат. Как изменится показание манометра на той же глубине, если резервуар заполнить маслом плотностью $\rho_{мас}$= 900 кг/м^3.

5. По какой формуле следует определять силу давления жидкости на плоскую стенку, если на свободной поверхности жидкости действует абсолютное давление p_0 больше атмосферного, а не смоченная сторона стенки находится под атмосферным давлением?

Задача

Закрытый резервуар заполнен дизельным топливом с плотностью ρ = 846 кг/м^3. В вертикальной стенке резервуара имеется прямоугольное отверстие, закрытое полуцилиндрической крышкой. Она может поворачиваться вокруг горизонтальной оси в точке A. Пренебрегая силой тяжести крышки, определить усилие N, которое нужно приложить к крышке, чтобы она не открывалась при следующих данных: p_{MB} = 11,4 кПа; d = 1 м; h = 1 м; b =1,2 м.

Размер b перпендикулярен плоскости чертежа.



№8

1.Записать гидростатический закон распределения давления. Дать определение геометрического и пьезометрического напоров

2 Представить давление p =196 кПа в технических атмосферах (ат).

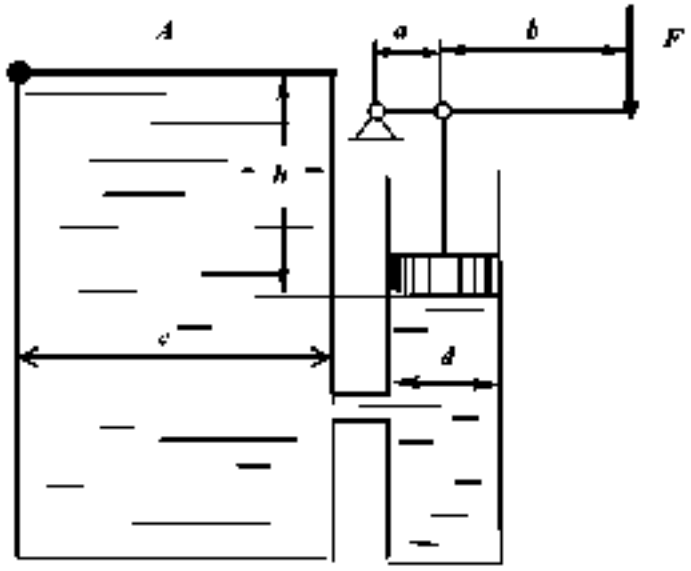
3.Определение абсолютного давления Чему равно абсолютное давление при манометрическом давлении $p_{ман}$= 62 кПа

4.Показание манометра, установленного на закрытом резервуаре, заполненном маслом плотностью $\rho_{мас}$= 800 кг/м^3, равно $p_{ман}$= 0,12 ат. Рассчитать, какой должна быть высота уровня масла в пьезометре, выведенном на уровне установки манометра

5.Дать понятие тела давления, на примерах пояснить различные тела давления

Задача

К рычагу гидроусилителя приложена сила F. Определить силу давления жидкости с плотностью ρ = 900 кг/м^3 на квадратную крышку A при следующих данных: F = 180 Н; d = 40 мм; c = 1 м; h = 1 м; a = 10 мм; b = 40 мм



№9

1 Понятие гидростатического давления. Расчетная формула давления Единицы измерения давления.

2 Представить давление, равное p = 12 м вод. ст., в единицах измерения системы СИ

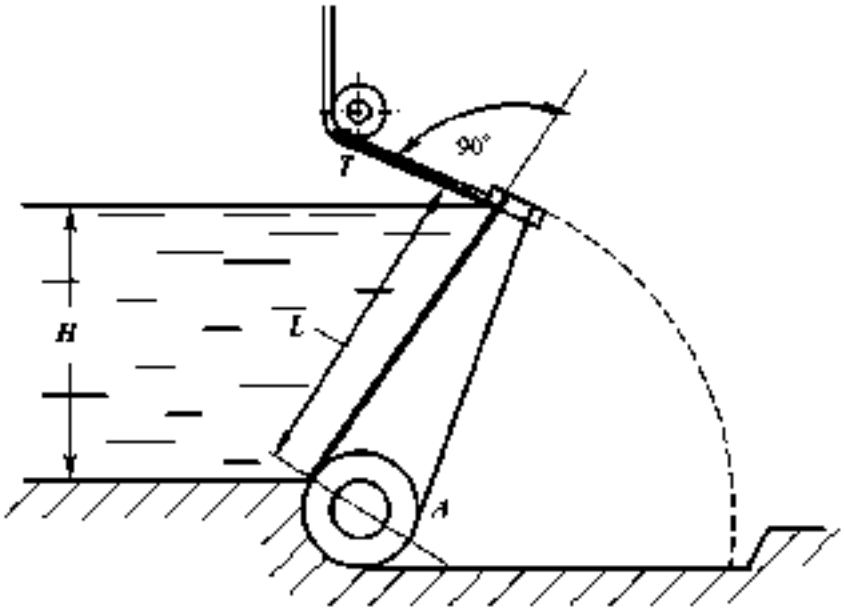
3.Абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$ = 0,38 ат. Установить, каким прибором следует пользоваться для измерения давления, рассчитать его величину в системе СИ.

4 Определить давление на поверхности жидкости закрытого резервуара, если показание ртутного U- образного манометра, установленного на глубине h = 1,5 м равно p = 100 мм рт.ст.

5.Какой зависимостью выражается гидростатический напор?

Задача

Плоский прямоугольный затвор с размерами L = 2,5 м и B = 10 м создает подпор воды H = 2,3 м. Затвор может вращаться относительно оси шарнира A. Определить силу натяжения троса T, удерживающую затвор в заданном положении. Размер B перпендикулярен плоскости чертежа



№10

1.Понятие физического свойства ***вязкость***. Коэффициенты, характеризующие вязкость, единицы их измерения

2.Перевести давление, равное 12 м вод.ст , в мм рт.ст

3 Дать понятие абсолютного давления Записать величину абсолютного давления в измеряемой области, если показание манометра в этой области равно $p_{изб}$= 0,8 ат

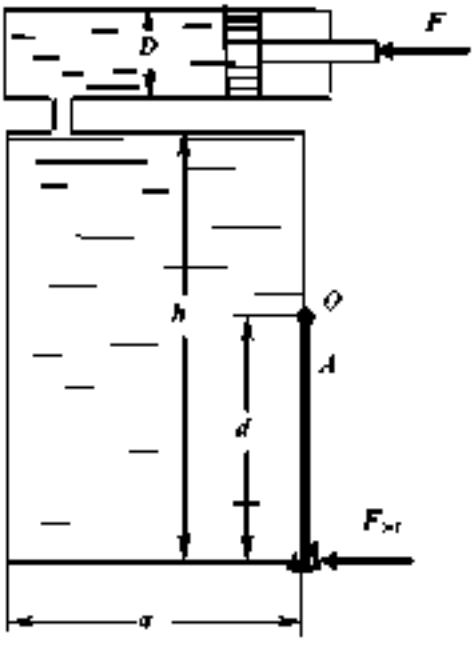
4 Вакуумметрическое давление на поверхности воды в закрытом резервуаре равно $p_{вак}$= 0.6 ат. Установить, каким прибором следует измерить давление на глубине h = 1.5 м и рассчитать его величину.

5.Как расположена линия действия силы избыточного (весового) давления жидкости, действующей на плоскую фигуру любой формы?

Задача

Жидкость в емкости *нагрев* нагревается на 20°С Определить усилие F, которое надо приложить к поршню расширительного цилиндра диаметром D, чтобы сохранился прежний объем жидкости?

А также найти усилие $F_{кл}$, на которое должен быть рассчитан затвор круглой крышки диаметром d: ρ = 1000 кг/м^3, d =500 мм, D =260 мм, h = 2 м, a =1,5 м, β_T=150·10^{-6}1/град, β_p=0,5 ·10^{-10}Па$^{-1}$



№11

1. Понятие *плоскости уровня*. Уравнение плоскости уровня Значение параметров, входящих в уравнение

2. Представить перевод давления p = 100 мм рт. ст. в единицах измерения системы СИ

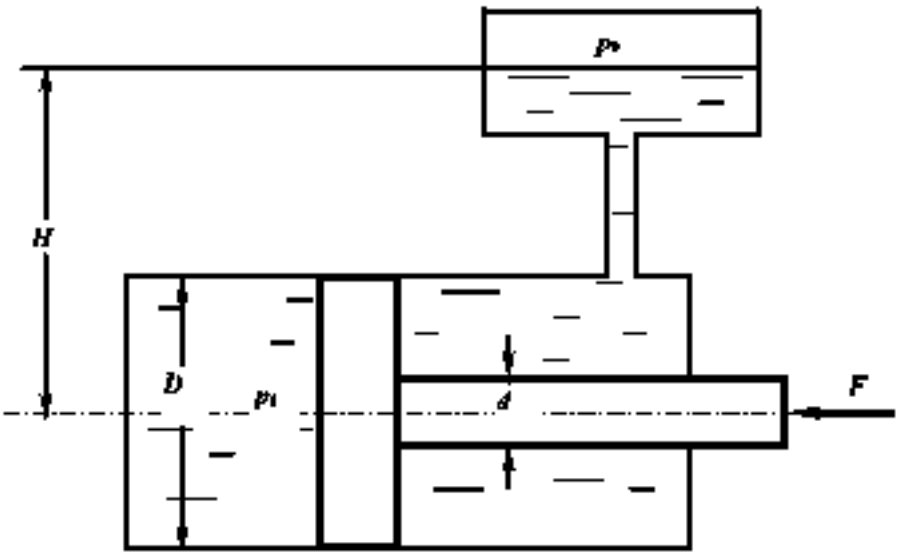
3 Записать величину абсолютного давления в измеряемой области, если показание вакуумметра в этой области $p_{вак}$= 0,6 ат

4 Вакуумметрическое давление на поверхности закрытого резервуара равно $p_{вак}$= 0,1 ат Установить каким прибором следует измерить давление на глубине h = 3,0 м и рассчитать его величину

5. Размерность кинематического коэффициента вязкости в системе СИ

Задача

Определить давление жидкости p_1 в гидроцилиндре, необходимое для преодоления усилия на штоке F при следующих данных: F = 10 кН; диаметр поршня D =160 мм; диаметр штока d = 80 мм; p_0 = 20 кПа, H = 10 м, ρ =900 кг/м^3



№12

1.Записать гидростатический закон распределения давления. Дать понятие геометрического и пьезометрического напоров.

2 Представить давление p = 68 кПа в м вод. ст

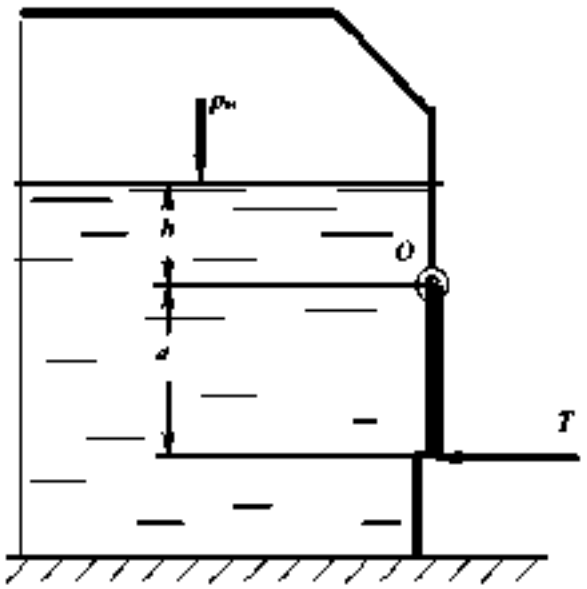
3.Абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$ =198 кПа. Установить, каким прибором следует пользоваться для измерения давления и рассчитать показание этого прибора

4.Показание манометра на глубине h = 1,5 м закрытого резервуара, заполненного водой, равно $p_{ман}$= 0,121 ат. Определить, каким будет показание манометра на той же глубине, если резервуар будет заполнен маслом. Плотность масла равна $\rho_{мас}$= 800 кг/м^3.

5 Записать дифференциальные уравнения равновесия жидкости, пояснить параметры, входящие в уравнения.

Задача

Усилие T удерживает плоскую квадратную крышку со стороной a в закрытом положении Определить предельно допустимое значение избыточного давления над уровнем жидкости $p_м$, при котором крышка остается в закрытом положении, при следующих данных: T = 2100 Н, a = 50 см, h = 2 м, ρ =1000 кг/м^3.



№13

1 Понятие физического свойства жидкости ***капиллярность***

2 Представить давление p = 300 мм рт.ст. в единицах измерения системы СИ

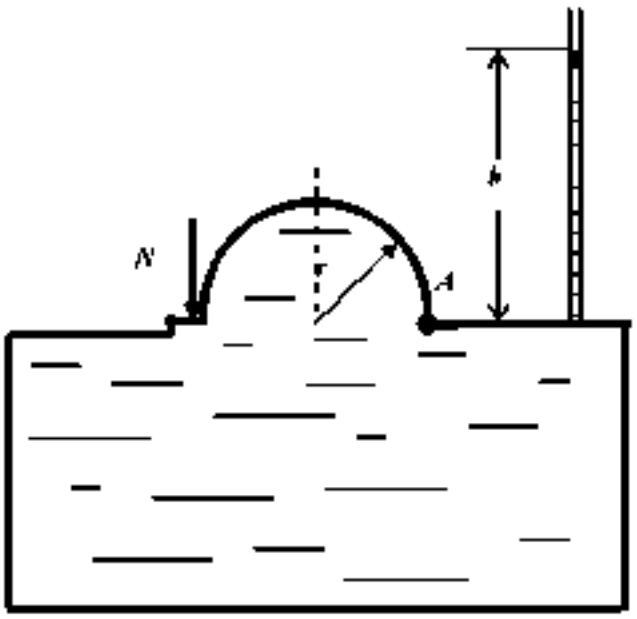
3 Показание манометра в измеряемой области равно $p_{ман}$= 0.12 ат Представить расчет абсолютного давления в этой области и его величину в системе СИ

4 В закрытом резервуаре, заполненном бензином, показание манометра на некоторой глубине составляет $p_{ман}$= 0,07 ат. Определить пьезометрическую высоту, соответствующую этому давлению: $\rho_б$=700 кг/м^3.

5 Каковы единица измерения ***динамической вязкости*** ?

Задача

Определить усилие N, которое нужно приложить к цилиндрическому затвору, установленному на квадратном отверстии крышки резервуара с водой, при следующих данных: h = 1м, r = 0,2 м. Затвор поворачивается вокруг шарнира в точке A



№14

1. Представить ***основное уравнение гидростатики***, дать определение, пояснить значение входящих параметров.

2. Представить давление p = 730 мм рт.ст. в ат.

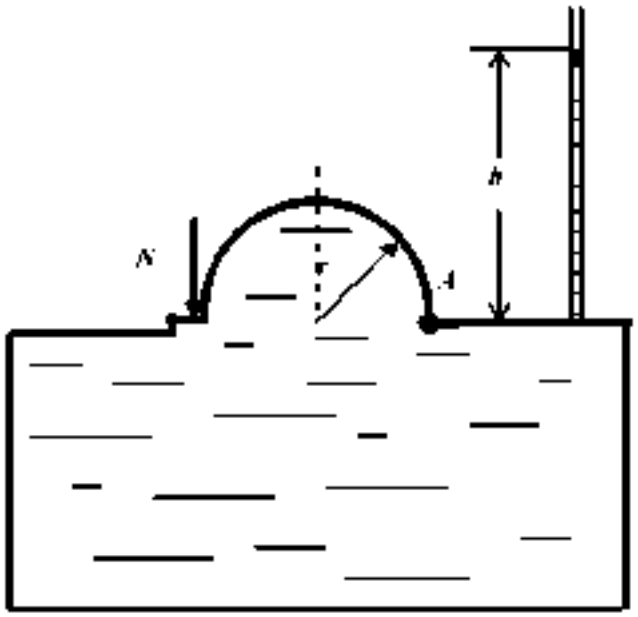
3. Абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$= 68 кПа. Определить, каким будет показание мановакуумметра, установленного в этой области, и величину давления.

4. В закрытом резервуаре, заполненном маслом, показание манометра на определенной глубине составляет $p_{изб}$= 0,06 ат. Определить какой будет пьезометрическая высота (напор) на уровне установки манометра. Плотность масла принять $\rho_м$ = 800 кг/м^3

5. Дать определение свойства жидкости ***сжимаемость***.

Задача

Запорное устройство полусферической крышки радиусом r рассчитано на усилие N. Определить показание манометра в центре боковой стенки при максимально допустимом давлении в жидкости плотностью ρ = 900 кг/м^3. N = 90 кН, a =3 м, r =0,4 м



№15

1.Записать уравнения Эйлера для равновесного состояния жидкости. Пояснить параметры, входящие в уравнение

2 Показание манометра на глубине h =2.5 м закрытого резервуара, заполненного водой, равно $p_{изб}$= 0,32 ат. Определить, каким будет показание манометра на той же глубине, если резервуар будет заполнен маслом. Плотность масла равна $\rho_{масс}$= 800 кг/м^3.

3.Определить показание механического вакуумметра (в ат), установленного на воздушном резервуаре, если показание ртутного вакуумметра, присоединенного к тому же резервуару, составляет 0,2 м.

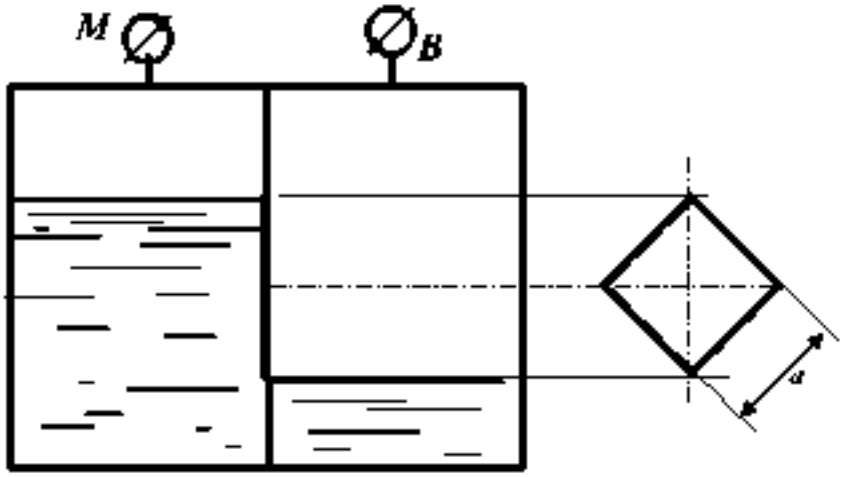
4.В чем физический смысл понятия *гидростатического давления*.

5 Какие силы действуют в жидкости?

Задача

Замкнутый резервуар с нефтью (ρ =900 кг/м^3) разделен на две части плоской перегородкой, имеющей квадратное отверстие со стороной a = 1 м. Давление над нефтью в левой части резервуара определяется показанием манометра p_M= 0,15 ат, а в правой – показанием вакуумметра p_B= 0,2 ат.

Найти величину силы давления, действующей на крышку, закрывающую отверстие в перегородке, и точку ее приложения.



№16

1.Представить давление p = 2,1 ат в единицах измерения системы СИ.

2.Записать уравнение поверхностей равного давления, привести примеры таких поверхностей.

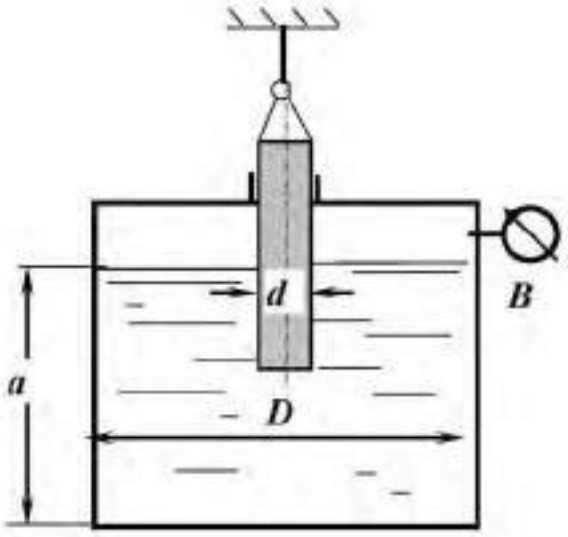
3.В закрытом резервуаре, заполненном спиртом (ρ□= 800 кг/м^3) , показание манометра на некоторой глубине составляет $p_{ман}$= 0,07 ат. Определить пьезометрическую высоту, соответствующую этому давлению.

4.Дать определение понятия ***тело давления.*** Привести примеры.

5.Записать величину абсолютного давления в измеряемой области, если показание вакуумметра в этой области $p_{вак}$= 0,45 ат.

Задача

Определить вакуум, обеспечивающий равновесие цилиндрического сосуда диаметром D, который висит без трения на плунжере диаметром d. Сила тяжести сосуда G = 500 Н. Найти также силы давления на верхнюю и нижнюю крышку сосуда: жидкость – вода, a =0,3 м; D = 0,4 м; d = 0,2 м.



№17

1 Назвать принцип действия, положенный в основу устройства механических приборов для измерения давления.

2.Как определяется горизонтальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность?

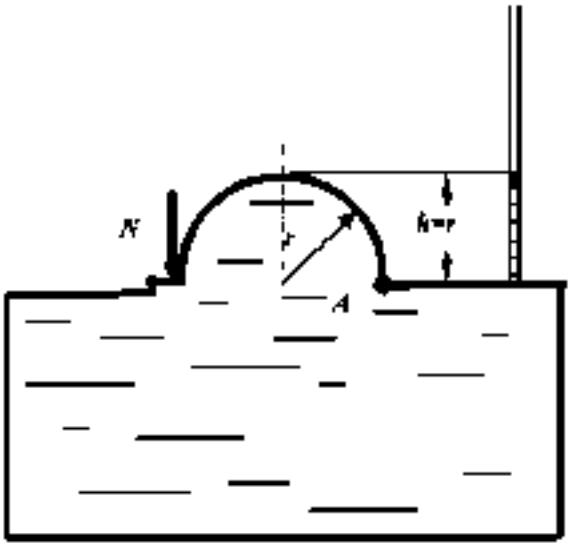
3 Показание манометра на определенной глубине в открытом резервуаре с водой равно $p_{ман}$=0,34 ат. Определить, как изменится показание манометра на той же глубине, если резервуар заполнить нефтью плотностью $\rho_н$= 840 кг/м^3.

4 Записать абсолютное давление при манометрическом давлении $p_{ман}$=162 кПа.

5 Пояснить свойство жидкости *капиллярность*.

Задача

Определить радиус цилиндрического затвора, установленного на квадратном отверстии крышки резервуара с водой, при следующих данных: усилие, приложенное к запору затвора, $N = 500$ Н. Затвор поворачивается вокруг оси шарнира в точке A.



№18

1. ***Основное уравнение гидростатики***. Единицы измерения давления.

2 .Представить давление, равное $p = 15$ м вод. ст., в единицах измерения системы СИ.

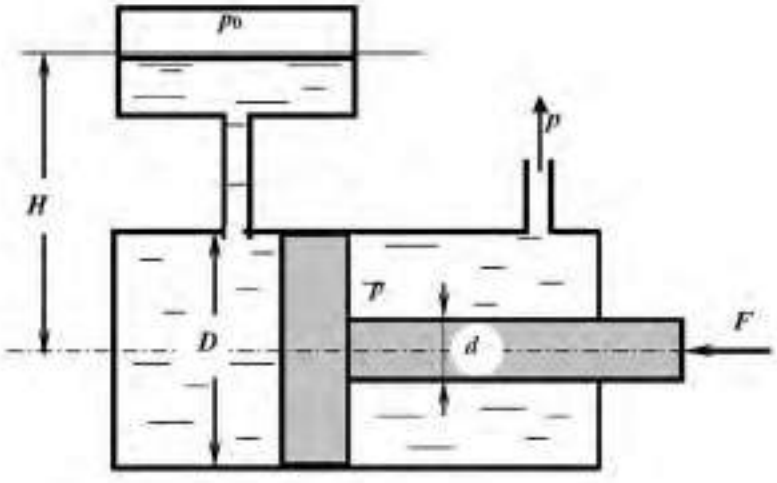
3. Абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс} = 0{,}5$ ат. Установить, каким прибором следует пользоваться для измерения давления, определить показание прибора и его величину в системе СИ.

4. Определить давление на поверхности воды в закрытом резервуаре, если показание ртутного U- образного манометра, установленного на глубине $h = 1{,}5$ м равно $p = 100$ мм рт.ст.

5. Какой зависимостью выражается ***гидростатический закон распределения давления?***

Задача

Определить давление p в правой полости гидроцилиндра, заполненного маслом Индустриальное 20 ($\rho = 890$ кг/м^3), если сила, действующая на шток поршня ($D = 200$ мм, $d = 50$ мм), равна $F = 5$ кН, избыточное давление на поверхности жидкости $p_o = 1{,}4$ ат, $H = 5$ м.



№19

1.Записать уравнения Эйлера для равновесного состояния жидкости. Пояснить параметры, входящие в уравнение.

2.Показание манометра на глубине h =2,5 м закрытого резервуара, заполненного водой, равно $p_{ман}$= 0,32 ат. Определить, каким будет показание пьезометра на той же глубине, если резервуар будет заполнен маслом. Плотность масла равна $\rho_{мас}$= 800 кг/м^3.

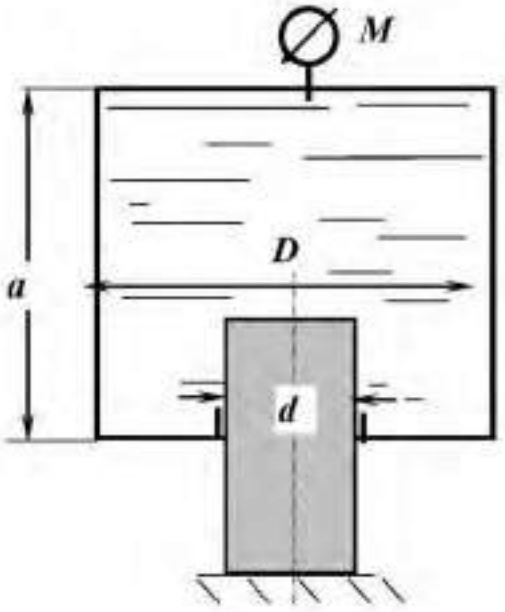
3.Определить показание механического вакуумметра, установленного на воздушном резервуаре, если показание ртутного вакуумметра, присоединенного к тому же резервуару, составляет 0,2 м.

4.В чем физический смысл понятия ***гидростатического давления***.

5.Как определяется сила давления на криволинейную поверхность?

Задача

Полностью заполненный водой цилиндрический сосуд диаметром D и высотой a опирается на плунжер диаметром d. Определить показание манометра M, а также силы давления на верхнюю и нижнюю крышки при условии равновесия сосуда, если сила его тяжести G = 5700 Н: D = 0,2 м; a = 0,4 м; d = 0,1 м.



№20

1. Перечислить, какие жидкостные приборы используются для измерения давления. Назвать их принцип действия .

2. В закрытом резервуаре, заполненном бензином (ρ =□700 кг/м^3), показание манометра на некоторой глубине составляет $p_{изб}$= 0,14 ат. Определить пьезометрическую высоту, соответствующую этому давлению.

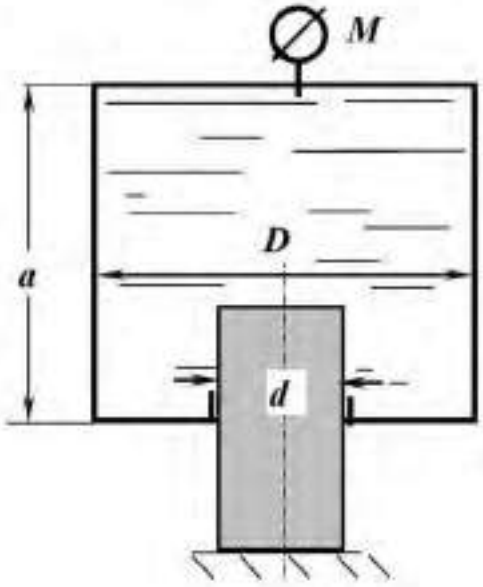
3. В закрытом резервуаре, заполненном водой, показание манометра на глубине h = 3 м равно $p_{изб}$= 0,6 ат. Определить абсолютное давление на поверхности жидкости.

4. Записать формулу для определения силы давления на плоскость.

5. Пояснить свойство жидкости ***сжимаемость***.

Задача

Полностью заполненный водой цилиндрический сосуд диаметром D и высотой a опирается на плунжер диаметром d. Определить минимальный диаметр плунжера из условия равновесия сосуда, если сила его тяжести G = 5700 Н; D = 0,2 м; a = 0,4 м, а показание манометра M составляет p_M= 30 ат.



№21

1. Коэффициенты, характеризующие вязкость жидкости, единицы измерения коэффициентов. Записать закон Ньютона.

2. Определить каким будет показание манометра (в ат), установленного на глубине h =3,2 м открытого резервуара, заполненного бензином. Плотность бензина □ □= 700 кг/м^3.

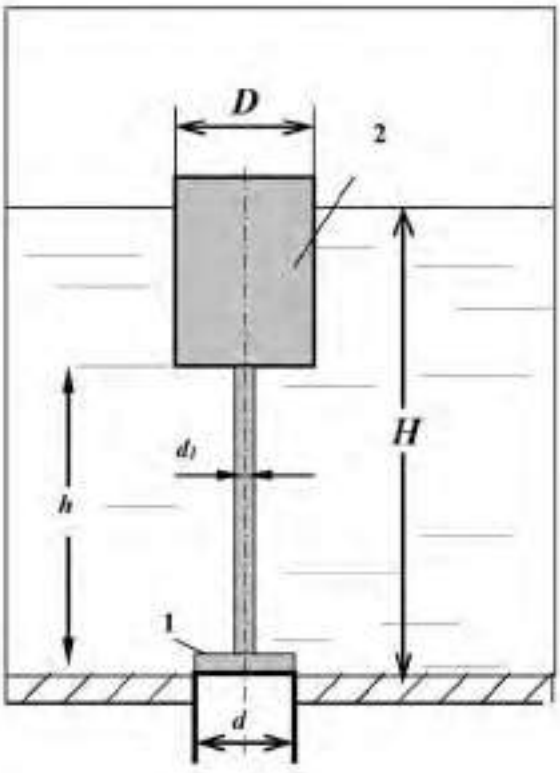
3. Представить давление p = 4,2 бар в единицах измерения системы СИ.

4. Дать понятие гидростатического давления. Свойства гидростатического давления.

5. Определить, какое давление, манометрическое или вакуум, показывает мановакуумметр и его величину (в Па), если абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$= 0,3 ат.

Задача

Резервуар водопроводной башни оборудован ограничителем уровня воды, представляющим собой клапан 1, соединенный тягой с цилиндрическим поплавком 2. Определить расстояние от дна резервуара до низа поплавка, при котором будет обеспечена глубина воды в резервуаре H =5 м, если D = 0,4 м; d =150 мм; d_1=50 мм; вес клапана с поплавком G =120 Н.



№22

1.Абсолютное давление в измеряемой области равно $p_{абс}$ =158 кПа. Каким прибором следует пользоваться для измерения давления, рассчитать показание прибора в ***ат***.

2.Показание манометра на глубине h =2,5 м закрытого резервуара, заполненного бензином, равно $p_{ман}$= 0,21 ат. Определить, каким будет показание манометра на той же глубине, если резервуар будет заполнен водой. Плотность бензина равна $\rho_{бенз}$= 700 кг/м^3.

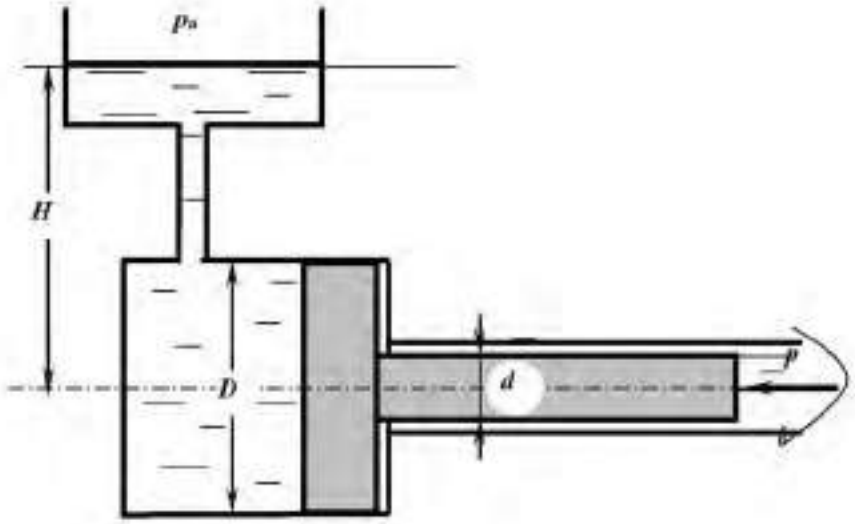
3.Записать дифференциальные уравнения равновесия жидкости; пояснить параметры, входящие в уравнения.

4.Сформулировать закон Архимеда.

5.Какие коэффициенты характеризуют свойство жидкости ***сжимаемость***?

Задача

Определить отношение D / d, а также значение диаметра поршня D, если давление в полости скалки p = 25 ати, ее диаметр d =10 см, H = 1 м.



№23

1.Что такое модель жидкой среды? Основные модели, применяемые при изучении гидромеханики

2 Перевести давление, равное 12 м вод.ст., в ***бары***.

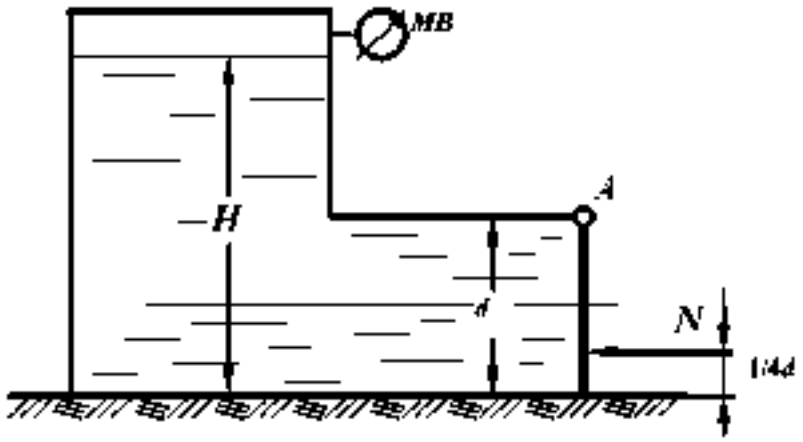
3 Дать понятие абсолютного давления. Записать величину абсолютного давления в измеряемой области, если показание манометра в этой области равно $p_{изб}$= 2,8 ат

4.Вакуумметрическое давление на поверхности воды в закрытом резервуаре равно $p_{вак}$= 54000 Па. На какой глубине величина давления будет равна атмосферному?

5 Как расположена точка приложения силы весового давления жидкости, действующей на плоскую фигуру любой формы, по отношению к центру тяжести?

Задача

Труба диаметром d = 100 мм, выходящая из резервуара, заполненного бензином, перекрыта крышкой, вращающейся вокруг шарнира A. Определить усилие N, удерживающее крышку в закрытом положении, если H = 1,2 м, плотность бензина $\rho_б$ = 750 кг/м^3, показание прибора соответствует $p_{вак}$ = 0,1ат. Как изменится показание прибора, если усилие N составит 350 кН?



№24

1.Какое свойство жидкости проявляется только при ее движении? К появлению каких напряжений оно приводит?

2.Как определяется сила давления на плоскость? Что такое центр давления? От чего зависит его положение для плоской стенки?

3.В закрытом резервуаре, заполненном спиртом, показание манометра на определенной глубине составляет $p_{ман}$= 0,16 ат. Определить какой будет пьезометрическая высота (напор) на уровне установки манометра. Плотность спирта принять $\rho_{сп}$ = 800 кг/м^3.

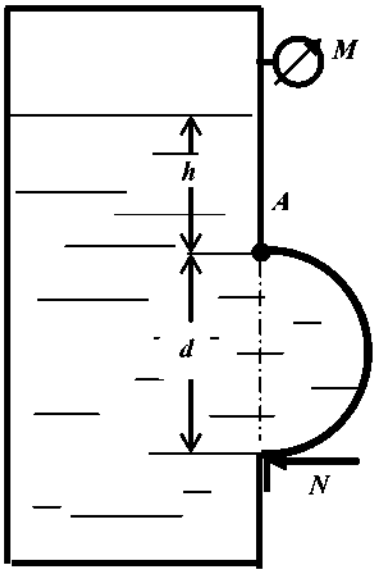
4.Эпюры гидростатического давления, примеры построения.

5.Как связаны коэффициент объемного сжатия и модуль упругости жидкости? Каковы их размерности?

Задача

Закрытый резервуар заполнен дизельным топливом с плотностью ρ = 846 кг/м^3. В вертикальной стенке резервуара имеется прямоугольное отверстие, закрытое полуцилиндрической крышкой. Она может поворачиваться вокруг горизонтальной оси ***A***. Определить минимальное показание манометра, установленного в верхней части резервуара, при котором крышка остается закрытой, при следующих данных: сила тяжести крышки ***G*** =1200 Н, усилие ***N*** =5кН, ***d*** = 0,2 м; ***h*** = 1 м; ***b*** =1,2 м.

Размер ***b*** перпендикулярен плоскости чертежа.



№25

1. Какое свойство жидкости проявляется только при ее движении? К появлению каких напряжений оно приводит? От чего зависят эти напряжения?

2. В закрытом резервуаре, заполненном маслом, показание манометра на определенной глубине составляет $p_{ман}$ = 0.06 ат. Определить какой будет пьезометрическая высота на уровне установки манометра. Плотность масла составляет $\rho_м$ = 800 кг/м^3.

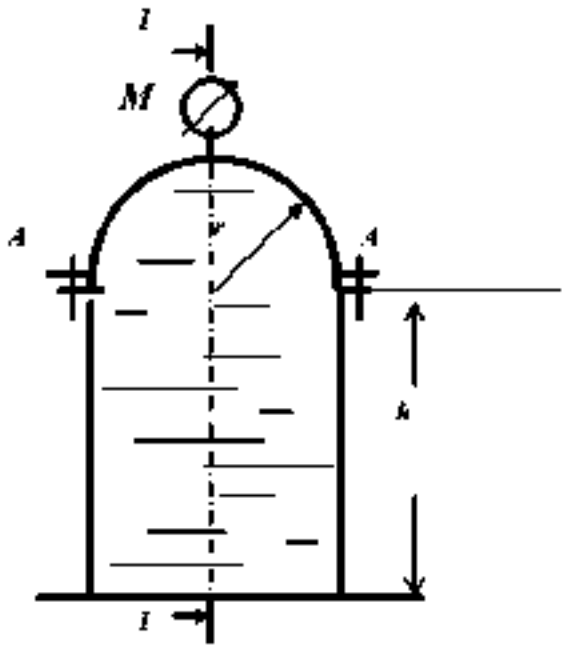
3. Сопоставить формулы силы давления жидкости на плоскую стенку и горизонтальной составляющей силы давления на криволинейную поверхность. В чем их аналогия и различия?

4. В закрытом резервуаре со спиртом на некоторой глубине показание манометра составляет 0,08 ат. На каком расстоянии от этого места может находиться манометр, показания которого будут равны 0. Чему равно абсолютное давление на этом уровне?

5. Пояснить закон Архимеда с точки зрения определения силы давления на криволинейную поверхность.

Задача

Вертикальная цилиндрическая цистерна с полусферической крышкой до самого верха заполнена жидкостью с плотностью ρ = 900 кг/м^3, находящейся под давлением p_M =19,2 кПа. Определить силу, растягивающую болты A, и горизонтальную силу, разрывающую цистерну по сечению I-I, при следующих данных r = 1 м, h = 4 м



№26

1. Как связаны коэффициент объемного сжатия и модуль упругости жижкости? Каковы их размерности?

2.В закрытом резервуаре, заполненном спиртом (ρ□= 800 кг/м^3) , показание манометра на некоторой глубине составляет $p_{ман}$= 0,07 ат. Определить показание манометра на этой же глубине, если резервуар будет заполнен водой.

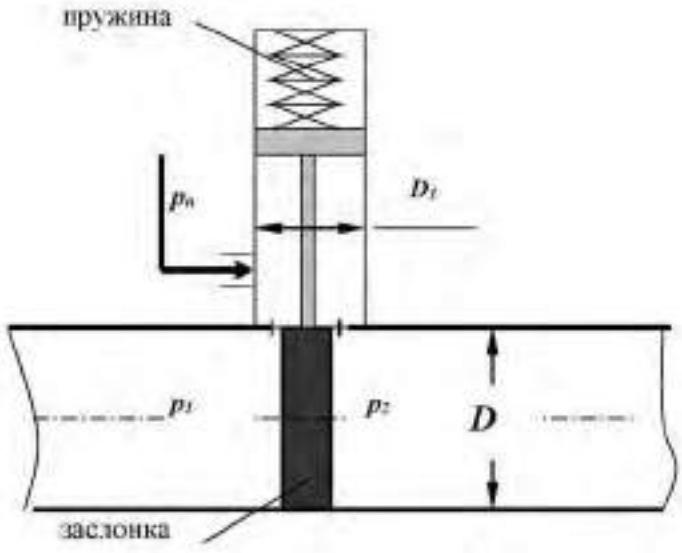
3. Что такое поверхность равного давления? Каковы ее свойства? Что представляет собой поверхность равного давления в случае равновесия жидкости под действием одной силы тяжести?

4. Вакуумметрическое давление на поверхности жидкости равно $p_{вак}$= 50 кПа. На какой глубине в воде показание манометра составит 0,2 ат?

5. Назвать основные свойства жидкости. Какие из них совпадают с физическими свойствами твердых тел или газов?

Задача

Подъем заслонки в трубе диаметром D = 400 мм осуществляется гидроцилиндром с диаметром поршня D_1 = 200 мм. Масса заслонки с поршнем и штоком составляет 70 кг. Жесткость пружины равна k = 8 Н/мм, Принять коэффициент трения заслонки в направляющих f = 0,1. Определить давление нагнетания $p_н$, необходимое для подъема заслонки при давлениях p_1 =0,2 МПа и p_2 =20кПа.



Контрольная работа № 2 (Гидродинамика)

№1

1. Какое движение жидкости называется установившимся?

2. Определить диаметр трубы для пропуска воды с расходом $Q = 2{,}0$ л/с при скорости $V = 1{,}0$ м/с

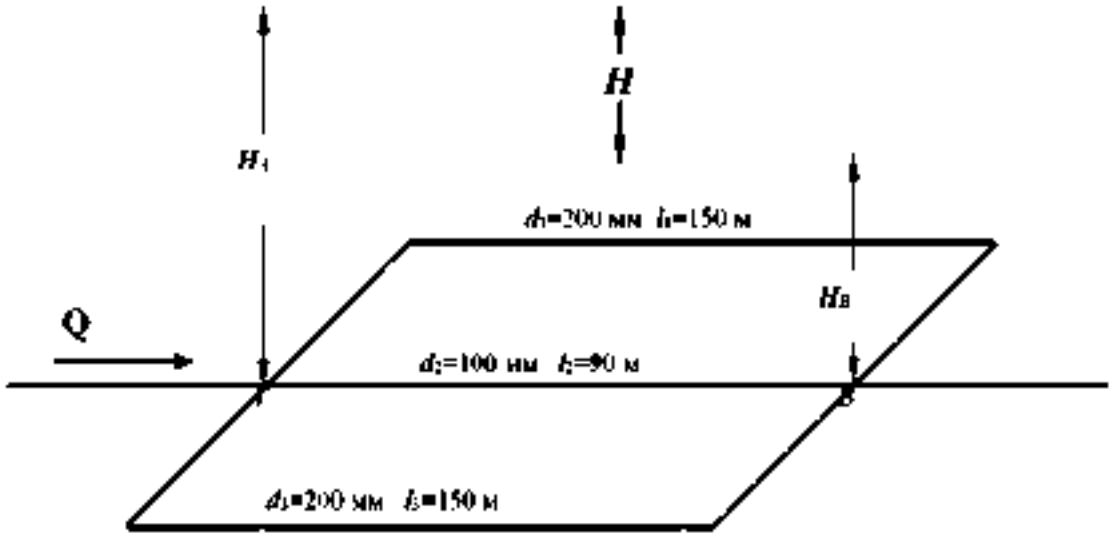
3. Рассчитать коэффициент сопротивления вентиля $\zeta_{вент}$, если потери напора в нем составляют $h_{вент} = 0{,}25$ м при скорости $V = 0{,}5$ м/с.

4. Записать уравнение Бернулли для целого потока реальной жидкости, представить диаграмму уравнения.

5. Определить режим движения жидкости в трубе $d = 100$ мм, шероховатостью $\Delta = 0{,}05$ мм при скорости движения $V = 0{,}21$ м/с. Коэффициент кинематической вязкости жидкости $\nu = 0{,}7 \times 10^{-6}$ м^2/с. Для турбулентного режима проверить область сопротивления.

Задача

Определить расход воды, подводимый к системе параллельно соединенных труб, если действующий напор $H = 10$ м. Трубы стальные, новые. Местными потерями пренебречь.



№2

1 Какое движение жидкости называется равномерным?

2.Определить скорость движения воды в трубе диаметром d_1 = 50 мм, если при постоянном расходе скорость в трубе d_2= 100 мм равна V_2 = 1,0 м/с

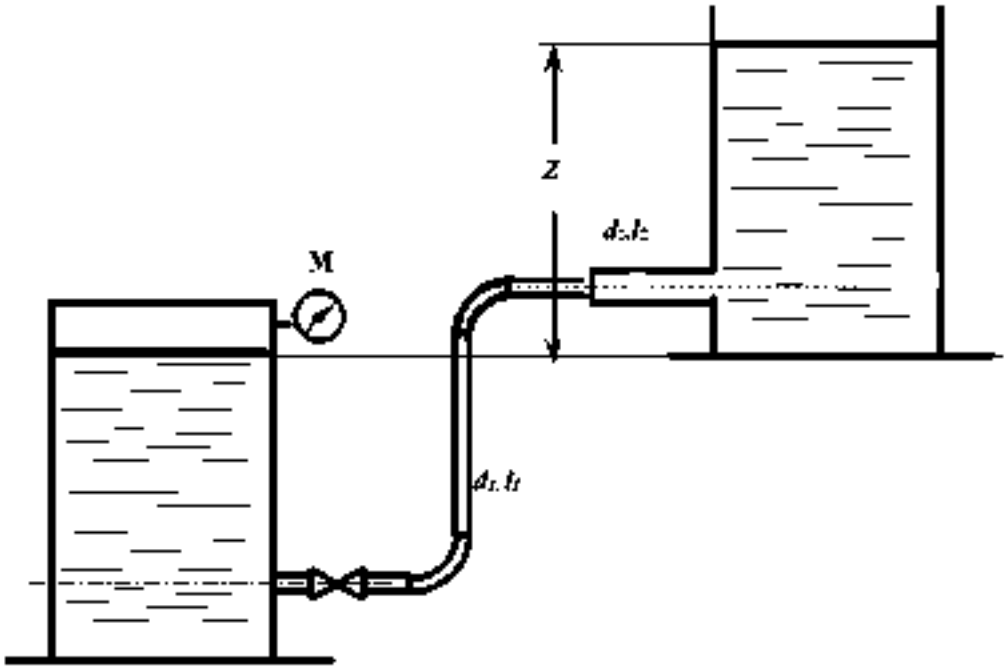
3 Геометрический смысл уравнения Бернулли для идеальной жидкости Диаграмма уравнения

4.Определить потери напора в пробковом кране $h_{кр}$, если коэффициент сопротивления крана $\zeta_{кр}$= 17,0. а скорость движения воды V = 1,2 м/с.

5.Определить потери напора при подаче воды по трубопроводу d=200 мм и длиной l=1500 м при скорости потока V=13,1 см/с и температуре 10^{0}С (ν=0,0131 см^2/с). Трубы стальные, новые (Δ=0,05мм).

Задача

Определить максимально возможную высоту наполнения верхнего резервуара Z из нижней емкости при расходе воды Q – 8 л/с по двум коротким трубам d_1– 100 мм, l_1– 40 м, d_2 = 150 м. l_2 – 60 м при показании манометра p_M = 50 кПа; ν = 0,01 Ст, Δ = 0,1 мм; пробковый кран закрыт на 30°



№3

1 Какой трубопровод называется коротким?

2.Рассчитать расход воды в трубе d = 100 мм при скорости V=1,27 м/с.

3 Как экспериментально определяется скоростной напор и рассчитывается скорость в точке потока? Нарисовать схему прибора.

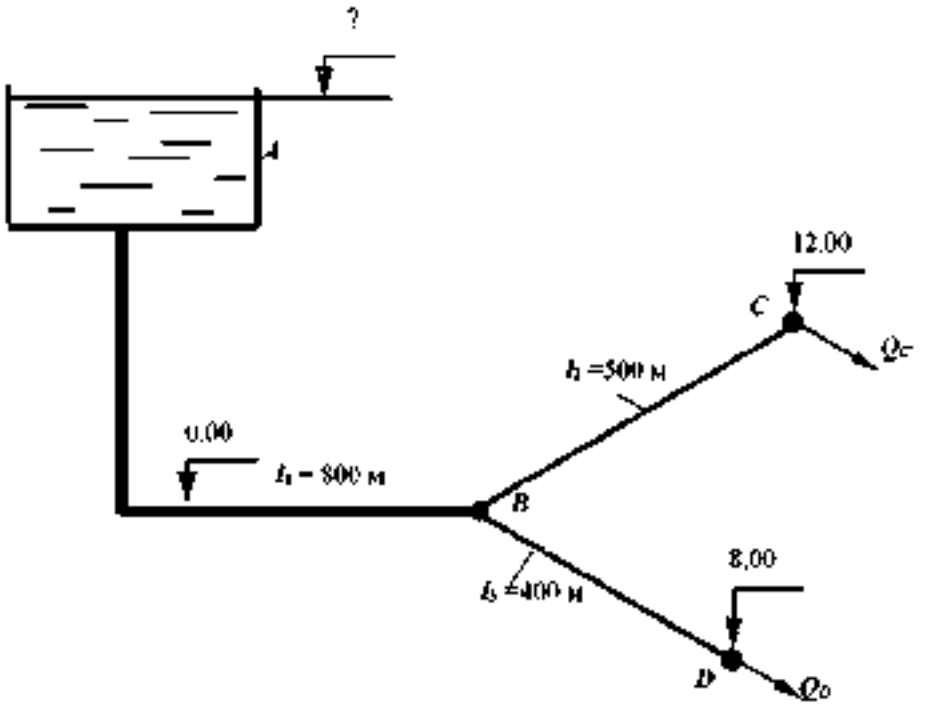
4 Какие гидравлические сопротивления называются местными? Привести расчетную формулу определения потерь напора в местных сопротивлениях

5.Определить режим движения жидкости в трубе d = 100 мм и шероховатостью Δ = 0,05 мм при пропускной способности Q = 1,6 л/с, если коэффициент кинематической вязкости $\nu = 0{,}7\times10^{-6}$ м²/с. Для случая турбулентного режима движения установить область сопротивления

Задача

Из напорного бака *A* идет магистральный трубопровод длиной l =800 м.

В т *B* магистраль разделяется на две нитки: одна идет к пункту *C*, где расходуется Q_C=11 л/с, другая -к пункту *D*, где потребляется Q_D =95 л/с. Определить диаметры каждого участка и отметку уровня воды в баке, при условии, что $V \leq 1.2$ м/с.



№4

1 От чего зависит величина коэффициента гидравлического трения в квадратичной области сопротивления турбулентного режима?

2. Рассчитать диаметр трубопровода для пропуска расхода Q =2 л/с при скорости V =1,0 м/с.

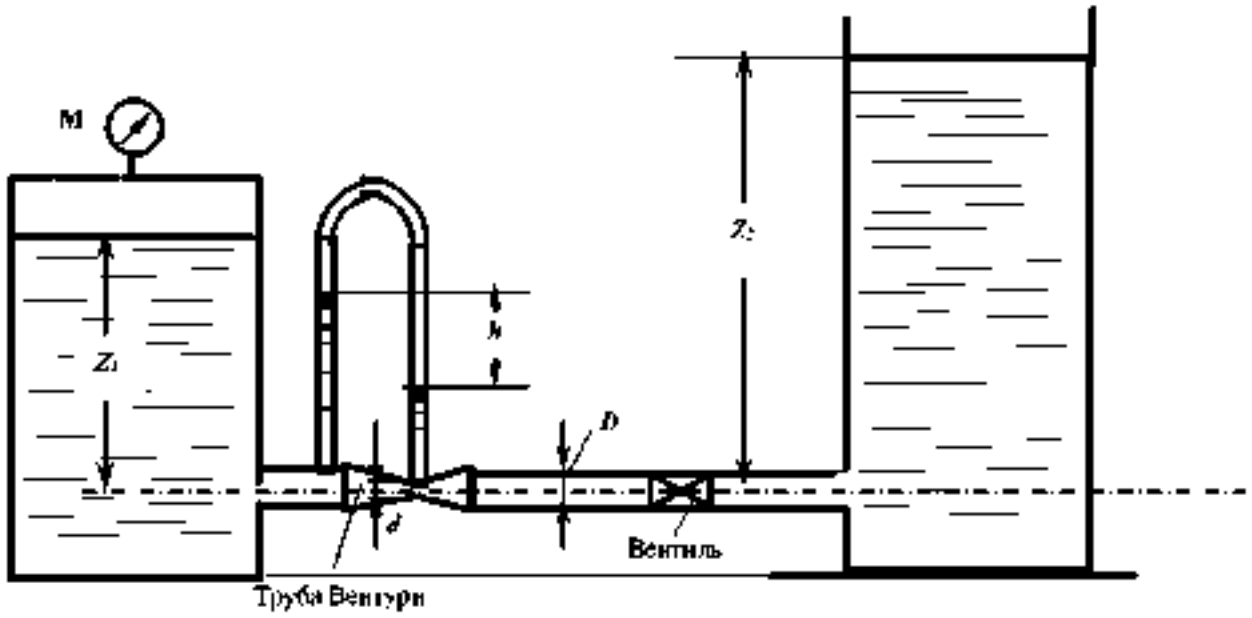
3 Каким прибором определяется полный напор в точке потока жидкости? Начертить схему прибора.

4 Какие внешние факторы вызывают потери напора по длине? Записать расчетные зависимости для определения этих потерь.

5.Определить режим движения жидкости в трубе диаметром d = 50 мм при расходе Q = 1.2 л/с, если коэффициент кинематической вязкости жидкости равен $\nu = 0{,}3\times10^{-4}$ м^2/с.

Задача

В трубопроводе диаметром D = 100 мм длиной l = 100 м установлен расходомер Вентури с модулем d^2/D^2= 0.3 Определить расход воды Q по перепаду уровней жидкости в дифманометре h = 0.5 м Определить избыточное давление на поверхности жидкости в баке, под действием которого происходит движение при следующих данных: Z_1 = 2 м, Z_2 = 5 м, коэффициенты сопротивления вентиля принять $\zeta_{вен}$= 7.0; трубы Вентури $\zeta_{Вент}$= 0,5, остальные коэффициенты местных сопротивлений по таблице. Труба водопроводная нормальная (коэффициет Дарси при турбулентном режиме можно определить по таблице).



№5

1 Какой трубопровод называется простым?

2 Рассчитать гидравлический радиус потока жидкости в круглой трубе диаметром d = 100 мм и в трубе квадратного сечения со стороной a = 200 мм.

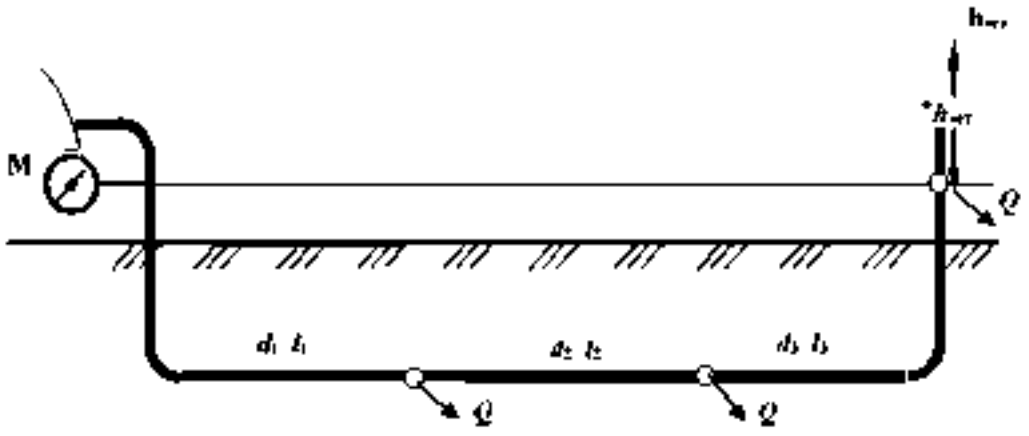
3 Представить уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости, начертить диаграмму уравнения. Дать пояснение всех параметров, входящих в уравнение.

4.Как изменятся потери напора по длине при постоянном расходе, если диаметр трубопровода уменьшится в 2 раза? Показать расчетом.

5 Определить, при каком значении коэффициента кинематической вязкости ν возможен ламинарный режим в трубе d = 50 мм при скорости движения V = 1,2 м/с.

Задача

Определить расходы воды у потребителей в системе трех последовательно соединенных труб $d_1 = 200$ мм, $l_1 = 600$ м, $d_2 = 150$ мм, $l_2 = 300$ м, $d_3 = 100$ мм, $l_3 = 200$ м, если показания манометра в начале системы $p_M = 3{,}0$ ат и остаточный напор у потребителя должен быть не менее 10 м. Местные потери принять равными 5% от потерь по длине. Построить пьезометрическую линию.



№6

1 Дать определение ламинарного режима

2 Определить, при какой скорости воды в трубе диаметром d = 100 мм будет обеспечен расход **Q** = 2 ,0 л/с.

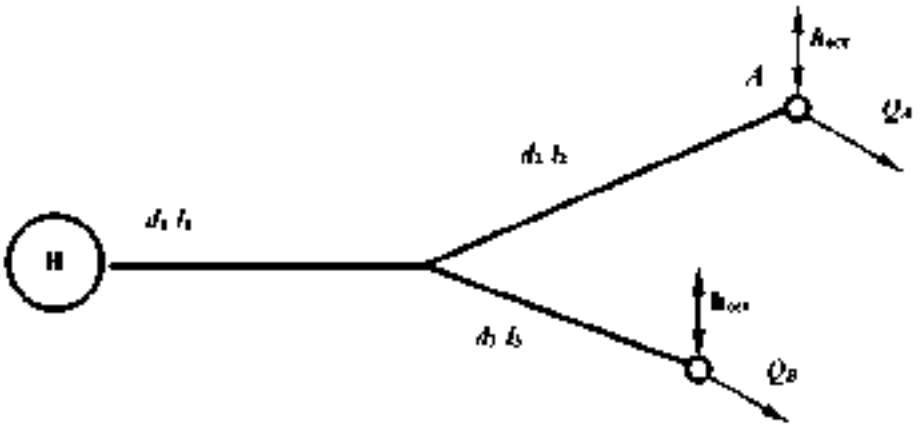
3. Записать уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости, построить диаграмму уравнения, пояснить параметры, входящие в уравнение

4.Рассчитать потери напора по длине в трубе диаметром d = 100 мм длиной L = 10 м при расходе Q = 8,2 л/с и коэффициенте гидравлического трения λ = 0,04

5 Определить режим движения воды в трубе диаметром d = 100 мм при скорости V = 1,2 м/с, если кинематический коэффициент вязкости $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, шероховатость внутренней поверхности трубы Δ=0.5мм При турбулентном режиме установить область сопротивления

Задача

Рассчитать тупиковую водопроводную систему, снабжающую водой шахты A и B, а также определить высоту водонапорной башни H (действующий напор), если остаточный напор у потребителя должен быть не менее 10 м , расходы шахт составляют Q_A = 40 л/с, Q_B = 60 л/с, эксплуатационная скорость в трубах $V_{экс}$ =1,5 м/с, длины участков: l_1 = 1000 м, l_2 = 1200 м, l_3 = 900 м. Местные потери принять равными 10% от потерь по длине Построить пьезометрическую линию. Чертеж представлен в плане



№7

1 Охарактеризовать турбулентный режим движения.

2.Определить пропускную способность (расход) для трубы диаметром d = 100 мм при скорости движения потока воды V =1,27 м/с.

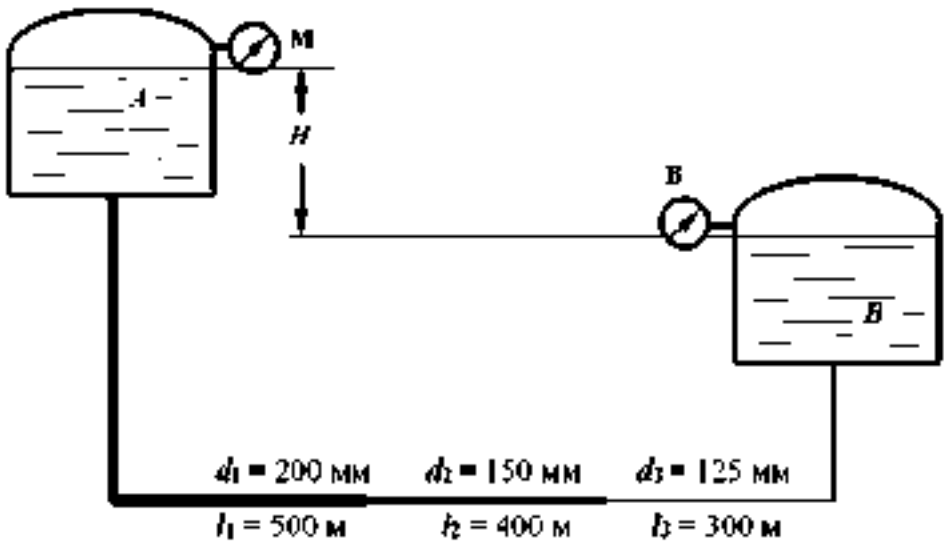
3 Записать уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости, построить диаграмму уравнения. Пояснить параметры, входящие в уравнение

4 Рассчитать коэффициент гидравлического трения λ для водопроводной трубы d = 100 мм, длиной L = 40 м, если потери напора по длине h_l = 1,5 м при расходе Q = 9 ,5 л/с.

5 Определить режим движения воды в трубе диаметром d = 50 мм с шероховатостью Δ= 1.0 мм при скорости V =1,2 м/с, если кинематический коэффициент вязкости ν = 10^{-6} м^2/с. Для турбулентного режима установить область сопротивления

Задача

Расход Q = 20 л/с поступает из напорного бака A в резервуар B по системе последовательно соединенных труб (размеры – на схеме) Определить H при следующих показаниях приборов: $p_{изм}$=0,5 ат, $p_{вак}$= 0,2 ат. Трубы водопроводные нормальные. Местные потери составляют 10% потерь по длине Построить пьезометрическую линию.



№8

1.Что такое критическая скорость и как ее определить для трубопровода?

2.Определить пропускную способность (расход) для трубы диаметром d = 100 мм, при скорости движения потока воды V =2,0 м/с; какой режим движения в трубе при этой скорости?

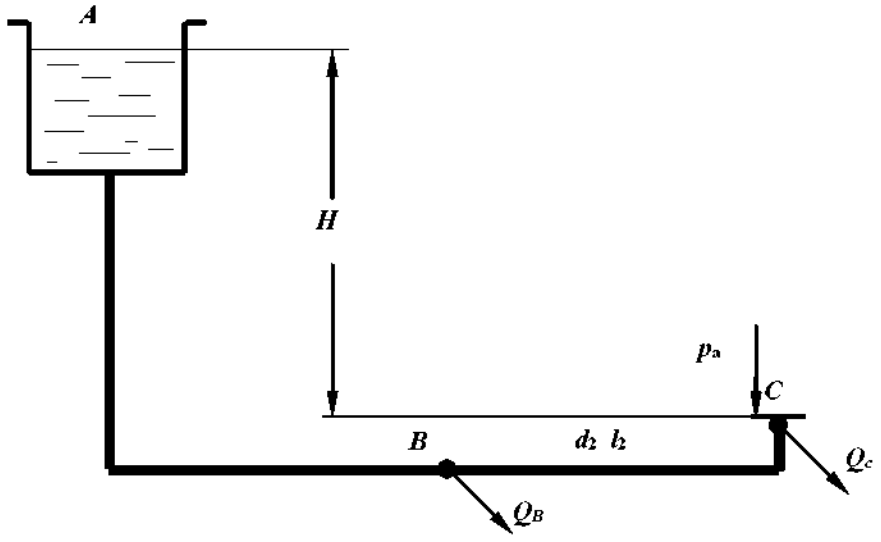
3.Построить диаграмму уравнения Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости; пояснить геометрический смысл уравнения.

4.Как изменятся потери напора по длине, если расход жидкости увеличится в 2 раза, показать расчетом.

5.Определить, при какой скорости возможен ламинарный режим для потока жидкости в трубе диаметром d = 50 мм, если коэффициент кинематической вязкости жидкости равен $\nu = 0{,}3 \times 10^{-4}$ м^2/с.

Задача

Из водонапорного бака A в пункты B и C подаются одинаковые расходы воды $Q_B = Q_C = Q$. Определить величину Q расхода у потребителей, если напор H =15 м, трубы водопроводные, нормальные, соединены последовательно: d_1 = 100 мм, l_1 = 500 м, d_2 = 75 мм, l_2 = 300 м. Местные потери принять равными 5% от потерь по длине.



№9

1 Записать уравнение неразрывности потока.

2 Дать понятие гидростатического напора в сечении потока. Как он определяется экспериментально?

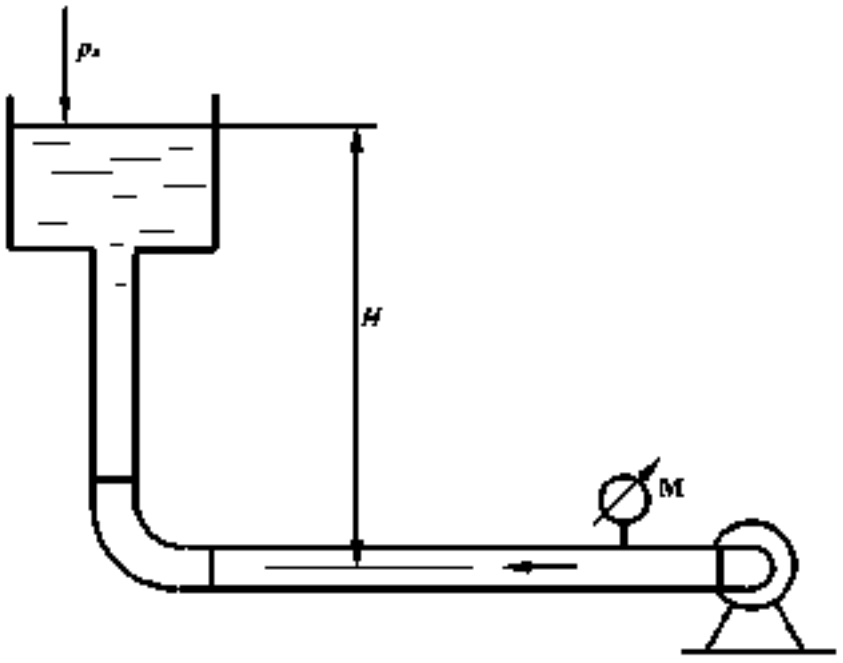
3 Рассчитать при каком значении коэффициента сопротивления пробкового крана $\zeta_{кр}$ будет обеспечен расход Q – 1 л/с в трубе диаметром d – 50 мм, если величина потерь напора в кране составляет $h_{кр}$= 25 см

4 Определить потери напора по длине в трубе длиной L = 20 м диаметром d = 50 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,5 мм при расходе Q = 2,5 л/с, если коэффициент кинематической вязкости воды $\nu = 10^{-6}$ м^2/с

5 Рассчитать гидравлический радиус потока жидкости в круглой трубе диаметром d = 200 мм и в трубе квадратного сечения со стороной a = 100 мм.

Задача

Определить манометрическое давление, которое должен создавать насос, чтобы подать воду в количестве Q = 5 л/с в водонапорный бак на высоту H = 12 м по трубопроводу длиной l = 50 м с высотой выступов шероховатости внутренней поверхности трубы $\Delta_э$ = 1мм; при температуре воды t = 15°С (ν = 0,011463 см^2/с). Диаметр трубы d=150 мм, коэффициент сопротивления колен $\zeta_{кол}$ = 0,29.



№10

1 Определение потерь напора по длине с помощью обобщенных параметров

2 Рассчитать диаметр трубопровода для пропуска расхода Q =4 л/с при скорости V =1,6 м/с.

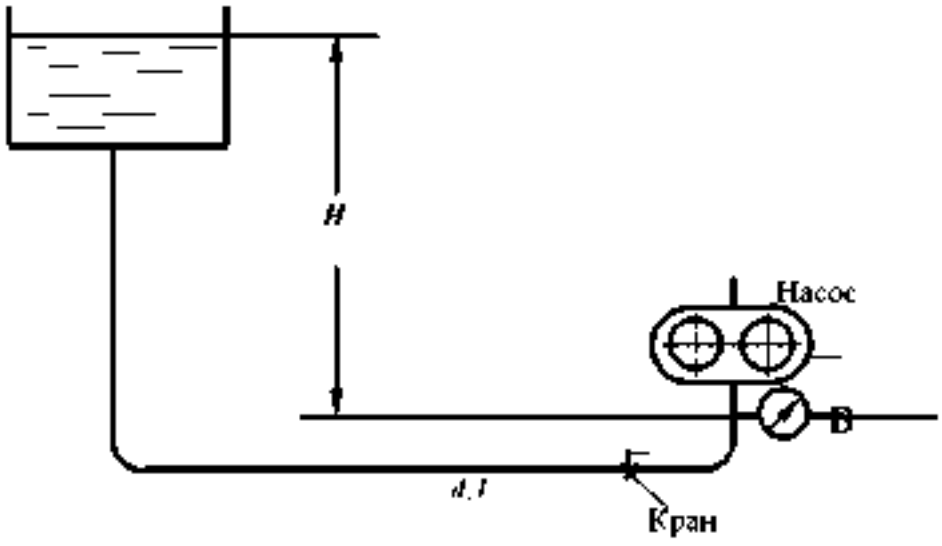
3 Записать уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости, построить диаграмму уравнения. Пояснить параметры, входящие в уравнение, исходя из геометрической интерпретации уравнения.

4 Определить потери напора в пробковом кране $h_{кр}$, если коэффициент сопротивления крана $\zeta_{кр}$= 27.0, а скорость движения воды V = 2,1 м/с.

5 Определить режим движения жидкости в трубе диаметром d = 100 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,05 мм при скорости V =0,21 м/с, если коэффициент кинематической вязкости жидкости $\nu = 0{,}7\times10^{-6}$ м^2/с

Задача

Определить расстояние H от уровня жидкости в маслобаке, если давление на входе в шестеренный насос системы смазки, подающий расход Q = 1 л/с машинного масла $p_{вак}$=0,1 ат, $\rho_м$ = 900 кг/м^3, $\nu = 38\cdot10^{-6}$ м^2/с, d = 35 мм, l = 5 м, , $\zeta_{кр} = 4$, $\zeta_{кол} = 0{,}3$.



№11

1.Дать определение понятия «***гидравлически гладкие стенки***».

2.Определить разность показаний трубки Пито и пьезометра, если скорость в точке установки прибора равна u =0,21 м/с. Начертить схему установки приборов.

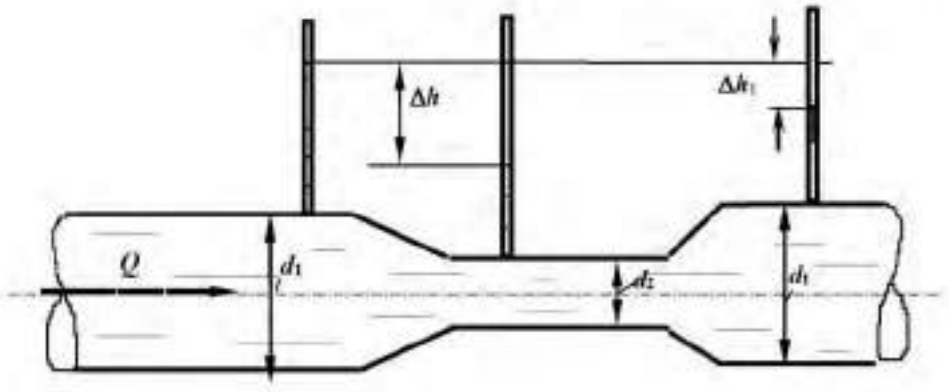
3.Как преобразуется уравнение Бернулли при переходе от элементарной струйки идеальной жидкости к элементарной струйке реальной вязкой жидкости; привести формулы, пояснить параметры.

4.Определить разность показаний пьезометров, установленных до и после пробкового крана, если скорость движения воды в трубопроводе равна V =0,8 м/с, а коэффициент сопротивления пробкового крана равен $\zeta_{кр}$= 7,0.

5.Определить, каким должно быть давление в начале трубы для транспортирования воды, если длина участка составляет L = 150 м, диаметр d = 100 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,5 мм, показание манометра в конце участка p = 0,7 ат, пропускная способность трубы равна Q = 6,3 л/с, кинематической коэффициент вязкости жидкости ν = 10^{-6} м^2/с.

Задача

Определить разность показаний пьезометров Δh, установленных на водомере Вентури с диаметрами d_1 = 100 мм, d_2 = 50 мм, если расход воды равен Q = 3 л/с. Потерями напора в водомере пренебречь, коэффициент Кориолиса α принять равным 1. Найти также Δh_1 для случая учета сопротивления трубы Вентури, если принять $\zeta_{Вентури}$= 0,5.



№12

1 Каким должен быть коэффициент сопротивления вентиля, чтобы при пропускной способности трубопровода Q = 2,5 л/с потери напора в вентиле составили $h_{вент}$ = 32 см. Диаметр трубопровода равен d = 50 мм.

2 Определить скорость по оси потока жидкости в горизонтальной трубе, если показание трубки Пито, установленной по оси потока равно 100 мм, а показание пьезометра 50 мм. Начертить схему установки приборов.

3 Записать уравнение Бернулли для потока реальной жидкости, начертить диаграмму уравнения

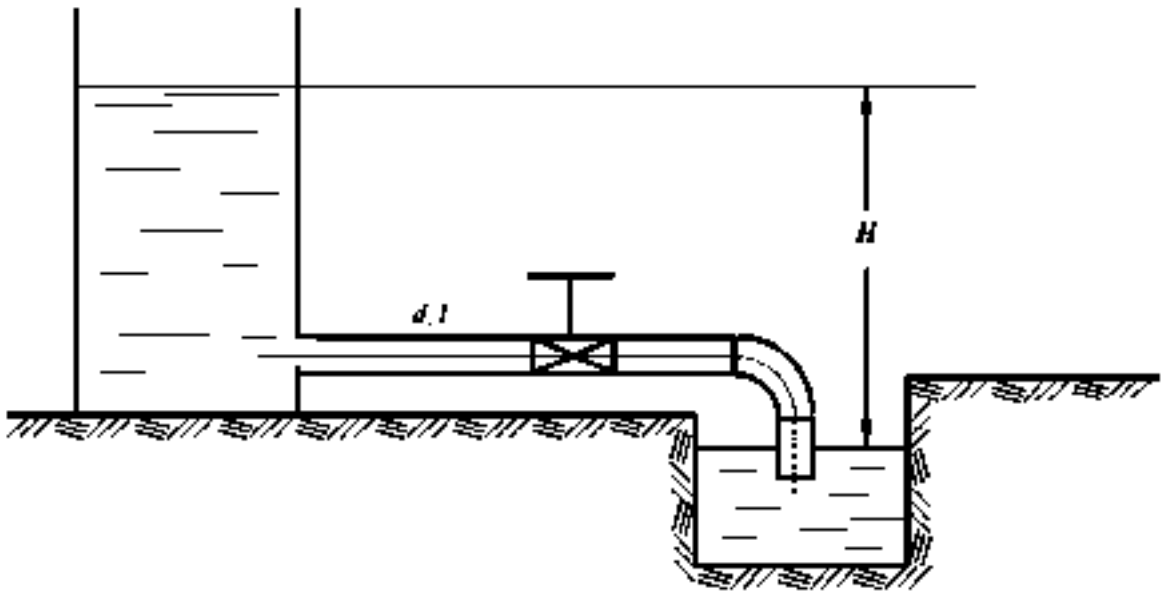
4.Разность показаний пьезометров, установленных на расстоянии L = 5 м в горизонтальной водопроводной трубе диаметром d = 50 мм, равна 30 см. Определить коэффициент гидравлического трения (λ), если расход воды составляет Q = 2,5 л/с

5.Что такое квадратичная область сопротивления?

Задача

Определить, какой должна быть разность уровней трансформаторного масла в резервуаре и отстойнике, чтобы по трубе диаметром d = 50 мм и длиной l = 25 м проходил расход Q = 3,0 л/с На трубе установлен пробковый кран с углом открытия α = 20° Кинематический коэффициент вязкости масла

$\nu = 0{,}38 \cdot 10^{-4}$ м²/с



№13

1.Пояснить, какие параметры составляют гидравлическую характеристику сечения потока. Дать определения.

2.В горизонтальной трубе с плавным сужением скорость в первом сечении равна V=0,5 м/с, пьезометрический напор – $p_1/\rho g$ = 0,8 м. Рассчитать пьезометрический напор во втором сечении, если диаметр трубы уменьшится в два раза.

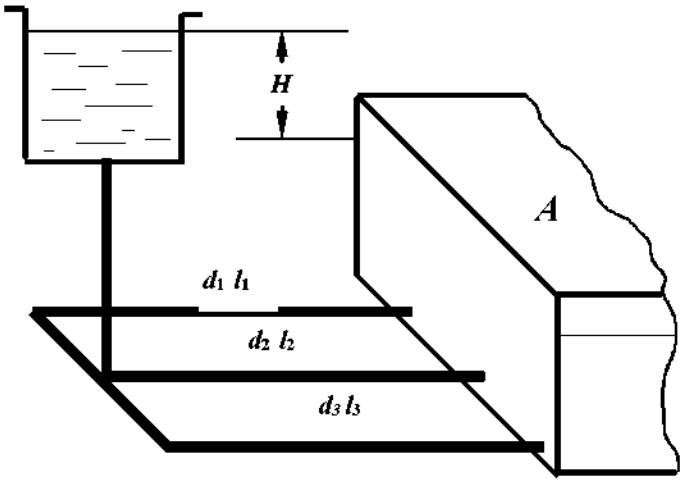
3.Как преобразуется уравнение Бернулли при переходе от элементарной струйки идеальной жидкости к элементарной струйке реальной жидкости. Записать уравнения.

4. Рассчитать критическую скорость для потока бензина в трубе диаметром d = 50 мм, если кинематический коэффициент вязкости бензина равен $\nu = 0{,}7 \times 10^{-6}$ м^2/с.

5.Определить давление в начале водопроводной стальной трубы длиной L =200 м, диаметром d = 100 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,5 мм, если показание манометра в конце участка p = 0,9 ат, пропускная способность трубы равна Q = 5,3 л/с, кинематической коэффициент вязкости жидкости $\nu = 10^{-6}$ м^2/с.

Задача

В бассейн A из напорного бака через три параллельно соединенных трубопровода поступает расход Q = 50 л/с. Определить необходимый напор H и расход в каждом трубопроводе, трубы водопроводные, нормальные; область сопротивления - квадратичная. Местные потери напора принять равными 10% от потерь по длине. Размеры труб: d_1=150 мм; l_2=450м d_2 =100 мм; l_2=400м; d_3=200мм; l_3=420м.



№14

1.Записать дифференциальные уравнения движения жидкости (уравнения Эйлера)

2 Рассчитать скоростной напор потока воды в трубе диаметром d = 100 мм, если при таком же расходе скоростной напор в трубе диаметром d = 50 мм равен 0,2 м.

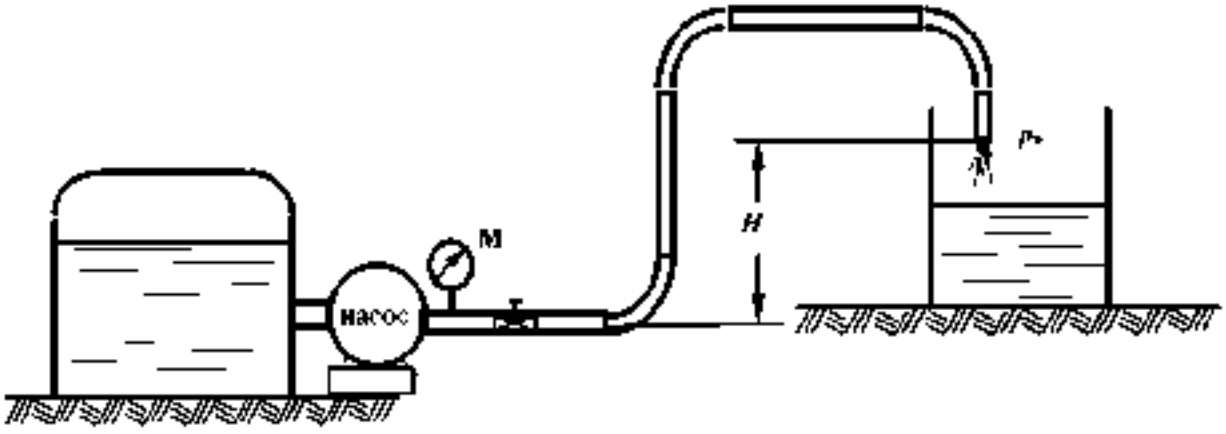
3.Записать уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости Дать пояснения параметров, входящих в уравнение, учитывая его геометрическую интерпретацию Построить диаграмму уравнения

4.При какой скорости потока воды произойдет переход от ламинарного режима к турбулентному в стеклянной трубе диаметром d = 30 мм, если кинематический коэффициент вязкости равен $\nu = 10^{-6}$ м^2/с.

5.Определить потери напора при подаче воды по трубопроводу диаметром d = 50 мм и длиной l=150 м при скорости потока V=1,3 м/с и температуре 10^{0}С (ν=0,0131 см^2/с) Трубы стальные, новые (Δ=0,05мм).

Задача

Определить длину трубопровода диаметром d = 100 мм (Δ = 0,5 мм), с помощью которого бензин ($\rho_б$ = 700 кг/м^3 и $\nu = 3{,}0\cdot10^{-6}$м^2/с) может быть поднят на высоту H = 12 м при пропускной способности Q = 6 л/с, если показания манометра, установленного после насоса, $p_м$ = 1,2 ат Истечение бензина происходит в атмосферу. Сумму коэффициентов местных сопротивлений принять равной $\sum\zeta$ = 6,0.



№15

1 Пояснить понятие ***коэффициент расхода трубопровода.***

2 Определить сторону a квадратного сечения трубопровода пропускной способностью Q = 2,5 л/с при скорости движения жидкости V = 1,0 м/с.

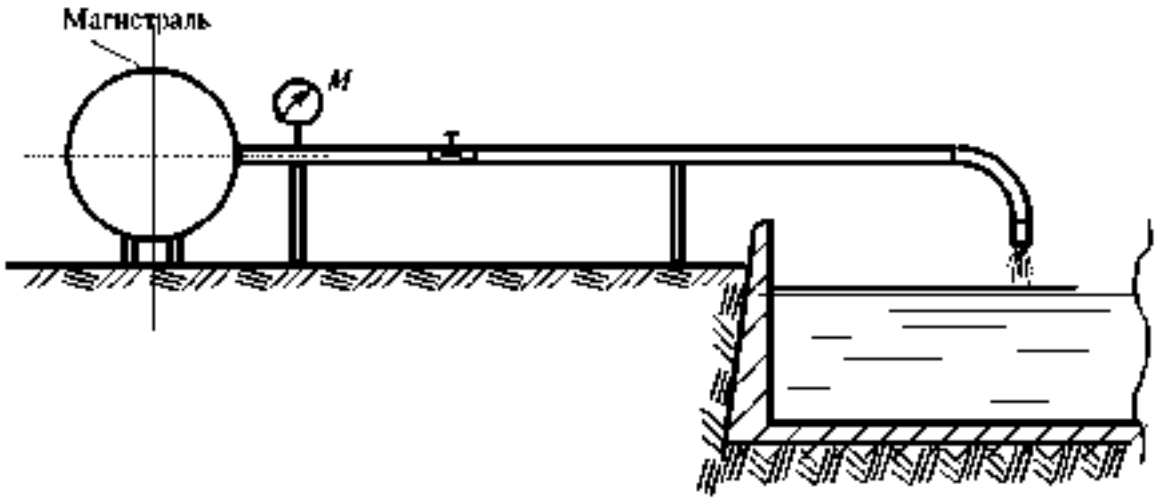
3.Как преобразуется уравнение Бернулли при переходе от элементарной струйки реальной жидкости к целому потоку? Записать уравнения.

4 Определить при какой скорости движения воды в водопроводной трубе диаметром d = 50 мм и длиной L = 40 м потери напора по длине составят h_l = 30 см. Коэффициент гидравлического трения $\lambda = 0{,}03$.

5 Определить давление в конце водопроводной трубы длиной L = 150 м, диаметром d = 100 мм (Δ= 1,0 мм), если показание манометра в начале трубы p = 0,87 ат, расход составляет Q = 6,3 л/с ($\nu = 10^{-6}$ м^2/с).

Задача

Определить какой объем воды (W) наполнится в бассейне за 30 мин. через нормальную водопроводную трубу длиной l = 50 м и диаметром d = 100 мм, присоединенную к магистральному трубопроводу с избыточным давлением $p_м$ = 100 кПа, если на трубе установлен пробковый кран с углом закрытия $\alpha = 30^0$ и одно колено.



№16

1. Назвать области сопротивления турбулентного режима, пояснить как их определить при расчете.

2. Определить показание пьезометра, установленного в сечении трубы, если показание трубки Пито в центре этого сечения равно 150 мм. Скорость по оси потока принять равной u =1,0 м/с

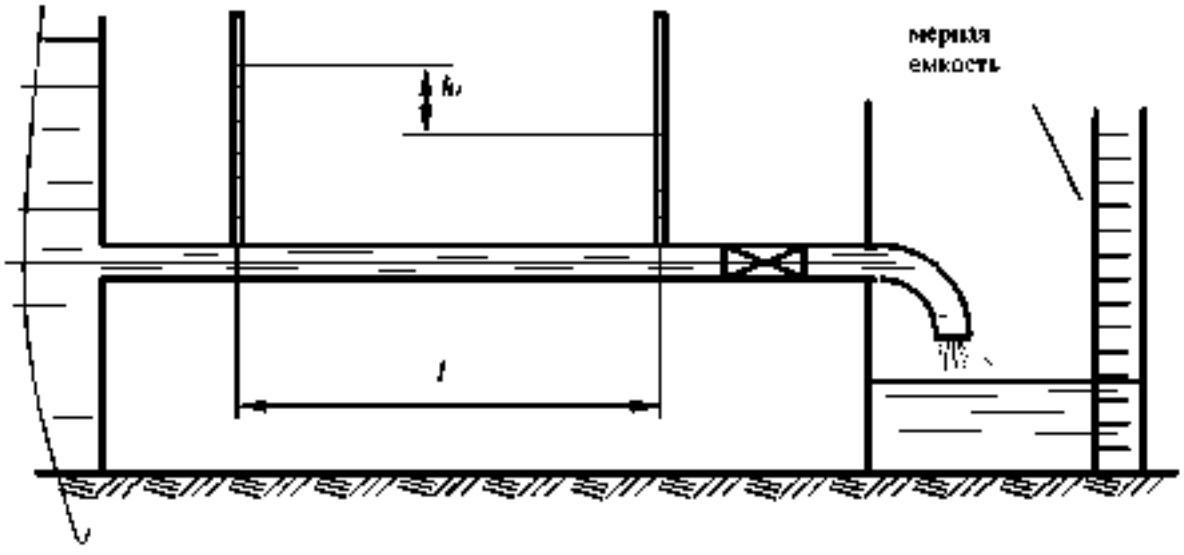
3. Чем отличается уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости от уравнения для элементарной струйки реальной жидкости? Начертить диаграммы для каждого случая.

4. Рассчитать критическую скорость для потока нефти в трубе диаметром d =150 мм, если коэффициент кинематической вязкости нефти равен $\nu = 1{,}4 \times 10^{-4}$ м^2/с.

5. Определить давление в конце водопроводной трубы длиной L = 150м, диаметром d = 100 мм (Δ= 1,0 мм), если показание манометра в начале трубы p = 0,87 ат, расход составляет Q = 6,3 л/с ($\nu = 10^{-6}$ м^2/с).

Задача

Определить разность показаний пьезометров, выведенных на расстоянии l = 20 м на стальной трубе диаметром d = 50 мм с эквивалентной шероховатостью $\Delta_э$ = 0,5 мм, если за 30 сек. в мерную емкость набирается 50 литров воды. Кинематический коэффициент вязкости воды равен $\nu = 0{,}0115 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.



№17

1 Записать уравнение Бернулли для потока реальной жидкости, начертить диаграмму уравнения для трех сечений трубы переменного сечения.

2 Как изменятся потери напора по длине при постоянном расходе, если диаметр трубопровода увеличить в 2 раза? Показать расчетом

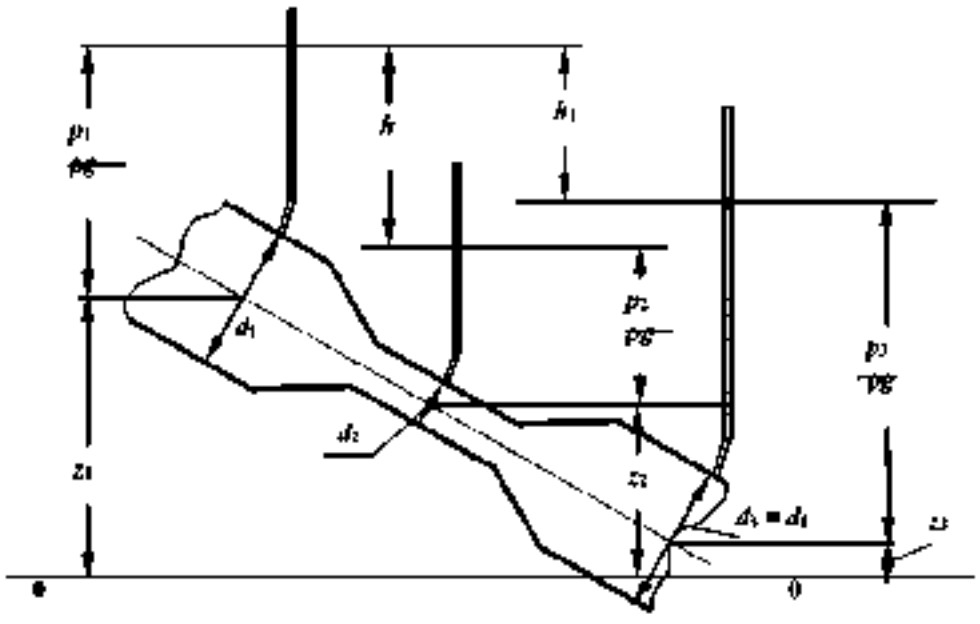
3.Рассчитать скорость по оси потока, если разность показаний трубки Пито, установленной в центре сечения, и пьезометра в этом же сечении равно 10 см. Нарисовать схему установки приборов.

4 Какой должна быть скорость протекания воды через пробковый кран с коэффициентом сопротивления $\zeta_{кр} = 6$, чтобы потери напора в кране составили $h_{кр} = 30$ см

5.Определить разность показаний пьезометров, установленных на горизонтальной стальной трубе $d = 50$ мм на расстоянии $L = 25$ м при расходе $Q = 1{,}7$ л/с ($\Delta_э = 0{,}5$ мм), кинематический коэффициент вязкости воды равен $\nu = 0{,}0115 \cdot 10^{-4}$ м^2/с

Задача

На трубопроводе установлен расходомер Вентури Определить расход воды, протекающей по трубопроводу, если $h = 20$ см, $d_1 = 100$ мм, $d_2 = 50$ мм. Потерями напора между первым и вторым сечениями пренебречь. Учитывая потери напора между первым и третьим сечениями, найти коэффициент местного сопротивления трубы Вентури, если $h_1 = 15$ см



№18

1. Определить диаметр трубопровода при течении воды с критической скоростью при расходе **Q** = 1,8 л/с; кинематический коэффициент вязкости воды равен $\nu = 0{,}0115 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.

2.При движении воздуха в вентиляционной трубе квадратного сечения со стороной a = 400 мм расход составляет **Q** = 2,4 л/с. Определить скорость движения воздуха в трубе.

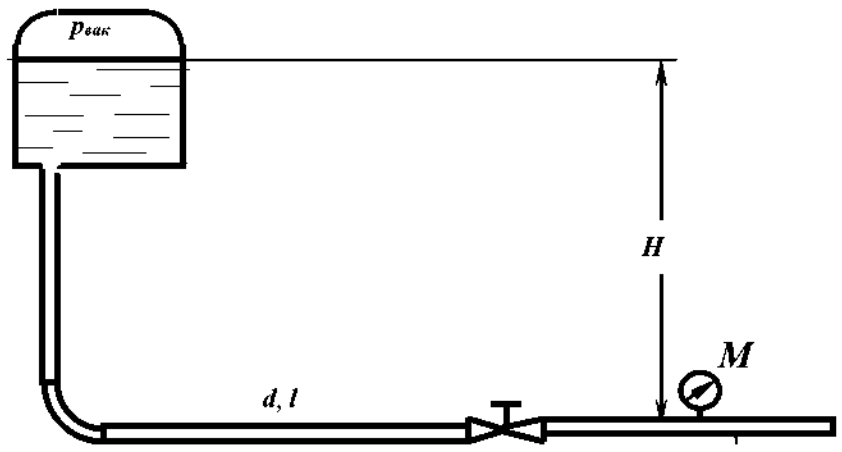
3.Записать уравнение Бернулли для потока реальной жидкости, начертить диаграмму уравнения, пояснить энергетический смысл членов уравнения.

4.Показание первого пьезометра, установленного по ходу движения масла в трубе диаметром d = 50 мм, равно h_1= 1,5 м. Определить показание второго пьезометра h_2 на расстоянии L = 20 м, если расход составляет **Q** = 2,0 л/с.
Кинематический коэффициент вязкости масла принять $\nu = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.

5.В горизонтальной трубе с плавным сужением скорость в первом сечении равна V =0,8 м/с, пьезометрический напор – $p_1/\rho g$ = 0,8 м. Рассчитать пьезометрический напор во втором сечении, если диаметр трубы уменьшится в два раза.

Задача

Определить показание манометра, установленного на трубе диаметром d = 150 мм длиной L = 20 м, подающей в закрытый бак с вакуумметрическим давлением на поверхности жидкости $p_{вак}$ = 0,1 ат масло трансформаторное (ρ = 880кг/м^3, $\nu = 28 \cdot 10^{-6}$ м^2/с) при расходе Q = 5,0 л/с на высоту H = 12 м. Труба стальная новая, коэффициент сопротивления задвижки $\zeta_{задв}$= 6.



№19

1 Дать определение понятия *гидравлический радиус.*

2.Определить диаметр трубы для пропуска воды с расходом Q = 2,4 л/с при скорости V = 1,1 м/с.

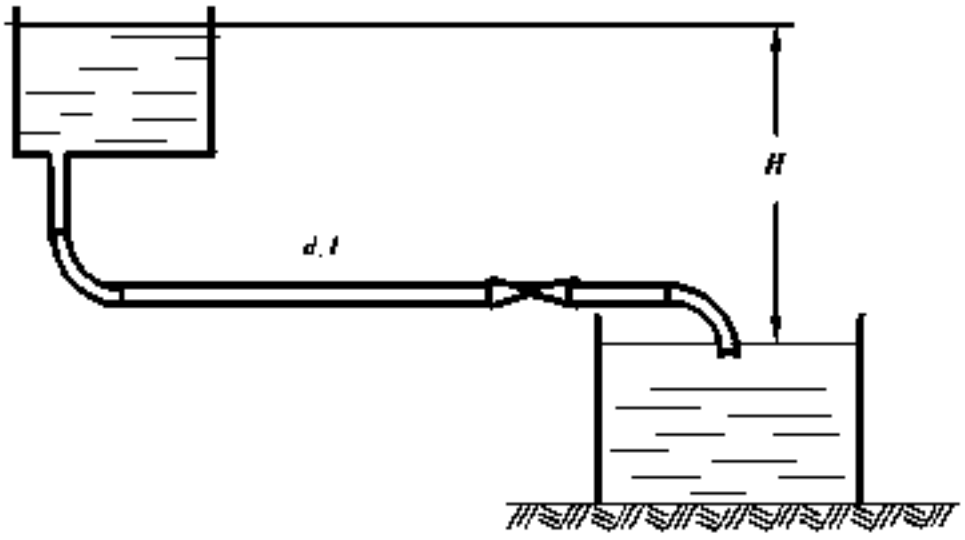
3 Записать уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости, построить диаграмму уравнения. Пояснить параметры, входящие в уравнение, исходя из геометрической интерпретации уравнения

4 Определить разность показаний пьезометров, установленных на горизонтальной трубе d = 50 мм на расстоянии L = 5 м при расходе Q = 3,14 л/с; коэффициент Дарси принять равным 0,04.

5 Определить режим движения воды и нефти в трубе диаметром d = 10 см при скорости движения V = 25 см/с. Кинематический коэффициент вязкости воды $\nu_в$= 0,01 см^2/с; нефти - $\nu_н$ = 0,5 см^2/с.

Задача

Определить расход воды, вытекающей из бака через трубу длиной l = 10 м и диаметром d – 50 мм под напором H – 4 м Коэффициент сопротивления крана принять равным $\zeta_{кр}$– 6 Труба стальная новая Учесть все местные сопротивления



№20

1 Дать определение ламинарного и турбулентного режима.

2.Определить критическую скорость движения воды по трубам диаметрами d = 10 см и 0,1 см. Кинематический коэффициент вязкости воды ν= 0,01 см²/с

3.Каков геометрический и энергетический смысл каждого члена уравнения Бернулли в отдельности и всего уравнения в целом?

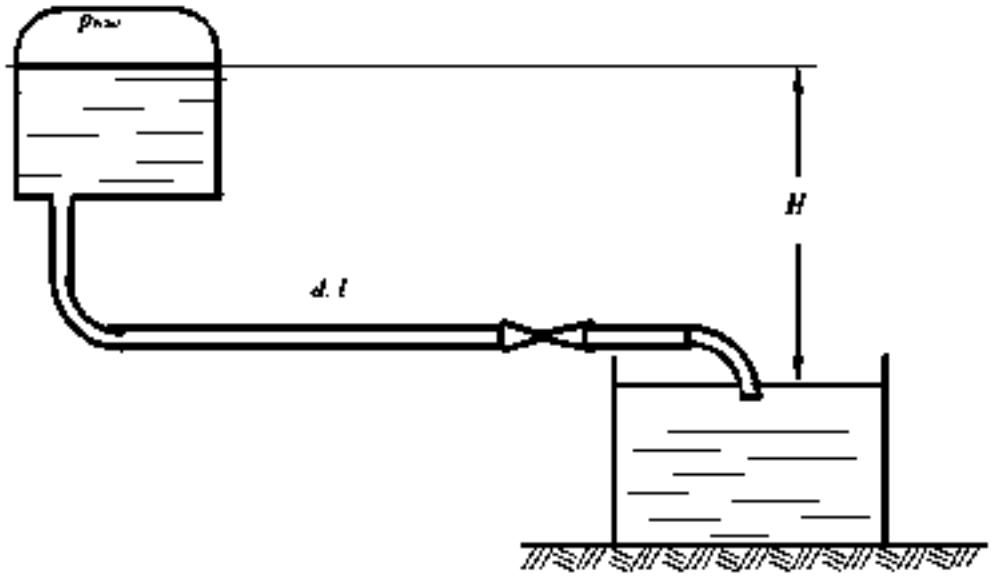
4 Как изменятся потери напора по длине, если расход жидкости уменьшится в 2 раза, показать расчетом.

5 Определить потери напора по длине в трубе длиной L = 20 м диаметром d = 50 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,5 мм при расходе Q = 2,5 л/с, если кинематический коэффициент вязкости воды ν = 10^{-6} м²/с

Задача

Жидкость плотностью ρ = 700 кг/м³ с кинематическим коэффициентом вязкости ν =3x10^{-6} м²/с подается из бака по трубе длиной l = 10 м и диаметром d = 50 мм под напором H = 1 м. Определить расход, если показание вакуумметра $p_{вак}$= 5 кПа

Коэффициент сопротивления задвижки $\zeta_{зад}$ = 5,5, шероховатость трубы Δ= 0,2 мм.



№21

1 По каким признакам движение делится на установившееся и неустановившееся?

2.Чему равен гидравлический радиус в прямоугольном лотке шириной b = 1 м и глубиной наполнения h = 0,5 м?

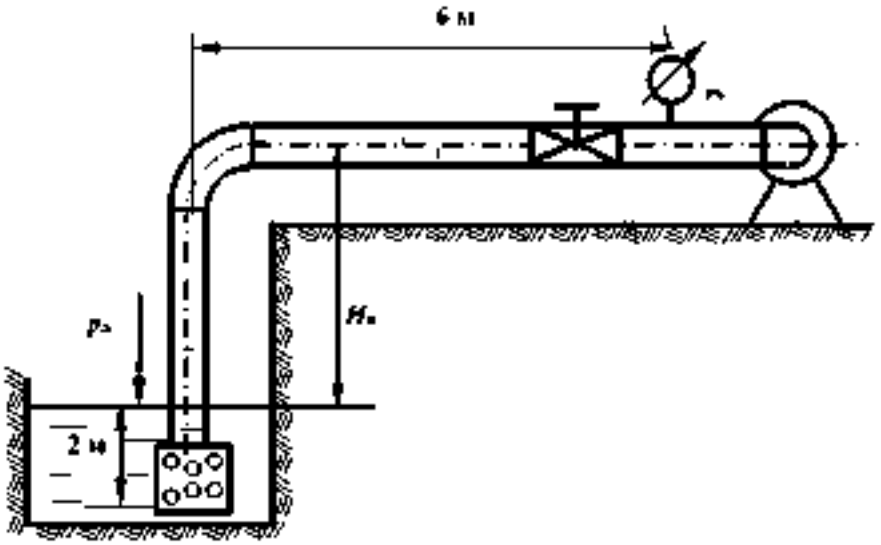
3 Записать уравнение Бернулли для потока реальной жидкости, начертить диаграмму уравнения, пояснить энергетический смысл членов уравнения

4 Сравнить потери напора по длине в стальной трубе круглого и квадратного сечения при равных длине, площади живого сечения и скоростях движения воды и эквивалентной шероховатости: l = 100 м, ω = 0,03 м^2, V = 1,0 м/с, Δ = 0,2 мм

5 Определить расход воды в трубе диаметром d_1 = 250 мм, имеющей плавное сужение до диаметра d_2 = 125 мм, если показания пьезометров: до сужения h_1 = 50 см, в сужении h_2 = 30 см.

Задача

Насос, перекачивающий жидкость с плотностью ρ = 900 кг/м^3 и вязкостью ν = 0,5x10^{-4}м^2/с, в количестве Q = 40 л/с, создает во всасывающей линии вакуум $p_{вак}$ = 350 мм рт.ст., не вызывая разрыва сплошности потока. Диаметр трубопровода равен d = 200 мм. Найти высоту установки насоса $H_н$, при атмосферном давлении 750 мм рт ст и коэффициенте сопротивления задвижки $\zeta_{зад}$ = 2



№22

1.Что такое трубка тока и элементарная струйка? Каковы их свойства?

2.Как зависит средняя скорость от площади живого сечения? Что будет со средней скоростью, если площадь живого сечения увеличивается? уменьшается? остается постоянной(

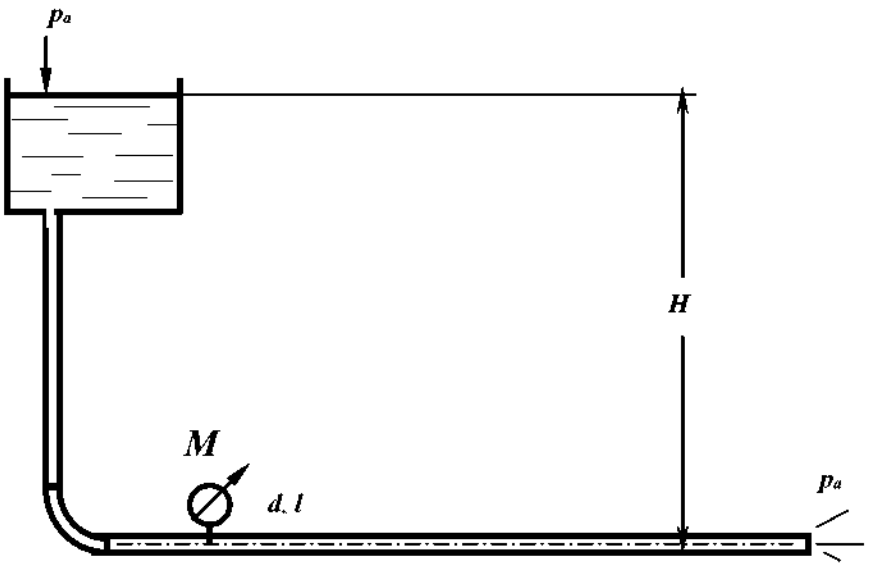
3.Как преобразуется уравнение Бернулли при переходе от элементарной струйки идеальной жидкости к элементарной струйке вязкой жидкости? Как изменится диаграмма уравнения?

4.По трубопроводу диаметром d = 150 мм перекачивается мазут с плотностью ρ = 900 кг/м^3.Определить объемный расход Q и среднюю скоростьV, если весовой расход составляет G =500 Н/час.

5.Определить, при какой скорости возможен ламинарный режим для потока жидкости в трубе диаметром d = 150 мм, если коэффициент кинематической вязкости жидкости равен $\nu = 0{,}3 \times 10^{-4}$ м^2/с.

Задача

Определить, на каком расстоянии от водонапорного бака установлен манометр, показания которого $p_м$ =48 кПа, если длина трубопровода l = 1000 м, диаметр d = 100 мм, H = 10 м, $\Delta_э$= 0,2 мм; принять режим турбулентный, область сопротивления квадратичная.



№23

1.Проанализировать и объяснить возможное положение напорной и пьезометрической линии потока вязкой жидкости. Может ли каждая из них быть горизонтальной, иметь уклон в сторону движения или против него? В каких случаях?

2.Чему равен смоченный периметр в безнапорной трубе диаметром d = 1 м и глубиной наполнения h = 0,5 м?

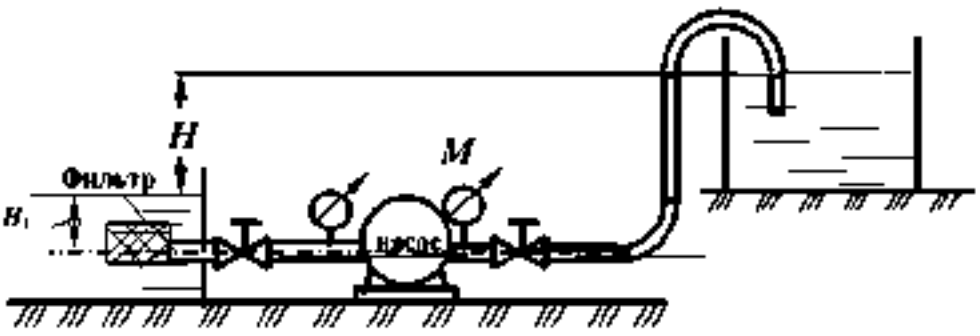
3 В каком смысле следует понимать определение *потери энергии*, учитывая, что уравнение Бернулли – закон сохранения энергии при движении жидкости? Может ли потерянная энергия снова перейти в механическую энергию движущегося потока?

4 Чему равна скорость V_1 в напорном трубопроводе, если в сечении 1-1 внутренний диаметр трубы равен d_1 =10 см, а в сечении 2-2 диаметр d_2 = 5см и скорость V_2=1 м/с?

5 Определить давление в конце водопроводной трубы длиной L = 100м, диаметром d = 100 мм (Δ= 1,0 мм), если показание манометра в начале трубы p = 0,96 ат, расход составляет Q = 4,2 л/с ($\nu = 10^{-6}$ м^2/с).

Задача

Насос подает дизельное топливо из нижнего бака в верхний. Определить напор, создаваемый насосом, и его полезную мощность, если плотность жидкости $\rho_ж$ = 800 кг/м^3 и кинематическая вязкость ν = 3,0·10^{-6}м^2/с. Геометрические параметры всасывающего трубопровода: $d_{вс}$ = 125 мм, длина $l_{вс}$= 10 м, нагнетательного трубопровода - $d_н$ = 100 мм, $l_н$= 800 м, эквивалентная шероховатость Δ = 0,5 мм. Высота подъема топлива H = 20 м при подаче Q = 16 л/с, показания манометра, установленного после насоса, $p_м$ = 1,2 ат. Эквивалентную длину в линии нагнетания принять равной 20 м. В линии всасывания учесть потери напора в фильтре ($\zeta_ф$=17) и в полностью открытом вентиле.



№24

1.Что такое гидравлический уклон? Может ли он быть положительным? отрицательным?

2 Какую размерность имеет число Рейнольдса? Чему равно критическое число Рейнольдса? Как найти критическую скорость?

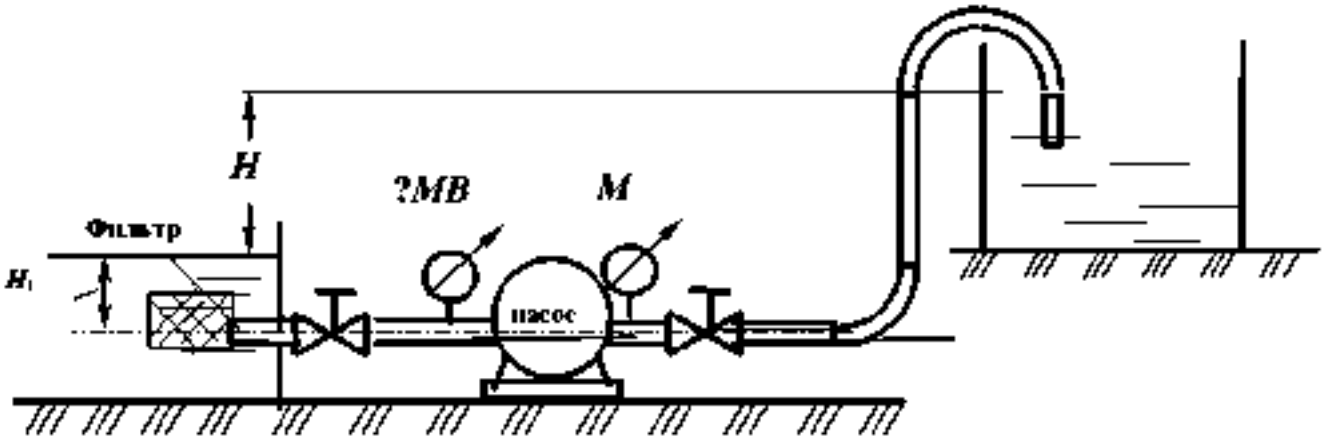
3.Как изменится расход воды в новой стальной трубе диаметром d = 100 мм и длиной L = 100 м, если потери напора составляют 0,5 м, а температура воды изменилась от 5° до 20°С?

4.Построить диаграмму уравнения Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости; пояснить энергетический смысл уравнения

5.Определить расходы воды в квадратной и круглой трубе при площади живого сечения ω = 0,002 м^2, Δ = 0,2 мм, если потери напора в этих трубах одинаковы и равны 0,2 м, а длина каждой трубы: l =100 м.

Задача

Насос подает дизельное топливо из нижнего бака в верхний. Определить тип прибора, установленного перед входом в насос при H_1= 3 м. если плотность жидкости ρ= 800 кг/м^3 и кинематическая вязкость ν = 3,0·10^{-6}м^2/с; расход Q = 16 л/с; геометрические параметры всасывающего трубопровода. $d_{вс}$ = 125 мм, длина $l_{вс}$= 10 м, учесть потери напора в фильтре ($\zeta_ф$=17) и в полностью открытом вентиле.



№25

1.Что такое ***местные*** потери напора и потери напора ***по длине*** потока? Какова природа и физическая сущность этих явлений?

2 Под каким давлением находится напорный поток вязкой жидкости, если пьезометрическая линия проходит ниже, выше или совпадает с продольной осью потока?

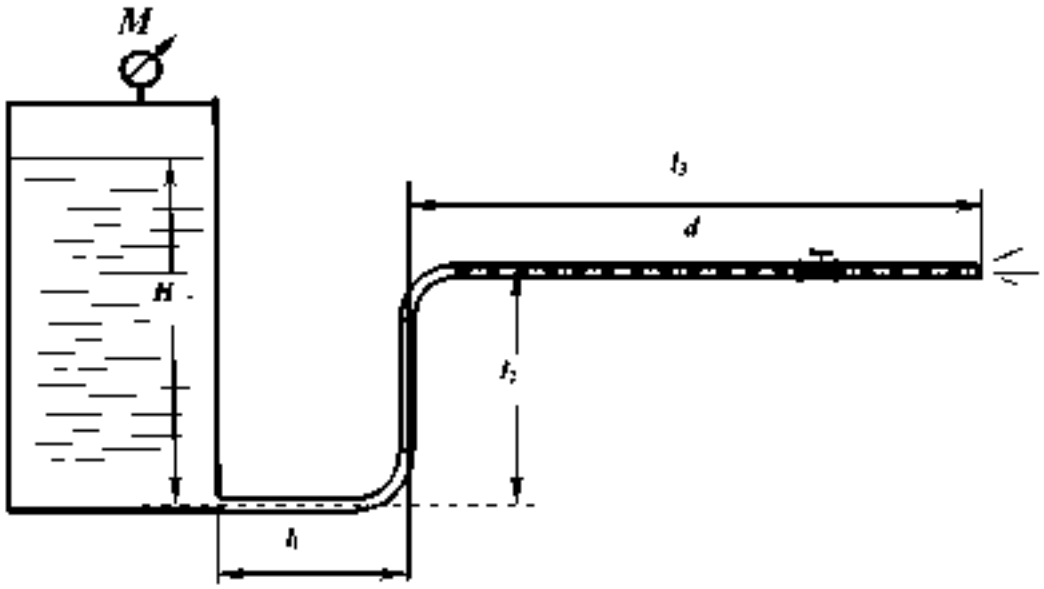
3 Определить давление в начале трубопровода диаметром d = 150 мм и длиной L = 10 км, при подаче жидкости с плотностью ρ = 880 кг/м^3 и вязкостью ν = 1,09 Ст при весовом расходе G = 12000 Н/сутки. Конечная точка трубопровода лежит выше начальной на 100 м, а давление в конце трубопровода p_2 = 1,5 ати.

4 Определить режим движения воды и нефти в трубе диаметром d = 10 см при расходе равном 250 см^3/с. Кинематический коэффициент вязкости воды $\nu_в$ = 0,01 см^2/с; нефти – $\nu_н$ = 0,5 см^2/с

5.Что такое зона квадратичного сопротивления турбулентного режима? Как она определяется при расчете?

Задача

Чему равен напор H, необходимый для обеспечения расхода воды Q = 20 л/с трубопроводе диаметром d = 100 мм и с длинами l_1 = 10 м, l_2 = 4 м, l_3 = 40 м при показании манометра $p_{ман}$=0,1 ат, труба старая, сильно загрязненная, вентиль полностью открытый. Учесть все местные сопротивления



№26

1.Какое движение жидкости называется равномерным?

2 Определить разность показаний трубки Пито и пьезометра, если скорость в точке установки прибора равна u =1,21 м/с. Начертить схему установки приборов.

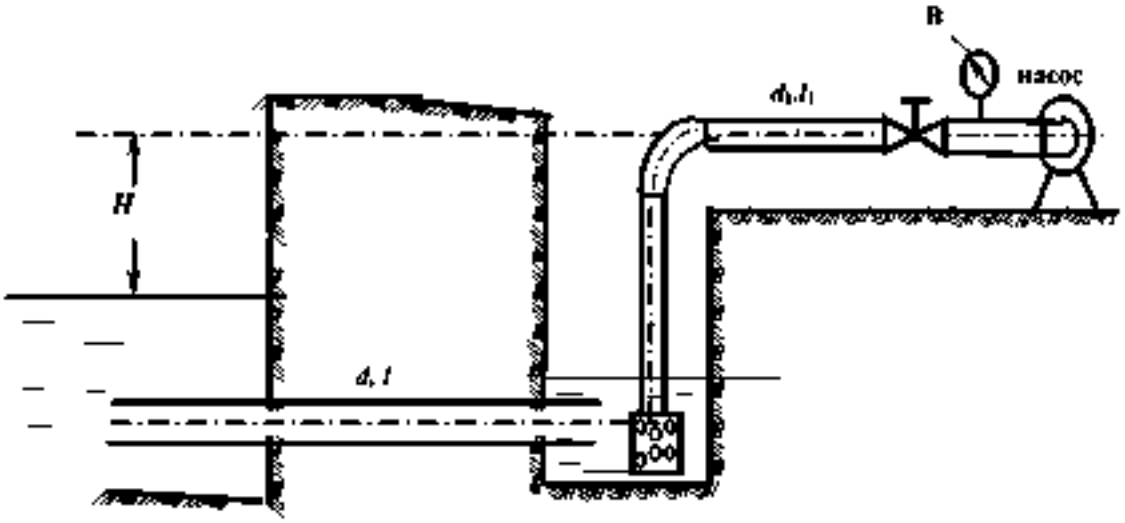
3 Представить уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости, начертить диаграмму уравнения.

4.Определить потери напора по длине в трубе длиной L = 200 м диаметром d = 50 мм с абсолютной шероховатостью Δ= 0,01 мм при расходе Q = 2,5 л/с. если коэффициент кинематической вязкости воды $\nu = 10^{-6}$ м^2/с

5 Определить, при какой скорости возможен ламинарный режим для потока жидкости в трубе диаметром d =150 мм, если коэффициент кинематической вязкости жидкости равен $\nu = 0{,}3\times10^{-4}$ м^2/с

Задача

Вода ($\nu = 10^{-6}$м^2/с) из озера по самотечному трубопроводу (d = 200 мм, l = 50 м) поступает в береговой колодец, откуда насосом подается в промысловый водопровод. Подача насоса Q = 60 л/с, его всасывающая линия (d_1 = 150 мм, l_1 = 15 м) имеет сетку с обратным клапаном, колено и вентиль. Все трубы сварные, умеренно заржавевшие. H = 3 м. Определить вакуум в трубе перед насосом



МИНОБРНАУКИ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

РУКОВОДСТВО ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Б1.Б.1.21.01 ОТКРЫТАЯ ГЕОТЕХНОЛОГИЯ

Специальность – 21.05.04 Горное дело

Специализация №3 **«Открытые горные работы»**

форма обучения: очная, заочная

Квалификация выпускника: **горный инженер (специалист)**

Автор: Лель Ю.И., профессор, д.т.н.,
Сандригайло И.Н., доцент, к.т.н.
Арефьев С.А., доцент, к.т.н.

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 5
1. СОДЕРЖАНИЕ ПРОЕКТА..... 6
1.1. Краткая геологическая характеристика месторождения..... 6
1.2. Объем и размеры карьера..... 6
1.3. Запасы полезного ископаемого и объем вскрыши в контурах карьера..... 6
1.4. Производительность карьера и срок его службы..... 7
1.5. Параметры вскрывающих выработок..... 8
1.6.Параметры системы разработки..... 9
1.7. Подготовка горных пород к выемке..... 11
1.8. Производительность и парк буровых станков..... 13
1.9. Производительность и парк карьерных экскаваторов..... 14
1.10. Транспорт горной массы..... 15
1.11. Отвальные работы..... 18
2. ОФОРМЛЕНИЕ КУРСОВОГО ПРОЕКТА..... 21
2.1. Оформление пояснительной записки..... 21
2.2. Оформление чертежей..... 21
3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА..... 22
3.1. Краткая геологическая характеристика и горнотехнические условия разработки месторождения..... 22
3.2. Объем и размеры карьера..... 22
3.3. Запасы полезного ископаемого и объем вскрыши в контурах карьера..... 23
3.4. Производительность карьера и срок его службы..... 24
3.5. Параметры вскрывающих выработок..... 25
3.6. Параметры системы разработки..... 26
3.7. Подготовка горных пород к выемке..... 28
3.8. Производительность и парк буровых станков..... 31
3.9. Производительность и парк карьерных экскаваторов..... 33
3.10. Транспорт горной массы..... 35
3.11. Отвальные работы..... 38
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... 42
ПРИЛОЖЕНИЯ..... 43
Приложение 1. Технологические параметры карьерных экскаваторов... 43
Приложение 2. Экскаваторно-автомобильно-отвальные комплексы оборудования..... 43
Приложение 3. Значение коэффициента разбура в зависимости от крепости пород..... 43
Приложение 4. Значение коэффициента перебура в зависимости от взрываемости пород..... 44
Приложение 5. Значение коэффициента забойки..... 44
Приложение 6. Типы ВВ, применяемых в сухих скважинах..... 44

Приложение 7. Эталонный расход ВВ (по данным Гипроруды) 44
Приложение 8. Переводные коэффициенты и плотность заряжания ВВ..... 45
Приложение 9. Значение коэффициента $К_{дс}$ (по данным Гипроруды)..... 45
Приложение 10. Зависимость коэффициента $К_З$ от категории трещиноватости..... 45
Приложение 11. Зависимость коэффициента $К_в$ от взрываемости пород..... 46
Приложение 12. Зависимость коэффициента $К_З$ от интервала замедления..... 46
Приложение 13. Зависимость оптимальной скорости вращения бурового става от показателя буримости пород и диаметра долота... 46
Приложение 14. Значения коэффициента в зависимости от показателя буримости..... 46
Приложение 15. Значения коэффициента разрыхления породы в ковше экскаватора $К_р$, коэффициента наполнения ковша экскаватора $К_Н$..... 47
Приложение 16. Технические характеристики карьерных автосамосвалов БелАЗ..... 47
Приложение 17. Значения коэффициента технической готовности автосамосвалов ($k_{Т.Г}$) 47
Приложение 18. Среднетехнические скорости движения карьерных автосамосвалов ($v_{СР.Т}$), км/ч..... 48
Приложение 19. Технические характеристики станков шарошечного бурения..... 48
Приложение 20. Значение коэффициентов $k^о_р$, $k_{зав}$ и рекомендуемой высоты яруса отвала $h_я$ 49
Приложение 21. Производительность бульдозеров различных моделей 49
Приложение 22. Образец выполнения чертежей..... 55

ВВЕДЕНИЕ

Курсовой проект по дисциплине «Открытая геотехнология» выполняется студентами в 3-м семестре.

Задачи выполнения курсового проекта:

– закрепление теоретических основ специальности путем самостоятельного решения инженерных задач, связанных с проектированием карьеров и определением их основных параметров, выбором схемы вскрытия и системы разработки, определением способов подготовки, выемки, транспортирования горной массы и отвалообразования, выбором основного горного и транспортного оборудования и определением его производительности;

– выработка навыков использования справочных и нормативных материалов в ходе проектирования горного предприятия;

– анализ взаимосвязи принятых технологических и технических решений и их влияния на технико-экономические показатели работы горнодобывающего предприятия.

Основанием для выполнения курсового проекта является индивидуальное задание на проектирование, выдаваемое преподавателем-руководителем курсового проекта каждому студенту.

Курсовой проект состоит из расчетно-пояснительной и графической частей и оформляется в соответствии с действующими стандартами.

Законченный курсовой проект (записка и чертежи) сдается на проверку руководителю.

1. СОДЕРЖАНИЕ ПРОЕКТА

1.1. Краткая геологическая характеристика месторождения

На основании задания, выданного руководителем, в данном разделе приводится геологическая характеристика месторождения:

1. Форма и размеры залежи или пласта полезного ископаемого (длина по простиранию L, мощность M и угол падения пласта), мощность наносов $H_н$, геологические нарушения, рельеф местности.

2. Физико-механические свойства пород вскрыши и полезного ископаемого (крепость по шкале проф. М. М. Протодьяконова, плотность).

1.2. Объем и размеры карьера

Объем карьера ($V_к$, м^3) при равнинном рельефе поверхности, простой форме залежи и крутом ее падении определяется по формуле:

$$V_к = SH_к + \frac{1}{2}PH_к^2 \operatorname{ctg}\gamma_{ср} + \frac{\pi}{3}H_к^3 \operatorname{ctg}^2\gamma_{ср}, \qquad (1.1)$$

где S – площадь дна карьера, м^2; $S = LM$;

L – длина залежи по простиранию, м;

M – горизонтальная мощность залежи, м;

$H_к$ – конечная глубина карьера, м;

P – периметр дна карьера, м:

$$P = 2(L + M),$$

$\gamma_{ср}$ – среднее значение угла погашения бортов карьера, град:

$$\gamma_{ср} = \frac{\gamma_л + \gamma_в}{2}, \qquad (1.2)$$

где $\gamma_л$, $\gamma_в$ – углы погашения бортов карьера со стороны лежачего и висячего боков залежи соответственно, град.

Длина карьерного поля поверху ($L_к$, м):

$$L_к = L + 2H_к \operatorname{ctg}\gamma_{ср}. \qquad (1.3)$$

Ширина карьерного поля поверху ($B_к$, м):

$$B_к = M + 2H_к \operatorname{ctg}\gamma_{ср}. \qquad (1.4)$$

Полученные значения $L_к$ и $B_к$ должны учитываться при выполнении чертежа плана карьера.

1.3. Запасы полезного ископаемого и объем вскрыши в контурах карьера

Запасы полезного ископаемого в контурах карьера ($V_{п.и}$, м^3):

$$V_{\text{п.и}} = LM(H_{\text{к}} - H_{\text{н}}), \tag{1.5}$$

где $H_{\text{н}}$ – мощность наносов, м.

Промышленные запасы в контурах карьера (то есть извлекаемые из недр запасы ($Q_{\text{п.и}}$, т):

$$Q_{\text{п.и}} = V_{\text{п.и}} \gamma_{\text{п.и}} \eta_{\text{и}}, \tag{1.6}$$

где $\gamma_{\text{п.и}}$ – плотность полезного ископаемого, т/м^3;

$\eta_{\text{и}}$ – коэффициент извлечения полезного ископаемого при разработке месторождения, учитывающий потери при разработке (принимается $\eta_{\text{и}} = 0{,}92$).

Объем вскрыши в контурах карьера ($V_{\text{п}}$, м^3):

$$V_{\text{п}} = V_{\text{к}} - V_{\text{п.и}}. \tag{1.7}$$

Средний коэффициент вскрыши (объем извлекаемой пустой породы, приходящийся на единицу добываемого полезного ископаемого ($K_{\text{ср}}$, м^3/т):

$$K_{\text{ср}} = \frac{V_{\text{п}}}{Q_{\text{п}}}. \tag{1.8}$$

Полученное значение $K_{\text{ср}}$ необходимо для расчета производительности карьера по вскрыше.

1.4. Производительность карьера и срок его службы

Производительность карьера по полезному ископаемому ($\text{П}_{\text{и}}$, т/год) принимается в соответствии с заданием на выполнение работы.

Производительность карьера по вскрыше ($\text{П}_{\text{в}}$, м^3/год) устанавливается с учетом среднего коэффициента вскрыши:

$$\text{П}_{\text{в}} = \text{П}_{\text{и}} K_{\text{ср}} K_{\text{н}}, \tag{1.9}$$

где $K_{\text{н}}$ – коэффициент неравномерности распределения вскрыши по годам ($K_{\text{н}}$ =1,3).

Производительность карьера по горной массе ($\text{П}_{\text{г.м}}$, м^3/год):

$$\text{П}_{\text{г.м}} = \text{П}_{\text{и}} \frac{1}{\gamma_{\text{п.и}}} + \text{П}_{\text{в}}, \tag{1.10}$$

Суточная производительность карьера по добыче ($\text{П}^{\text{с}}_{\text{и}}$, т/год):

$$\text{П}^{\text{с}}_{\text{и}} = \frac{\text{П}_{\text{и}}}{T_{\text{г}}}, \tag{1.11}$$

где $T_г$ – число рабочих дней карьера в году:

$$T_г = T_к - T_{п.в} - T_{кл}, \quad (1.12)$$

где $T_к$ – количество календарных дней в году (365 дней);

$T_{п.в}$ – количество праздничных, выходных дней в году (можно принять 8 дней);

$T_{кл}$ – продолжительность простоев по климатическим условиям (можно принять 4 дня).

Суточная производительность карьера по вскрыше ($П^с_в$, м^3/сут):

$$П^с_в = \frac{П_в}{T_г}. \quad (1.13)$$

Сменная производительность карьера по добыче ($П^{см}_и$, т/см):

$$П^{см}_и = \frac{П^с_и}{n_{см}}, \quad (1.14)$$

где $n_{см}$ – число смен работы карьера в сутках (можно принять 3 смены).

Сменная производительность карьера по вскрыше ($П^{см}_в$, м^3/см)

$$П^{см}_в = \frac{П^с_в}{n_{см}}. \quad (1.15)$$

Срок службы карьера ($T_{сл}$, лет):

$$T_{сл} = T_с + T_э + T_з, \quad (1.16)$$

где $T_с$, $T_з$ – время на освоение и затухание мощности карьера по добыче (можно принять 1,5 года);

$T_э$ – расчетный срок эксплуатации карьера:

$$T_э = \frac{Q_{п.и}}{П_и}. \quad (1.17)$$

В приведенной формуле значение $П_И$ принимается в соответствии с заданием на выполнение работы.

1.5. Параметры вскрывающих выработок

При автомобильном транспорте уклон съездов ($i_р$, д. е.) может быть принят равным 0,08, а при других видах тяги и транспорта – согласно рекомендациям [1, 2].

Длина съезда ($L_т$, м):

$$L_{\text{т}} = \frac{H_{\text{у}}}{i_{\text{р}}}, \qquad (1.18)$$

где $H_{\text{у}}$ – высота уступа (см. раздел 1.6).

Ширина съезда, согласно работе [2], равна 20 м.

Минимальная ширина разрезной траншеи принимается, согласно работе [2], при погрузке в автосамосвалы ($B_{\text{тр}}$, м):

$$B_{\text{тр}} = 30 \text{ м}. \qquad (1.19)$$

Ширина траншеи поверху ($B_{\text{тр}}^{\text{в}}$, м):

$$B_{\text{тр}}^{\text{в}} = B_{\text{тр}} + 2H_{\text{у}} \operatorname{ctg}\alpha, \qquad (1.20)$$

где α – угол откоса рабочего уступа, град. (см. раздел 1.6).

1.6. Параметры системы разработки

Допустимая высота уступа ($H_{\text{у}}$, м) по условию безопасного ведения работ в скальных породах определяется по формуле:

$$H_{\text{у}}^{\max} \le 1{,}5H_{\text{ч}}^{\max}, \qquad (1.21)$$

где $H_{\text{ч}}^{\max}$ – максимальная высота черпания экскаватора (прил. 1) принятой модели (может быть принята согласно прил. 2), м.

Эта высота уступа является допустимой. На практике высота уступов на большинстве отечественных карьеров составляет 10-15 метров и такой высоту уступов целесообразно принимать в данном проекте.

Ширина экскаваторной заходки ($A_{\text{з}}$, м) при автотранспорте может быть найдена по формуле:

$$A_{\text{з}} = (0{,}8 \div 1{,}2)R_{\text{чу}}, \qquad (1.22)$$

где $R_{\text{чу}}$ – радиус черпания на уровне стояния экскаватора (см. прил. 1).

Минимальная ширина рабочей площадки при разработке пород с предварительным их рыхлением буровзрывным способом ($Ш_{\text{р.п}}^{\min}$, м):

$$Ш_{\text{р.п}}^{\min} = B_{\text{р1}} + C + T + S + Z, \qquad (1.23)$$

где $B_{\text{р1}}$ – ширина развала породы, м (принимается по результатам расчетов из раздела 1.7);

C – безопасный зазор между нижней бровкой развала и транспортной полосой (C = 3 м);

T – ширина транспортной полосы, м (при двухстороннем движении автосамосвалов может быть принята T = 15 м);

S – безопасное расстояние (S =2,0 м);

Z – ширина призмы обрушения, м:

$$Z = H_{\text{у}}(\text{ctg}\,\alpha_{\text{у}} - \text{ctg}\,\alpha), \qquad (1.24)$$

где $\alpha_{\text{у}}$ – угол устойчивого откоса уступа (можно принять $\alpha_{\text{у}} = 65°$);
α – угол откоса рабочего уступа (можно принять $\alpha = 75°$).

Ширина рабочей площадки в нормальный период разработки ($Ш_{\text{р.п}}$, м):

$$Ш_{\text{р.п}} = B_{\text{р}_1} + C + T + U + S + Ш_{\text{в.б}}, \qquad (1.25)$$

где U – расстояние между ЛЭП и транспортной полосой, м ($U = 6$ м);
m – расстояние между ЛЭП и вспомогательной автодорогой ($m = 3{,}5$ м);
a – ширина вспомогательной автодороги, м ($a = 3 \div 6$ м);
S – расстояние между ЛЭП и резервным блоком ($S = Z + 2{,}0$ м); (1.26)
$Ш_{\text{в.б}}$ – ширина взрывного блока (принимается по результатам расчетов в разделе 1.7).

Высота рабочего борта карьера ($H_{\text{р.б}}$, м):

$$H_{\text{р.б}} = H_{\text{у}} n_{\text{р.у}}, \qquad (1.27)$$

где $n_{\text{р.у}}$ – количество рабочих уступов (принимаем 3 уступа).

Горизонтальное проложение откоса рабочего борта ($C_{\text{р.б}}$, м):

$$C_{\text{р.б}} = H_{\text{у}}\,\text{ctg}\,\alpha n_{\text{р.у}} + Ш_{\text{р.п}}(n_{\text{р.у}} - 1). \qquad (1.28)$$

Тангенс угла рабочего борта карьера (tgφ, град):

$$\text{tg}\varphi = \frac{H_{\text{р.б}}}{C_{\text{р.б}}}. \qquad (1.29)$$

С использованием микрокалькулятора или из таблиц определяется величина угла рабочего борта φ в градусах. (1.30)

1.7. Подготовка горных пород к выемке

Исходя из крепости и других физико-механических свойств пород выбирают способ подготовки пород к выемке. Согласно работам [3, 4], при скальных породах их подготовка осуществляется с помощью скважинных зарядов.

Размер допустимого габаритного куска ($d_{\text{ср}}$, м) определяется по формуле:

$$d_{\text{г}} \le 0{,}75\sqrt[3]{E}, \qquad (1.31)$$

где E – вместимость ковша экскаватора, м^3 (прил. 1).

Диаметр взрывных скважин ($d_{\text{с}}$, мм):

$$d_{\text{с}} = d_{\text{д}} K_{\text{раз}}, \qquad (1.32)$$

где $d_{\text{д}}$ – диаметр долота бурового станка, мм (прил. 2).

Технические характеристики буровых станков приведены в прил. 19;

$K_{раз}$ – коэффициент разбуривания скважин, принимаемый в зависимости от крепости пород (прил. 3).

Длина перебура ($l_{пер}$, м):

$$l_{пер} = d_с K_{пер}, \quad (1.33)$$

где $K_{пер}$ – коэффициент перебура, определяемый взрываемостью пород (прил. 4). В нашем случае принят класс взрываемости III.

Длина скважины ($l_с$, м):

$$l_с = H_у + l_{пер}. \quad (1.34)$$

где $H_у$ – высота взрываемого уступа (см. раздел 1.6), м.

Длина забойки ($l_{заб}$, м):

$$l_{заб} = K_{заб} l_с, \quad (1.35)$$

где $K_{заб}$ – коэффициент забойки (прил. 5). В нашем случае категория трещиноватости пород III.

Длина заряда взрывчатого вещества в скважине ($l_{зар}$, м):

$$l_{зар} = l_с - l_{заб}. \quad (1.36)$$

Тип взрывчатого вещества (ВВ) определяется по прил. 6. В качестве ВВ в сухих скважинах, в породах средне – и труднобуримых ($П_б$ = 6÷15) целесообразно применять граммонит 79/21.

Паспортный расход ВВ первого ряда скважин ($q_п$, кг/м^3):

$$q_п = q_э K_{вв} K_{дс} K_{др} K_β, \quad (1.37)$$

где $q_э$ – эталонный удельный расход ВВ, кг/м^3 (определяется по прил. 7);

$K_{вв}$, $K_{дс}$, $K_{др}$, $K_β$ – коэффициенты, учитывающие тип ВВ - $K_{вв}$ (прил. 8), диаметр скважины- $K_{дс}$ (прил. 9), дробление пород - $K_{др}$ (принимать $K_{др}$ = 1),угол наклона скважин - $K_β$ (при β = 90°, $K_β$ =1, а при β < 90°, $K_β$ = 0,93÷0,95).

Удельная вместимость скважины (P, кг/м):

$$P = 7{,}85 d_с^2 Δ, \quad (1.38)$$

где Δ плотность заряда в скважине, кг/дм^3. При гранулированных ВВ Δ = 0,9÷1,0 кг/дм^3;

$d_с$ – диаметр скважины, дм.

Масса заряда в скважине ($Q_э$, кг):

$$Q_э = P l_{зар}. \quad (1.39)$$

Величина линии сопротивления по подошве (W, м):

$$W = 0{,}9 \sqrt{\frac{P}{q_п}}. \quad (1.40)$$

Необходимо соблюдение условия

$$W \geq W_{\min}, \tag{1.41}$$

где $W_{\min}$ – минимальная допустимая величина W.

Для вертикальных скважин

$$W_{\min} = H_{\text{у}} \operatorname{ctg}\alpha + Z, \tag{1.42}$$

где α – угол откоса уступа, град.;

Z – определяется по формуле (1.24). Необходимо выполнение условия $Z \geq 2$ м.

Для наклонных скважин $W_{\min} = Z$, м.

Если $W < W_{\min}$, то надо принимать $W = W_{\min}$.

Расстояние между скважинами в ряду (a, м):

$$a = \frac{Q_{\text{з}}}{q_{\text{п}} H_{\text{у}} W}. \tag{1.43}$$

Величина a определяется по допустимому коэффициенту сближения скважин (m):

$$m = \frac{a}{W}. \tag{1.44}$$

По условию нормального дробления для легковзрываемых пород должно быть m = 1,1÷1,2; для пород средней взрываемости m = 1,0÷1,1; для трудновзрываемых m = 0,85÷1,0. При расчетном значении m, отличающемся от рекомендуемого, необходимая его величина достигается одновременным изменением a и W при условии постоянства объема породы, взрываемой одним зарядом, то есть при соблюдении условия $aWA = \text{const}$ и $W \geq W_{\min}$.

Расстояние между рядами скважин (b, м):

$$b = \frac{Q_{\text{з}}}{q_{\text{п}} H_{\text{у}} a K_{\text{з}}}, \tag{1.45}$$

где $K_{\text{з}}$ – коэффициент увеличения удельного расхода ВВ во втором и последующих рядах (прил. 10).

Ширина развала породы впереди первого ряда скважин ($B_{\text{р}}$, м):

$$B_{\text{р}} = K_{\text{в}} K_{\text{кз}} \sqrt{q_{\text{п}}} H_{\text{у}}, \tag{1.46}$$

где $K_{\text{в}}$ – коэффициент, характеризующий взрываемость породы (прил. 11).

В нашем случае породы средневзрываемые;

$K_{\text{кз}}$ – коэффициент дальности отброса породы, зависящий от интервала замедления (прил. 12). Интервал замедления может быть принят равным 25, 50, 75 мс.

Рациональная ширина развала ($B_{\text{рац}}$, м):

$$B_{\text{рац}} = (2 \div 3) A_{\text{з}}, \tag{1.47}$$

где A_3 – ширина экскаваторной заходки (определяется в разделе 1.6 по формуле (1.22).

Количество рядов скважин ($n_р$):

$$n_р = \frac{B_{рац} - K_в K_{кз}\sqrt{q_п} H_у}{b} + 1. \quad (1.48)$$

Значение $n_р$ округляется в меньшую сторону.

Фактическая ширина развала ($B_{р.ф}$, м):

$$B_{р.ф} = B_р + (n_р - 1)b. \quad (1.49)$$

Ширина буровой заходки ($Ш_{б.з}$, м):

$$Ш_{б.з} = W + (n_р - 1)b. \quad (1.50)$$

Выход горной массы с 1 м длины скважины ($q_{г.м}$, м³/м):

$$q_{г.м} = \frac{H_у a[(n_р - 1)b + W]}{l_с n_р}. \quad (1.51)$$

Значение $q_{г.м}$ будет необходимо использовать при определении списочного парка станков.

1.8. Производительность и парк буровых станков

В скальных породах крепостью 6–18 по шкале проф. М. М. Протодьяконова целесообразно использовать для бурения скважин буровые станки шарошечного бурения (тип станка в этом случае может быть определен по прил. 2). Для других условий тип станка и его производительность могут быть определены согласно работам [3, 4].

При применении станков шарошечного бурения механическая скорость бурения ($v_м$, м/ч):

$$v_м = 0{,}01 \frac{P_о n_о^{0{,}8}}{П_б^{1{,}6} D}, \quad (1.52)$$

где $n_о$ – оптимальная скорость вращения бурового става, об/мин (прил. 13);

$П_б$ – показатель буримости пород ($П_б \approx f$ – крепость пород);

D – диаметр долота, см;

$P_о$ – оптимальное осевое усилие, кг;

$$P_о \geq (7 + 8) П_б D, \quad (1.53)$$

где D – диаметр долота должен быть представлен в миллиметрах, а значения коэффициента определяются для конкретного случая из прил. 14.

Сменная производительность станка ($П_{см}^{ст}$, м/см):

$$П_{см}^{ст} = V_м T_{см} \eta_и, \quad (1.54)$$

где $T_{см}$ – продолжительность смены (может быть принято 8 ч);

$\eta_и$ – коэффициент использования станка в течение смены на чистом бурении (можно принять $\eta_и = 0{,}65$).

Суточная производительность станка ($П_{сут}^{ст}$, м/сут):

$$П_{сут}^{ст} = П_{см}^{ст} n_{см}, \quad (1.55)$$

где $n_{см}$ – количество рабочих смен станка в сутки (может быть принято 3 смены).

Годовая производительность станка ($П_{год}^{ст}$, м/год):

$$П_{год}^{ст} = П_{сут}^{ст} n_{р.д.с}, \quad (1.56)$$

где $n_{р.д.с}$ – число рабочих дней станка в году (с учетом вычитания времени ремонтов, перемещений с участка на участок, остановок в работе по климатическим условиям и др.). Для станков СБШ может быть принято $n_{р.д.с} = 280$ дней.

Списочный парк буровых станков ($N_с^{ст}$, шт.):

$$N_с^{ст} = \frac{П_{г.м}}{П_{год}^{ст} q_{г.м}}, \quad (1.57)$$

где $П_{гм}$ – годовой объем обуриваемой горной массы в карьере, м^3 (в нашем случае равен производительности карьера по горной массе, определенной в разделе 1.4);

$q_{г.м}$ – выход взорванной горной массы с 1 м погонной длины скважины, м^3/м (определяется в главе 1.7. по формуле (1.51).

Списочный парк буровых станков округляется в большую сторону.

1.9. Производительность и парк карьерных экскаваторов

Тип экскаватора определяется по прил. 2 или согласно работам [3, 4].

Эксплуатационная производительность экскаватора ($П_э$, м^3/ч):

$$П_э = \frac{3600 E K_н}{T_ц K_р} K_{ис}, \quad (1.58)$$

где E – вместимость ковша экскаватора, м^3 (прил. 1);

$K_н$ – коэффициент наполнения ковша (прил. 15);

$K_р$ – коэффициент разрыхления породы в ковше (прил. 15);

$K_{ис}$ – коэффициент использования экскаватора (при автомобильном транспорте можно принять $K_{ис}$ =0,65, а в других условиях – согласно работам [3, 4]);

$T_ц$ – длительность цикла, с:

$$T_ц = T_ч + T_{пов} + T_р, \quad (1.59)$$

где $T_ч$ – длительность черпания, с:

$$T_ч = \frac{194 d_{ср}^2}{E} + \frac{E}{0{,}11E + 0{,}6}, \quad (1.60)$$

$d_{ср}$ – размер «среднего» куска в развале взорванной горной массы, м;

$$d_{ср} = (0{,}3 \div 0{,}4)\sqrt[3]{E},$$

$T_{пов}$ – длительность поворота, с:

$$T_{пов} = (10 + E) + 0{,}18(\beta - 90^\circ), \quad (1.61)$$

β – угол поворота экскаватора (в среднем может быть равен 135°);

$T_р$ – длительность разгрузки, с:

при $E = 1 \div 3$ м^3 $T_р = 1{,}5 \div 2.5$ с;

при $E = 3 \div 10$ м^3 $T_р = 2{,}5 \div 2{,}7$ с;

при $E = 12 \div 20$ м^3 $T_р = 2{,}9 \div 3{,}5$ с.

Сменная эксплуатационная производительность экскаватора ($П^э_{см}$, м^3/см):

$$П^э_{см} = П_э T_{см}, \quad (1.62)$$

где $T_{см}$ – длительность смены (8 часов).

Суточная производительность экскаватора ($П^э_{сут}$, м^3/сут):

$$П^э_{сут} = П^э_{см} n_{см}, \quad (1.63)$$

где $n_{см}$ – число рабочих смен в сутках (3 смены).

Годовая производительность экскаватора ($П^э_{год}$, м^3/год)

$$П^э_{год} = П^э_{сут} n_{р.д.э}, \quad (1.64)$$

где $n_{р.д.э}$ – количество рабочих дней экскаватора в году (может быть принято 280 дней)

Списочный парк экскаваторов ($N_{\text{с}}^{\text{э}}$, шт.):

$$N_{\text{с}}^{\text{э}} = \frac{\text{П}_{\text{г.м}}}{\text{П}_{\text{год}}^{\text{э}}}, \qquad (1.65)$$

где $\text{П}_{\text{г.м}}$ – годовой объем выемочно-погрузочных работ в карьере, м^3 (в нашем случае $\text{П}_{\text{г.м}}$ равен производительности карьера по горной массе) (см. выражение (1.10).

Списочный парк экскаваторов округляют в большую сторону.

1.10. Транспорт горной массы

Согласно заданию на выполнение работы, в проекте принят автомобильный транспорт. Тип автосамосвала может быть принят в зависимости от годового объема горных работ и принятой модели экскаватора по прил. 2.

Время движения автосамосвала в грузовом и порожняковом направлениях ($t_{\text{д}}$, мин.):

$$t_{\text{д}} = 60\frac{2L}{v_{\text{ср.т}}}, \qquad (1.66)$$

где L – расстояние транспортирования горной массы, км; (на нашем карьере принимаем 3,5 км);

$v_{\text{ср.т}}$ – средняя техническая скорость движения автосамосвала по трассе, км/ч; $v_{\text{ср.т}}$ определяется в зависимости от заданного расстояния транспортирования (L, км) и высоты подъема горной массы ($H_{\text{п}} = H_{\text{к}}$, м) по прил. 18.

Время погрузки автосамосвала ($t_{\text{п}}$, мин.):

$$t_{\text{п}} = \frac{T_{\text{ц}}^{\text{э}}(n_{\min\text{ цик}} - 0{,}5)}{60}, \qquad (1.67)$$

где $T_{\text{ц}}^{\text{э}}$ – продолжительность цикла экскавации, с (см. раздел 1.9);

$n_{\min\text{ цик}}$ – количество циклов экскавации при загрузке автосамосвала.

Для определения $n_{\min\text{ цик}}$ рассчитывается необходимое количество ковшей для полной загрузки автосамосвала ($n_{\text{к}}$):

исходя из грузоподъемности автосамосвала:

$$n_{\text{к}} = \frac{q_{\text{а}} k_{\text{р}}}{E k_{\text{н}} \rho}, \qquad (1.68)$$

где $q_{\text{а}}$ – грузоподъемность автосамосвала, т (прил. 2);

$k_{\text{р}}$ – коэффициент разрыхления породы в ковше экскаватора (прил. 15);

$k_{\text{н}}$ – коэффициент наполнения ковша экскаватора (прил. 15);

ρ – плотность пород в целике, т/м^3;

исходя из вместимости кузова автосамосвала с «шапкой»:

$$n_{\text{к}} = \frac{0{,}9V'_{\text{а}}}{E k_{\text{н}}}, \qquad (1.69)$$

где $V'_{\text{а}}$ – вместимость кузова автосамосвала с «шапкой» (прил. 16), м^3.

Затем сравниваются значения $n_{\text{к}}$, вычисленные по формулам (1.68) и (1.69), выбирается меньшее ($n_{\text{к}}$) и округляется до ближайшего целого числа, которое принимается за $n_{\min \text{ цик}}$.

Вес груза в кузове автосамосвала (q, т):

$$q = \frac{E k_{\text{н}}}{k_{\text{р}}} n_{\min \text{ цик}} \rho. \qquad (1.70)$$

Осуществляется проверка условия:

$$q \le 1{,}1 q_{\text{а}}, \qquad (1.71)$$

где $q_{\text{а}}$ – грузоподъемность автосамосвала, т.

Продолжительность транспортного цикла ($T^{\text{а}}_{\text{ц}}$, мин.):

$$T^{\text{а}}_{\text{ц}} = t_{\text{о}} + t_{\text{п}} + t_{\text{д}} + t_{\text{м.п}} + t_{\text{м.р}} + t_{\text{р}}, \qquad (1.72)$$

где $t_{\text{о}}$ – продолжительность ожидания погрузки, мин. ($t_{\text{о}} \approx 0{,}5 t_{\text{п}}$);

$t_{\text{п}}$ – продолжительность погрузки автосамосвала, мин.;

$t_{\text{д}}$ – продолжительность движения автосамосвала в грузовом и порожняковом направлениях, мин.;

$t_{\text{м.п}}$, $t_{\text{м.р}}$ – продолжительность маневровых операций соответственно при установке на погрузку и разгрузку, мин.;

$t_{\text{р}}$ – продолжительность разгрузки, мин.

$t_{\text{м.п}}$, $t_{\text{м.р}}$ и $t_{\text{р}}$ принимаются из прил. 16 для выбранной модели автосамосвала.

Производительность карьерного автосамосвала ($Q_{\text{а}}$, т/смену):

$$Q_{\text{а}} = N_{\text{р}} q = \frac{T_{\text{см}}}{T^{\text{а}}_{\text{ц}}} k_{\text{и}} q, \qquad (1.73)$$

где $T_{см}$ – продолжительность смены, мин. (можно принять $T_{см}$ = 480 минут).

q – вес груза в кузове автосамосвала, т;

$k_и$ – коэффициент использования сменного времени (можно принять $k_и$ = 0,8);

$T_ц^а$ – продолжительность транспортного цикла автосамосвала, мин.;

$N_р$ – количество рейсов автосамосвала в течение смены, рейс/смену.

Рабочий парк автосамосвалов ($N_{а.р}$, ед.):

$$N_{а.р} = \frac{V_{см}}{Q_а}, \tag{1.74}$$

где $V_{см}$ – сменный объем перевозок, т/смену:

$$V_{см} = k_н\left(П_{п.и}^{см} + П_{в}^{см}\rho\right), \tag{1.75}$$

где $k_н$ – коэффициент неравномерности выдачи горной массы из карьера ($k_н$ = 1,1);

$П_{п.и}^{см}$ – сменная производительность карьера по полезному ископаемому, т/смену;

$П_{в}^{см}$ – сменная производительность карьера по вскрыше в целике, м^3/смену;

ρ – плотность вскрышных пород в целике, т/м^3.

$П_{п.и}^{см}$ и $П_{в}^{см}$ принимаются по результатам раздела 1.4, ρ – по заданию на выполнение работы.

Инвентарный парк автосамосвалов ($N_{а.и}$, ед.):

$$N_{а.и} = \frac{N_{а.р}}{k_{т.г}}, \tag{1.76}$$

где $k_{т.г}$ – коэффициент технической готовности, определяемый по прил. 17, в зависимости от суточного пробега автосамосвала.

Суточный пробег автосамосвала ($L_с$, км/сут):

$$L_с = \frac{2LQ_а}{q} k_о k_{см}, \tag{1.77}$$

где $k_о$ – коэффициент, учитывающий нулевой пробег от гаража до места работы и обратно ($k_о$ = 1,05);

$k_{см}$ – коэффициент сменности – среднее количество полных смен, отработанных автосамосвалом за сутки (принять $k_{см}$ = 2,5).

1.11. Отвальные работы

Способ отвалообразования принимается в зависимости от вида транспорта и типа рабочего оборудования, применяемого на отвале.

При автомобильном транспорте наиболее рационально применение бульдозерного отвалообразования [3, 5].

Для других условий (при железнодорожном или конвейерном транспорте способ отвалообразования принимают согласно работам [3, 5].

Модель бульдозера, используемого на отвале, определяется по прил. 2.

Площадь, необходимая для размещения отвала ($S_о$, м^2):

$$S_о = \frac{W k_р^о}{n_я h_я \eta_о}, \qquad (1.78)$$

где W – объем пород, подлежащих размещению в отвале за весь срок его существования, м^3 (равен объему вскрышных пород в контуре карьера, определенному в разделе 1.3 по формуле (1.7));

$k_р^о$ – коэффициент разрыхления пород в отвале (прил. 20);

$h_я$ – высота яруса, м (прил. 20);

$n_я$ – количество ярусов;

$\eta_о$ – коэффициент использования площади отвала ($\eta_о$ принимать: для одно- и двухъярусных отвалов – 0,8÷0,7; для трехъярусных и более – 0,5).

Количество отвальных ярусов принимать самостоятельно (на практике отвалы формируются, как правило, из одного-трех ярусов), исходя из необходимости минимизировать площадь отвалов и максимальной общей высоты отвала не более 120 м.

По требуемой площади отвала ($S_о$, м^2), определяют его размеры в плане:

длина (L, м):

$$L = \sqrt{2S_0}; \qquad (1.79)$$

ширина (B, м):

$$B = L : 2. \qquad (1.80)$$

Количество автосамосвалов, разгружающихся на отвале в течение часа ($N_о$, ед./ч):

$$N_о = \frac{П_в^ч k_н}{Q_п}, \qquad (1.81)$$

где $П_в^ч$ – часовая производительность карьера по вскрыше, м^3/ч (формула (1.87));

$k_н$ – коэффициент неравномерности работы карьера по вскрыше ($k_н$ = 1,2);

$Q_п$ – объем вскрыши в целике в кузове автосамосвала, м^3.

$$Q_п = q/\rho, \qquad (1.82)$$

где q – вес груза в кузове автосамосвала, т (величина q принимается по результатам расчетов в разделе 1.10);

ρ – плотность пород в целике, т /м³.

$$П_{в}^{ч} = \frac{П_{в}}{T_{г} n_{см} T_{см}}, \quad (1.83)$$

где $П_{в}$ – годовая производительность карьера по вскрыше (определена в разделе 1.4), м³/год;

$T_{г}$ – число рабочих дней карьера в году, дней/год (см. формулу (1.12));

$n_{см}$ – число рабочих смен в сутки, смен/сут. ($n_{см}$ = 3 смены/сут.);

$T_{см}$ – продолжительность смены, ч/смену ($T_{см}$ = 8 ч/смену).

Число одновременно разгружающихся автосамосвалов на отвале ($N_{а.о}$, ед.):

$$N_{а.о} = N_{о} \frac{t_{р} + t_{м.р}}{60}, \quad (1.84)$$

где $t_{р}$, $t_{м.р}$ – продолжительность разгрузки и маневровых операций при установке на разгрузку, мин. (см. прил. 16).

Суммарная длина участка разгрузки ($L_{р}$, м):

$$L_{р} = N_{а.о}\, l_{п}, \quad (1.85)$$

где $l_{п}$ – ширина полосы по рабочему фронту отвала, м, занимаемой одним автосамосвалом при маневрировании, зависящая от размеров автосамосвала. Для автосамосвалов грузоподъемностью 30 – 55 т величина $l_{п}$ = 30÷40 м, при грузоподъемности 80 – 130 т.

Отвальный фронт состоит из трех участков: разгрузки, планировки и резервный. По мере заполнения участка разгрузки и выравнивания участка планировки, последний начинает выполнять функцию первого, а участок разгрузки становится участком планировки. Если участок планировки не подготовлен, то разгрузка производится на резервном участке. Таким образом, все три участка должны иметь одинаковую длину, равную ($L_{р}$, м):

Общая длина отвального фронта ($L_{о}$, м):

$$L_{о} = 3L_{р}. \quad (1.86)$$

Сменный объем бульдозерных работ на отвале ($Q_{б}$, м³/смену)

$$Q_{б} = П_{в}^{см} k_{н} k_{зав}, \quad (1.87)$$

где $П_{в}^{см}$ – сменная производительность карьера по вскрыше, м³/смену (формула (1.15));

где $k_{зав}$ – средний коэффициент «заваленности» (прил. 20).

Число бульдозеров в работе ($N_{б}$, ед.):

$$N_{б} = \frac{Q_{б}}{П_{б}}, \quad (1.88)$$

где $\mathbf{П_б}$ – сменная производительность бульдозера, м^3/смену (принимается по прил. 21).

Инвентарный парк бульдозеров ($N_{б.и}$, ед.)

$$N_{б.и} = 1{,}4\, N_б. \qquad (1.89)$$

где 1,4 – ориентировочное значение коэффициента резерва бульдозеров.

При использовании железнодорожного транспорта необходимо выполнить расчеты, согласно работам [3, 4, 5].

Все проектные решения должны приниматься в соответствии с действующими «Правилами безопасности при ведении горных работ и переработке твердых полезных ископаемых» [8].

2. ОФОРМЛЕНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

2.1. Оформление пояснительной записки

Текстовая часть работы оформляется в виде пояснительной записки.

Записка должна иметь:

– оформленный по правилам титульный лист формата А4;

– оригинал задания на проектирование (прилагается к записке между титульным листом-обложкой и содержанием);

– содержание с перечислением всех разделов записки и их постраничного размещения;

– текст с расчетами, обоснованиями, схемами;

– список рекомендуемой литературы.

Текст размещают на одной стороне листа белой нелинованной бумаги стандартных размеров формата А4 (297 × 210 мм) с оставлением полей: слева и сверху 20 мм, справа 15 мм и снизу 35 мм.

Страницы нумеруют. Первой является страница с заданием.

Не допускаются сокращения слов, за исключением общепринятых обозначений. Предложения строятся в безличной форме.

Таблицы, рисунки и схемы, помещенные в записку, нумеруют, и им дают наименования по содержанию. В тексте на них делают ссылки.

Рисунки, таблицы и формулы нумеруются последовательно по разделам. Например, первая таблица раздела имеет номер 1.1, а вторая – 1.2 и т. д.

При аналитических расчетах сначала записывают формулу с буквенными обозначениями параметров, которые расшифровывают ниже. После этого подставляют значения параметров и записывают результат вычислений. Необходимо обязательно ставить размерность результата.

2.2. Оформление чертежей

Графическая часть работы представляется одним листом чертежей формата А1 (прил. 22-27). Чертежи выполняют в соответствии с действующими нормативными документами [9] в карандаше или с использованием компьютера. Масштаб чертежа (1:5; 1:10; 1:20; 1:50; 1:100; 1:200; 1:500; 1:1000; 1:2000; 1:5000; 1:10 000) выбирают из условия максимального заполнения листа. Все размеры проставляют в метрах.

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Краткая геологическая характеристика и горнотехнические условия разработки месторождения

На месторождении длина залежи по простиранию L = 1550 м, а мощность рудного тела М = 550 м. Мощность наносов $H_н$ = 10 м. Угол падения рудного тела γ = 80 град.

Конечная глубина карьера по проекту $H_к$ = 120 м. Угол погашения бортов карьера составляет $\gamma_{ср}$ = 39 град.

Производительность проектируемого карьера по полезному ископаемому $П_п$ = 4,5 млн. т/год. Для транспортирования горной массы применяют автосамосвалы.

Плотность полезного ископаемого и пород вскрыши $\gamma_{пи}$=2,0 т/м^3. Показатель буримости пород $П_б$ = 12. Крепость пород по шкале Протодьяконова f=12. Класс пород по взрываемости III. Категория трещиноватости пород III.

3.2. Объем и размеры карьера

Объем карьера ($V_к$, м^3) при равнинном рельефе поверхности, простой форме залежи и крутом ее падении определяется по формуле:

$$V_к = SH_к + \frac{1}{2}PH_к^2 \operatorname{ctg}\gamma_{ср} + \frac{\pi}{3}H_к^3 \operatorname{ctg}^2\gamma_{ср}, \qquad (3.1)$$

где S – площадь дна карьера, м^2; $S = LM$;

L – длина залежи по простиранию, м;

М – горизонтальная мощность залежи, м;

$H_к$ – конечная глубина карьера, м;

P – периметр дна карьера, м;

$$V_к = 852500 \cdot 120 + \frac{1}{2}4200 \cdot 120^2 \cdot 1{,}23 + \frac{3{,}14}{3} \cdot 120^3 \cdot 1{,}23^2 = 142231759 \text{ м}^3;$$

$$S = 1550 \cdot 550 = 852500 \text{ м}^2;$$

$$P = 2(L + М);$$

$$P = 2 \cdot (1550 + 550) = 4200 \text{ м},$$

$\gamma_{ср}$ – среднее значение угла погашения бортов карьера, град:

$$\gamma_{ср} = \frac{\gamma_л + \gamma_в}{2}, \qquad (3.2)$$

$$\gamma_{ср} = 39 \text{ град.}$$

где $\gamma_л, \gamma_в$ – углы погашения бортов карьера со стороны лежачего и висячего боков залежи соответственно, град.

Длина карьерного поля поверху ($L_к$, м):

$$L_к = L + 2H_к \operatorname{ctg}\gamma_{ср}. \qquad (3.3)$$

$$L_к = 1550 + 2 \cdot 120 \cdot \operatorname{ctg} 39^0 = 1845{,}2 \text{ м}$$

Ширина карьерного поля поверху ($B_к$, м):

$$B_к = M + 2H_к \operatorname{ctg}\gamma_{ср}, \qquad (3.4)$$

$$B_к = 550 + 2 \cdot 120 \cdot 1{,}23 = 845{,}2 \text{ м}.$$

3.3. Запасы полезного ископаемого и объем вскрыши в контурах карьера

Запасы полезного ископаемого в контурах карьера ($V_{п.и}$, м^3):

$$V_{п.и} = LM(H_к - H_н), \qquad (3.5)$$

$$V_{п.и} = 1550 \cdot 550 \cdot (120 - 10) = 93775000 \text{ м}^3,$$

где $H_н$ – мощность наносов, м.

Промышленные запасы в контурах карьера (то есть извлекаемые из недр запасы ($Q_{п.и}$, т):

$$Q_{п.и} = V_{п.и}\gamma_{п.и}\eta_и; \qquad (3.6)$$

$$Q_{п.и} = 93775000 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}92 = 172546000 \text{ т},$$

где $\gamma_{п.и}$ – плотность полезного ископаемого, т/м^3;

$\eta_и$ – коэффициент извлечения полезного ископаемого при разработке месторождения, учитывающий потери при разработке (принимается $\eta_и = 0{,}92$).

Объем вскрыши в контурах карьера ($V_п$, м^3):

$$V_п = V_к - V_{п.и}; \qquad (3.7)$$

$$V_п = 142231759 - 93775000 = 48456759 \text{ м}^3.$$

Средний коэффициент вскрыши (объем извлекаемой пустой породы, приходящийся на единицу добываемого полезного ископаемого ($К_{ср}$, м^3/т):

$$К_{ср} = \frac{V_п}{Q_п}. \quad (3.8)$$

$$К_{ср} = \frac{48456759}{172546000} = 0{,}28 \text{ м}^3/\text{т}.$$

3.4. Производительность карьера и срок его службы

Производительность карьера по полезному ископаемому принимается в соответствии с заданием на выполнение работы. (в данном варианте $П_п$ = 4,5 млн. т/год)

Производительность карьера по вскрыше ($П_в$, м^3/год) устанавливается с учетом среднего коэффициента вскрыши:

$$П_в = П_п К_{ср} К_н; \quad (3.9)$$

$$П_в = 4500000 \cdot 0{,}28 \cdot 1{,}3 = 1638000 \text{ м}^3/\text{год},$$

где $К_н$ – коэффициент неравномерности распределения вскрыши по годам ($К_н$ = 1,3).

Производительность карьера по горной массе ($П_{г.м}$, м^3/год):

$$П_{г.м} = П_и \frac{1}{\gamma_{п.и}} + П_в; \quad (3.10)$$

$$П_{г.м} = 4500000 \cdot \frac{1}{2} + 168000 = 3888000 \text{ м}^3/\text{год}.$$

Суточная производительность карьера по добыче ($П^с_п$, т/сут):

$$П^с_и = \frac{П_и}{Т_г}; \quad (3.11)$$

$$П^с_и = \frac{4500000}{353} = 12747{,}9 \text{ т/сут},$$

где $Т_г$ – число рабочих дней карьера в году:

$$Т_г = Т_к - Т_{п.в} - Т_{кл}; \quad (3.12)$$

$$Т_г = 365 - 8 - 4 = 353.$$

где $Т_к$ – количество календарных дней в году (365 дней);

$T_{п.в}$ – количество праздничных, выходных дней в году (принимаем 8 дней);

$T_{кл}$ – продолжительность простоев по климатическим условиям (принимаем 4 дня).

Суточная производительность карьера по вскрыше ($П_в^с$, м³/сут):

$$П_в^с = \frac{П_в}{T_г}; \quad (3.13)$$

$$П_в^с = \frac{1638000}{353} = 4640,2 \text{ м}^3/\text{сут}.$$

Сменная производительность карьера по добыче ($П_и^{см}$, т/см):

$$П_и^{см} = \frac{П_и^с}{n_{см}}; \quad (3.14)$$

$$П_и^{см} = \frac{12747,9}{3} = 4249,3 \text{ т/см}.$$

где $n_{см}$ – число смен работы карьера в сутках (принимаем 3 смены).

Сменная производительность карьера по вскрыше ($П_в^{см}$, м³/см):

$$П_в^{см} = \frac{П_в^с}{n_{см}}; \quad (3.15)$$

$$П_в^{см} = \frac{4640,2}{3} = 1546,7 \text{ м}^3/\text{см}.$$

Срок службы карьера ($T_{сл}$, лет):

$$T_{сл} = T_с + T_э + T_з, \quad (3.16)$$

$$T_{сл} = 1,5 + 38,34 + 1,5 = 41,34 \text{ год}.$$

где $T_с$, $T_з$ – время на освоение и затухание мощности карьера по добыче (обычно принимается равным 1.5 года);

$T_э$ – расчетный срок эксплуатации карьера:

$$T_э = \frac{Q_{п.и}}{П_и}; \quad (3.17)$$

$$T_э = \frac{172546000}{4500000} = 38,34 \text{ лет}.$$

В приведенной формуле значение $П_н$ принимается в соответствии с заданием на выполнение работы.

3.5. Параметры вскрывающих выработок

Уклон съездов ($i_р$, д. е.) при автомобильном транспорте принимается равным 0,08.

Длина съезда ($L_т$, м):

$$L_т = \frac{H_у}{i_р}; \qquad (3.18)$$

$$L_т = \frac{12}{0{,}08} = 150 \text{ м},$$

где $H_у$ высота уступа, $H_у$= 12 м .

Ширина съезда, равна 20 м.

Минимальная ширина разрезной траншеи принимается при погрузке в автосамосвалы ($B_{тр}$, м):

$$B_{тр} = 30 \text{ м}. \qquad (3.19)$$

Ширина траншеи поверху ($B^в_{тр}$, м):

$$B^в_{тр} = B_{тр} + 2H_у \operatorname{ctg}\alpha; \qquad (3.20)$$

$$B^в_{тр} = 30 + 2 \cdot 12 \cdot \operatorname{ctg} 75^0 = 36{,}24 \text{ м},$$

где α – угол откоса рабочего уступа, градусов.

3.6. Параметры системы разработки

Допустимая высота уступа ($H_у$, м) по условию безопасного ведения работ в скальных породах определяется по формуле:

$$H_у^{max} \le 1{,}5H_ч^{max}, \qquad (3.21)$$

где $H_ч^{max}$ – максимальная высота черпания экскаватора, м. На карьере применяется экскаватор ЭКГ-5А. Максимальная высота черпания этого экскаватора $H_ч^{max}$ = 10,3 м.

$$H_у = 1.5 \cdot 10{,}3 = 15{,}45 \text{ м}.$$

Принимаем высоту уступа H_y = 12 м.

Ширина экскаваторной заходки ($A_з$, м) определяется по формуле:

$$A_з = (1.5 \div 1.7) R_{чу}, \quad (3.22)$$

где $R_{чу}$ – радиус черпания на уровне стояния экскаватора (у экскаватора ЭКГ-5А $R_{чу}$ = 9,04 м.

$$A_з = 1,7 \cdot 9,04 = 15,3 \text{ м}.$$

Минимальная ширина рабочей площадки при разработке пород с предварительным их рыхлением буровзрывным способом ($Ш^{min}_{р.п}$, м)

$$Ш^{min}_{р.п} = B_{р_1} + C + T + S + Z; \quad (3.23)$$

$$Ш^{min}_{р.п} = 28.19 + 3 + 19 + 2,0 + 2,3 = 54,49 \text{ м},$$

где $B_{р_1}$ – ширина развала породы, м;

C – безопасный зазор между нижней бровкой развала и транспортной полосой (C = 3 м);

T – ширина транспортной полосы, м (при двухстороннем движении автосамосвалов T = 19 м);

S – безопасное расстояние (S =2,0 м);

Z – ширина призмы обрушения, м;

$$Z = H_у (\operatorname{ctg} \alpha_у - \operatorname{ctg} \alpha); \quad (3.24)$$

$$Z = 12 \cdot (0,46 - 0,268) = 2,3 \text{ м},$$

где $\alpha_у$ – угол устойчивого откоса уступа (можно принять $\alpha_у$ = 65 град.);

α – угол откоса рабочего уступа (можно принять α =75 град.).

Ширина рабочей площадки в нормальный период разработки ($Ш_{р.п}$, м):

$$Ш_{р.п} = B_{р_1} + C + T + U + S + Ш_{в.б}; \quad (3.25)$$

$$Ш_{р.п} = 28.19 + 3 + 19 + 6 + 4.3 + 14.53 = 75.09 \text{ м}.$$

где U – расстояние между ЛЭП и транспортной полосой, м

(U = 6 м);

S – расстояние между ЛЭП и резервным блоком ($S = Z + 2.0$ м); (3.26)

$$S = 2{,}3 + 2 = 4{,}3 \text{ м};$$

$Ш_{в.б}$ – ширина взрывного блока .

Высота рабочего борта карьера ($H_{р.б}$, м):

$$H_{р.б} = H_у n_{р.у}; \quad (3.27)$$

$$H_{р.б} = 12 \cdot 3 = 36 \text{ м},$$

где $n_{р.у}$ – количество рабочих уступов (принимаем 3 уступа).

Горизонтальное проложение откоса рабочего борта ($C_{р.б}$, м):

$$C_{р.б} = H_у \operatorname{ctg}\alpha n_{р.у} + Ш_{р.п}(n_{р.у} - 1); \quad (3.28)$$

$$C_{р.б} = 12 \cdot 0{.}26 \cdot 3 + 75{.}09 \cdot (3 - 1) = 159{.}4 \text{ м}.$$

Тангенс угла рабочего борта карьера (tgφ, град):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H_{р.б}}{C_{р.б}}; \quad (3.29)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{36}{159{,}4} = 0{,}226.$$

С использованием микрокалькулятора или из таблиц определяется величина угла рабочего борта φ в градусах:

$$\varphi = 12 \text{ град}. \quad (3.30)$$

3.7. Подготовка горных пород к выемке

При скальных породах подготовка горной массы к выемке осуществляется с помощью скважинных зарядов.

Размер допустимого габаритного куска ($d_г$, м) определяется по формуле:

$$d_г \le 0{,}75\sqrt[3]{E}; \quad (3.31)$$

$$d_г = 0{.}75 \cdot \sqrt[3]{10} = 1{.}28 \text{ м},$$

где E – вместимость ковша экскаватора 10 м^3 .

Диаметр взрывных скважин ($d_с$, мм):

$$d_с = d_д K_{раз}; \quad (3.32)$$

$$d_с = 244{.}5 \cdot 1{,}03 = 251{,}8 \text{ мм}.$$

где $d_д$ – диаметр долота бурового станка, мм;

$K_{раз}$ – коэффициент разбуривания скважин, принимаемый в зависимости от крепости пород.

Длина перебура ($l_{пер}$, м):

$$l_{пер} = d_с K_{пер}; \quad (3.33)$$

$$l_{пер} = 251,8 \cdot 11 = 2,77 \text{ м},$$

где $K_{пер}$ – коэффициент перебура, определяемый взрываемостью пород. В нашем случае класс взрываемости III.

Длина скважины ($l_с$, м):

$$l_с = H_у + l_{пер}; \quad (3.34)$$

$$l_с = 12 + 2,77 = 14,77 \text{ м},$$

где $H_у$ – высота взрываемого уступа , м.

Длина забойки ($l_{заб}$, м):

$$l_{заб} = K_{заб} l_с; \quad (3.35)$$

$$l_{заб} = 0,27 \cdot 14,77 = 3,98 \text{ м},$$

где $K_{заб}$ – коэффициент забойки. В нашем случае категория трещиноватости пород III.

Длина заряда взрывчатого вещества в скважине ($l_{зар}$, м):

$$l_{зар} = l_с - l_{заб}; \quad (3.36)$$

$$l_{зар} = 14,77 - 3,98 = 10,79 \text{ м}.$$

В качестве ВВ в сухих скважинах, в породах средне– и труднобуримых ($П_б = 6 \div 15$) целесообразно применять граммонит 79/21.

Паспортный расход ВВ первого ряда скважин ($q_п$, кг/м^3):

$$q_п = q_э K_{вв} K_{дс} K_{др} K_β; \quad (3.37)$$

$$q_п = 0,60 \cdot 1,00 \cdot 1,16 \cdot 1,0 \cdot 1 = 0,696 \text{ кг/м}^3,$$

где $q_э$ – эталонный удельный расход ВВ, кг/м^3.

$K_{вв}$, $K_{дс}$, $K_{др}$, $K_β$ – коэффициенты, учитывающие тип ВВ - $K_{вв}$, диаметр скважины- $K_{дс}$, дробление пород - $K_{др}$, угол наклона скважин - $K_β$ (при $β = 90°$, $K_β = 1$, а при $β < 90°$, $K_β = 0,93 \div 0,95$).

Удельная вместимость скважины (P, кг/м):

$$P = 7{,}85 d_c^2 \Delta; \qquad (3.38)$$

$$P = 7{,}85 \cdot 2{,}51^2 \cdot 1 = 49{,}77 \text{ кг/м},$$

где Δ – плотность заряда в скважине, кг/дм^3.

При гранулированных ВВ $\Delta = 0{,}9 \div 1{,}0$ кг/дм^3;

d_c – диаметр скважины, дм.

Масса заряда в скважине ($Q_з$, кг):

$$Q_з = P l_{зар}; \qquad (3.39)$$

$$Q_з = 49{,}77 \cdot 10{,}79 = 537 \text{ кг}.$$

Величина линии сопротивления по подошве (W, м):

$$W = 0{,}9 \sqrt{\frac{P}{q_п}}; \qquad (3.40)$$

$$W = 0{,}9 \sqrt{\frac{49{,}77}{0{,}696}} = 7{,}61 \text{ м}.$$

Необходимо соблюдение условия

$$W \geq W_{min}, \qquad (3.41)$$

где W_{min} минимальная допустимая величина W.

Для вертикальных скважин

$$W_{min} = H_у \operatorname{ctg}\alpha + Z; \qquad (3.42)$$

$$W_{min} = 12 \cdot 0{,}268 + 2{,}3 = 5{,}516 \text{ м};$$

$W > W_{min}$ принимаем W= 7,61 м,

где α – угол откоса уступа, град.;

Z – см. формулу (3.24).

Расстояние между скважинами в ряду (a, м):

$$a = \frac{Q_з}{q_п H_у W}; \qquad (3.43)$$

$$a = \frac{537}{0{,}696 \cdot 12 \cdot 7{,}61} = 8{,}45 \text{ м}.$$

Величина a проверяется по допустимому коэффициенту сближения скважин (m):

$$m = \frac{a}{W}; \tag{3.44}$$

$$m = \frac{8,45}{7,61} = 1,11.$$

Расстояние между рядами скважин (b, м):

$$b = \frac{Q_з}{q_п H_у a K_з}; \tag{3.45}$$

$$b = \frac{537}{0,696 \cdot 12 \cdot 8,45 \cdot 1,1} = 6,92 \text{ м},$$

где $K_з$ – коэффициент увеличения удельного расхода ВВ во втором и последующих рядах.

Ширина развала породы впереди первого ряда скважин ($B_р$, м):

$$B_р = K_в K_{кз} \sqrt{q_п} H_у; \tag{3.46}$$

$$B_р = 2,5 \cdot 0,85 \sqrt{0,696} \cdot 12 = 21,27 \text{ м}.$$

где $K_в$ – коэффициент, характеризующий взрываемость породы .

В нашем случае породы средневзрываемые;

$K_{кз}$ – коэффициент дальности отброса породы, зависящий от интервала замедления .

Рациональная ширина развала ($B_{рац}$, м):

$$B_{рац} = (2 \div 3) A_з; \tag{3.47}$$

$$B_{рац} = 2 \cdot 15,3 = 30,6 \text{ м},$$

где $A_з$ – ширина экскаваторной заходки (определяется в разделе 1.6 по формуле (1.22).

Количество рядов скважин ($n_р$):

$$n_р = \frac{B_{рац} - K_в K_{кз} \sqrt{q_п} H_у}{b} + 1; \tag{3.48}$$

$$n_р = \frac{30,6 - 21,27}{6,92} + 1 = 2,34 = 2.$$

Значение $n_р$ округляется в меньшую сторону.

Фактическая ширина развала ($B_{р.ф}$, м):

$$B_{\text{р.ф}} = B_{\text{р}} + (n_{\text{р}} - 1)b; \quad (3.49)$$

$$B_{\text{р.ф}} = 21{,}27 + (2-1)\cdot 6{,}92 = 28{,}19 \text{ м}.$$

Ширина буровой заходки ($Ш_{б.з}$, м):

$$Ш_{\text{б.з}} = W + (n_{\text{р}} - 1)b; \quad (3.50)$$

$$Ш_{\text{б.з}} = 7{,}61 + (2-1)\cdot 6{,}92 = 14{,}53 \text{ м}.$$

Выход горной массы с 1 м длины скважины ($q_{\text{г.м}}$, м³/м):

$$q_{\text{г.м}} = \frac{H_{\text{у}}\alpha[(n_{\text{р}} - 1)b + W]}{l_{\text{с}} n_{\text{р}}}; \quad (3.51)$$

$$q_{\text{г.м}} = \frac{12\cdot 8{,}45\cdot[(2-1)\cdot 6{,}92 + 7{,}61]}{14{,}77\cdot 2} = 49{,}87 \text{ м}^3/\text{м}.$$

3.8. Производительность и парк буровых станков

Для бурения скважин в скальных породах крепостью 12 по шкале профессора Протодьяконова принят буровой станок шарошечного бурения СБШ-250МНА-32.

При применении станков шарошечного бурения механическая скорость бурения ($v_{\text{м}}$, м/ч):

$$v_{\text{м}} = 0{,}01\frac{P_{\text{о}}^{0{,}8} n_{\text{о}}}{П_{\text{б}}^{1{,}6} D}; \quad (3.52)$$

$$v_{\text{м}} = 0{,}01\cdot\frac{22005\cdot 140^{0{,}8}}{12^{1{,}6}\cdot 24{,}4} = 8{,}82 \text{ м/ч},$$

где $n_{\text{о}}$ – оптимальная скорость вращения бурового става, об/мин ;

$П_{\text{б}}$ – показатель буримости пород ($П_{\text{б}} \approx f - 12$);

D – диаметр долота, см;

$P_{\text{о}}$ – оптимальное осевое усилие, кг:

$$P_{\text{о}} \geq (7 \div 8)П_{\text{б}} D; \quad (3.53)$$

$$P_{\text{о}} = 7{,}5\cdot 12\cdot 244{,}5 = 22005 \text{ кг},$$

где D – диаметр долота должен быть представлен в миллиметрах.

Сменная производительность станка ($П^{ст}_{см}$, м/см):

$$П^{ст}_{см} = V_м T_{см} \eta_и; \quad (3.54)$$

$$П^{ст}_{см} = 8{,}82 \cdot 8 \cdot 0{,}65 = 45{,}86 \text{ м/см},$$

где $T_{см}$ - продолжительность смены (принимаем 8 ч);

$\eta_и$ – коэффициент использования станка в течение смены на чистом бурении (можно принять $\eta_и - 0{,}65$).

Суточная производительность станка ($П^{ст}_{сут}$, м/сут):

$$П^{ст}_{сут} = П^{ст}_{см} n_{см}; \quad (3.55)$$

$$П^{ст}_{сут} = 45.86 \cdot 3 = 137{,}58 \text{ м/сут},$$

где $n_{см}$ – количество рабочих смен станка в сутки (3 смены).

Годовая производительность станка ($П^{ст}_{год}$, м/год):

$$П^{ст}_{год} = П^{ст}_{сут} n_{р.д.с}; \quad (3.56)$$

$$П^{ст}_{год} = 137{,}58 \cdot 270 = 37146{,}6 \text{ м/год}.$$

где $n_{р.д.с}$ число рабочих дней станка в году (с учетом вычитания времени ремонтов, перемещений с участка на участок, остановок в работе по климатическим условиям и др.).

Для станков СБШ $n_{р.д.с} = 280$ дней.

Списочный парк буровых станков ($N^{ст}_{с}$, шт.):

$$N^{ст}_{с} = \frac{П_{гм}}{П^{ст}_{год} q_{гм}}; \quad (3.57)$$

$$N^{ст}_{с} = \frac{3888000}{37146{,}6 \cdot 49{,}87} = 2 \text{ шт},$$

где $П_{г.м}$ – годовой объем обуриваемой горной массы в карьере, м³;

$q_{г.м}$ – выход взорванной горной массы с 1 погонного метра длины скважины. м³/м.

3.9. Производительность и парк карьерных экскаваторов

Выемка и погрузка горной массы осуществляется карьерным экскаватором ЭКГ- 5А.

Эксплуатационная производительность экскаватора ($П_э$, м³/ч):

$$П_э = \frac{3600 E K_н}{T_ц K_р} K_{ис}; \quad (3.58)$$

$$П_э = \frac{3600 \cdot 5 \cdot 0{,}95}{86{,}6 \cdot 1{,}6} \cdot 0{,}7 = 94{,}83 \text{ м}^3/\text{ч},$$

где E – вместимость ковша экскаватора, м³;

$K_н$ – коэффициент наполнения ковша;

$K_р$ – коэффициент разрыхления породы в ковше;

$K_{ис}$ – коэффициент использования экскаватора (при автомобильном транспорте можно принять $K_{ис}$ =0,7);

$T_ц$ – длительность цикла, с:

$$T_ц = T_ч + T_{пов} + T_р; \quad (3.59)$$

$$T_ц = 67{,}8 + 23{,}1 + 2{,}6 = 93{,}5 \text{ с},$$

где $T_ч$ – длительность черпания, с:

$$T_ч = \frac{194 d_{ср}^2}{E} + \frac{E}{0{,}11E + 0{,}6}; \quad (3.60)$$

$$T_ч = \frac{194 \cdot 1{,}28^2}{5} + \frac{5}{0{,}11 \cdot 5 + 0{,}6} = 63{,}5 + 4{,}35 = 67{,}85 \text{ с},$$

$d_{ср}$ – размер «среднего» куска в развале взорванной горной массы, м:

$$d_{ср} = (0{,}3 \div 0{,}4)\sqrt[3]{E};$$

$$d_{ср} = 0{,}3 \cdot 1{,}7 = 0{,}52 \text{ м},$$

$T_{пов}$ – длительность поворота, с:

$$T_{пов} = (10 + E) + 0{,}18(\beta - 90^{\circ}); \quad (3.61)$$

$$T_{пов} = (10+5)+0.18\cdot(135^{0}-90^{0}) = 23{,}1 \text{ с},$$

β – угол поворота экскаватора (в среднем может быть равен 135 град.);

$T_{р}$ – длительность разгрузки, с:

при $E = 3:10$ м^3 $\quad T_{р} = 2{,}5:2{,}7$ с.

Сменная эксплуатационная производительность экскаватора ($П^{э}_{см}$, м^3/см):

$$П^{э}_{см} = П_{э} T_{см}; \quad (3.62)$$

$$П^{э}_{см} = 94{,}83 \cdot 8 = 758{,}64 \text{ м}^3/\text{см},$$

где $T_{см}$ – длительность смены (8 часов).

Суточная производительность экскаватора ($П^{э}_{сут}$, м^3/сут):

$$П^{э}_{сут} = П^{э}_{см} n_{см}; \quad (3.63)$$

$$П^{э}_{сут} = 758{,}64 \cdot 3 = 2275{,}92 \text{ м}^3/\text{сут},$$

где $n_{см}$ – число рабочих смен в сутках (3 смены).

Годовая производительность экскаватора ($П^{э}_{год}$, м^3/год):

$$П^{э}_{год} = П^{э}_{сут} n_{р.д.э}; \quad (3.64)$$

$$П^{э}_{год} = 2275{,}92 \cdot 270 = 614498{,}4 \text{ м}^3/\text{год},$$

где $n_{р.д.э}$ – количество рабочих дней экскаватора в году (принимаем 270 дней).

Списочный парк экскаваторов ($N^{э}_{с}$, шт.):

$$N^{э}_{с} = \frac{П_{гм}}{П^{э}_{год}}; \quad (3.65)$$

$$N_{\text{с}}^{\text{Э}} = \frac{3888000}{614498{,}4} = 6{,}33 = 7 \text{ шт},$$

где $\text{П}_{\text{г.м}}$ – годовой объем выемочно-погрузочных работ в карьере, м^3 (в нашем случае $\text{П}_{\text{г.м}}$ равен производительности карьера по горной массе)

3.10. Транспорт горной массы

В соответствии с заданием в проекте принят автомобильный транспорт. Тип автосамосвала может быть принят в зависимости от годового объема горных работ и принятой модели экскаватора – БелАЗ-7548, грузоподъемностью 42 т.

Время движения автосамосвала в грузовом и порожняковом направлениях ($t_{\text{д}}$, мин.):

$$t_{\text{д}} = 60\frac{2L}{v_{\text{ср.т}}}; \qquad (3.66)$$

$$t_{\text{д}} = 60 \cdot \frac{2 \cdot 2{,}7}{28{,}3} = 11{,}45 \text{ мин},$$

где L – расстояние транспортирования горной массы, км (на нашем карьере принимаем 2,7 км).

$v_{\text{ср.т}}$ – средняя техническая скорость движения автосамосвала по трассе, км/ч;

$v_{\text{ср.т}}$ определяется в зависимости от заданного расстояния транспортирования (L, км) и высоты подъема горной массы ($H_{\text{п}} = H_{\text{к}}$, м),

$$L = 2{,}7 \text{ км}.$$

Время погрузки автосамосвала ($t_{\text{п}}$, мин.):

$$t_{\text{п}} = \frac{T_{\text{ц}}^{\text{Э}}(n_{\min \text{ цик}} - 0{,}5)}{60}; \qquad (3.67)$$

$$t_{\text{п}} = \frac{93{,}5 \cdot (5 - 0{,}5)}{60} = 7{,}01 \text{ мин},$$

где $T_{\text{ц}}^{\text{Э}}$ – продолжительность цикла экскавации, с;

$n_{\min \text{ цик}}$ – количество циклов экскавации при загрузке автосамосвала.

Для определения $n_{\min \text{цик}}$ рассчитывается необходимое количество ковшей для полной загрузки автосамосвала ($n_к$):

исходя из грузоподъемности автосамосвала:

$$n_к = \frac{q_а k_р}{E k_н \rho}; \quad (3.68)$$

$$n_к = \frac{42 \cdot 1{,}35}{5 \cdot 0{,}95 \cdot 2{,}0} = 5{,}96,$$

где $q_а$ – грузоподъемность автосамосвала, т;

$k_р$ – коэффициент разрыхления породы в ковше экскаватора;

$k_н$ – коэффициент наполнения ковша экскаватора;

ρ – плотность пород в целике, т/м^3;

исходя из вместимости кузова автосамосвала с «шапкой»:

$$n_к = \frac{0{,}9V'_а}{E k_н}; \quad (3.69)$$

$$n_к = \frac{0{,}9 \cdot 26{,}0}{5 \cdot 0{,}95} = 4{,}92 = 5,$$

где $V'_а$ – вместимость кузова автосамосвала с «шапкой», м^3.

Затем сравниваются значения $n_к$, вычисленные по формулам (3.68) и (3.69), выбирается меньшее ($n_к$) и округляется до ближайшего целого числа, которое принимается за $n_{\min \text{цик}}$ ($n_{\min \text{цик}} = 5$).

Вес груза в кузове автосамосвала (q, т):

$$q = \frac{E k_н}{k_р} n_{\min \text{цик}} \rho; \quad (3.70)$$

$$q = \frac{5 \cdot 0{,}95}{1{,}35} \cdot 5 \cdot 2{,}0 = 35{,}19 \text{ т}.$$

Осуществляется проверка условия

$$q \le 1{,}1 q_а; \quad (3.71)$$

$$35{,}19 \le 46{,}2 \text{ т}.$$

где $q_а$ – грузоподъемность автосамосвала, т.

Продолжительность транспортного цикла ($T^а_ц$, мин.)

$$T_{\text{ц}}^{\text{а}} = t_{\text{о}} + t_{\text{п}} + t_{\text{д}} + t_{\text{м.п}} + t_{\text{м.р}} + t_{\text{р}}\ ; \qquad (3.72)$$

$$T_{\text{ц}}^{\text{а}} = 3{,}5 + 7{,}01 + 11{,}45 + 0{,}59 + 0{,}64 + 0{,}78 = 23{,}97 \text{ мин},$$

где $t_{\text{о}}$ – продолжительность ожидания погрузки, мин. ($t_{\text{о}} \approx 0{,}5t_{\text{п}}$);

$t_{\text{п}}$ – продолжительность погрузки автосамосвала, мин.;

$t_{\text{д}}$ – продолжительность движения автосамосвала в грузовом и порожняковом направлениях, мин.;

$t_{\text{м.п}}$, $t_{\text{м.р}}$ – продолжительность маневровых операций соответственно при установке на погрузку и разгрузку, мин.;

$t_{\text{р}}$ – продолжительность разгрузки, мин.

$t_{\text{м.п}}$, $t_{\text{м.р}}$ и $t_{\text{р}}$ принимаются для выбранной модели автосамосвала.

Производительность карьерного автосамосвала ($Q_{\text{а}}$, т/смену):

$$Q_{\text{а}} = N_{\text{р}} q = \frac{T_{\text{см}}}{T_{\text{ц}}^{\text{а}}} k_{\text{и}} q; \qquad (3.73)$$

$$Q_{\text{а}} = \frac{480}{23{,}97} \cdot 0{,}8 \cdot 35{,}19 = 563{,}7 \text{ т/смену},$$

где $T_{\text{см}}$ – продолжительность смены, мин. ($T_{\text{см}}$ = 480 минут);

q – вес груза в кузове автосамосвала, т;

$k_{\text{и}}$ – коэффициент использования сменного времени ($k_{\text{и}}$ = 0,8);

$T_{\text{ц}}^{\text{а}}$ – продолжительность транспортного цикла автосамосвала, мин.;

$N_{\text{р}}$ – количество рейсов автосамосвала в течение смены, рейс/смену.

Рабочий парк автосамосвалов ($N_{\text{а.р}}$, ед.):

$$N_{\text{а.р}} = \frac{V_{\text{см}}}{Q_{\text{а}}}; \qquad (3.74)$$

$$N_{\text{а.р}} = \frac{8076{,}9}{563{,}7} = 14{,}32 \text{ ед.},$$

где $V_{\text{см}}$ – сменный объем перевозок, т/смену:

$$V_{\text{см}} = k_{\text{н}}\left(\Pi_{\text{п.и}}^{\text{см}} + \Pi_{\text{в}}^{\text{см}\rho}\right); \qquad (3.75)$$

$$V_{\text{см}} = 1{,}1 \cdot \left(4249{,}3 + 1546{,}7 \cdot 2{,}0\right) = 8076{,}9 \text{ т/смену},$$

где $k_{\text{н}}$ – коэффициент неравномерности выдачи горной массы из карьера ($k_{\text{н}}$ = 1,1);

$П^{см}_{п.и}$ – сменная производительность карьера по полезному ископаемому, т/смену;

$П^{см}_{в}$ – сменная производительность карьера по вскрыше в целике, м^3/смену;

ρ – плотность вскрышных пород в целике, т/м^3.

Инвентарный парк автосамосвалов ($N_{а.и}$, ед.):

$$N_{а.и} = \frac{N_{а.р}}{k_{т.г}};, \qquad (3.76)$$

$$N_{а.и} = \frac{14,32}{0,8} = 17,91 = 18 \text{ ед.},$$

где $k_{т.г}$ – коэффициент технической готовности, определяемый, в зависимости от суточного пробега автосамосвала.

Суточный пробег автосамосвала ($L_с$, км/сут):

$$L_с = \frac{2LQ_а}{q} k_о k_{см}; \qquad (3.77)$$

$$L_с = \frac{2 \cdot 2,7 \cdot 563,7}{35,19} \cdot 1,05 \cdot 2,5 = 227,1 \text{ км/сут},$$

где $k_о$ – коэффициент, учитывающий нулевой пробег от гаража до места работы и обратно ($k_о$ = 1,05);

$k_{см}$ – коэффициент сменности – среднее количество полных смен отработанных автосамосвалом за сутки ($k_{см}$ = 2,5).

3.11. Отвальные работы

Способ отвалообразования принимается в зависимости от вида транспорта и типа рабочего оборудования, применяемого на отвале.

При автомобильном транспорте наиболее рационально применение бульдозерного отвалообразования.

Площадь, необходимая для размещения отвала ($S_о$, м^2):

$$S_о = \frac{Wk_р^о}{n_я h_я \eta_о}; \qquad (3.78)$$

$$S_o = \frac{48456759 \cdot 1{,}2}{1 \cdot 30 \cdot 0{,}8} = 2422837{,}9 \text{ м}^2,$$

где W – объем пород, подлежащих размещению в отвале за весь срок его существования, м³;

$k_р^о$ – коэффициент разрыхления пород в отвале (1,2);

$h_я$ – высота яруса, м (30 м);

$n_я$ – количество ярусов (1 ярус);

$\eta_о$ – коэффициент использования площади отвала ($\eta_о$ принимаем для одноярусных отвалов – 0,8).

По требуемой площади отвала ($S_о$, м²) определяются его размеры в плане:

длина (L, м).

$$L - \sqrt{2S_0}; \tag{3.79}$$

$$L = 2210 \text{ м},$$

ширина (B, м),

$$B = \frac{L}{2}; \tag{3.80}$$

$$B = \frac{2210}{2} = 1105 \text{ м}.$$

Количество автосамосвалов, разгружающихся на отвале в течение часа ($N_о$, ед./ч)

$$N_о = \frac{П_в^ч k_н}{Q_п}, \tag{3.81}$$

$$N_о = \frac{193{,}3 \cdot 1{,}2}{17{,}59} = 13{,}18 = 13 \text{ ед./ч},$$

где $П_в^ч$ – часовая производительность карьера по вскрыше, м³/ч;

$k_н$ – коэффициент неравномерности работы карьера по вскрыше ($k_н$ – 1,2);

$Q_п$ – объем вскрыши в целике в кузове автосамосвала, м³:

$$Q_п = \frac{q}{\rho}; \tag{3.82}$$

$$Q_п = \frac{35{,}19}{2} = 17{,}59 \text{ м}^3,$$

где q – вес груза в кузове автосамосвала, т;

ρ – плотность пород в целике, т /м^3.

$$П_{в}^{ч} = \frac{П_{в}}{T_{г} n_{см} T_{см}}; \quad (3.83)$$

$$П_{в}^{ч} = \frac{1638000}{353 \cdot 3 \cdot 8} = 193{,}3 \text{ т/м}^3,$$

где $П_{в}$ – годовая производительность карьера по вскрыше, м^3/год;

$T_{г}$ – число рабочих дней карьера в году, дней/год (353 дня);

$n_{см}$ – число рабочих смен в сутки, смен/сут. ($n_{см}$ = 3 смены);

$T_{см}$ – продолжительность смены, ч/смену ($T_{см}$ = 8 ч).

Число одновременно разгружающихся автосамосвалов на отвале ($N_{а.о}$, ед.)

$$N_{а.о} = N_{о} \frac{t_{р} + t_{м.р}}{60}; \quad (3.84)$$

$$N_{а.о} = 13 \cdot \frac{0{,}78 + 0{,}64}{60} = 0{,}31 = 1 \text{ ед.},$$

где $t_{р}$, $t_{м.р}$ – продолжительность разгрузки и маневровых операций при установке на разгрузку, мин.

Суммарная длина участка разгрузки ($L_{р}$, м):

$$L_{р} = N_{а.о} l_{п}: \quad (3.85)$$

$$L_{р} = 1 \cdot 30 = 30 \text{ м},$$

где $l_{п}$ – ширина полосы по рабочему фронту отвала, м, занимаемой одним автосамосвалом при маневрировании, зависящая от размеров автосамосвала. Для автосамосвалов грузоподъемностью 30 – 55 т величина $l_{п}$ = 30÷40 м.

Отвальный фронт состоит из трех участков: разгрузки, планировки и резервный. По мере заполнения участка разгрузки и выравнивания участка планировки, последний начинает выполнять функцию первого, а участок разгрузки становится участком планировки. Если участок планировки не подготовлен, то разгрузка производится на резервном участке. Таким образом, все три участка должны иметь одинаковую длину, равную ($L_{р}$, м).

Общая длина отвального фронта ($L_{о}$, м):

$$L_{о} = 3L_{р}; \quad (3.86)$$

$$L_0 = 3 \cdot 30 = 30 \text{ м}.$$

Сменный объем бульдозерных работ на отвале ($Q_б$, м^3/смену):

$$Q_б = П_в^{см} k_н k_{зав}; \quad (3.91)$$

$$Q_б = 1546,4 \cdot 1,2 \cdot 0,7 = 1298,97 \text{ м}^3/\text{смену},$$

где $П_в^{см}$ – сменная производительность карьера по вскрыше, м^3/смену;

$k_{зав}$ – средний коэффициент «завалённости».

Число бульдозеров в работе ($N_б$, ед.):

$$N_б = \frac{Q_б}{П_б}; \quad (3.92)$$

$$N_б = \frac{1298,97}{1000} = 1,29 \text{ ед.},$$

где $П_б$ – сменная производительность бульдозера, м^3/смену.

Инвентарный парк бульдозеров ($N_{б.и}$, ед.)

$$N_{б.и} = 1,4\, N_б; \quad (3.93)$$

$$N_{б.и} = 1,29 \cdot 1,4 = 1,8 = 2 \text{ ед.},$$

где 1,4 – значение коэффициента резерва бульдозеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ржевский В. В.* Открытые горные работы: Технология и комплексная механизация: учебник. – Изд. 8-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 552 с.

2. *Анистратов Ю. И., Анистратов К. Ю.* Технология открытых горных работ. – М.: ООО «НТЦ-«Горное дело», 2008. – 472 с.

3. *Ржевский В. В.*Открытые горные работы: Производственные процессы: учебник. – Изд. 2-е, стеротип. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 512 с.

4. *Анистратов Ю. И., Анистратов К. Ю.* Технологические процессы открытых горных работ. – М.: ООО «НТЦ-«Горное дело», 2008. – 448 с.

5. *Хохряков В. С.* Открытая разработка месторождений полезных ископаемых. – М.: Недра, 1991. – 336 с.

6. *Трубецкой К. Н., Краснянский Г. Л., Хронин В. В. Коваленко В.С.* Проектирование карьеров: учеб. для вузов. – 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2009. – 694 с.

7. *Анистратов Ю. И., Анистратов К. Ю., Щадов М. И.* Справочник по открытым горным работам. – М.: НТЦ «Горное дело», 2010. – 700 с.

8. *Федеральные нормы и правила в области промышленной безопасности* «Правила безопасности при ведении горных работ и переработке твердых полезных ископаемых» / Утверждены Приказом Ростехнадзора от 11.12.2013 № 599. – Екатеринбург: ИД «Урал Юр Издат», 2015. – 212 с.

9. *Условные обозначения горной графической документации*: сборник нормативных документов. – М.: Изд-во «Горное дело» ООО «Киммерийский центр», 2013. – 272 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Технологические параметры карьерных экскаваторов

Параметр	Обозначение	Тип экскаватора		
		ЭКГ-5А	ЭКГ-10	ЭКГ-15
Вместимость ковша, м³	E	5.20	10,0	15,0
Радиус черпания, м:				
максимальный	$R_{ч}^{max}$	14,50	18.4	22.6
на уровне стояния	$R_{чу}$	9.04	12.6	15.6
Высота черпания максимальная, м	$H_{ч}^{max}$	10,30	13.5	16.6
Радиус разгрузки максимальный, м	$R_{р}^{max}$	12,65	16.3	19.5
Высота разгрузки максимальная, м	$H_{р}^{max}$	6.70	8.6	9.88
Радиус вращения кузова экскаватора, м	$R_{к}$	5,25	7.78	10.0

Приложение 2

Экскаваторно-автомобильно-отвальные комплексы оборудования

Годовой объем работ $П_{г}$ млн м³	Рекомендуемые							
	тип бурового станка	диаметр долота, мм	тип экскаватора	вместимость ковша, м³	модель автосамосвала	грузоподъемность, т	модель отвального бульдозера	мощность двигателя бульдозера, кВт
1.5-4.0	4СБШ-200-40	215.9	ЭКГ-5А	5,0	БелАЗ-7548	42	ДЭТ-250	206
4.0–10,0	СБШ-250МНА-32	244.5	ЭКГ-10	10,0	БелАЗ-7557	90	ДЭТ-250	206
10,0-20.0	СБШ-270ПЗ	269.9	ЭКГ-15	15.0	БелАЗ-75131	130	D10R	424

Приложение 3

Значение коэффициента разбура в зависимости от крепости пород

Крепость пород	2	4	6	8-10	12-14	16
$К_{раз}$	1,06	1.05	1.04	1.037-1.031	1.030-1.021	1.02

Приложение 4

Значение коэффициента перебура в зависимости от взрываемости пород

Класс взрываемости	I	II	III	IV	V
$K_{пер}$	6,0-8,0	8.1-10.0	10.1-12.0	12.1-14.0	14.1-16.0

Приложение 5

Значение коэффициента забойки

Категория трещиноватости пород	I	II	III	IV	V
$K_{заб}$	0.18	0.22	0.27	0.30	0.35

Приложение 6

Типы ВВ, применяемых в сухих скважинах

Тип скважин	Породы по буримости		
	весьма труднобуримые ($П_б$ = 16÷25) по шкале В. В. Ржевского ($S_б$ = 0,25 руб/м³)	средние и труднобуримые ($П_б$ = 6÷15) по шкале В. В. Ржевского ($S_б$ =0,16 ÷0.25 руб/м³)	легкобуримые ($П_б$ <6) по шкале В. В. Ржевского ($S_б$ = 0.07÷0.16 руб/м³)
Сухие или сухая часть скважин	Акватолы М-15. 65/35. АВ, АВМ. МГ. нфзаниты Т-20. Т60. Т-80. граммонит 79/21, гранулит АС-4	Акватолы 66/35. АВ инфзаниты. граммонит 79/21. игданит. гранулиты АС-4. М	Гранулит М. игданит. граммонит 79/21. акватолы. нфзаниты

Приложение 7

Эталонный расход ВВ (по данным Гипроруды)

Категория трещиноватости пород	Эталонный расход ВВ (кг/м³) при крепости пород			
	2-6	6-10	10-14	свыше 14
I	0.20	0,25	0.30	0.30
II	0.30	0,35	0.40	0.45
III	0.45	0.50	0,60	0,67
IV	0.67	0.75	0.80	0.90
V	0.90	1,00	1.10	1.20

Приложение 8

Переводные коэффициенты и плотность заряжания ВВ

Тип ВВ		$K_{ВВ}$	Δ, кг/дм³
Акватол	65-35	1.00	1.40
	М-15	0.76	1.37
	АВ	1.20	1.45
	МГ	0.93	1.42
Аммотол		0.83	0.97
Аммонит 7ЖВ		1.04	-
Граммонал:	А-45	0.79	0.92
	А-50	1.08	0,95
Гранулотол		1.20	0,97
Гранулит:	АС-8, 8В	0.99	0,90
	А-4, АС-4В	0.98	0.82
	М, С-2	1.13	0,95
Граммонит:	50/50 В	1.01	0,92
	30/70, 30/70В	1.26	0.90
	79/21	1,00	0.95
Игданит		1,13	0.85
Нфзанит.	Т-20	1,20	1.35
	Т-60	1.10	1.45
	Т-80	1,00	1.50

Приложение 9

Зависимость коэффициента $K_{дс}$ (по данным Гипроруды)

Категория трещиноватости пород	Значение $K_{дс}$ при диаметре скважин, мм							
	100	125	160	200	220	243	350	400
I	0,92	0,93	0,95	0,98	1,00	1.05	1.07	1,10
II	1.01	1.03	1,05	1.07	1.13	1.15	1.17	1.20
III	1.06	1,08	1.10	1.18	1,16	1.20	1.23	1,26
IV	1.11	1.13	1,15	1.17	1.20	1.25	1.27	1.30
V	1.16	1,18	1.20	1.22	1,26	1.30	1.32	1,36

Приложение 10

Зависимость коэффициента K_3 от категории трещиноватости

Категория трещиноватости пород	K_3
I – III	1.05 – 1,10
IV – V	1.10 – 1.15

Приложение 11

Зависимость коэффициента $K_в$ от взрываемости пород

Взрываемость пород	Коэффициент m	Коэффициент $K_в$
Легковзрываемые	1,10-1,20	2,00-2,50
Средневзрываемые	1,00-1,15	2,50-3,00
Трудновзрываемые	0,85-1,00	3,00-3,50

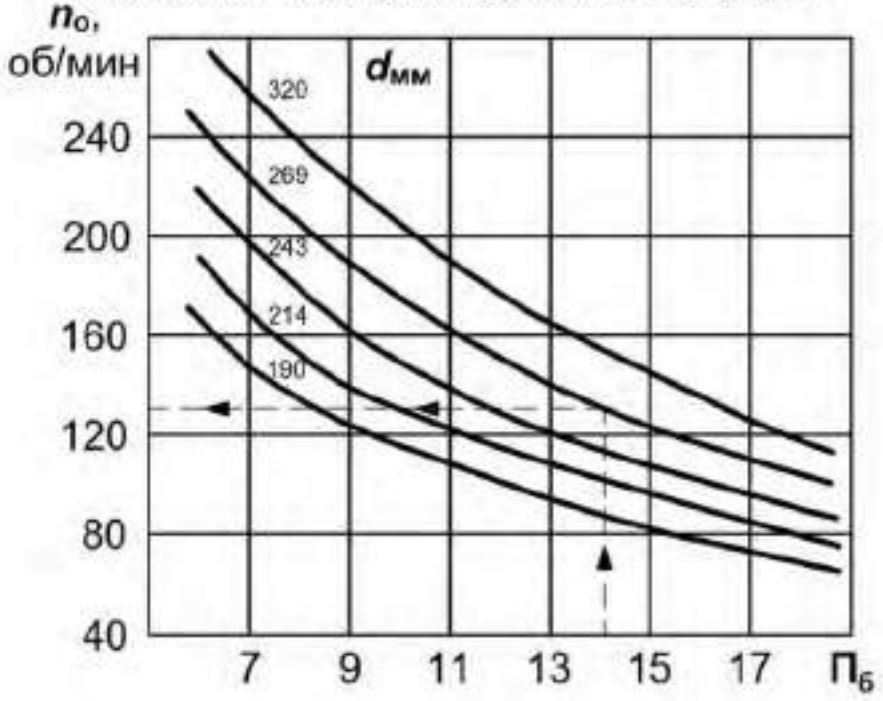
Приложение 12

Зависимость коэффициента $K_т$ от интервала замедления

Интервал замедления	1	10	25	50	75 и более
Коэффициент $K_т$	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80

Приложение 13

Зависимость оптимальной скорости вращения бурового става от показателя буримости пород и диаметра долота



Приложение 14

Значения коэффициента в зависимости от показателя буримости

$П_б$	8	10	12	14	16	18
Коэффициент	7,00	7,25	7,50	7,75	8,00	8,25

Приложение 15

Значения коэффициента разрыхления породы в ковше экскаватора $K_р$, коэффициента наполнения ковша экскаватора $K_н$

Порода	$K_р$	$K_н$
Песок	1.1-1.2	1.1-1.0
Глина и плотная глина с галькой	1.3-1.4	1.0-0.6
Скалистый грунт в зависимости от крепости	1.4-1.6	0.75-0.60

Приложение 16

Технические характеристики карьерных автосамосвалов БелАЗ

Показатель	Модель автосамосвала		
	БелАЗ-7548	БелАЗ -7557	БелАЗ-75131
Грузоподъемность q_0, т.....	42,0	90,0	130,0
Собственная масса $G_д$, т.....	33,1	74,0	108,6
Геометрическая вместимость кузова V_0, м^3.....	21,5	37,7	45,5
Вместимость кузова «с шапкой» V_a, м^3	26,5	53,3	71,2
Мощность двигателя $N_д$, кВт.....	368,0	783	1193,0
Продолжительность, мин:			
маневровых операций при установке на погрузку $t_{м.п}$	0,59	0,64	0,70
маневровых операций при установке на разгрузку $t_{м.р}$	0,64	0,69	0,76
разгрузки $t_р$	0,78	1,00	1,17
Ширина проезжей части автодороги при двухполосном движении T, м	14,0	16.0	19,0

Приложение 17

Значения коэффициента технической готовности автосамосвалов ($k_{т.г}$)

Грузоподъемность автосамосвала, т	Значения $k_{т.г}$ при суточном пробеге $L_с$, км						
	50	100	150	200	250	300	350
30 – 42	0,94	0,88	0,84	0,80	0,76	0,73	0 70
80	0,93	0,86	0,81	0,76	0,72	0,69	0,64
110 – 180	0,92	0,86	0,81	0,76	0,72	0,68	0 64

Приложение 18

Среднетехнические скорости движения карьерных автосамосвалов ($V_{ср.т}$), км/ч

Расстояние L, км	Высота подъема горной массы $H_п$, м												
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240
1,0	22,7	21,1	18,4	16,0									
1,2	23,9	21,8	19,5	17,5	15,8								
1,4	24,1	22,0	20,0	18,3	16,7								
1,6	24,7	22,5	20,6	19,0	17,6	16,3							
1,8	25,3	23,3	21,5	19,9	18,6	17,4	16,2						
2,0	26,0	24,0	22,3	20,8	19,5	18,3	17,2						
2,2	26,7	24,8	23,1	21,7	20,4	19,2	18,1	17,2					
2,4	27,3	25,5	23,9	22,5	21,2	20,0	19,0	18,0	17,2				
2,6	27,9	26,2	24,6	23,2	22,0	20,8	19,8	18,9	17,9	17,2			
2,8	28,6	26,9	25,4	24,0	22,7	21,6	20,6	19,6	18,8	18,0			
3,0	29,2	27,5	26,1	24,7	23,5	22,4	21,3	20,4	19,5	18,7	18,0		
3,2	29,7	28,2	26,7	25,3	24,2	23,2	22,0	21,1	20,2	19,4	18,6		
3,4	30,4	28,8	27,4	26,1	24,9	23,7	22,7	21,8	20,9	20,1	19,2	18,2	
3,6	31,0	29,4	28,0	26,7	25,5	24,4	23,4	22,5	21,6	20,8	19,6	18,7	17,7
3,8	31,6	30,0	28,6	27,4	26,1	25,1	24,1	23,1	22,3	21,4	20,2	19,4	18,4
4,0	32,0	30,6	29,2	28,0	26,8	25,7	24,7	23,8	22,9	22,1	20,9	20,0	19,2

Приложение 19

Технические характеристики станков шарошечного бурения

Параметры	Тип бурового станка		
	4СБШ-200-40	СБШ-250МНА-32	СБШ-270Н3
Диаметр долота, мм	215,9; 244,5	244,5; 2о9,9	244,5; 269,9
Глубина скважины, не более, м . ..	40	32	32
Осевое усилие, не более, кН..	300	300	450
Скорость передвижения, км/ч	0,74	1,30	1,60
Масса станка, т	55	85	136

Приложение 20

Значение коэффициентов $k_{\text{р}}^{\circ}$, $k_{\text{зав}}$ и рекомендуемой высоты яруса отвала $h_{\text{я}}$

Породы	$h_{\text{я}}$, м	Значения коэффициентов	
		$k_{\text{р}}^{\circ}$	$k_{\text{зав}}$
Скальные ……	30	1,12 - 1,20	0,7
Полускальные, смешанные	20	1,06 - 1,12	0,8
Рыхлые, глинистые ……	15	1,05 - 1,07	0,9

Приложение 21

Производительность бульдозеров различных моделей

Тип бульдозера	Сменная (за 8 ч) производительность при дальности перемещения грунта до 10 м в породах, м³		
	рыхлые	полускальные	скальные
ДЭТ-250М	2200	1850	1500
D10N	3730	3130	2536
D11N	5510	4630	3750

М 1:10000

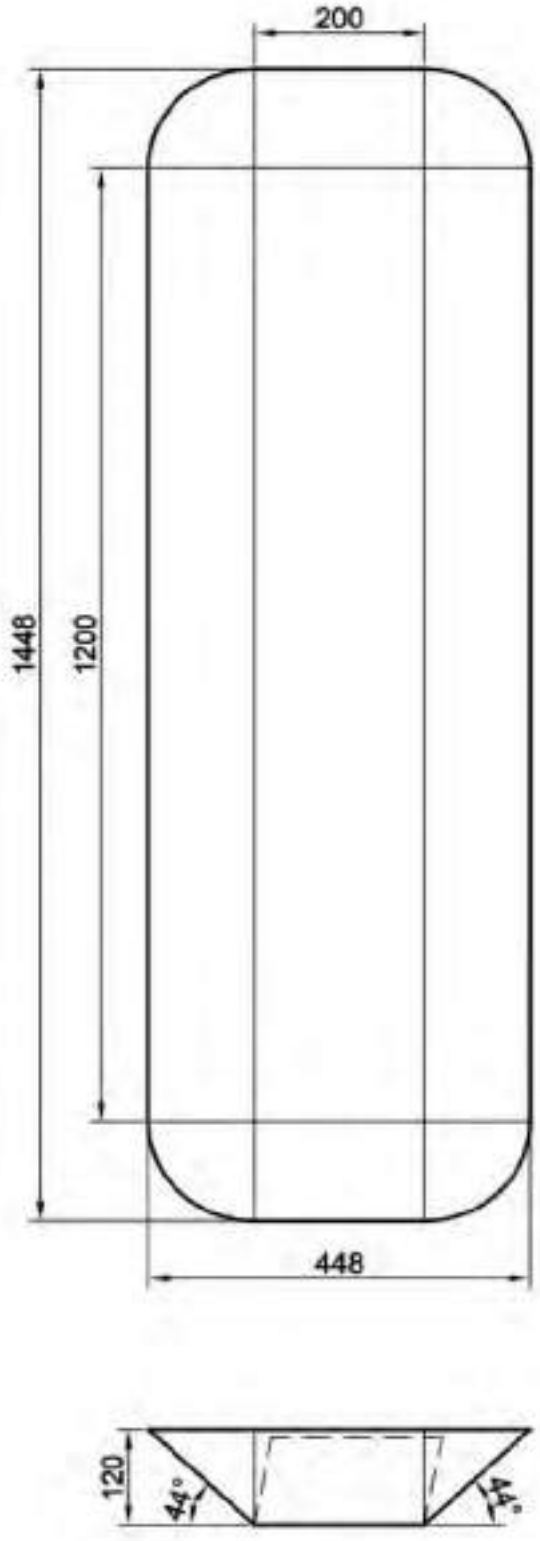
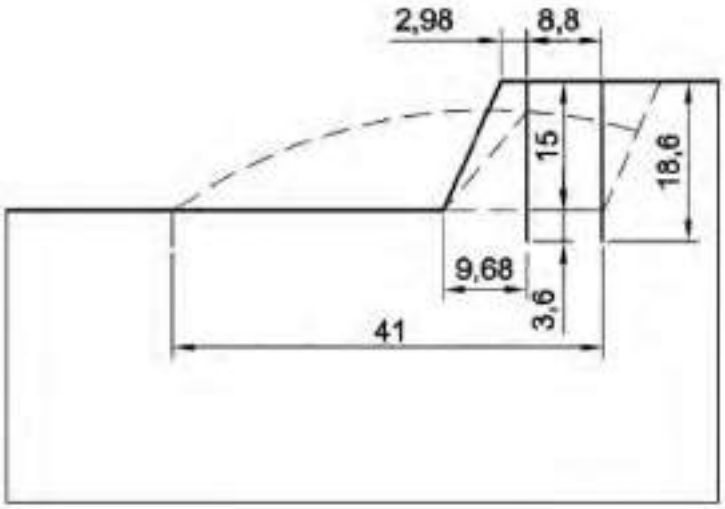
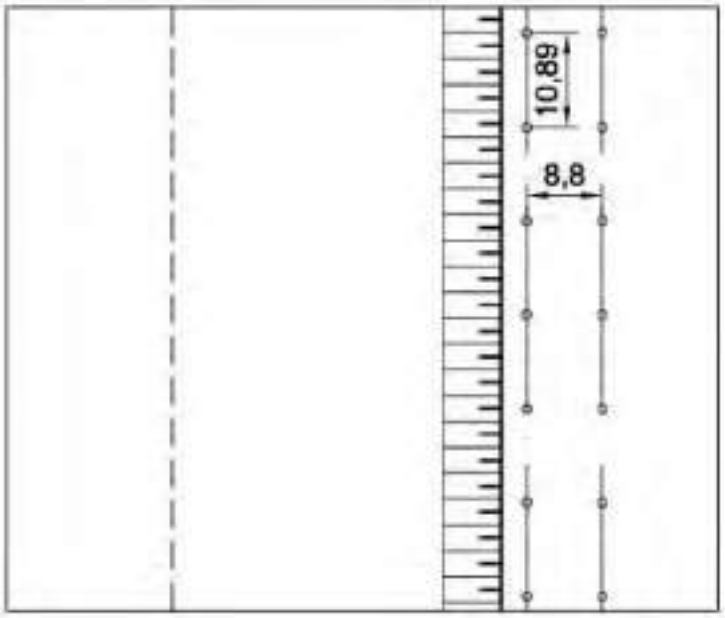


Схема к расчету объема карьера

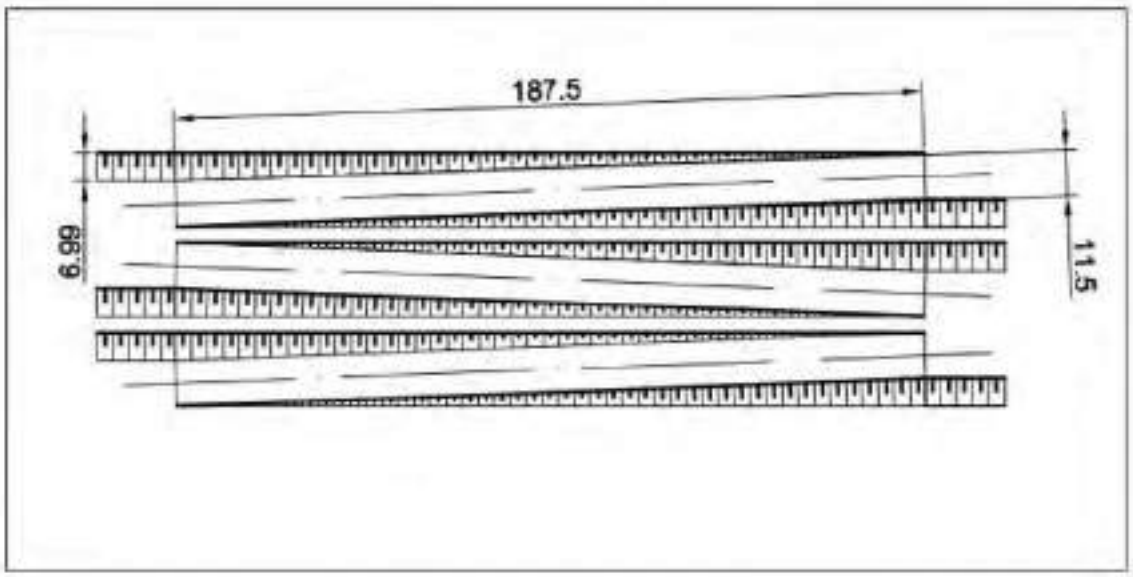
М 1:1000



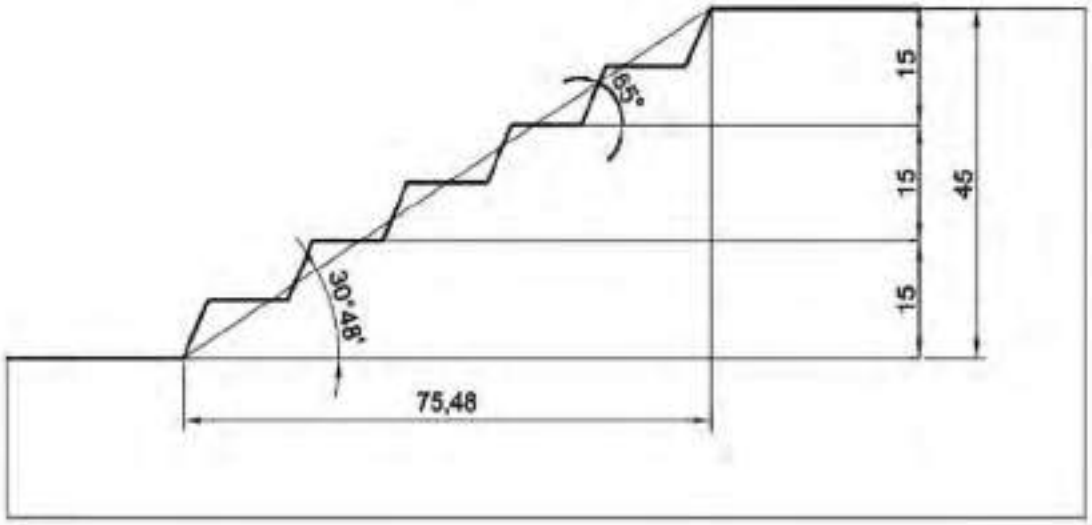


Взрывной блок

М 1:2000

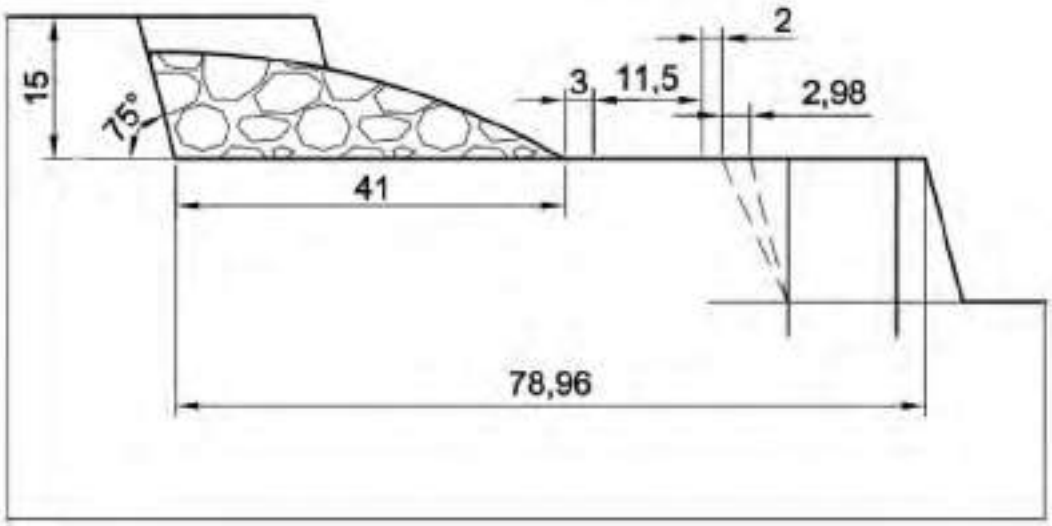


М 1:1000



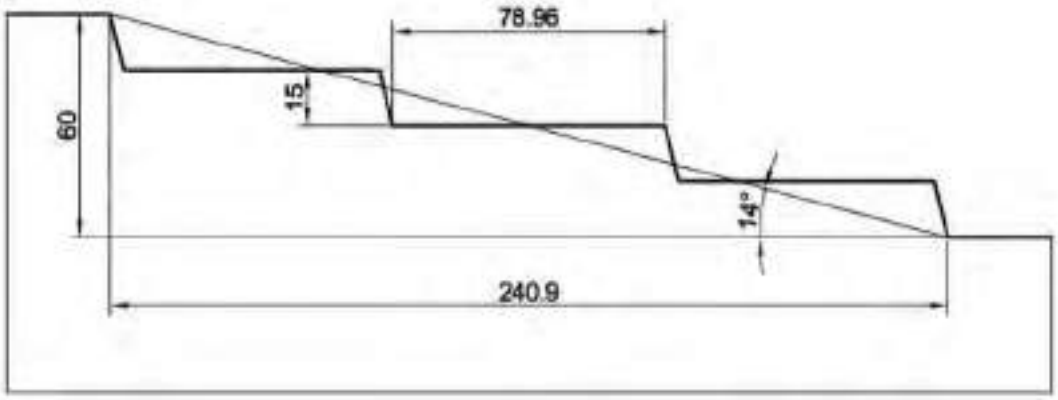
Нерабочий борт карьера с транспортными коммуникациями

М 1:1000



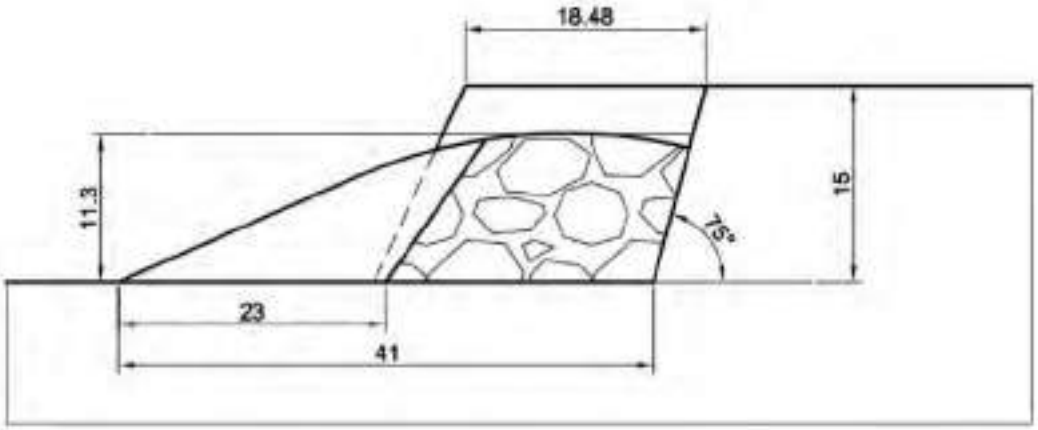
Рабочая площадка

М 1:2000



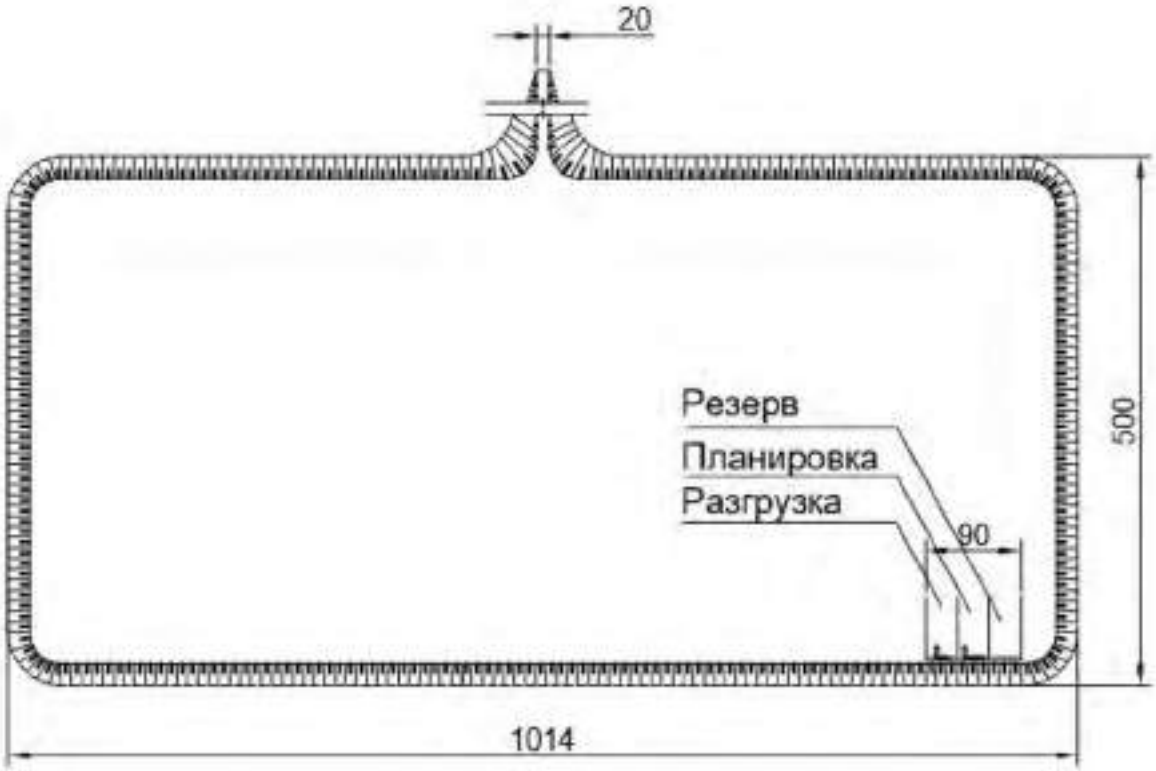
Рабочий борт карьера

М 1:2000



Развал взорванной горной массы и забой экскаватора

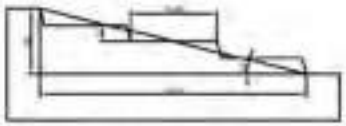
М 1:10000



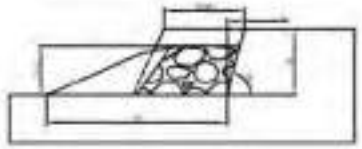
План отвала

Образец выполнения чертежей

Масштаб 1:10000



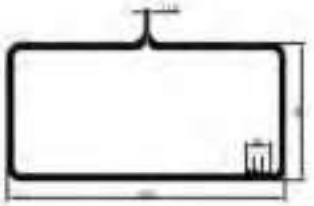
Масштаб 1:2000



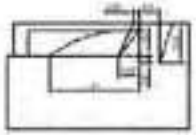
Масштаб 1:2000

Масштаб 1:2000

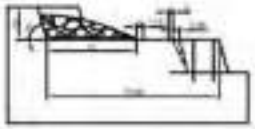
Масштаб 1:1000



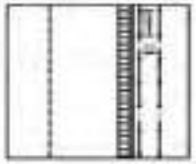
Масштаб 1:10000



Масштаб 1:1000



Масштаб 1:1000



Масштаб 1:1000

	Открытая разработка месторождения	
	Карьер	
		ОГР-12

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

РУКОВОДСТВО ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ОТКРЫТАЯ ГЕОТЕХНОЛОГИЯ

«Технологические расчеты параметров и процессов открытых горных работ»

Специальность

21.05.04 Горное дело

форма обучения: очная, заочная

квалификация выпускника: **Горный инженер (специалист)**

Автор: Костин А.Л., ст. преп.

Екатеринбург
2019

Оглавление

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1 *Графическое изображение элементов горных работ* 3

Контрольные вопросы 13

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2. *Определение объема капитальной траншеи* 14

Контрольные вопросы 16

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 *Определение объема, размеров, производительности и срока службы карьера, запасов полезного ископаемого и коэффициента вскрыши* 17

Контрольные вопросы 22

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 *Расчет заряда одиночной скважины* 23

Контрольные вопросы 27

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5 *Расчет производительности бурового станка* 29

Контрольные вопросы 32

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6. *Расчет производительности карьерных экскаваторов* 33

Контрольные вопросы 36

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7 *Определение производительности карьерных автосамосвалов* 37

Контрольные вопросы 41

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8 *Конструкция рабочего и нерабочего бортов карьера* 42

Контрольные вопросы 46

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9. *Расчет бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте* 47

Контрольные вопросы 51

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ И РЕКОМЕНДУЕМЫХ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ 51

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 *Исходные данные к лабораторной работе № 1 "Графическое изображение элементов горных работ"* 52

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 *Исходные данные к лабораторной работе № 2 «Определение объема капитальных траншей»* 58

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 *Исходные данные к лабораторной работе № 3 «Определение объема, размеров, производительности и срока службы карьера, запасов полезного ископаемого и коэффициента вскрыши»* 59

ПРИЛОЖЕНИЕ 4 *Исходные данные к лабораторной работе № 4 «Расчет заряда одиночной скважины»* 60

ПРИЛОЖЕНИЕ 5 *Значение коэффициента k_{max} в зависимости от крепости пород* 61

ПРИЛОЖЕНИЕ 6 *Значение коэффициента k_1* 61

ПРИЛОЖЕНИЕ 7 *Исходные данные к лабораторной работе № 5 «Расчет производительности бурового станка»* 62

ПРИЛОЖЕНИЕ 8 *Зависимость оптимальной скорости вращения бурового станка* 63

ПРИЛОЖЕНИЕ 9 *Значение коэффициента k в зависимости от показателя буримости горных пород* 63

ПРИЛОЖЕНИЕ 10 *Исходные данные для расчетов к лабораторной работе № 6 «Расчет производительности карьерных экскаваторов»* 64

ПРИЛОЖЕНИЕ 11 *Коэффициенты разрыхления пород в ковше экскаватора и наполнения ковша (по ЕНВ)* 64

ПРИЛОЖЕНИЕ 12 *Исходные данные для расчетов к лабораторной работе № 7 «Определение производительности карьерных автосамосвалов»* 65

ПРИЛОЖЕНИЕ 13 *Техническая характеристика карьерных автосамосвалов* 66

ПРИЛОЖЕНИЕ 14 *Значение коэффициента технической готовности автосамосвалов* 66

ПРИЛОЖЕНИЕ 15 *Среднетехнические скорости движения карьерных автосамосвалов* 67

ПРИЛОЖЕНИЕ 16 *Исходные данные к лабораторной работе № 8 «Конструкция рабочего и нерабочего бортов карьера»* 68

ПРИЛОЖЕНИЕ 17 *Исходные данные к лабораторной работе № 9 «Расчет бульдозерного отвалообразования при автомобильном транспорте»* 69

ПРИЛОЖЕНИЕ 18 *Значение коэффициентов K_p^0, $k_{пр}$ и высоты яруса $h_я$* 70

ПРИЛОЖЕНИЕ 19 *Производительность бульдозеров (по данным института Гипроруда)* 70

Практическая работа № 1

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГОРНЫХ РАБОТ

Цель работы – изучить и освоить графическое изображение элементов горных работ.

1.1. Задачи работы

1.1.1. Изучить масштабы, линии и условные изображения горных машин, применяемые для горных чертежей.

1.1.2. Изучить и освоить навыки графического изображения основных элементов горных работ.

1.2. Порядок выполнения работы

1.2.1. По рисункам 1.1- 1.4 ознакомиться с масштабами, линиями и условными изображениями горных машин, применяемыми для горных чертежей.

1.2.2. По учебнику [1, с. 10 - 11] и рис. 1.5 - 1.13 ознакомиться с типовыми графическими изображениями элементов горных работ.

1.1.3. В соответствии с номером варианта задания и соответствующими исходными данными в прил. 1 начертить элементы горных работ на формате А4 в масштабе, соответствующем заданным размерам.

Изображение заданных элементов горных работ вычертить в соответствии со знаниями и навыками, полученными при изучении дисциплин «Машиностроительное черчение» и «Начертательная геометрия».

Масштаб, типы линий и условные знаки
на чертежах горных работ

1. Масштаб изображений

1:5; 1:10; 1:50; 1:100; 1:200; 1:500; 1:1000; 1:2000;
1:5000; 1:10000; 1:25000; 1:50000; 1:100000

Рис. 1.1. Масштабы изображений

Линия	Начертание	Толщина линий в зависимости от масштаба чертежа (S)	Основное назначение
Основная		S=0,6 - 1,5 мм	Линии фактического и проектного контура всех горных выработок и сооружений на видах и разрезах (сечениях), верхняя бровка уступов в плане
Вспомогательная сплошная		от S/3 до S/2 0,2 - 0,8 мм	Линии размерные, выносные и штриховки, изолинии, линии границ горных пород на разрезах и сечениях, линии обрыва, нижняя бровка уступов в целике
Вспомогательная с изгибами		от S/3 до S/2 0,2 - 0,8 мм	Длинные линии обрыва на планах и разрезах
Вспомогательная штриховая			Линии невидимых контуров горных выработок, находящихся за плоскостью проекций
Штрихпунктирная			Осевые и центровые линии горных выработок, бровка отвалов, насыпей, навалов и уступов в разрыхленной горной массе
Разомкнутая		от S до 1,5S	Линии сечений

Рис. 1.2. Типы линий

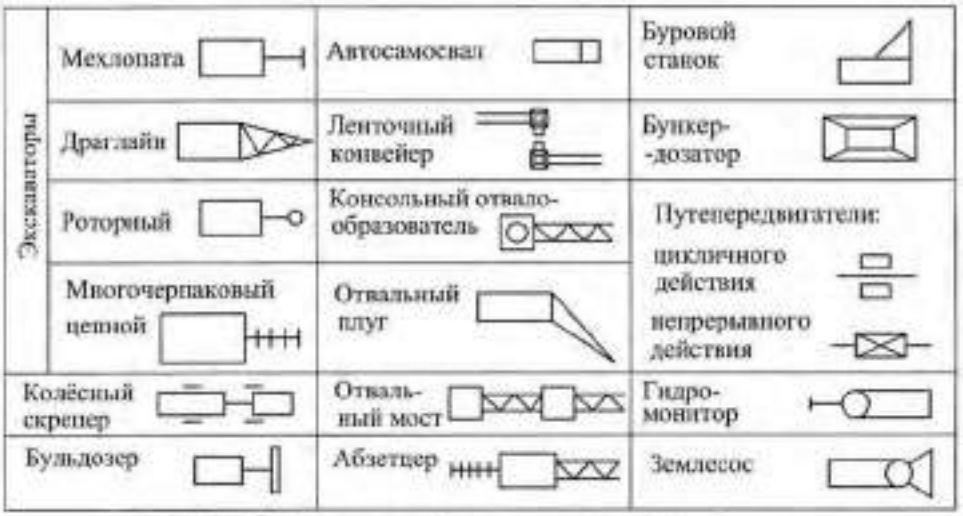
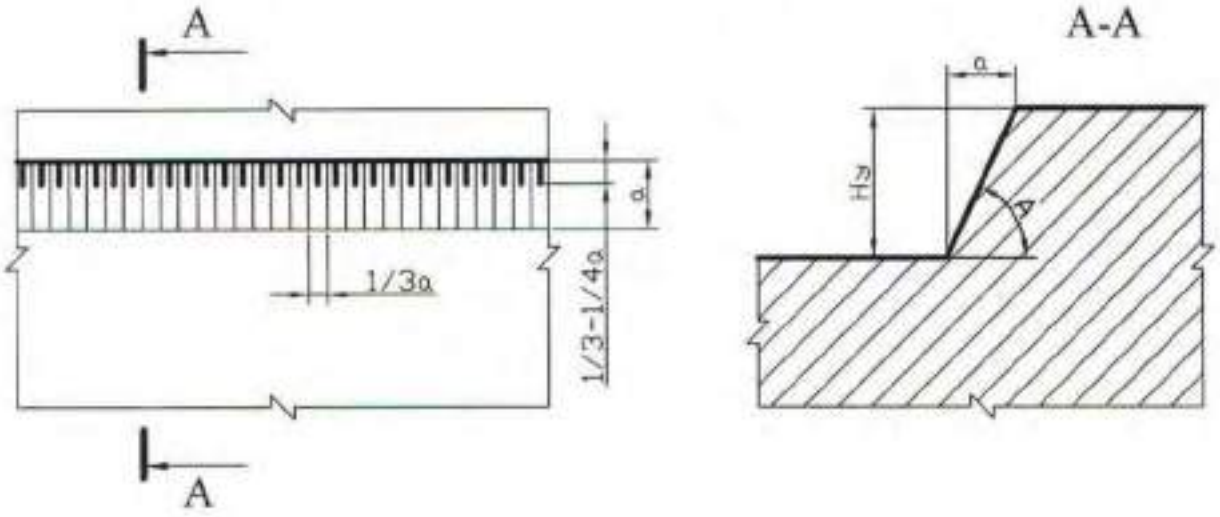


Рис. 1.3. Условные изображения горного оборудования

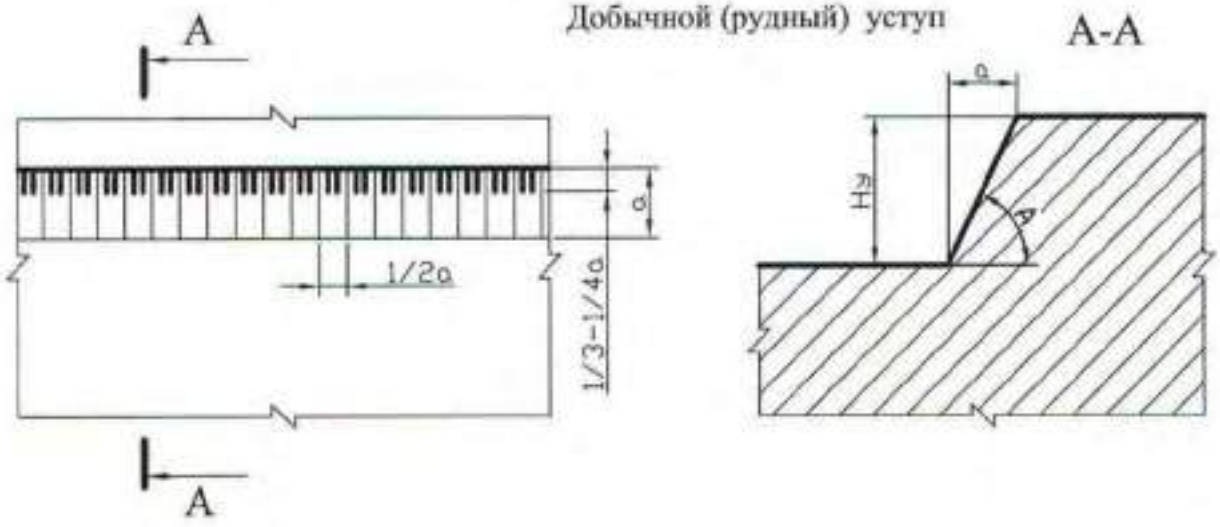
Наименование элемента	Обозначение элемента
Горизонтальное проложение породного уступа в целике	
Горизонтальное проложение уступа в полезном ископаемом, пройденного в целике	
Горизонтальное проложение породного уступа, пройденного по разрыхленной горной массе	
Горизонтальное проложение уступа в полезном ископаемом, пройденного по разрыхленной горной массе	
Бергштрихи проводят перпендикулярно линии горизонта	

Рис. 1.4. Условные обозначения откосов открытых горных выработок

Вскрышной уступ



Добычной (рудный) уступ



Смешанный (сложный) уступ

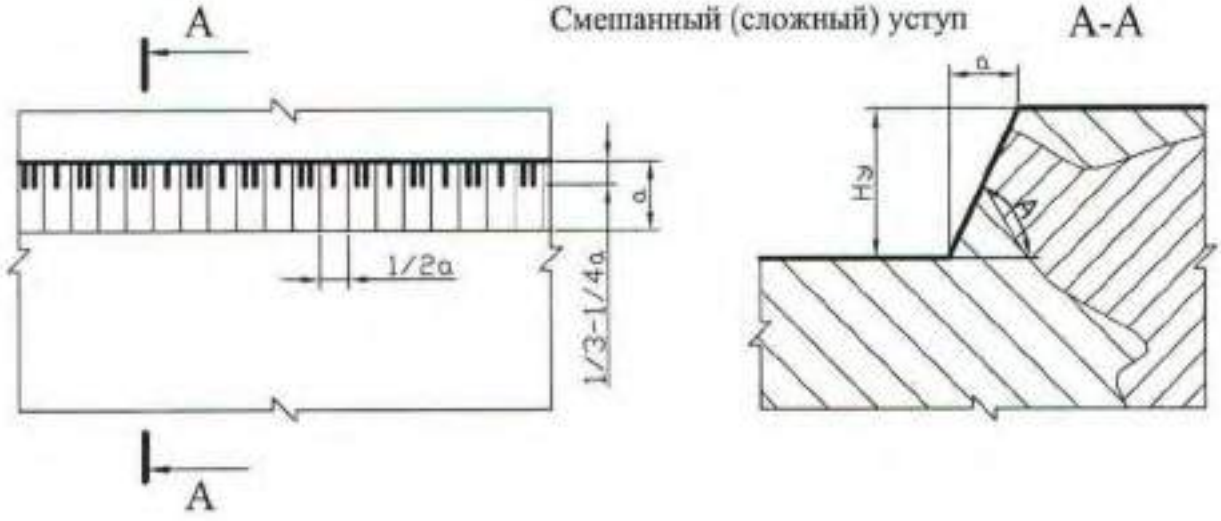


Рис. 1.5. Изображение уступов в целике

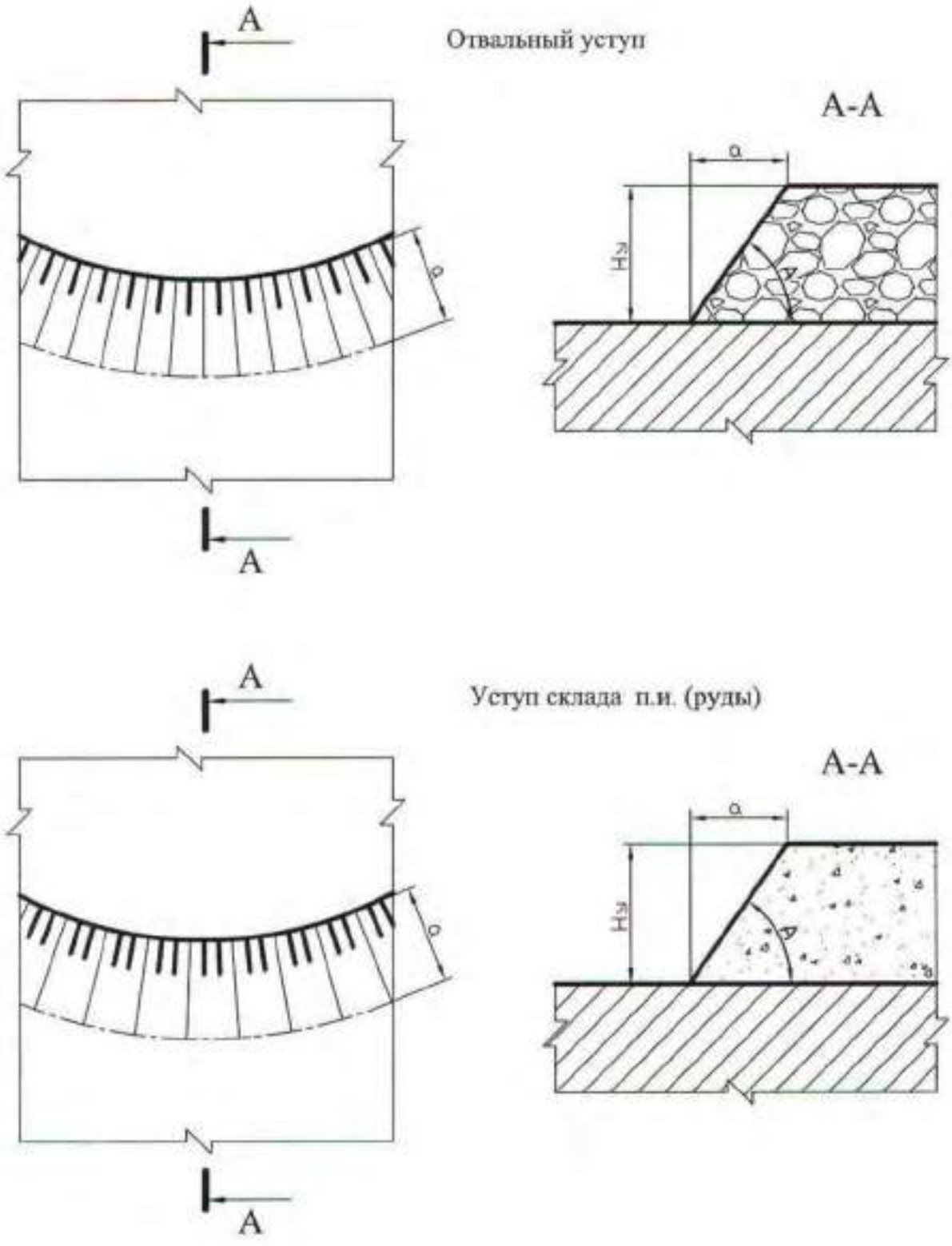
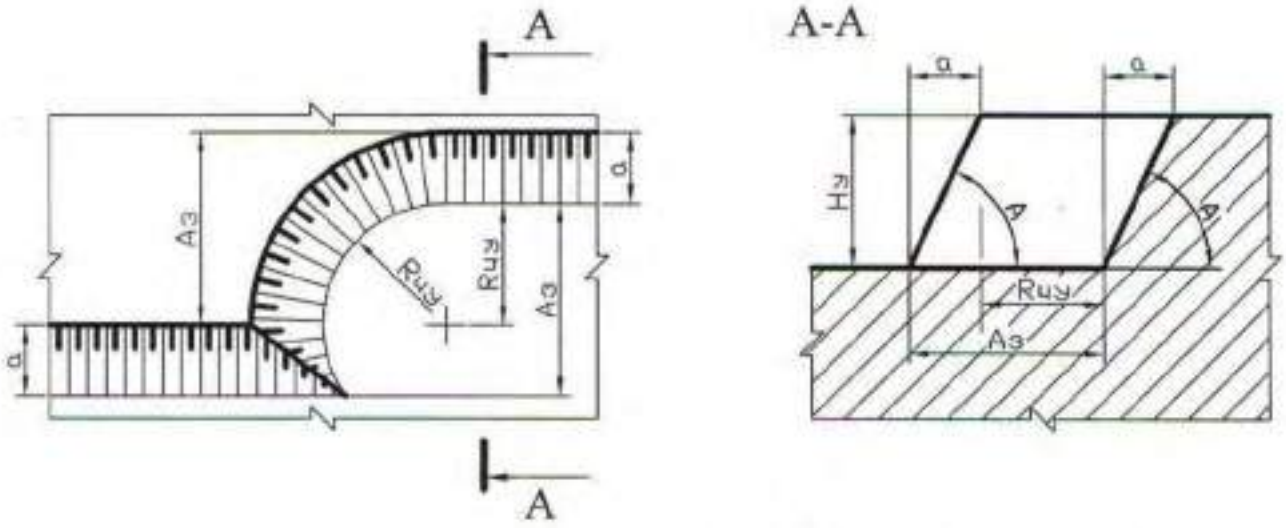
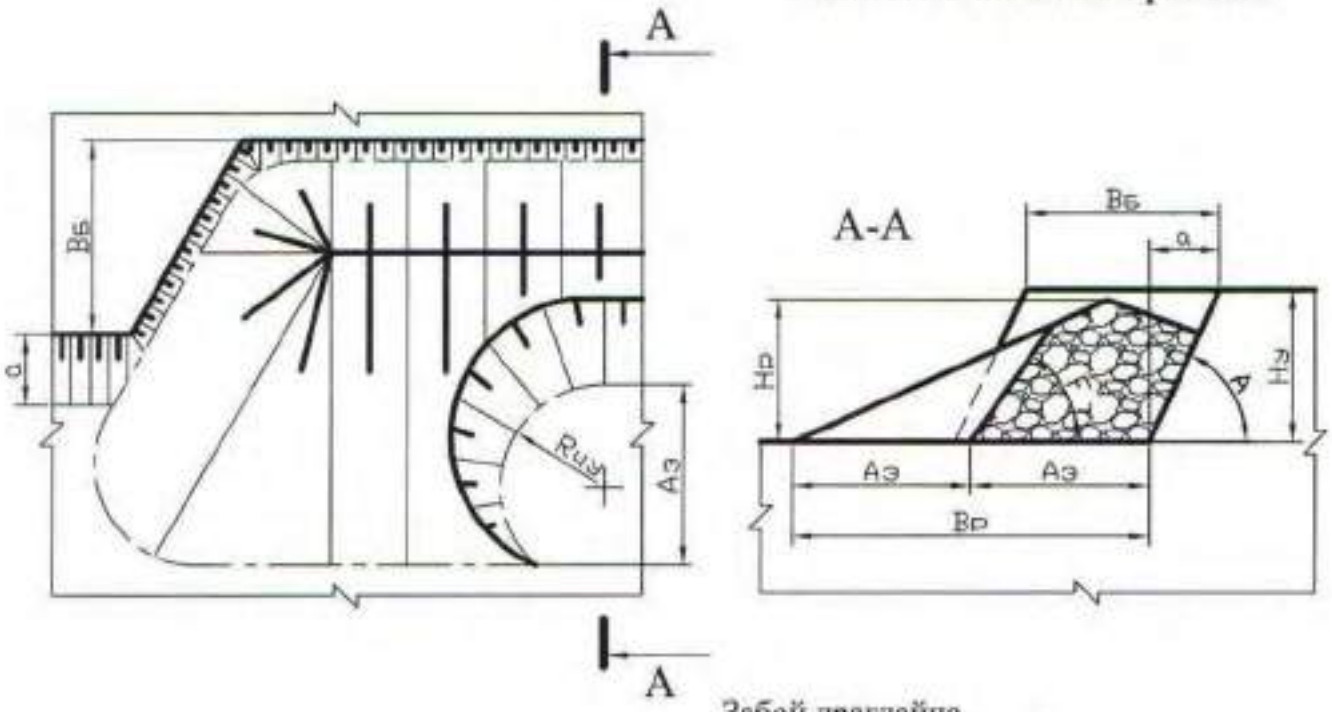


Рис. 1.6. Изображение уступов в искусственно разрыхленных горных породах

Забой мехлопаты в массиве



Забой мехлопаты в развале



Забой драглайна

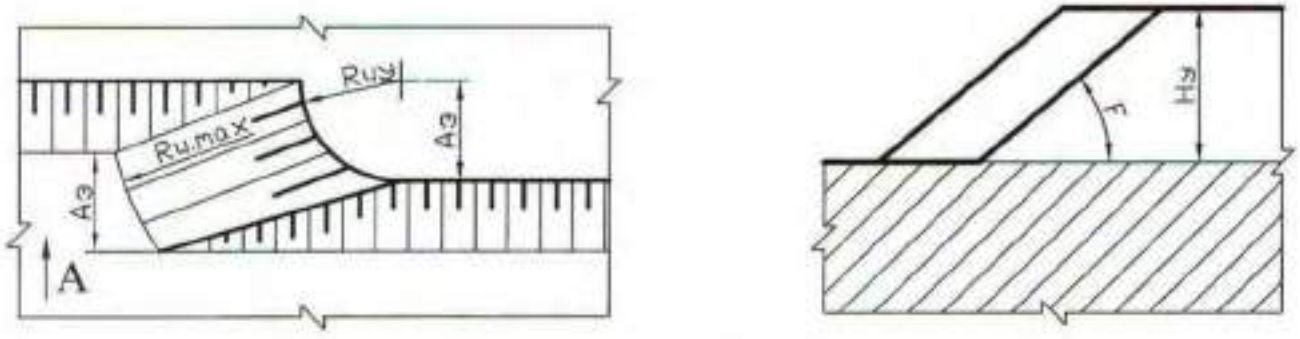


Рис. 1.7. Изображение забоев одноковшовых экскаваторов

Забой роторного экскаватора

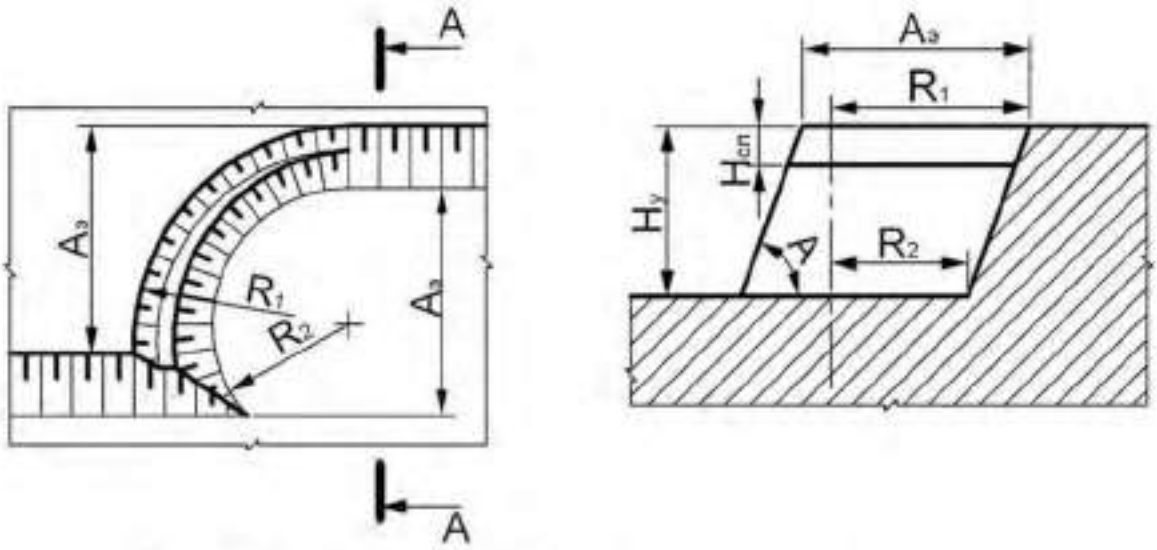


Рис. 1.8. Изображение забоя роторного экскаватора

Забой бульдозера

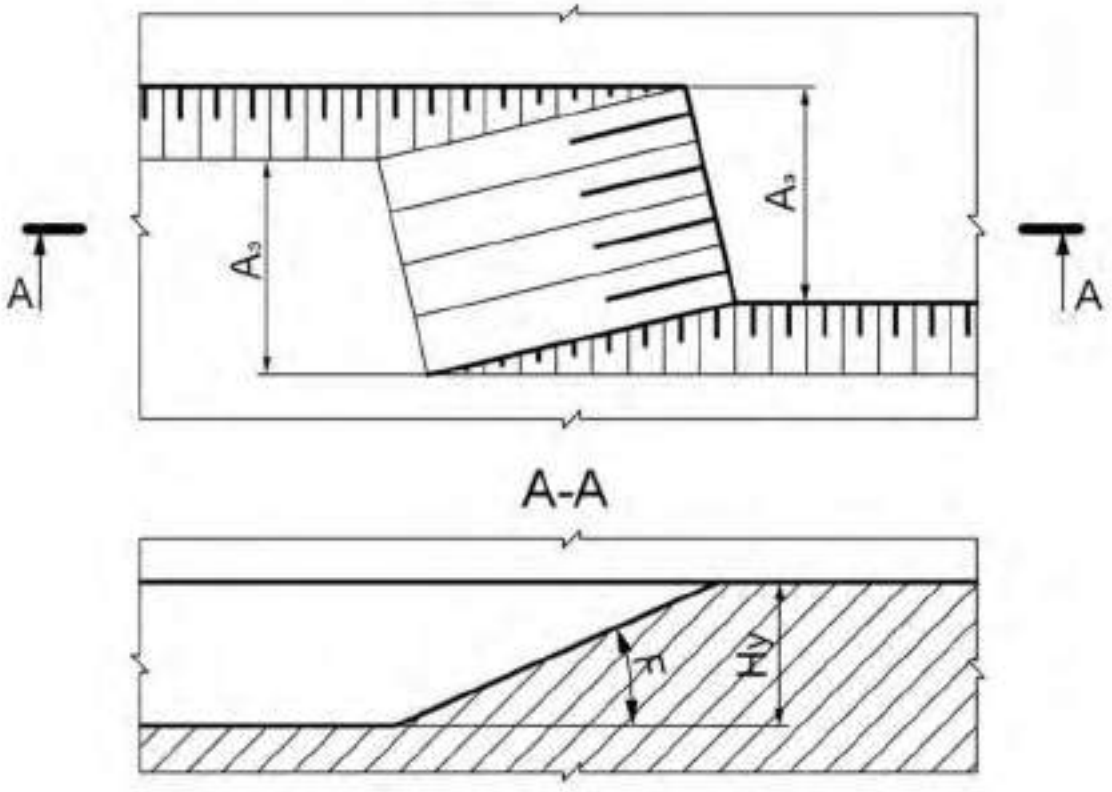


Рис. 1.9. Изображение бульдозерного забоя

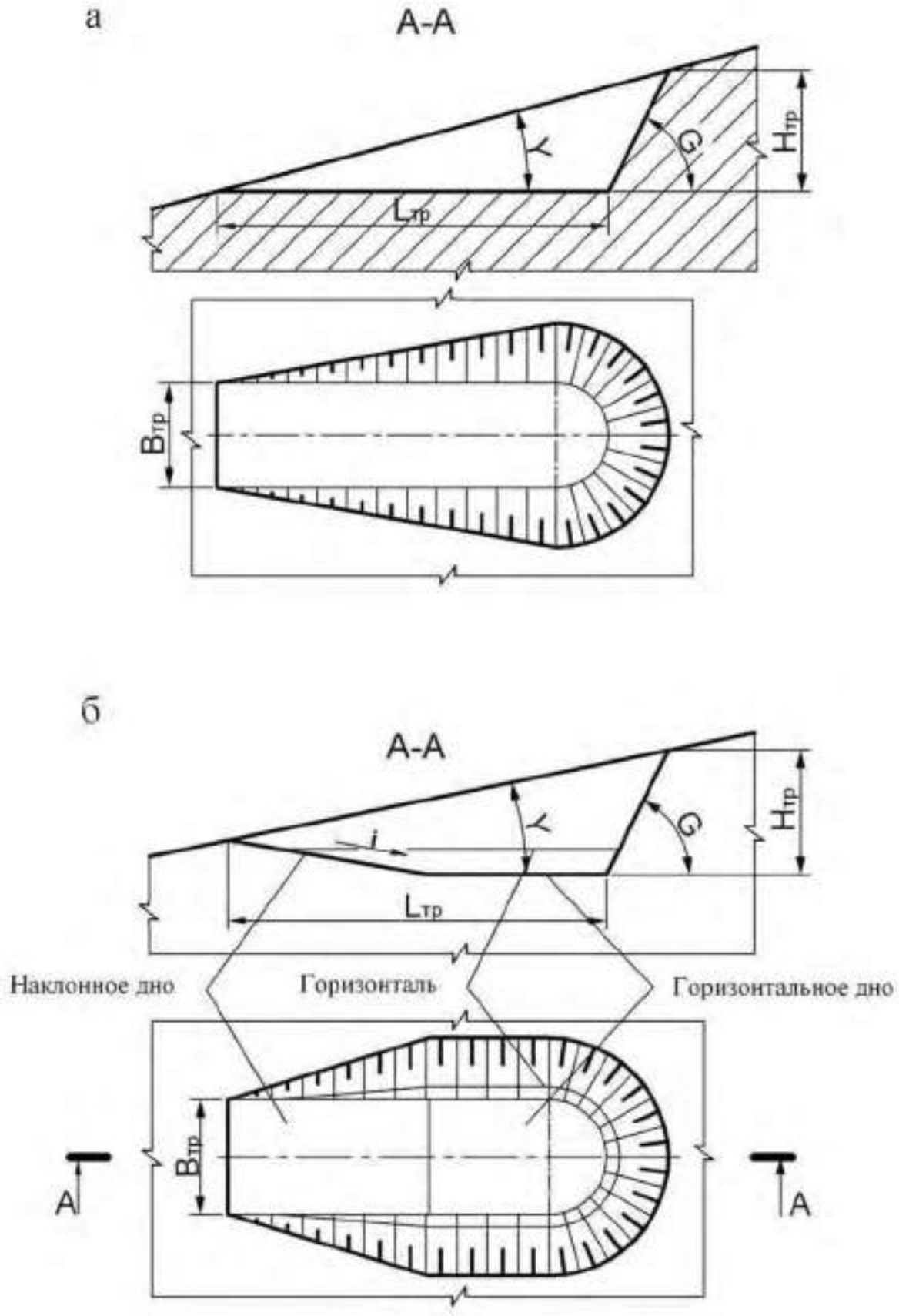


Рис. 1.10. Траншея на косогоре:
а – траншея с горизонтальным дном;
б – траншея с наклонным и горизонтальным дном

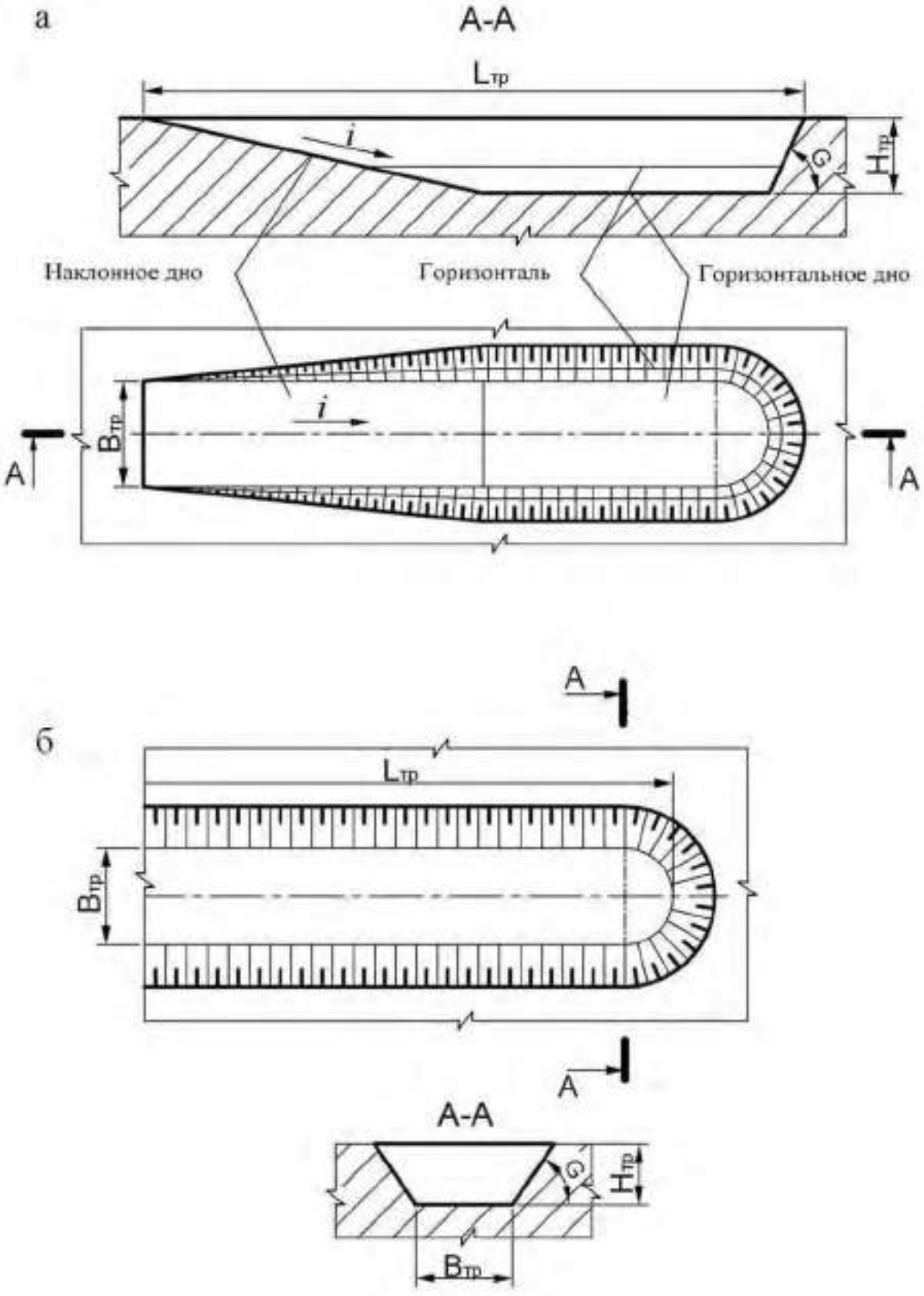
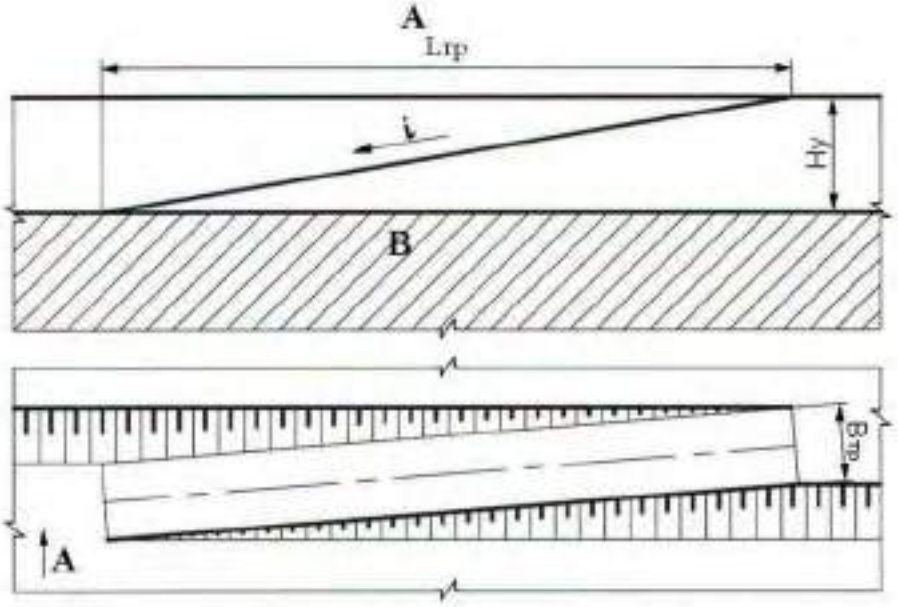
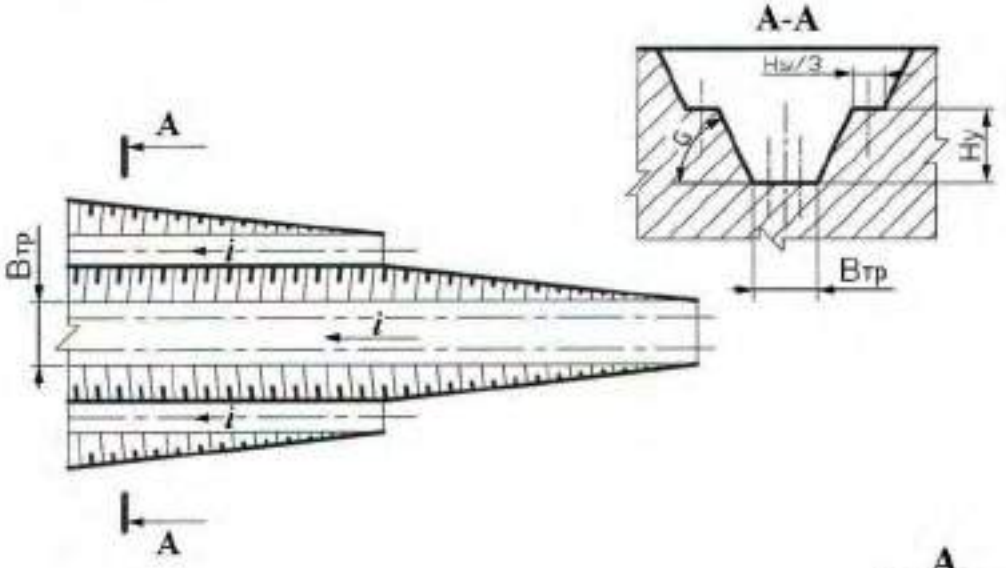


Рис. 1.11. Горизонтальные траншеи в равнинной местности:
а – траншея с горизонтальным и наклонным дном;
б – траншея с горизонтальным дном

а



б



в

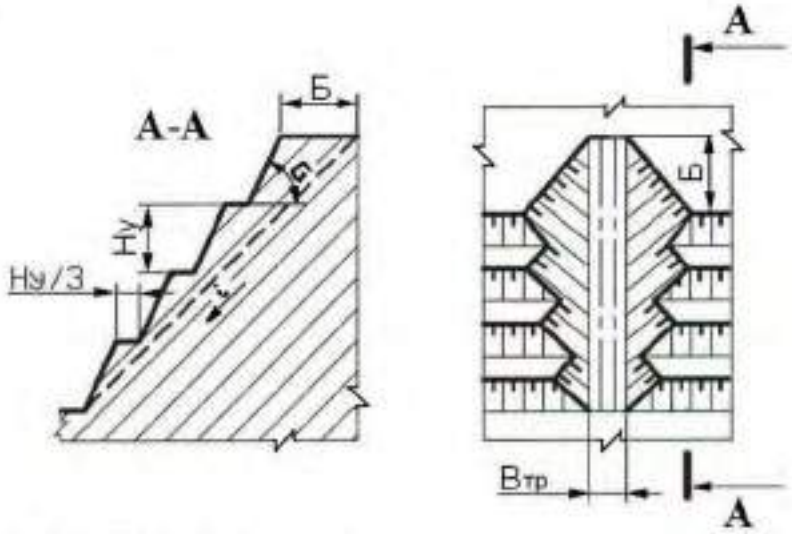


Рис. 1.12. Наклонные траншеи
а – внутренняя полутраншея (съезд); *б* – траншея групповая;
в – траншея крутонаклонная

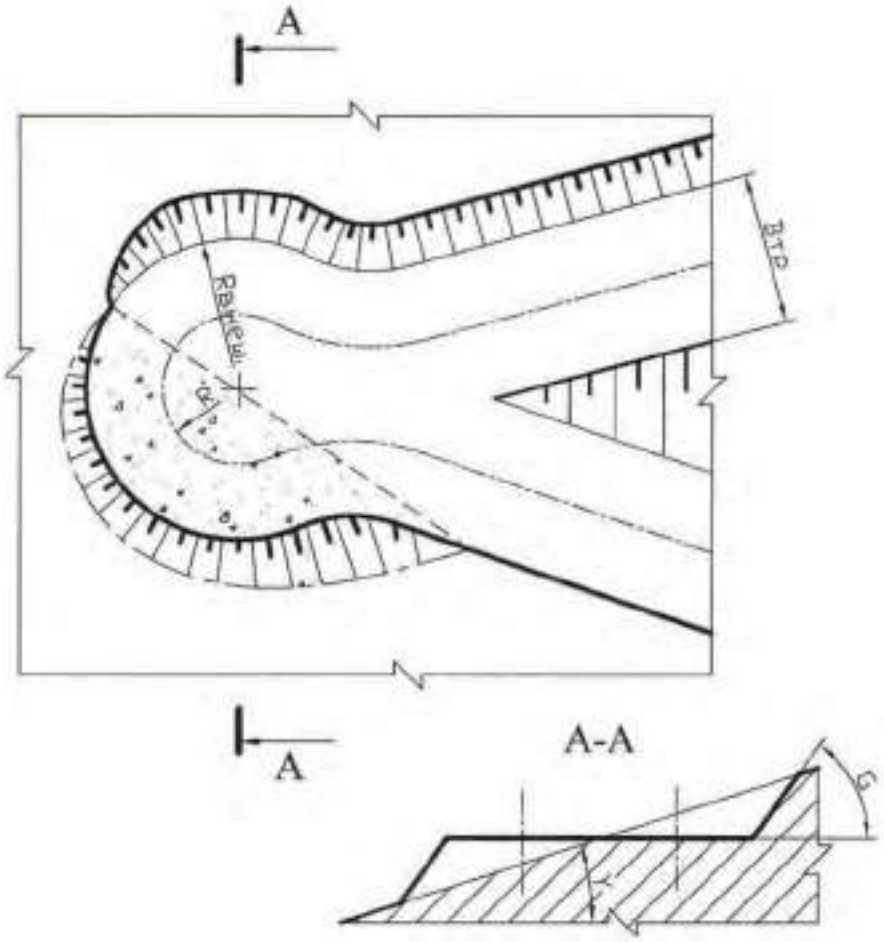


Рис. 1.13. Серпантина на косогоре

Контрольные вопросы к практической работе № 1

1. 1: 5; 2:3; 1:3; 1:20; 1:30; 1:500; 1:70000; 1:25; 1:25000 – какой из этих масштабов не применяется?
2. Во сколько раз основная линия толще вспомогательной?
3. Когда применяется штрихпунктирная линия?
4. Когда применяется основная линия?
5. Когда применяется сплошная вспомогательная линия?
6. Как должны располагаться берг-штрихи при изображении горизонтальных проложений откосов?
7. От каких параметров уступа зависит ширина горизонтального проложения?

Практическая работа № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА КАПИТАЛЬНОЙ ТРАНШЕИ

Цель работы – изучить методику определения объема капитальной траншеи.

2.1. Задачи работы

2.1.1. Ознакомиться с методикой определения объема капитальных траншей.

2.1.2. Выполнить расчет объема капитальной траншеи по исходным данным.

2.1.3. Исследовать зависимость объема капитальной траншеи от определяющих факторов.

21.4. Выполнить графическое изображение плана и элементов капитальной траншеи.

2.2. Порядок выполнения работы

2.2.1. По учебнику [1, с. 192 - 198] ознакомиться с конструкцией капитальных траншей и методикой определения их объема.

2.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 2. По данным заданного варианта выполнить расчет объема капитальной траншеи.

Объем простой капитальной траншеи можно представить как сумму объема полупризмы V_1 и объемов двух пирамид [1, рис. 10.3, с. 196].

$$V_{\text{т}} = V_1 + 2V_2, \qquad (2.1)$$

где $V_{\text{т}}$ – объем капитальной траншеи, м^3;

V_1 – объем полупризмы, м^3;

V_2 – объем пирамиды, м^3.

Объем породы в торце траншеи, заключенный в призме V_3 и двух пирамидах V_3 и V_4, незначителен и обычно в расчетах не учитывается.

Объем полупризмы V_1 (м^3) определяется

$$V_1 = \frac{b_т h_т^2}{2i}, \tag{2.2}$$

где $b_т$ – ширина основания траншеи, м;

$h_т$ – глубина траншеи, м;

i – уклон траншеи, ед.

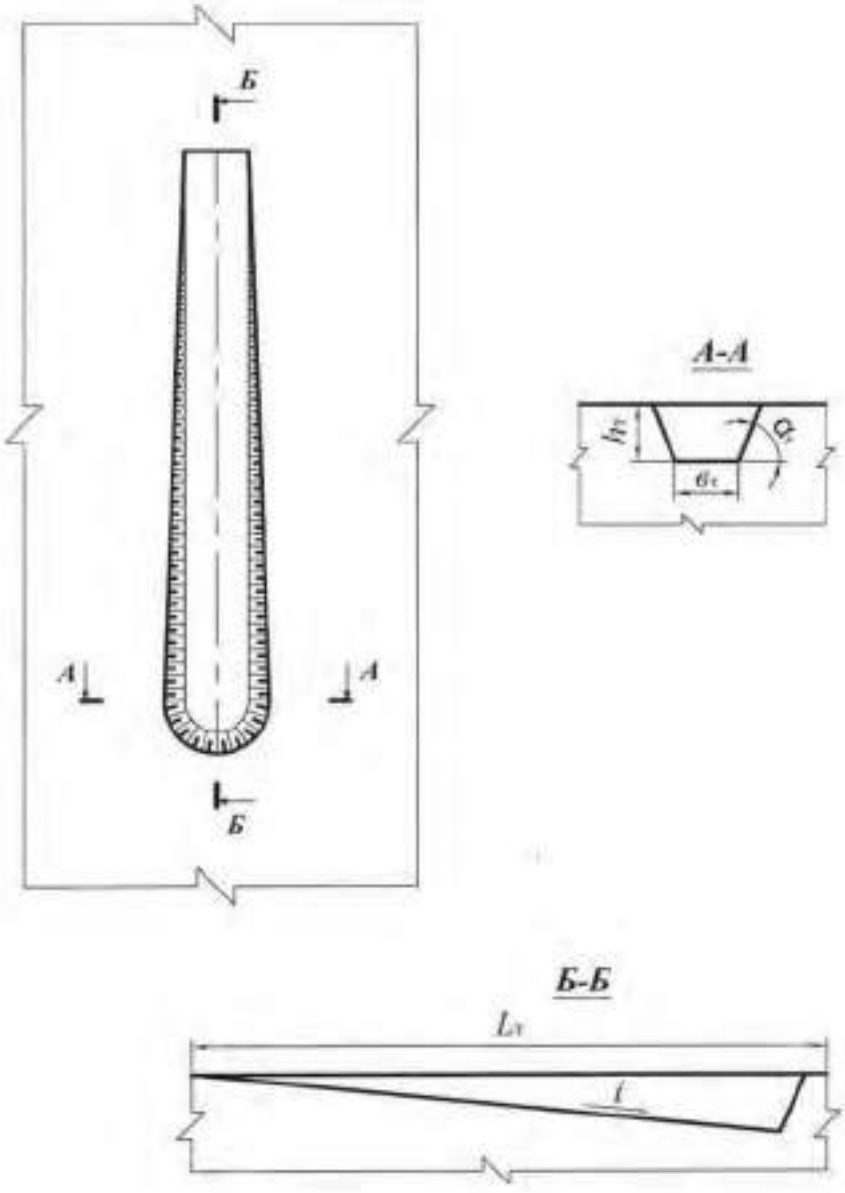


Рис. 2.1. Схема к расчету объема капитальной траншеи

Объем пирамиды V_2, (м^3) определяется

$$V_2 = \frac{h_т^3}{6i\,\mathrm{tg}\,\alpha_т}, \qquad (2.3)$$

где $\alpha_т$ – угол откоса борта траншеи, град.

После преобразования формулы (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) объем траншеи

$$V_т = \frac{h_т^2}{i}\left(\frac{b_т}{2} + \frac{h_т}{3\,\mathrm{tg}\,\alpha_т}\right). \qquad (2.4)$$

2.2.3. Исследовать зависимость объема капитальной траншеи от одного из определяющих факторов ($h_т$, $b_т$, i, $\alpha_т$) согласно заданию (прил. 2). Начертить график зависимости.

2.2.4. Вычертить графическое изображение плана и элементов капитальной траншеи в выбранном масштабе (аналогично рис. 2.1 и рис. 10.3 [1, с. 196].

Форма отчетности. По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы, все необходимые расчеты и их результаты, а также чертежи на миллиметровой бумаге.

Контрольные вопросы к практической работе № 2

1. Дайте определение траншеи.
2. Перечислите виды траншей по назначению.
3. Перечислите виды вскрывающих траншей.
4. Перечислите элементы траншеи.
5. Перечислите параметры разрезной траншеи.
6. Перечислите параметры вскрывающей траншеи
7. От каких факторов зависит ширина дна разрезной и вскрывающей траншеи? В каких пределах она изменяется?
8. Что такое уклон траншеи? От каких факторов он зависит и в каких пределах изменяется?
9. Перечислите способы проходки траншеи.
10. Какие сооружения располагаются во вскрывающей траншее?

Практическая работа № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА, РАЗМЕРОВ, ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И СРОКА СЛУЖБЫ КАРЬЕРА, ЗАПАСОВ ПОЛЕЗНОГО ИСКОПАЕМОГО И КОЭФФИЦИЕНТА ВСКРЫШИ

Цель работы – овладеть навыками простейших расчетов объема и размеров карьера, запасов полезного ископаемого и коэффициента вскрыши, производительности и срока службы карьера.

3.1. Задачи работы

3.1.1. Ознакомиться с методикой расчета объема и размеров карьера, запасов полезного ископаемого и среднего коэффициента вскрыши.

3.1.2. Выполнить расчет объема и размеров карьера, запасов полезного ископаемого и среднего коэффициента вскрыши по исходным данным.

3.1.3. Исследовать зависимость объема карьера от его глубины.

3.1.4. Выполнить простейшее графическое изображение плана и элементов объема карьера.

2.2. Порядок выполнения работы

3.2.1. По учебнику [1, с. 28 - 29; с. 316 - 317] ознакомиться с методикой расчета объема карьера, запасов полезного ископаемого и среднего коэффициента вскрыши.

3.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 3. По данным заданного варианта выполнить расчет объема и размеров карьера, запасов полезного ископаемого и среднего коэффициента вскрыши.

При равнинном рельефе поверхности и наклонном или крутом падении залежи объем карьера может быть определен как сумма отдельных геометрических фигур (рис. 3.1)

$$V_к = V_1 + V_2 + V_3, \qquad (3.1)$$

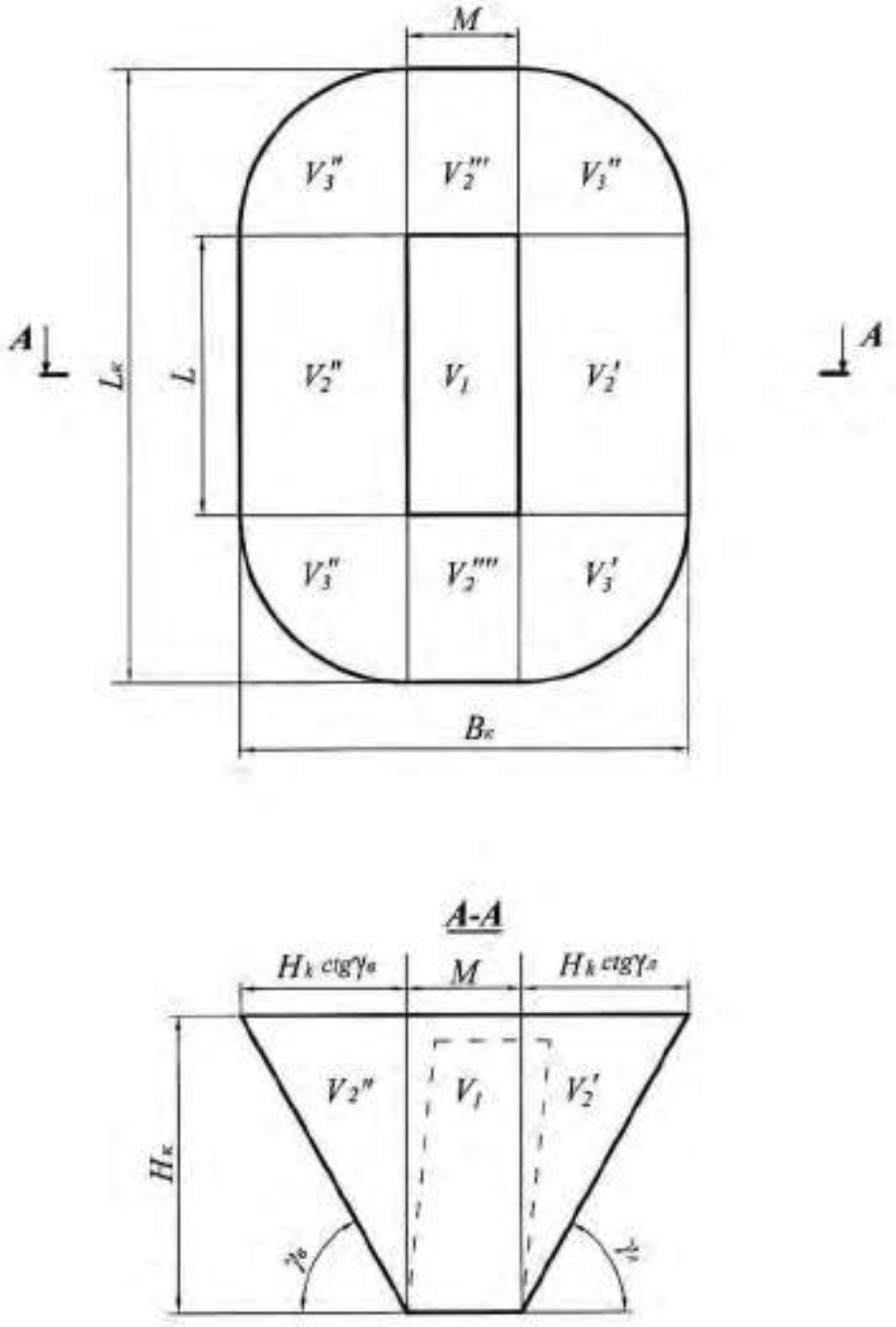


Рис. 3.1. Схема к расчету объема карьера

где $V_к$ – объем карьера, м^3;

V_1 – объем призмы с основанием $S = LM$, м^3;

S – площадь дна карьера, м^2;

L – длина залежи по простиранию, м;

M – горизонтальная мощность залежи, м.

$$V_1 = LMH_к, \tag{3.2}$$

где $H_к$ – глубина карьера. м;

V_2 – суммарный объем призм треугольного сечения, прилегающих с четырех сторон к объему V_1 (V_2' и V_2'' – вдоль длинных сторон карьера; V_2''' и V_2'''' – вдоль коротких сторон у торцов карьера), м^3;

$$V_2 = \frac{1}{2} PH^2{}_к \operatorname{ctg} \gamma_{ср}, \tag{3.3}$$

где P – периметр залежи (дна карьера), $P = 2(L - M)$ м;

V_3 – суммарный объем отдельных частей расчлененного конуса, располагающихся в угловых участках карьера(V_3', V_3'', V_3''' и V_3''''), м^3,

$$V_3 = \frac{\pi}{3} H_к^3 \operatorname{ctg}^2 \gamma_{ср}, \tag{3.4}$$

где $\gamma_{ср}$ – усредненный угол откоса нерабочих бортов карьера, град.

$$\gamma_{ср} = \frac{\gamma_в + \gamma_л}{2},$$

где $\gamma_в$ – угол откоса висячего нерабочего борта карьера, град;

$\gamma_л$ – угол откоса лежачего нерабочего борта карьера, град. (см. рис. 3.1).

Суммарный объем карьера, таким образом, определяется по формуле:

$$V_к = SH_к + \frac{1}{2} PH_к^2 \operatorname{ctg} \gamma_{ср} + \frac{\pi}{3} H_к^3 \operatorname{ctg}^2 \gamma_{ср}, \tag{3.5}$$

Длина карьера по верху ($L_к$, м)

$$L_к = L + 2H_к \operatorname{ctg} \gamma_{ср}. \tag{3.6}$$

Ширина карьера по верху ($B_к$, м)

$$B_к = M + 2H_к \operatorname{ctg} \gamma_{ср}. \tag{3.7}$$

Объем полезного ископаемого в контурах карьера ($V_{\text{п.и}}$, м^3)

$$V_{\text{п.и}} = S(H_{\text{к}} - h_{\text{н}}), \tag{3.8}$$

где $h_{\text{н}}$ – мощность наносов, м.

Промышленные (т. е. извлекаемые из недр) запасы полезного ископаемого в контурах карьера ($Q_{\text{п.и}}$, т)

$$Q_{\text{п.и}} = V_{\text{п.и}} \rho_{\text{п.и}} \eta_{\text{и}}, \tag{3.9}$$

где $\rho_{\text{п.и}}$ – объемная масса полезного ископаемого, т/м^3;

$\eta_{\text{и}}$ – коэффициент извлечения, учитывающий потери полезного ископаемого при разработке.

Объем породы в контурах карьера ($V_{\text{п}}$, м^3)

$$V_{\text{п}} = V_{\text{к}} - V_{\text{п.и}}. \tag{3.10}$$

Величина среднего коэффициента вскрыши (объем вынимаемой пустой породы, приходящийся на единицу добываемого полезного ископаемого) $k_{\text{ср}}$, м^3/т

$$k_{\text{ср}} = V_{\text{п}} / Q_{\text{п.и}}. \tag{3.11}$$

Производительность карьера по вскрыше ($П_{\text{в}}$, м^3/год) приблизительно устанавливается по среднему коэффициенту вскрыши

$$П_{\text{в}} = П_{\text{п.и}} k_{\text{ср}} k_{\text{н}}, \tag{3.12}$$

где $П_{\text{п.и}}$ – производительность карьера по полезному ископаемому, т/год (прил. 3);

$k_{\text{н}}$ – коэффициент неравномерности распределения вскрыши по годам ($k_{\text{н}}$ = 1,1÷1,3).

Производительность карьера по горной массе ($П_{\text{г.м}}$, м^3/год)

$$П_{\text{г.м}} = П_{\text{п.и}} \frac{1}{\rho_{\text{п.и}}} + П_{\text{в}}. \tag{3.13}$$

Суточная производительность карьера по полезному ископаемому ($П^{\text{с}}_{\text{п.и}}$, т/сут)

$$П^{с}_{п.и} = \frac{П_{п.и}}{T_{г}}, \qquad (3.14)$$

где $T_{г}$ – число рабочих дней карьера в год ($T_{г}$ = 350 дней).

Суточная производительность карьера по вскрыше ($П^{с}_{в}$, м^3/сут)

$$П^{с}_{в} = \frac{П_{в}}{T_{г}}. \qquad (3.15)$$

Сменная производительность карьера по добыче и вскрыше ($П^{см}_{п.и}$, т/смену; $П^{см}_{в}$, м^3/смену)

$$П^{см}_{пи} = \frac{П^{с}_{пи}}{n_{см}}, \qquad П^{см}_{в} = \frac{П^{с}_{в}}{n_{см}} \qquad (3.16)$$

где $n_{см}$ – число смен работы карьера в сутках (обычно 2-3 смены).

Срок службы карьера ($T_{сл}$, лет)

$$T_{сл} = T_{ос} + T_{э} + T_{з}, \qquad (3.17)$$

где $T_{ос}$ + $T_{з}$ – время на освоение и затухание мощности карьера по добыче (принимается 1,5 года);

$T_{э}$ – расчетный срок эксплуатации карьера, лет.

$$T_{э} = \frac{Q_{п.и}}{П_{п.и}}. \qquad (3.18)$$

3.2.3. Исследовать зависимость объема карьера от его глубины: построить график этой функции.

3.2.4. На миллиметровой бумаге вычертить карьер в выбранном масштабе в соответствии с заданными и полученными расчетными размерами (аналогично рис. 3.1).

Форма отчетности. По результатам занятия представляется отчет, содержащий исходную информацию, расчетные формулы, все необходимые расчеты и их результаты, а также чертеж карьера на миллиметровой бумаге и график зависимости $V_{к} = f(H_{к})$.

Контрольные вопросы к практической работе № 3

1. Перечислите размеры карьера. От чего они зависят?
2. Как различают производительность карьера (производительность по полезному ископаемому…)? В каких единицах она измеряется?
3. Что нужно знать для расчета годовой производительности карьера по горной массе?
4. Дайте классификацию запасов полезных ископаемых.
5. Дайте классификацию потерь полезного ископаемого.
6. Дайте определение коэффициента вскрыши. Как различаются коэффициенты вскрыши и в каких единицах они измеряются?

Практическая работа № 4

РАСЧЕТ ЗАРЯДА ОДИНОЧНОЙ СКВАЖИНЫ

Цель работы – изучить параметры и освоить принципы расчета скважинных зарядов.

4.1. Задачи работы

4.1.1. Изучить конструкции скважинных зарядов, параметры скважин, и их расположения на уступе.

4.1.2. Выполнить расчеты величины заряда одиночной скважины.

4.2. Порядок выполнения работы

4.2.1. По учебнику [1, с. 72 - 74] ознакомиться с параметрами скважин, и их расположения на уступе, конструкцией зарядов.

4.2.2. Ознакомиться с исходными данными в прил. 4. По данным заданного варианта выполнить расчет заряда одиночной скважины и параметров расположения скважин на уступе при однорядном расположении скважин.

Расчет выполняется в следующей последовательности:

4.2.2.1. По заданному диаметру шарошечного долота (прил. 4) определяется диаметр взрывных скважин ($d_с$, мм)

$$d_{\text{с}} = d_{\text{д}} k_{\text{разб}}, \tag{4.1}$$

где $d_{\text{д}}$ – диаметр долота, мм;

$k_{\text{разб}}$ – коэффициент разбуривания, принимаемый в зависимости от крепости пород (прил. 5).

4.2.2.2. Определяется длина перебура ($l_{\text{пер}}$, м)

$$l_{\text{пер}} = 11 d_{\text{с}}, \tag{4.2}$$

где $d_{\text{с}}$ – диаметр скважины, м.

4.2.2.3. Определяется длина скважины ($l_{\text{с}}$, м)

$$l_{\text{с}} = H_{\text{у}} + l_{\text{пер}}, \tag{4.3}$$

где $H_{\text{у}}$ – высота уступа, м.

4.2.2.4. Принимается (задается) тип взрывчатого вещества (ВВ) (прил. 4) и конструкция скважины (заряда) – сплошной вертикальный заряд (рис. 4.1).

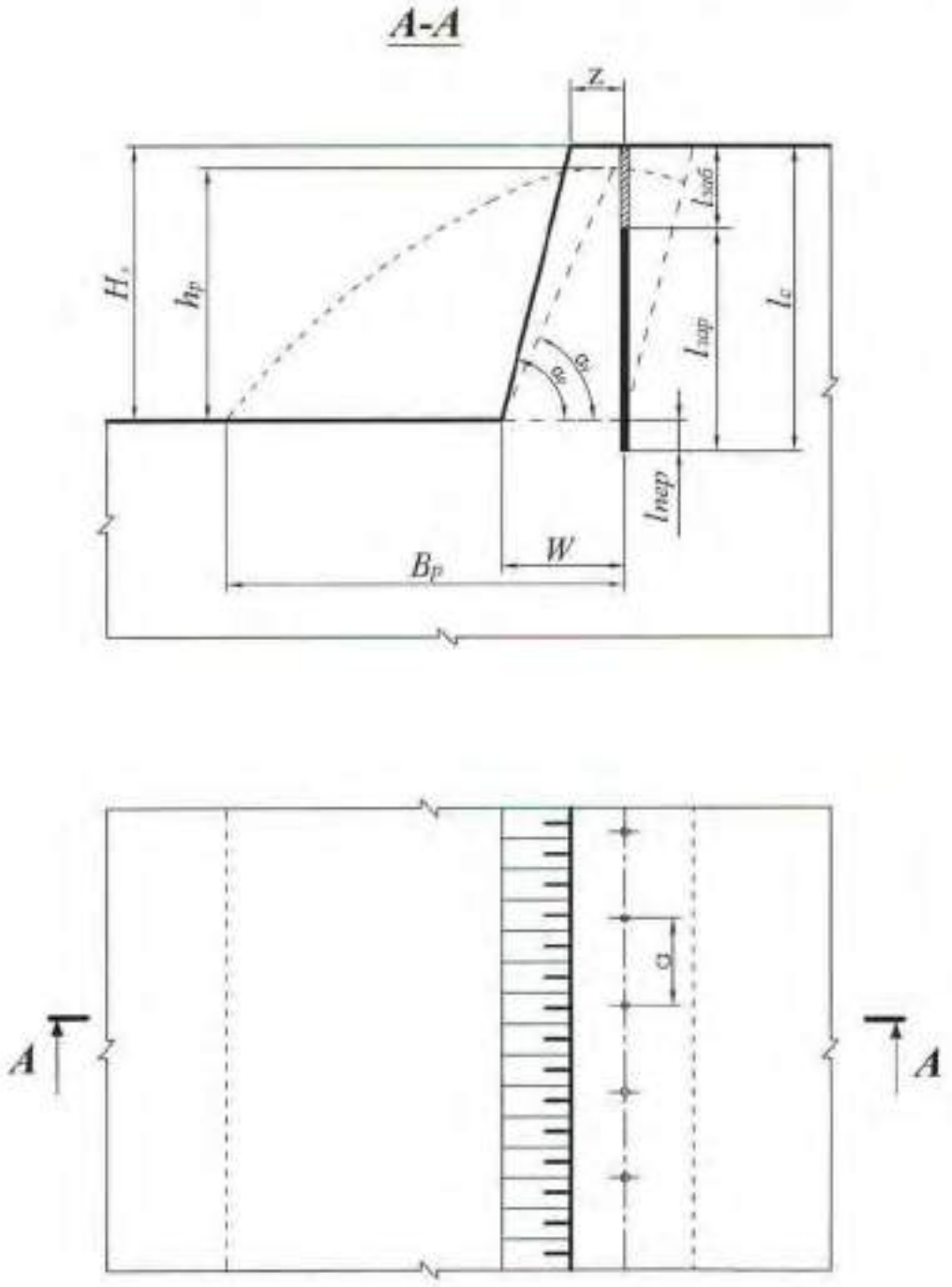


Рис. 4.1. Расположение скважин на уступе

4.2.2.5. Определяется длина забойки ($l_{заб}$, м)

$$l_{заб} = 0{,}27 l_с, \tag{4.4}$$

где $l_с$ – длина скважины, м.