Придать повседневной одежде защитные от отравляющих веществ свойства можно, пропитав ее раствором, который может быть приготовлен в домашних условиях. 2,5-3 л раствора, необходимого для пропитки одного комплекта одежды, можно получить если растворить 250-300 г измельченного хозяйственного мыла в 2-3 л горячей воды (60-70 ° С), добавить в раствор 0,5 л минерального (машинного) и другого масла и, подогревая,перемешивать раствор до получения однородной мыльно-масляной эмульсии. Одежду помещают в большую емкость (бак, ведро) и заливают раствором. Пропитанная одежда отжимается и просушивается (утюжке не подлежит).

В летную жаркую погоду необходимо соблюдать установленные сроки работы в защитной одежде. Зимой для предупреждения обмораживания следует надевать ее на ватник, использовать подшлемник, теплые портянки, в резиновые сапоги подкладывать теплые стельки, защитные перчатки одевать поверх обычных шерстяных или фланелевых. Обычно длительность пребывания людей в убежищах зависит от степени радиоактивного заражения местности. Если убежище находится в зоне заражения с уровнями радиации от 8 до 80 Р/ччерез один час после ядерного взрыва, то время пребывания в нем укрываемых людей составит от нескольких часов до одних суток (рис.8.7) .

Рис.8. 7. Ватно-марлевая повязка

В зоне заражения с уровнями радиации от 80 до 240 Р/ч нахождение людей в защитном сооружении увеличивается до 3 сут. В зоне заражения с уровнем радиации 240 Р/ч и выше это время составит 3 сут. и более. По истечении указанных сроков из убежищ (укрытий) можно перейти в жилые помещения. В течение последующих 1-4 сут. (в зависимости от уровней радиации в зонах заражения) из таких помещений можно периодически выходить наружу, но не более чем на 3-4 ч в сутки.

В условиях сухой и ветреной погоды, когда возможно пылеобразование, при выходе из помещений следует использовать СИЗОД. Чтобы благополучно пережить указанные сроки пребывания в убежищах, необходимо иметь запасы продуктов питания (не менее чем на 4 сут. (крупы, сахар и соль, галеты, сухари, консервы, макаронные изделия, мука, сухофрукты, шоколад, подсолнечное масло, мед, варенье. уксус, вода)), питьевой воды (из расчета 3 л на человека в сутки), а также предметы первой необходимости и медикаменты.

Если в результате ядерного взрыва убежище (укрытие) окажется поврежденным, принимают меры к быстрому выходу из него, надев СИЗОД. Если основным и ли запасным выходом воспользоваться невозможно, приступают к расчистке одного из заваленных выходов или к проделыванию выхода. После выхода из очага ядерного поражения (зоны радиоактивного заражения) необходимо провести частичную дезактивацию и санитарную обработку, т.е. удалить радиоактивную пыль. При частичной дезактивации следует осторожно снять одежду, ни в коем случае не снимая СИЗОД. Встав спиной к ветру, вытряхнуть ее, развесить одежду на перекладине или веревке и обмести с нее пыль сверху вниз с помощью щетки или веника. Одежду можно выколачивать и палкой.

После этого следует продезактивировать обувь: протереть тряпками и ветошью, смоченными водой, очистить веником или щеткой. Резиновую обувь можно мыть. Противогаз дезактивируют в особой последовательности. Фильтрующе-поглощающую коробку вынимают из сумки, сумку тщательно вытряхивают. Затем тампоном, смоченным мыльной воде, моющим раствором или жидкостью из противохимического пакета обрабатывают фильтрующе-поглощающую коробку, соединительную трубку и наружную поверхность шлема-маски (маски). Лишь после этого противогаз снимают.

Противопыльные тканевые маски при дезактивации тщательно вытряхивают, чистят щетками, при возможности полощут или стирают в воде. Зараженные ватно-марлевые повязки сжигают. При частичной санитарной обработке открытые участки тела: руки, лицо, шею, глаза обмывают незараженной водой. Нос, рот и горло полощут. Важно, чтобы при обмывке лица зараженная вода не попала в глаза, рот и нос. При недостатке воды обработку проводят путем многократного протирания участков тела тампонами из марли (ваты, пакли, ветоши), смоченными незараженной водой. Протирание следует проводить сверху вниз. каждый раз переворачивая тампон чистой стороной. Зимой может использоваться незараженный снег.

Летом санитарную обработку можно организовать в реке или другом проточном водоеме. Частичная дезактивация и санитарная обработка, проводимые в одноразовом порядке, не всегда гарантируют полное удаление радиоактивной пыли. Потому после их проведения обязательно проводится дозиметрический контроль. Если заражение одежды и тела окажется выше допустимой нормы, частичные дезактивацию и санитарную обработку повторяют. В необходимых случаях проводится полная санитарная обработка. Своевременно проведенные частичные дезактивация и санитарная обработка могут полностью предотвратить или сильно снизить степень поражения людей радиоактивными веществами.

Если люди во время ядерного взрыва находятся вне убежища укрытия, следует использовать естественные ближайшие укрытия (рис.10). Если таких укрытий нет, надо повернуться к взрыву спиной, лечь на землю лицом вниз, руки спрятать под себя. Через 15-20 с. после взрыва, когда пройдет ударная волна, следует встать и немедленно надеть противогаз, респиратор или какое-либо другое СИЗОД. В случае отсутствия специальных средств следует закрыть рот и нос платком, шарфом или плотным материалом.

Задача состоит в том, чтобы исключить попадание внутрь организма радиоактивных веществ. Их поражающее действие бывает значительным в течение длительного времени, поскольку выведение их из организма происходит медленно. Далее необходимо стряхнуть осевшую на одежду и обувь пыль, надеть имеющиеся средства защиты кожи.

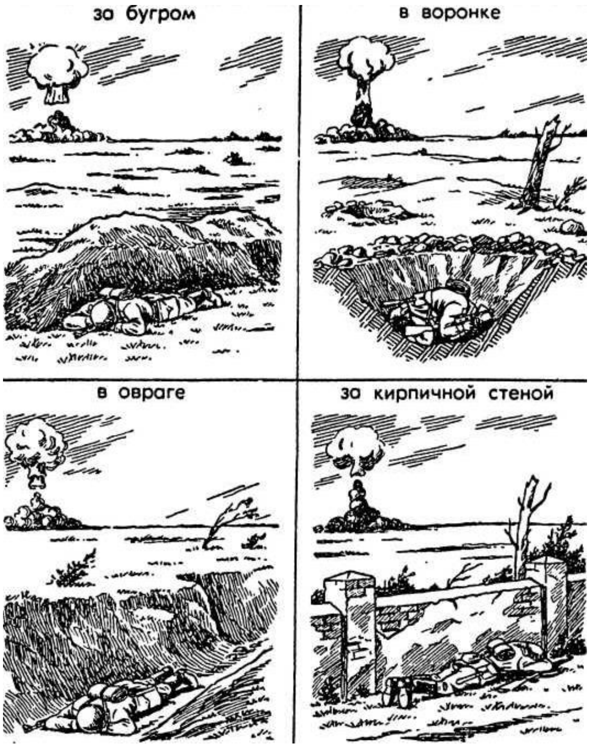


Рис 8.8 Естественные укрытия при внезапном ядерном взрыве

Для этого можно использовать имеющиеся одежду и обувь. Затем следует побыстрее покинуть очаг поражения или укрыться в ближайшем защитном сооружении.

Оставаться на зараженной радиоактивными веществами местности вне убежищ (укрытий), несмотря на использование средств индивидуальной защиты, опасно. Это сопряжено с возможностью облучения и, как следствие, развития лучевой болезни. В целях уменьшения возможности поражения радиоактивными веществами в зонах заражения запрещается принимать пищу, пить и курить. Приготовление пиши должно вестись на незараженной местности или, в крайнем случае, на местности, где уровень радиации не превышает 1 Р/ч. При выходе из очага поражения необходимо учитывать, что в результате ядерных взрывов разрушаются здания, сети коммунального хозяйства. При этом отдельные элементы зданий могут обрушиться через некоторое время после взрыва. Продвигаться надо посередине улицы, стараясь возможно быстрее попасть в безопасное место. Нельзя трогать электропровода. Направление движения из очага поражения следует выбирать, ориентируясь на знаки ограждения, расставленные разведкой гражданской обороны. Они ведут всторону снижения уровней радиации. Двигаясь по зараженной территории, надо стараться не поднимать пыли, обходить лужи, не создавать брызг.

В результате применения химического оружия возникают очаги химического поражения-территории, в пределах которой в результате воздействия химического оружия произошли массовые поражения людей и сельскохозяйственных животных. Размеры очага зависят от масштаба и способа применения БТХВ (боевые токсичные химические вещества - это химические соединения, которые способны поражать людей и животных на больших площадях, проникать в различные сооружения, заражать местность и водоемы), его типа метеорологических условий, рельефа местности. Особенно опасны стойкие БТХВ нервнопаралитического действия. Их пары распространяются по ветру на довольно большое расстояние (15-25 км и более). Поэтому люди и животные могут быть поражены ими не только в районе применения химических боеприпасов, но и далеко за его пределами. Длительность поражающего действия БТХВ тем меньше, чем сильнее ветер и восходящие потоки воздуха. В лесах, парках, оврагах, на узких улицах они сохраняются дольше, чем на открытой местности. Современные отравляющие вещества обладают чрезвычайно высокой токсичностью.

При обнаружении признаков применения противником отравляющих веществ, далее ОВ (по сигналу «Химическая тревога») надо срочно надеть противогаз, а в случае необходимости - средства защиты кожи. Если поблизости имеется убежище, нужно укрыться в нем. Перед тем как войти в убежище, следует снять использованные средства защиты кожи и верхнюю одежду и оставить их в тамбуре убежища. Эта мера предосторожности исключает занос ОВ в убежище. Противогаз снимают после входа в убежище.

При пользовании укрытием, например, подвалом, не следует забывать, что оно м служить защитой лишь от попадания на кожные покровы и одежду капельножидких ОВ. Однако оно не защищает от паров или аэрозолей отравляющих веществ, находящихся в воздухе. Находясь в таких укрытиях, при наружном заражении обязательно надо воспользоваться противогазом. Находиться в убежище (укрытии) следует до получения распоряжения на выход из него. Когда такое распоряжение поступит, необходимо надеть требуемые средства индивидуальной защиты - противогазы и средства защиты кожи и выйти за пределы очага поражения по направлениям, обозначенным специальными указателями. Если нет ни указателей, ни постов, то двигаться следует перпендикулярно направлению ветра.

На зараженной ОВ территории надо двигаться быстро, но не пыль (брызги). Нельзя прислоняться к зданиям и прикасаться к окружающим предметам. Не следует наступать на видимые капли и мазки ОВ. На зараженной территории запрещается снимать противогазы и другие средства защиты. Особо осторожно нужно двигаться через парки, сады, огороды и поля. На листьях и ветках растений могут находиться осевшие капли ОВ, при прикосновении к ним можно заразить одежду и обувь, что может привести к поражению.

По возможности следует избегать движения оврагами и лощинами, через луга и болота, в этих местах возможен длительный застой паров ОВ. В городах пары ОВ могут застаиваться в замкнутых кварталах, парках, а также в подъездах и на чердаках домов. Зараженное облако в городе распространяется на наибольшие расстояния по улицам,тоннелям, трубопроводам.

ОВ на кожных покровах, одежде, обуви или средствах индивидуальной защиты необходимо немедленно снять их тампонами из марли или ваты; если таких тампонов нет, капли ОВ можно снять тампонами из бумаги или ветоши. Пораженные места следует обработать раствором из противохимического пакета или тщательно промыть теплой водой с мылом. После выхода из очага химического поражения немедленно проводится полная санитарная обработка. Если это невозможно, проводятся частичные дегазация и санитарная обработка.

Очагом биологического поражения считаются территорииподвергшиеся непосредственному воздействию бактериальных (биологических) средств, создающих источник распространения инфекционных заболеваний. Заражение людей и животных происходит в результате вдыхания зараженного воздуха, попадания микробов или токсинов на слизистую оболочку и поврежденную кожу, употребления в пищу зараженных продуктов питания и воды.

Причиной заражения могут быть укусы зараженных насекомых и клещей, соприкосновения с зараженными предметами, ранения осколками боеприпасов, снаряженных БС (биологические средства поражения - общее название болезнетворных микроорганизмов и продуктов их жизнедеятельности, предназначенных для использования в системах биологического оружия с целью поражения людей, животных и растений). Заражение возможно также в результате непосредственного общения с больными людьми (животными). Ряд заболеваний быстро передается от больных людей к здоровым и вызывает эпидемии (чума, холера, тиф, грипп и др.). К основным средствам защиты населения от биологического оружия относятся вакциносывороточные препараты, антибиотики, сульфамидные и другие лекарственные вещества, используемые для специальной и экстренной профилактики инфекционных болезней.

Употребимы такие средства индивидуальной и коллективной защиты. Своевременное и правильное применение средств индивидуальной защиты и защитных сооружений предохранит от попадания БС в органы дыхания, на кожные покровы и одежду. Необходимо строгое соблюдение правил личной гигиены и санитарно-гигиенических требований к питанию и водоснабжению населения. Приготовление и прием питии должны исключать возможность ее заражения бактериальными средствами. Посуду необходимо мыть дезинфицирующими растворами или обрабатывать кипячением. В случае применения противником биологического оружия возможно возникновение значительного количества инфекционных заболеваний.

Основными формами борьбы с эпидемиями являются обсервация и карантин. Делается это в тех случаях, когда примененные возбудители болезней относятся к особо опасным (чума, холера и др.). Карантинный режим предусматривает полную изоляцию очага поражения от окружающего населения. Это наиболее эффективный способ противодействия распространению инфекционных заболеваний. На внешних границах зоны карантина устанавливается вооруженная охрана, выход людей, вывод животных и вывоз имущества запрещаются. Транзитный проезд транспорта через очаги поражения запрещается. Объекты экономики переходят на особый режим работы со строгим выполнением противоэпидемических требований. Рабочие смены разбиваются на отдельные группы как можно более малочисленные по составу. Контакт между ними сокращается до минимума. Питание и отдых рабочих и служащих организуются по группам в специально отведенных для этого помещениях. Работа учебных заведений, зрелищных учреждений, рынков и т.д. прекращается. Людям не разрешается без крайней необходимости выходить их своих квартир. Продукты питания, вода и предметы первой необходимости доставляются им специальными командами.

При выполнении срочных работ вне зданий люди должны быть обязательно в средствах индивидуальной защиты. Если установленный вид возбудителя не относится к группе особо опасных, вместо карантина применяется обсервация. Она предусматривает медицинское наблюдение за очагом поражения и проведение необходимых лечебно-профилактических мероприятий. Изоляционно-ограничительные меры при обсервации менее строгие: организуются дезинфекция, дезинсекция и дератизация.

Дезинфекция имеет целью обеззараживание объектов внешней среды, которые необходимы для нормальной деятельности и безопасного нахождения людей. Для дезинфекции применяются растворы хлорной извести и хлорамина, лизол, формалин, могут использоваться горячая вода (с мылом или содой) и пар.

Дезинсекция и дератизация-это мероприятия, связанные соответственно с уничтожением насекомых и истреблением грызунов, которые являются переносчиками инфекционных заболеваний. Для уничтожения насекомых применяют физические (кипячение, проглаживание накаленным утюгом и др.), химические (применение дезинсектирующих средств) и комбинированные способы.

Истребление грызунов в большинстве случаев проводят с помощью механических приспособлений (ловушек различных типов) и химических препаратов. После проведения дезинфекции, дезинсекции и дератизации проводится полная санитарная обработка лиц, принимавших участие в осуществлении названных мероприятий. При необходимости организуется санитарная обработка и остального населения.

Контрольные вопросы

1. Перечислите СИЗОД.
2. Перечислите СИЗ кожи.
3. Назовите порядок изготовления ВМП.
4. При каких опасностях используются индивидуальные средства защиты?
5. Что является основным средством защиты при угрозе применения ядерного оружия?
6. Что относится к основным средством защиты населения от биологического оружия?
7. Какие индивидуальные средства защиты применяются при химической угрозе?
8. Какие действия предполагает санитарная обработка?
9. В чем отличие дезинфекции от дезинсекции?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Косолапова Н.В. Основы безопасности жизнедеятельности: учебник / Н.В. Косолапова, Н.А. Прокопенко. – 3-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013. – 320 с.: ил.

2. Безопасности жизнедеятельности: учебник / Е.А. Арустамов. – 9-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013 с.: ис.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург
2020

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен 1 вариант контрольной работы.

Содержание контрольной работы

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращением, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность

		В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.

		Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) ровной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма
21	Систематические и грамотно	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений

	организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимость управлять динамикой работоспособности занимающихся. В) выделение частей в уроке требует Министерство образовании России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышение частоты шагов. 6. Прыжки. 7.Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4 В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4 Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2,1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2,3,1,4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4,2 ,3, 1

27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6.Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленом суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное

		действие Г) предпочтения учителя
42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине
ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа ________

Преподаватель: Петров Петр Петрович

Екатеринбург
2018

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург
2020

Содержание

Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

Требования к оформлению теста

Задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в тесте.

Выполненный тест необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если тест выполнен без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен, тест, вопросы для проведения опроса.

Содержание теста

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращением, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений

		Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения. Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем

		физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) ровной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма
21	Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма

	как	Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимость управлять динамикой работоспособности занимающихся. В) выделение частей в уроке требует Министерство образовании России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышение частоты шагов. 6. Прыжки. 7.Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4 В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4 Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2,1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2,3,1,4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4,2 ,3, 1
27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы

		Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	продолжительный бег. 3. Прыжковые упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6.Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленом суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное действие Г) предпочтения учителя

42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Критерии оценивания теста

Оценка за тест определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат теста

Тест оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПРОСА

1. Определение понятий в области физической культуры
2. Понятие «здоровье» и основные его компоненты
3. Факторы, определяющие здоровье человека.
4. Образ жизни и его составляющие.
5. Разумное чередование труда и отдыха, как компонент ЗОЖ.
6. Рациональное питание и ЗОЖ.
7. Отказ от вредных привычек и соблюдение правил личной и общественной гигиены.
8. Двигательная активность — как компонент ЗОЖ.
9. Выполнение мероприятий по закаливанию организма.
10. Физическое самовоспитание и самосовершенствование как необходимое условие реализации мероприятий ЗОЖ.
11. Врачебный контроль как обязательная процедура для занимающихся физической культурой.
12. Самоконтроль — необходимая форма контроля человека за физическим состоянием.
13. Методика самоконтроля физического развития.
14. Самостоятельное измерение артериального давления и частоты сердечных сокращений.
15. Проведение функциональных проб для оценки деятельности сердечно-сосудистой системы.
16. Проведение функциональных проб для оценки деятельности дыхательной системы.
17. Самоконтроль уровня развития физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости, силы и выносливости
18. Ведение дневника самоконтроля.
19. Цель и задачи физического воспитания в вузе.
20. Специфические функции физической культуры.
21. Социальная роль и значение спорта.
22. Этапы становления физической культуры личности студента.
23. Понятия физическая культура, физическое воспитание, физическое развитие, физическое совершенство.
24. Реабилитационная физическая культура, виды, краткая характеристика.

25. Разделы учебной программы дисциплины «Физическая культура».
26. Комплектование учебных отделений студентов для организации и проведения занятий по физическому воспитанию.
27. Преимущества спортивно-ориентированной программы дисциплины «Физическая культура» для студентов.
28. Особенности комплектования студентов с различным характером заболеваний в специальном учебном отделении.
29. Зачетные требования по учебной дисциплине «Физическая культура».
30. Формирование двигательного навыка.
31. Устойчивость организма к воздействию неблагоприятных факторов.
32. Мотивация и направленность самостоятельных занятий.
33. Утренняя гигиеническая гимнастика.
34. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
35. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
36. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
37. Особенности самостоятельных занятий женщин.
38. Мотивация и направленность самостоятельных занятий. Утренняя гигиеническая гимнастика.
39. Физические упражнения в течение учебного дня: физкультминутки, физкультпаузы.
40. Самостоятельные тренировочные занятия: структура, требования к организации и проведению.
41. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
42. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
43. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
44. Особенности самостоятельных занятий женщин.
45. Роль физической культуры в профессиональной деятельности бакалавра и специалиста.
46. Производственная физическая культура, ее цели и задачи.
47. Методические основы производственной физической культуры.
48. Производственная физическая культура в рабочее время.
49. Физическая культура и спорт в свободное время.
50. Профилактика профессиональных заболеваний и травматизма средствами физической культуры.
51. Понятие ППФП, её цель, задачи. Прикладные знания, умения и навыки.
52. Прикладные психические качества.
53. Прикладные специальные качества.
54. Факторы, определяющие содержание ППФП: формы труда, условия труда.
55. Факторы, определяющие содержание ППФП: характер труда, режим труда и отдыха.
56. Дополнительные факторы, определяющие содержание ППФП.
57. Средства ППФП.
58. Организация и формы ППФП в вузе.
59. Понятия общей и специальной физической подготовки.
60. Отличия понятий спортивная подготовка и спортивная тренировка.
61. Стороны подготовки спортсмена.
62. Средства спортивной подготовки.
63. Структура отдельного тренировочного занятия.
64. Роль подготовительной части занятия в тренировочном процессе.
65. Понятие «физическая нагрузка», эффект ее воздействия на организм.
66. Внешние признаки утомления.
67. Виды и параметры физических нагрузок.
68. Интенсивность физических нагрузок.
69. Психофизиологическая характеристика умственной деятельности.
70. Работоспособность: понятие, факторы, периоды
71. Физические упражнения в течение учебного дня для поддержания работоспособности.
72. Бег как самое эффективное средство восстановления и повышения работоспособности.
73. Плавание и работоспособность.
74. Методические принципы физического воспитания, сущность и значение.
75. Принципы сознательности и активности, наглядности в процессе физического воспитания.
76. Принципы доступности и индивидуализации, систематичности и динамичности.
77. Средства физической культуры.
78. Общепедагогические методы физического воспитания.
79. Методы обучения технике двигательного действия.
80. Этапы обучения двигательного действия.
81. Методы развития физических качеств: равномерный, повторный, интервальный.
82. Метод круговой тренировки, игровой и соревновательный методы.
83. Сила как физическое качество, общая характеристика силовых упражнений.
84. Методы развития силы.
85. Выносливость — виды выносливости, особенности развития выносливости.
86. Развитие физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости.

87. Понятие «спорт». Его принципиальное отличие от других видов занятий физическими упражнениями.
88. Массовый спорт: понятие, цель, задачи.
89. Спорт высших достижений: понятие, цель, задачи.
90. Студенческий спорт, его организационные особенности.
91. Студенческие спортивные соревнования.
92. Студенческие спортивные организации.
93. Всероссийский физкультурно-спортивный комплекс «ГТО» (Готов к труду и обороне).

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенного теста необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данного теста. Тесты, тесты являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург
2020

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.
Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Элективные курсы по физической культуре и спорту» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «элективные курсы по физической культуре и спорту» представлено 2 варианта контрольной работы.

Содержание контрольной работы

Вопросы для групповой дискуссии

1 .Что можно отнести к средствам физического воспитания?
2. Влияние климатогеографического фактора на здоровье и работоспособность человека
3. Чем отличается спорт от физической культуры?
4. Что мы относим к материальным ценностям физической культуры, а что – к духовным?
5. В чем состоит взаимосвязь физической и умственной деятельности человека?
6. Причины возникновения таких явлений как гипокинезия и гиподинамия
7. Для чего нужна адаптивная физическая культура?
8. При выборе вида спорта на какие аспекты и характеристики необходимо обратить основное внимание.

Контрольная работа №1

Вариант 1
ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. Часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности – это:

а) физическая культура; б) спорт; в) туризм; г) физическое развитие.

2. Физическое воспитание – это:

а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) приобщение человека к физической культуре;
в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;

г) процесс формирования определенных физических и психических качеств.

3. Чем спорт отличается от физической культуры:

а) наличием специального оборудования; б) присутствием зрителей; в) наличием соревновательного момента; г) большой физической нагрузкой.

4 Какой из ниже перечисленных принципов не относится к основным принципам физического воспитания:

а) сознательности и активности; б) наглядности; в) последовательности;
г) систематичности;

5 Под физическим развитием понимается:

а) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни;
б) размеры мускулатуры, форма тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность;
в) процесс совершенствования физических качеств, при выполнении физических упражнений;
г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

а) естественное состояние организма без болезней и недомоганий;
б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
г) все перечисленное.

2. Состояние здоровья обусловлено:

а) резервными возможностями организма; б) образом жизни;
в) уровнем здравоохранения; г) отсутствием болезней.

3. Что не относятся к внешним факторам, влияющим на человека:

а) природные факторы; б) факторы социальной среды; в) генетические факторы;
г) биологические факторы.

4. Сколько времени необходимо нормальному человеку для ночного сна:

а) 5 – 6 часов; б) 6 – 7 часов; в) 7 – 8 часов; г) 8 – 9 часов.

5. К активному отдыху относится:

а) сон; б) отдых сидя; в) занятия двигательной деятельностью; г) умственная деятельность.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическими упражнениями называются:

а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;
б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Занятия физическими упражнениями отличаются от трудовых действий:

а) интенсивностью; б) задачами; в) местом проведения; г) все ответы верны.

3. Физические упражнения являются:

а) принципом физического воспитания; б) методом физического воспитания;
в) средством физического воспитания; г) функцией физического воспитания.

4. Что не относится к методам физического воспитания:

а) игровой; б) регламентированного упражнения; в) словесный и сенсорный;
г) самостоятельный.

5. Метод в физической культуре – это

а) основное положение, определяющее содержание учебного процесса по физической культуре;
б) руководящее положение, раскрывающее принципы физической культуры;
в) конкретная причина, заставляющая человека выполнять физические упражнения;
г) способ применения физических упражнений.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Физическая подготовка – это:

а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
г) процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

2. К основным физическим качествам относятся:

а) рост, вес, объем бицепсов, становая сила; б) бег, прыжки, метания, лазания;
в) сила, выносливость, быстрота, ловкость, гибкость; г) взрывная сила, прыгучесть, меткость.

3. Различают гибкость:

а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
г) простую и сложную.

4. Какие виды спорта развивают преимущественно выносливость:

а) спортивные единоборства; б) циклические; в) спортивные игры; г) ациклические.

5. Скоростно-силовые качества преимущественно развиваются:

а) в тяжелой атлетике; б) в акробатике; в) в конькобежном спорте; г) в лыжном спорте.

Вариант 2
ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. На что преимущественно влияют занятия по физической культуре:

а) на интеллектуальные способности;
б) на удовлетворение социальных потребностей;
в) на воспитание лидерских качеств;
г) на полноценное физическое развитие.

2. Физическая культура – это:

а) часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности;
б) часть наука о природе двигательной деятельности человека
в) вид воспитательного процесса, специфика которого заключена в обучении двигательным актам и управлением развитием и совершенствованием физических качеств человека;
г) процесс физического образования и воспитания, выражающий высокую степень развития индивидуальных физических способностей.

3. Что не относиться к компонентам физической культуры:

а) физическое развитие; б) спорт высших достижений; в) оздоровительно-реабилитационная физическая культура;
г) гигиеническая физическая культура.

4. Выбрать правильное определение термина «Физическое развитие»:

а) физическое развитие – это педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) физическое развитие – это приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
в) физическое развитие – это биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
г) физическое развитие – это процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

5. Теоретический материал учебного предмета «Физическая культура и спорт» в высших учебных заведениях включает в себя:

а) фундаментальные знания общетеоретического характера;
б) инструктивно-методические знания;
в) знания о правилах выполнения двигательных действий;
г) все вышеперечисленное.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Что понимается под закаливанием:

а) купание в холодной воде и хождение босиком;
б) приспособление организма к воздействиям внешней среды;
в) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми;
г) укрепление здоровья.

2. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

а) естественное состояние организма без болезней и недомоганий;
б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
г) все перечисленное.

3. Какое понятие не относится к двигательной активности человека:

а) гипоксия; б) гиподинамия; в) гипокинезия; г) гипердинамия.

4. Какая из перечисленных функций не относится к функции кожи:

а) защита внутренней среды организма; б) теплорегуляция; в) выделение из организма продуктов обмена веществ;
г) звукоизоляция.

5. Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому что:

а) обеспечивает ритмичность работы организма;

б) позволяет правильно планировать дела в течение дня;
в) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня;
г) позволяет избегать неоправданных физических напряжений.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическое упражнение - это:

а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;
б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Положительное влияние физических упражнений на развитие функциональных возможностей организма будет зависеть:

а) от технической и физической подготовленности занимающихся;
б) от особенностей реакций систем организма в ответ на выполняемые упражнения;
г) от состояния здоровья и самочувствия занимающихся во время выполнения упражнений;
г) от величины физической нагрузки и степени напряжения в работе определенных мышечных групп.

3. Что не относиться к средствам физического воспитания:

а) физические упражнения;
б) подвижные игры;
в) соревнования;
в) спортивные игры.

4. Что относится к методическим принципам физического воспитания:

а) сознательность и активность;
б) наглядность и доступность;
в) систематичность и динамичность;
г) все вышеперечисленное.

5. Регулярные занятия физическими упражнениями способствует повышению работоспособности, потому что:

а) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости;
б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации;
в) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения;
г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнять больший объем физической работы за отведенный отрезок времени.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Степень владения техникой действий, при которой повышена концентрация внимания на составные операции (части), наблюдается нестабильное решение двигательной задачи – это

а) двигательное умение; в) массовый спорт; в) двигательный навык;
г) спорт высших достижений.

2. Для воспитания быстроты используются:

а) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции;
б) подвижные и спортивные игры;
в) упражнения на быстроту реакции и частоту движений;
г) двигательные упражнения, выполняемые с максимальной скоростью.

3. Различают два вида выносливости:

а) абсолютная и относительная; б) общая и специальная; в) активная и пассивная;
г) динамическую и статическую.

4. Процесс воспитания физических качеств, обеспечивающих преимущественное развитие тех двигательных способностей, которые необходимы для конкретной спортивной дисциплины - это

а) общая физическая подготовка; б) двигательное умение; в) специальная физическая подготовка; г) двигательный навык.

5. Различают силу:

а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
г) статическую и динамическую.

Контрольная работа №2

Вариант 1

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1. В комплекс утренней гимнастики следует включать:

а) упражнения с отягощением; б) упражнения статического характера;
в) упражнения на гибкость и дыхательные упражнения; г) упражнения на выносливость.
2. К объективным показателям самоконтроля относится:
а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.
3. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает:
а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.
4. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять:
а) после приема пищи; б) после сна натощак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1. Регулярные занятия доступным видом спорта, участия в соревнованиях с целью укрепления здоровья, коррекции физического развития и телосложения, активного отдыха, достижение физического совершенствования – это:

а) спорт высших достижений;
б) лечебная физическая культура;
в) профессионально-прикладная физическая культура;
в) массовый спорт.

2. Какой вид спорта наиболее эффективно развивает гибкость и ловкость:

а) фехтование;
б) баскетбол;
в) фигурное катание;
г) художественная гимнастика.

3. Количество игроков одной команды в волейболе на площадке:

а) 7; б) 6; в) 5; г) 8.

4. Как осуществляется контроль за влиянием физических нагрузок на организм во время занятий физическими упражнениями:

а) по частоте дыхания;
б) по частоте сердечно-сосудистых сокращений;
в) по объему выполненной работы.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Степень владения техникой действия, при которой управление движением происходит автоматически, и действия отличаются надежностью – это:

а) двигательное умение;
б) массовый спорт;
в) двигательный навык;
г) спорт высших достижений.

2. Как дозируются упражнения на гибкость:

а) до появления пота;
б) до снижения амплитуды движений;
в) по 12-16 циклов движений;
г) до появления болевых ощущений.

3. При воспитании силы применяются специальные упражнения с отягощениями. Их отличительная особенность заключается в том, что:

а) в качестве отягощения используется собственный вес человека;
б) они выполняются до утомления;
в) они вызывают значительное напряжение мышц;
г) они выполняются медленно.

4. В каком из перечисленных видов спорта преимущественно развивается выносливость:

а) в фигурном катании;
б) в пауэрлифтинге;
в) в художественной гимнастике;
г) в лыжном спорте.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:

а) обеспечивают усиленную работу мышц;
б) обеспечивают выполнение большого объема мышечной работы с разной интенсивностью;
в) обеспечивают усиленную работу систем дыхания и кровообращения;
г) обеспечивают усиленную работу системы энергообеспечения.

2. Меры профилактики переутомления:

а) посидеть 3-4 минуты;
б) сменить вид деятельности;
в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;
г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

3. При нагрузке средней интенсивности частота пульса достигает:

а) 100 – 130 уд/мин;
б) 130 – 150 уд/мин;
в) 150 – 170 уд/мин;
г) более 170 уд/мин

4. Что называется «разминкой», проводимой в подготовительной части занятия:

а) чередование легких и трудных общеразвивающих упражнений;
б) чередование беговых и общеразвивающих упражнений;
в) подготовка организма к предстоящей работе;
г) чередование беговых упражнений и ходьбы.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

Специально направленное и избирательное использование средств физической культуры и спорта для подготовки человека к определенной профессиональной деятельности – это:
а) спорт высших достижений;
б) лечебная физическая культура;
в) производственная физическая культура;
г) массовый спорт.

1. ППФП строится на основе и в единстве с:

а) физической подготовкой; б) технической подготовкой; в) тактической подготовкой;
г) психологической подготовкой.

3. Какая из нижеперечисленных задач не является задачей ППФП:

а) развитие физических способностей, специфических для данной профессии;
б) формирование профессионально-прикладных сенсорных умений и навыков;
в) сообщение специальных знаний для успешного освоения практических навыков трудовой деятельности;
г) повышение функциональной устойчивости организма к неблагоприятному воздействию факторов окружающей среды.

4. Что не является формой занятий по ППФП:

а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия.

Вариант 2

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1. Определение повседневных изменений в подготовке занимающихся – это:

а) педагогический поэтапный контроль;
б) педагогический текущий контроль;
в) педагогический оперативный контроль;
г) педагогический двигательный контроль.

1. В комплекс утренней гимнастики не рекомендуется включать:

а) упражнения на гибкость;
б) дыхательные упражнения;
в) упражнения с отягощением;
г) упражнения для всех групп мышц.

2. Самостоятельные тренировочные занятия не рекомендуется выполнять:

а) за час до приема пищи;
б) после сна натощак;
в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда;
г) за 3 часа до отхода ко сну.

4. Дневник самоконтроля нужен для:

а) коррекции содержания и методики занятий физическими упражнениями;
б) контроля родителей;
в) лично спортсмену;
г) лично тренеру.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1. К циклическим видам спорта не относится:

а) волейбол;
б) стайерский бег;
в) плавание;

г) спортивная ходьба.

2. Какой из перечисленных видов спорта преимущественно развивает координацию движений:

а) спортивная гимнастика;
б) лыжный спорт;
в) триатлон;
г) атлетическая гимнастика.

3. Систематическая плановая многолетняя подготовка и участие в соревнованиях в избранном виде спорта с целью достижения максимальных спортивных результатов – это:

а) спорт высших достижений;
б) лечебная физическая культура;
в) профессионально-прикладная физическая культура;
в) массовый спорт.

4. Какие упражнения включаются в разминку почти во всех видах спорта:

а) упражнения на развитие выносливости;
б) упражнения на развитие гибкости и координации движений;
в) бег и общеразвивающие упражнения.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Какая из представленных способностей не относится к группе координационных:

а) способность сохранять равновесие;
б) способность точно дозировать величину мышечных усилий;
в) способность быстро реагировать на стартовый сигнал;
г) способность точно воспроизводить движения в пространстве.

2. Почему на занятиях по «физической культуре» выделяют подготовительную, основную и заключительную части:

а) так удобнее распределять различные по характеру упражнения;
б) выделение частей занятий связано с необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся;
в) выделение частей в занятии требует Министерство науки и образования;
г) перед занятием, как правило, ставятся 3 задачи, и каждая часть предназначена для них.

3. Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:

а) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий;
б) степень преодолеваемых при их выполнении трудностей;
в) утомлением, возникающим в результате их выполнения;
г) частотой сердечных сокращений.

4. Назовите количество игроков на волейбольной площадке:

а) 4; б) 5; в) 6; г) 7.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. К объективным показателям самоконтроля относится:

а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.

2. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает:

а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.

3. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять:

а) после приема пищи; б) после сна натощак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.

4. Меры профилактики переутомления:

а) посидеть 3-4 минуты;
б) сменить вид деятельности;
в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;
г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

1. Система методически обоснованных физических упражнений, физкультурно-оздоровительных и спортивных мероприятий, направленных на повышение и сохранение устойчивой и профессиональной дееспособности – это:

а) физкультурная пауза;
б) производственная физическая культура;
в) спорт высших достижений;
г) массовый спорт.

2. Профессионально-прикладная физическая подготовка - это

а) специализированный вид физического воспитания, осуществляемый в соответствии с особенностями и требованиями данной профессии;
б) система профессиональных мероприятий, осуществляемая в соответствии с особенностями данной профессии;

в) процесс формирования специализированных знаний, умений и навыков;
г) целенаправленное воздействие на развитие физических качеств человека посредством нормированных нагрузок.
3. Какой вид спорта наиболее эффективно развивает координационные способности монтажников-высотников:
а) фехтование; б) баскетбол; в) мото-спорт; г) гимнастика.
4. Что не является формой занятий по ППФП:
а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия.

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 40 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

20-40 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-19 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа ________

Преподаватель: Петров Петр Петрович

Екатеринбург
2018

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ РУССКИЙ ЯЗЫК *И* ДЕЛОВЫЕ КОММУНИКАЦИИ

Специальность
21.05.03. Технология геологической разведки

Специализация
Сейсморазведка

формы обучения: очная, заочная

Автор: Меленскова Е. С., канд. филол. наук, доц.

Екатеринбург
2020

Методические рекомендации к практическим занятиям

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе лекций, ознакомления с учебной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют более качественному усвоению знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы.

Приступая к подготовке к практическому занятию необходимо изучить соответствующие конспекты лекций по заданной теме, главы учебников или учебных пособий, разобрать примеры, ознакомиться с дополнительной литературой (например, словарями). Конспектирование дополнительных источников также способствует более плодотворному усвоению учебного материала. Следует обращать внимание на основные понятия и классификации, актуальные для темы практического занятия.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студента. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения и проследить их логику. Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Все это находит свое отражение в процессе выполнения итогового зачетного теста.

Очевидны три структурные части практического занятия: предваряющая (подготовка к занятию), непосредственно само практического занятия (обсуждение вопросов темы в группе, выполнение упражнений по теме) и завершающая часть (последующая работа студентов по устранению обнаружившихся пробелов). Не только само практическое занятие, но и предваряющая, и заключающая части его являются необходимыми звеньями целостной системы усвоения вынесенной на обсуждение темы.

Перед очередным практическим занятием целесообразно выполнить все задания, предназначенные для самостоятельного рассмотрения, изучить лекцию, соответствующую теме практического занятия. В процессе подготовки к практическому занятию закрепляются и уточняются уже известные и осваиваются новые знания. Столкнувшись в ходе подготовки с недостаточно понятными моментами темы, необходимо найти ответы самостоятельно или зафиксировать свои вопросы для постановки и уяснения их на самом практическом занятии.

В начале занятия следует задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, поскольку всегда сначала студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

В ходе практического занятия каждый должен опираться на свои конспекты, сделанные на лекции или по учебникам и учебным пособиям, на самостоятельно выполненные упражнения по данной теме.

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь/

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе прослушивания и запоминания лекционного материала, ознакомления с учебной и научной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют получению наиболее качественных знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы. Планы практических занятий состоят из отдельных тем, расположенных в соответствии с рабочей программой изучаемой дисциплины. Каждая тема включает следующие элементы:

- цель проведения занятия;
- теоретические вопросы, необходимые для усвоения темы;
- задания;
- список литературы по теме для подготовки к практическому занятию.

Работа на практических занятиях направлена на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемой дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений (например, аналитических).

В ходе занятий у студентов формируются практические умения и навыки, отраженный в РУП.

Методические материалы к практическим занятиям

ТЕМА 1. СЛОВАРИ И СПРАВОЧНИКИ ПО КУЛЬТУРЕ РЕЧИ. СИСТЕМА СЛОВАРНЫХ ПОМЕТ

Цель – вспомнить классификацию словарей и проверить у студентов умение работать с ними (лексикографическая грамотность).

Основные понятия темы:

Лексикография – раздел науки о языке, занимающийся теорией и практикой составления словарей.
Энциклопедический словарь – книга, содержащая описание научных понятий и терминов, исторических событий, характеристику персоналий из разных областей или определенной области знания.
Лингвистический словарь – книга, содержащая собрание слов (морфем, фразеологизмов и т. д.), расположенных по определённому принципу (как правило, по алфавиту), и дающая сведения об их значениях, употреблении, происхождении, переводе на другой язык и т. п.
Словарная статья – отдельный текст, посвященный языковой единице (слову, морфеме и т. п.) или их группе (лексической группе, гнезду слов и т. п.).
Помета – применяемое в словарях сокращенное указание на какие-либо характерные признаки слова или его употребления.

Задание 1. *Прочитайте и сравните словарные статьи, взятые из разных словарей. Найдите общую и различающую их дополнительную информацию. Объясните, чем вызвано различие.*

ФАЗА – **1.** В геохимии: совокупность однородных частей системы, одинаковых по термодинамическим свойствам (тем, которые не зависят от количества вещества) и отграниченных от других частей поверхностью раздела. В природных процессах минералообразования могут принимать участие газовая Ф., жидкие Ф. и твердые Ф. – металлы. Системы, состоящие из одной Ф., называются однофазными, или гомогенными (напр., раствор различных солей в воде; кристалл кварца без включений; мономинеральная горная порода); состоящие из нескольких Ф. – многофазными, или гетерогенными (напр., раствор вместе с твердым осадком; кристалл кварца с газово-жидким включением; полиминеральная порода). **2.** В исторической геологии: термин, иногда употребляющийся для обозначения времени, соответствующего длительности накопления отложений, составляющих зону как часть яруса. Термин был условно принят в этом значении VIII сессией МГК в Париже в 1900 г., но не стал общепринятым. При изучении четвертичного периода иногда фазой называют время каждого отдельного оледенения и промежутков между ними (*Геологический толковый словарь*[1]).

ФА́ЗА, -ы, *ж.* [нем. Phase < греч. phasis появление (о небесных светилах)]. **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н., а также само положение, форма чего-н. в данный момент; то же, что фазис. *Новая ф. в развитии общества. Луна в первой фазе.* **2.** *физ.* Величина, характеризующая состояние какого-н. процесса в каждый момент времени. *Ф.*

---

[1] Геологический толковый словарь [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.edudic.ru/geo/

колебания маятника. Газообразная ф. вещества. **Фа́зовый** – относящийся к фазе (в 1-м и 2-м знач.), фазам. **3.** *эл.* Отдельная группа обмоток генератора. **Фа́зный** – относящийся к фазе, фазам. (Крысин Л. П. Толковый словарь иноязычных слов. М., 2001. С. 810).

ФА́ЗА, -ы, *ж.* **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н. (напр. положения планеты, формы или состояния вещества, периодического явления, общественного процесса), а также само положение, форма в этот момент (книжн.). *Первая ф. Луны. Жидкая ф. Газообразная ф. Ф. колебания маятника. Вступить в новую ф. развития.* **2.** Отдельная группа обмоток генератора (спец.). || *прил.* **фа́зовый**, -ая, -ое (к 1 знач.) *и* **фа́зный**, -ая, -ое (ко 2 знач.). ♦ **Фазовые глаголы** – в лингвистике: глаголы со значением начала, продолжения или окончания действия. (Ожегов С. И. и Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка. М., 2005. С. 847).

Задание 2. *Познакомьтесь с типами помет, используемых в толковых словарях. Объясните значение всех помет, приведенных в качестве примера.*

ТИПЫ ПОМЕТ ТОЛКОВОГО СЛОВАРЯ

Типы помет	Примеры помет	Значение отсутствия помет
1. Помета, указывающая на принадлежность к функциональному стилю	*науч., газет., публиц., оф.-дел., разг., книжн.* и др.	Слово межстилевое
2. Помета, указывающая на сферу употребления слова	*обл., прост., жарг., спец.* и др.	Слово общеупотребительное
3. Помета, указывающая на принадлежность к активному / пассивному запасу	*устар., ист., арх., нов.* и др.	Слово принадлежит к активному запасу
4. Помета, указывающая на эмоционально-экспрессивную окраску слова	*ласк., ирон., шутл., унич., бран., пренебр., высок., неодобр.* и др.	Слово нейтральное

Задание 3. *Прочитайте словарные статьи, извлеченные из толкового словаря современного русского языка. Укажите пометы и объясните, что они означают.*

Абориге́н, -а, *м.* (книжн.) – коренной житель страны, местности. || *ж.* **абориге́нка** (разг.)

Грамоте́й, -я, *м.* (устар. и ирон.) – грамотный человек.

Деяние, -я, *ср.* (высок. и спец.) – действие, поступок, свершение.

Жена́тик, -а, *м.* (прост. шутл.) – женатый человек (обычно о молодожене).

Иждиве́нчество, -а, *ср.* (неодобр.) – стремление во всем рассчитывать не на свои силы, а на помощь других, вообще жить за чужой счет.

Карапу́з, -а, *м.* (разг. шутл.) – толстый, пухлый малыш.

Кляча, -и, *ж.* (разг. пренебр.) – плохая (обычно старая) лошадь.

Ле́нчик, -а, *м.* (спец.) – деревянная основа седла.

Мате́рщина, -ы, *ж., собират.* (прост. груб.) – неприличная брань.

Ми́шка, -и, *м.* (разг. ласк.) – то же, что медведь.

Небезызве́стный, -ая, -ое; -тен, -тна (обычно ирон.) – достаточно, хорошо известный.

Неулыба, -ы, *м.* и *ж.* (обл. и прост.) – человек, который редко улыбается, неулыбчив.

Новоде́л, -а, *м.* (разг.) – здание, сооружение, построенное на месте уничтоженного, исчезнувшего и воспроизводящее его прежний внешний вид.

Нувори́ш, -а, *м.* (книжн. презр.) – богач, наживший свое состояние на социальных переменах или бедствиях, на разорении других.

Общепи́т, -а, *м.* (офиц.) – сокращение: общественное питание – отрасль народного хозяйства, занимающаяся производством и продажей готовой пищи и полуфабрикатов. ‖ *прил.* **общепи́товский**, -ая, -ое (разг.).

Остоло́п, -а, *м.* (прост. бран.) – глупец, болван.

Отчи́зна, -ы, *ж.* (высок.) – отечество, родина.

Побо́ры, -ов. **1.** Чрезмерные, непосильные налоги или сборы (устар.). **2.** *перен.* Неофициальные сборы средств на что-нибудь (разг. неодобр.).

Предуве́домить, -млю, -мишь; -мленный; *сов.*, *кого-что* (устар. и офиц.) – заранее уведомить.

Риста́лище, -а, *ср.* (стар.) – площадь для гимнастических, конных и других состязаний, а также само такое состязание.

Сва́ра, -ы, *ж.* (прост.) – шумная перебранка, ссора.

Торга́ш, -а, *м.* **1.** То же, что торговец (устар. неодобр.). **2.** *перен.* Человек, который выше всего ставит свою выгоду, корысть, личный интерес (презр.).

Умка, -и, *м.* (обл.) – белый медведь.

Упова́ние, -а, *ср.* (книжн., часто ирон.) – то же, что надежда.

Ха́м, -а, *м.* (презр. и бран.) – грубый, наглый человек.

Задание 4. *Познакомьтесь с пометами, используемыми в орфоэпических словарях, словарях грамматических трудностей и т. п. Какие пометы указывают на императивную норму, а какие на диспозитивную? Запишите их в предложенную ниже таблицу.*

НОРМАТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОВ[2]

Словарь является не просто нормативным, а ставит своей задачей показать литературную норму во всем многообразии ее проявлений. В отличие от большинства нормативных словарей, словарь отражает и такие факты речи, которые считаются неверными с точки зрения литературной нормы. Все запретительные пометы, которые характеризуют неверные варианты, снабжаются значком «восклицательный знак» (!). В Словаре используются ясные и общедоступные способы нормативной оценки вариантов.

1. Равноправные варианты соединяются союзом *и*:

ба́рхатка *и* бархо́тка;

ведёрцев *и* ведёрец.

При этом на первом месте помещается обычно традиционный вариант, более частотный в употреблении.

2. Помета «допустимо» (*и доп.*) свидетельствует о том, что оба варианта соответствуют нормам литературного языка. Естественно, что предпочтителен вариант, помещённый на первом месте. Такая помета используется, как правило, применительно к новым, входящим в норму вариантам ударения, произношения и грамматическим формам. Например:

бредо́вый *и доп.* бредово́й;

[2] Орфоэпический словарь русского языка для школьников / Сост. О. А. Михайлова. Екатеринбург: У-Фактория, 2002. С. 6-8.

белёсый *и доп.* беле́сый;
ма́шет *и доп.* маха́ет.

3. Помета «допустимо устаревшее» (*доп. устар.*) означает, что второй вариант, хотя и находится в пределах литературной нормы, всё реже встречается в речевой практике, постепенно утрачивается, переходя в пассивный языковой фонд. Например:
ворва́лся *и доп. устар.* ворвался́
вспе́ненный, -ая, -ое, *кратк. ф.* вспе́нен, вспе́нена *и доп. устар.* вспенённый, вспенён, вспенена́
бу́до[чн]ик *и доп. устар.* бу́до[шн]ик.

4. Помета «не рекомендуется» (*не рек.*) применяется в тех случаях, когда отмеченный ею вариант в данное время не признаётся нормативным. Однако его широкое употребление в современной речи и соответствие общим тенденциям языкового развития не исключают возможности признания этого варианта литературной нормой в будущем. Например:
бало́ванный ! *не рек.* ба́лованный;
вручи́т ! *не рек.* вру́чит;
гри́фели, -ей ! *не рек.* грифеля́, -е́й.

5. Помета «не рекомендуется устаревшее» (*не рек. устар.*) означает, что снабжённый ею вариант, ныне находящийся за пределами нормы, представляет собой бывшую норму. Например:
горшо́чек, горшо́чка ! *не рек. устар.* горше́чек;
да́рит ! *не рек. устар.* дари́т.

6. Помета «неправильно» (*неправ.*) служит для предупреждения распространённых речевых ошибок. Например:
вы́боры, вы́боров ! неправ. выбора́, выборо́в;
компромети́ровать, -рую, -рует ! неправ. компроме[н]ти́ровать

Рекомендательные пометы	Запретительные пометы

ТЕМА 2. ОРФОГРАФИЧЕСКИЕ И ПУНКТУАЦИОННЫЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила орфографии и пунктуации русского языка.
Основные понятия темы:

Орфографические нормы – это правила написания слов.
Пунктуационные нормы – это правила расстановки знаков препинания.

Задание 1. *Повторите правописание гласных (безударных и чередующихся) и согласных в корне слова. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы. Расставьте знаки препинания. Объясните свой выбор.*

Я р…шил в…рнуться д…мой. Быстрыми шагами я прошел зар…сли кустов. У моих ног т…нулась р…внина а дальше ст…ной возвышался мрачный лес. Я осм…трел окрес…ность и спустился с х…лма. Высокая тр…ва на дне д…лины б…лела р…вной скат…ртью. Я вышел на опушку и пошел полем. Трудно было проб…раться по у…кой тр…пинке. Кругом р…сла высокая ро…ь. Н…чная птица промчалась и к…снулась меня св…им крылом. В т…шине глухо разд…вались мои шаги. Но вот на в…чернем небе стали заж…гаться звезды. Забл…стел серп м…л…дого мес…ца. Теперь я узнал д…рогу и предпол…гал что через час буду дома.

Задание 2. *Повторите правописание приставок. Перепишите предложения, вставив пропущенные буквы. Расставьте недостающие знаки препинания при однородных членах предложения.*

Перед самым селом п…р…езжаем речку вброд. На спуске перед церковью ра…ливается море сарафанов мужицких голосов. Народ все пр…бывает мужики в пиджаках ребятишки со свистульками, на ра…пряженных телегах сидят пр…старелые пр…езжие. Над колокольнями белеют верхи палаток, а над ними – облака, и падают вьются стрелами свищут в воздухе стрижи.

Медленно пр…бираясь в ра(с, сс)тупившейся толпе, по…ъезжаем к ограде пр…вязываем лошадей. На дощатом пр…лавке ра…ложены картинки и книги, и мещанин-пр…давец по…совывает календари и книги с з…манчивыми названиями. Всё смех и ржанье лошадей крик бабы, ругающей мужика, (с, з)ливается в один ярмарочный гул. За время работы ярмарки хочется успеть (с, з)делать многое пр…смотреть липового меда п…дешевле п…торговаться в свое удовольствие пр…купить гостинцев родным.

В обед негаданно с…бирается туча, и дождь, по…нимая пыль, барабанит по усыпанной по…солнечной шелухой дороге. Но летний дождь быстро пр…ходит, и яркая радуга, упершись в реку, широким полотенцем ра…кидывается над ярмаркой. С ярмарки народ ра…ъезжается только после обеда. (По И. Соколову-Микитову)

Задание 3. *Повторите правописание Ъ и Ь (учтите разные функции Ь). Перепишите, вставив, где необходимо, пропущенные буквы.*

Пред…юбилейное мероприятие, обжеч…ся огнем, решил удалит…ся проч…, кофе был горяч…, достан…те багаж…, чувствовать гореч… неудач…, выть по-волч…и, любител…ская кинос…емка, должность камен…щика, выйти замуж… осен…ю, береч… здоров…е, сроч…ный заказ, лечить кон…юнктивит, уловить фал…ш… в голосе, трех…этажный павил…он, заменить мед…ю, назнач…те время трех встреч…, с…еш… во время лан…ча, следить за своей реч…ю, купает…ся в реке, оформиш… пен…сию, остав…те антиквару старинную брош…, четырех…ядерный процессор, волосы до плеч…, сер…езный компан…он, умнож…те полученный резул…тат, он хорош… собой, выявить из…ян, декабр…ские морозы, с…агитировать на выборы, коротко стрич…ся, сверх…естественный об…ект, боиш…ся ос…минога, неб…ющаяся вещ…, об…емный текст п…есы, не забуд…те плащ…, невтерпеж… ждать, раз…яренный бык, разрабатывать кар…ер.

Задание 4. *Повторите правописание Н и НН в причастиях, прилагательных и образованных от них формах. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и расставив недостающие знаки препинания при причастных оборотах. Причастные обороты подчеркните.*

Было нестерпимо холодн…о, и даже не верилось, что днем придется жариться в раскален…ом пекле. Среди потрескавшихся от зноя пород обнаруживаются словно бы отполирован…ые плиты гранита. В этом заброшен…ом неповторимом уголке необозримой пустыни существование человека – никогда не прекращающееся сражение с природой. Палатки кочевников соседствуют с домами сложен…ыми из обожжен…ого кирпича.

Снаружи жилище покрывает сетка сплетен…ая из жесткой травы. Узор наносится и на пленку, которой палатка скрепляется изнутри.

Все палатки украшен…ы под цвет камен…ых глыб. Комнаты соединен…ы переходами из плетен…ых циновок. Все разложен…о аккуратн…о, повсюду чистота. Сбоку вышел мужчина в незаменимом традицион…ом облачении. На нем накидка казавшаяся накрахмален…ой. Бросался в глаза и меч повеш…н…ый к поясу.

Геолог подходит к карте разукрашен…ой цветными пометками. Все, что нанесен…о на нее, – плод трудн…ых поисков в горах прокален…ых солнцем. Новые месторождения открывают разведчики недр. (По Б. Фетисову)

Задание 5. *Повторите правописание НЕ и НИ с разными частями речи. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки.*

Нет (н…)чего лучше Невского проспекта, по крайней мере в Петербурге. Чем (н…)блестит эта улица – красавица нашей столицы! Я знаю, что (н…)один из бедных чиновных ее жителей (н…)променяет на все блага Невского проспекта. Да и кому же он (н…)приятнен? Здесь единствен…ое место, где показываются люди (н…)по(н…)обходимости, куда загнала их надобность и меркантильный интерес, об…емлющий весь Петербург. Здесь житель Петербургской или Выборгской части, (н…)сколько лет (н…)бывавший у своего приятеля в Песках или у Московской заставы, может быть уверен, что встретится с ним (н…)пр…мен…о.

Можно сказать решительно, что в это время, то есть до двенадцати часов, Невский проспект (н…)составляет (н…)(для)кого цели, он служит только средством: он постепен…о заполняется лицами, имеющими свои занятия, свои заботы, свои досады, но вовсе (н…)думающими о нем. В это время, что бы вы на себя (н…)надели, хотя бы даже вместо шляпы был картуз у вас на голове, хотя воротнички слишком высунулись из вашего галстука, – (н…)кто этого (н…)заметит. (по Н. В. Гоголю)

Задание 6. *Повторите правописание наречий и частиц. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки. Вставьте недостающие знаки при деепричастных оборотах. Деепричастия подпишите.*

Лето выдалось знойное и сокрушило все. Земля иссохла, прокалилась до того, что ящерицы (не)боясь (ни)кого прибегали на порог с отчаянно колотящимися глотками, лиш…(бы) куда(нибудь) спрятаться. А коршуны забирались (в)высь и (на)долго умолкали в горящем мареве.

И ребят непоседливых сморила (не)померная жара. Они прятались от нее под стенами домов выглядывая (из)редк… (от)туда на проходящие мимо них пассажирские и товарные поезда. Когда у разъезда составы сбавляли ход, детям казалось, что уж… этот(то) поезд притормозит и остановится. Они бежали за ним (в)догонку заслоняясь ручонками от солнца и (по)детски наивно надеясь укатить из пекла.

Тяжко было смотреть, с какой завистью и печалью малыши глядели (в)след уходящим в неизвестность, (на)стеж… раскрытым вагонам. Пассажиры выглядывали из открытых окон, то(же) сходили с ума от духоты и мечтали о том, что(бы) (на)утро очутиться там, где прохладные реки и зеленые леса. Вряд(ли) они задумывались о том, что жара может задержаться… (По Ч. Айтматову)

Задание 7. *Повторите правила постановки знаков препинания в сложных предложениях. Перепишите предложения, расставив знаки препинания. Обратите особое внимание на пунктуацию при однородных и обособленных членах предложения. Подчеркните грамматические основы.*

1. Сначала соседи смеялись между собою над высокомерием Троекурова и каждый день ожидали чтоб незваные гости посетили Покровское где было им чем поживиться но наконец принуждены были с ним согласиться и сознаться что и разбойники оказывали ему непонятное уважение. (А. С. Пушкин)
2. Раза три в год Финский залив и покрывающее его серое небо нарядятся в голубой цвет и млеют любуясь друг другом и северный человек едучи из Петербурга в Петергоф не насмотрится на редкое чудо млеет в непривычном зное и все заликует дерево цветок и животное. (И. А. Гончаров)
3. Я писал вам как мы гонимые бурным ветром дрожа от холода пробежали мимо берегов Европы как в первый раз пал на нас у подошвы гор Мадейры ласковый луч солнца и заплескали голубые волны засияли синие небеса как мы жадно бросились к берегу погреться горячим дыханием земли. (И. А. Гончаров)
4. Иногда бывает что облака в беспорядке толпятся на горизонте а солнце прячась за них красит их и небо во всевозможные цвета в багряный оранжевый золотой лиловый грязно-розовый. (А. П. Чехов)
5. Направо темнели холмы налево все небо было запито багровым заревом и трудно было понять был ли то пожар или же собиралась всходить луна. (А. П. Чехов)
6. Живя здесь я реже попадался на глаза отцу и его гостям и мне казалось что если я живу не в настоящей комнате и не каждый день хожу в дом то слова отца что я сижу у него на шее звучат уже как будто не так обидно. (А. П. Чехов)
7. Он пел и от каждого звука его голоса веяло чем-то родным и необозримо широким словно знакомая степь раскрывалась перед нами уходя в бесконечную даль. (И. С. Тургенев)
8. Большая низкая лампа с непрозрачным абажуром стоящая на письменном столе горела ясно но освещала только поверхность стола да часть потолка образуя на нем дрожащее круглое пятно света в остальной комнате все было в полумраке в нем можно было разглядеть только шкаф с книгами большой диван еще кое-какую мебель. (В. Гаршин)
9. Куда ни обращаешь взор всюду как будто встречаешь быстро удаляющийся образ лета которое время от времени оборачивается назад и бросает прощальную меланхолически-задумчивую улыбку. (Д. Григорович)
10. А на него посмотришь и кажется что вся эта земная деятельность для него только лишь забава и ею занят он пока а настоящие его заботы где-то впереди куда порою устремлялись его бойкие но как бы неживые оловянного блеска глаза. (Ф. Сологуб)
11. На седом фоне тумана ближайшие сосны однотонно плоско и неясно вырисовываются своими прямыми и голыми стволами и в их неподвижности среди этой голубой тишины и среди этого холодного тумана чувствуется что-то суровое печальное и покорное. (А. И. Куприн)

ТЕМА 3. АКЦЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить характеристику русского языка, составить собственный акцентологический словарь при выполнении упражнений[3].

Основные понятия темы:

Акцентологические нормы – это правила постановки ударения в слове. **Омонимы** – слова, у которых от постановки ударения зависит значение.

Задание 1. *Расставьте ударения в следующих словах. Укажите варианты постановки ударения (например, <u>ста́ртер</u> и <u>стартёр</u>):*

1) Асимметрия, блага, кулинария, столяр, добыча, плато, диоптрия, творог, средства, шофер, туфля, эксперт, кремень, страховщик, нефтепровод, маркетинг, шасси, христианин, рассредоточение, досуг, жалюзи, танцовщица, шарфы, торты, искра, бармен, вероисповедание, квартал, симметрия, диспансер, обеспечение, склады, таможня, щебень, баржа, алкоголь, индустрия, приговор, генезис, договор, свекла, бижутерия, каталог, ходатайство, километр, пережитое, хвоя, полиграфия, ортопедия, пиццерия, стюард, овен, упрочение (*имена существительные*).

2) Асбестовый, совестливый, мизерный, оптовый, мастерски, украинский, втридорога, важно, тотчас, просмотровый, завидно, правы, давнишний, стары, одновременный, красивее, красивейший, равны, семестровый, счастливо, досыта, иначе, поутру, начерно, зубчатый (*имена прилагательные и наречия*).

3) Аранжировать, заржаветь, нормировать, убыстрить, заплесневеть, новорожденный, опошлить, баловать, балованный, расклешенный, дарит, включишь, включенный, копировать, повторишь, понял, звонит, закупорить, начался, начатый, положить, положил, вручит, врученный, доложишь, облегчить, осведомиться, премировать, черпать, ободрить, пломбировать, вогнутый, вскружит, буксировать, скрещенный, разрыхлить, плодоносить, наклоненный, окислить (*глагольные формы*).

Задание 2. *Поясните, как зависит значение от постановки ударения в следующих словах (омонимах):*

Глазки, замок, рожки, выкупать, ирис, характерный, полки, хлопок, мука, вычитать, орган, видение, острота, трусить, свойство, гвоздики, бронировать, кредит, угольный, правило, провидение, полнить, лавровый, электрик.

Например: <u>пла́чу</u> (1 лицо ед. число от глагола «плакать») – <u>плачу́</u> (1 лицо ед. число от глагола «платить»).

Задание 3. *Прочитайте предложения, обращая внимание на постановку ударения в подчёркнутых словах. Составьте по аналогии свои предложения, использовав любые слова из* ***задания 1*** *и / или* ***2***.

1. В последнем <u>квартале</u> этого года <u>эксперты</u> одной из фирм заключили выгодный <u>договор</u> на прокладку <u>газопровода</u>**,** за что были <u>премированы</u>. 2. Для <u>обеспечения</u> здорового образа жизни исключите из своего рациона <u>арахис</u>, <u>торты</u> и <u>алкоголь</u>, а включите в него <u>творог</u>, <u>свеклу</u> и <u>щавель</u>. 3. В мебельном отделе нашего торгового центра вы можете приобрести <u>красивейшие</u> <u>кухонные</u> гарнитуры по <u>оптовым</u> ценам.

[3] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей при постановке ударения.

ТЕМА 4. ОРФОЭПИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить правила транскрибирования слов, выявить основные трудности в плане произношения, составить собственный орфоэпический словарь при выполнении упражнений[4].

Основные понятия темы:

Орфоэпические нормы – это правила произношения слов. **Транскрипция** – графическая запись того, как произносится слово (всегда в квадратных скобках).

Задание 1. *Отметьте правильное произношение сочетания ЧН в следующих словах. Распределите слова на три группы:*

[шн]	**[шн]** и **[чн]**	**[чн]**

1) Шуточный, копеечный, отличник, девичник, будничный, булочная, очечник, полуночник, нарочно, прачечная, скучно, скворечник, горчичник, Фоминична, яичница, достаточно, порядочный, горничная, Никитична, двоечник, пустячный, Ильинична, конечно, спичечный, подсвечник, Кузьминична.

2) Шапочный мастер – шапочное знакомство, сердечные капли – друг сердечный, подаренная перечница – чертова перечница.

Задание 2. *Отметьте правильное произношение согласного перед Е в следующих словах. Распределите слова на три группы:*

Твёрдое произношение	**Варианты**	**Мягкое произношение**

Автосервис, дефис, агрессия, дендрарий, бухгалтер, депрессия, гарем, термин, шинель, термос, патент, сессия, тенденция, рейд, газель, дезодорант, фанера, Одесса, академия, бизнесмен, деградация, менеджер, музей, деканат, темперамент, тезис, аксессуары, протекция, бандероль, гипотеза, детектив, кредо, бассейн, экспресс, дедукция, декада, темп, терапевт, дефицит, интервал, дебаты, рельсы, ниппель, компетентный, дезинформация, пресса, цистерна, стратегия, тренинг, сенсорный, сейф, портмоне.

Задание 3. *Прочитайте слова, обращая внимание на произношение ударного звука, обозначенного буквой Е:*

1) Острие, поблекший, афера, хребет, оседлый, одноименный, маневренный, опека, жернов, желчь, блеклый, желоб, безнадежный, бытие, повлекший, жердочка, никчемный, гладкошерстный, гашеный, недоуменный.

2) Именительный падеж – падеж скота;

Истекший срок – истекший кровью;

Кричит как оглашенный – оглашенный приговор;

---

[4] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей произношения.

Совершенные пропорции – совершенные поступки;
Крестный ход – крестный отец.

Задание 4. *Прочитайте слова, обращая внимание на произношение выделенных согласных:*

1) Ма**сс**а, су**рр**огат, гру**пп**а, гри**пп**, те**рр**аса, а**тт**естат, ко**лл**ега, мета**лл**, су**мм**а, а**нн**отация, криста**лл**, оди**нн**адцать, и**лл**юзия, ва**нн**а, апе**лл**яция, ка**сс**а, га**лл**юцинация, не**тт**о.

2) Дро**жж**и, бу**хг**алтер, по**зж**е, во**жж**и, и**зж**арить, вы**жж**енный, пе**сч**аный, и**зж**ить, ра**зж**ать, же**стч**е, ни**зш**ий, до**жд**и, ре**зч**е, ви**зж**ать, и**зж**ога, ма**сш**таб, мо**жж**евельник, бе**зж**изненный, ра**сч**ет, съе**зж**у, прие**зж**ай.

Задание 5*. *Прочитайте следующий текст, обращая внимание на правильное произношение и постановку ударения в подчёркнутых словах:*

Примером успешного ведения бизнеса в различных отраслях экономики является деятельность фирмы «Mihail-tur». За 11 лет ее существования удалось сформировать коллектив профессионалов из высококвалифицированных менеджеров, компетентных экспертов, торговых агентов. Компании принадлежат две трети долей уставного фонда АО «Лейбл-мастер», владельца одного из крупнейших торговых центров города. Занимаясь оптовым поставкам подростковой одежды, фирма поддерживает связи с модельными агентствами, что позволяет обновлять коллекции на 15 процентов каждый квартал. С ассортиментом одежды можно познакомиться по объемному каталогу, размещенному на корпоративном интернет-сайте. Руководство фирмы заявило о намерении углубить это направление, для чего налаживаются связи с другими поставщиками, проводятся маркетинговые исследования с целью изучения конъюнктуры рынка в трех крупнейших областях региона. В планы компании входит также сосредоточение средств в области дорожного строительства. Начата подготовка к тендерным торгам, намеченным на первую декаду ноября, к участию в которых приглашаются компании, заинтересованные в строительстве современного путепровода.

ТЕМА 5. СЛОВООБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить состав слова, научиться находить в предложениях ошибки, связанные с неверным образованием слова.

Основные понятия темы:

Словообразовательные нормы – это правила образования новых слов.

Задание 1. *Найдите в предложениях слова, в которых нарушена словообразовательная норма, запишите их. Выделите неправильно выбранную часть слова (приставку, суффикс). Исправьте допущенные ошибки.*

1. Завесьте, пожалуйста, килограмм помидоров с витрины. **2.** Студенты в очередной раз немного запоздали на лекцию. **3.** Уважаемые пассажиры, проходите по-быстрому в середину вагона или садитесь взади. **4.** Он был коренным курчанином и после учебы в Москве вернулся в родной Курск. **5.** Чтобы сдать зачет, важно завсегда посещать занятия. **6.** Одна из самых актуальных проблем современной России – это взятничество в государственных учреждениях. **7.** После концерта микрофоны со сцены надо будет перенести взад. **8.** Многие кавказские народы отличает их гостеприимчивость. **9.** Моя жизнь в этом году была наполнена заботами о заканчивании школы и поступлении в университет. **10.** Сегодня у первого курса была лекция по химии заместо высшей математики.

ТЕМА 6. ЛЕКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить основные типы речевых ошибок, связанных со значением слова.

Основные понятия темы:

Лексические нормы – это правила употребления слова в точном значении, которое закрепилось в литературном языке и зафиксировано в толковых словарях.

Паронимы – это слова однокоренные, близкие по форме, но абсолютно разные по значению.

Речевая избыточность – это употребление лишних слов (тавтология, плеоназм).

Лексическая сочетаемость – это способность слова соединяться с другими словами по значению.

Жаргонизм – слово, свойственные для речи той или иной социальной, профессиональной группы людей.

Фразеологизм – устойчивое словосочетание, смысл которого не определяется значением отдельно взятых слов

Задание 1. *Объясните разницу в значении приведенных ниже паронимов. Составьте с каждым из них словосочетание, подобрав подходящее по смыслу слово.*

Осудить – обсудить, удачливый – удачный, соседний – соседский, жилой – жилищный, поступок – проступок, опечатки – отпечатки, командированный – командировочный, усвоить – освоить, эффектность – эффективность, невежа – невежда, представить – предоставить, цельный – целый, искусный – искусственный, практический – практичный; гуманный – гуманистический – гуманитарный; плодовитый – плодовый – плодотворный, экономический – экономичный – экономный.

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях избыточные словосочетания, выпишите их. Объясните причину избыточности, указав на лишнее слово (или лишние слова).*

1. При входе в «Копирус» висит прейскурант цен на предлагаемые услуги. **2.** Уезжая из Москвы, мы купили памятные сувениры в киоске у вокзала. **3.** Для преподавателя важно то, какие взаимоотношения друг с другом сложились между студентами в группе. **4.** Неприятно резал слух голос, доносившийся из конференц-зала. **5.** Депутату приходится встречаться со всеми социальными слоями общества.

Задание 3. *Найдите в следующих предложениях иноязычные по происхождению слова, которые употреблены в неточном значении. Запишите свой вариант исправления.*

1. Рабочий станка допустил целый ряд дефектов при изготовлении деталей. **2.** Пейзаж Екатеринбурга за последние десять лет обогатился современными постройками, хотя многие памятники архитектуры и были реконструированы до основания. **3.** В целях профилактики основное внимание уделяется ранним проявлениям, т. е. дебюту гриппа. **4.** Для окон актового зала мы долго искали гардины длиной 4 метра, а уже потом подбирали шторы в тон стен. **5.** В январе состоялся бенефис талантливого исполнителя: он впервые выступал на профессиональной сцене.

Задание 4. *Найдите в следующих предложениях нарушения правил лексической сочетаемости слов. Запишите свой вариант исправления.*

1. Грамотный руководитель должен показывать образец своим подчиненным. **2.** Нововведения сыграли важное значение в развитии горного комбината. **3.** Красочное оформление детских книг издательства «Эгмонт» должно вызвать внимание и заинтересовать покупателей. **4.** Новогодний спектакль в Театре кукол оказал на детей большое впечатление. **5.** Первую лекцию по геологии в этом году провел молодой преподаватель.

Задание 5. *Найдите в предложениях жаргонные, просторечные, разговорные слова, замените их литературным вариантом и запишите исправленный вариант.*

1. Несколько студентов до сих пор не отнесло хвостовки в деканат. **2.** В центре Екатеринбурга забабахали очередную свечку. **3.** Я считаю, что необходимо избавляться от любой нецензурщины в нашей речи. **4.** После окончания вуза мы решили замутить свой бизнес, решив, что в этом деле нам по-любому повезет. **5.** Работяги привыкли вкалывать на заводе от зари до зари.

Задание 6. *Исправьте в следующих предложениях речевые ошибки, вызванные неправильным употреблением фразеологизма.*

1. Михаил на публике говорит очень убедительно, язык у него хорошо подвязан. **2.** Туристам кинулась в глаза красота уральской природы. **3.** Его обещания рубля ломаного не стоят. **4.** Об умельцах у нас говорят: «Они в своем деле коня подковали». **5.** К сожалению, студенты редко сейчас грызут камень науки по-настоящему.

Задание 7*. *Найдите и исправьте в следующих предложениях речевые ошибки. Запишите правильный вариант.*

1. Норвежские спортсмены по-прежнему остаются нашими самыми серьезными оппонентами в биатлоне. **2.** В своей работе руководители горных предприятий руководствуются новейшей научной и методической литературой. **3.** Многодетным семьям, чтобы жить достойно, приходится искать несколько истоков доходов. **4.** Обычно мы общаемся, не придавая важности невербальным средствам коммуникации. **5.** Екатеринбургская Епархия активно распространяет душевную литературу. **6.** Продукты Черкашинского мясокомбината пользуются авторитетом у покупателей. **7.** Исправьте ошибки в контрольной работе так, чтобы было правильно. **8.** Все места на парковке были заняты, и поэтому много машин толпилось на обочине. **9.** К маю ветераны ВОВ получили очередную добавку к пенсии. **10.** После собеседования она сказала, что на должность промоутера брали только смазливых молодых людей. **11.** В прошлом году выдался неурожайный год в плане картошки. **12.** Ребенок с рождения имитирует поведение родителей. **13.** На Неделе первокурсника нам сразу выдали студики и зачётки. **14.** Команда нашего факультета заняла первенство в смотре художественной самодеятельности. **15.** После первых же дней изнурительной работы на Севере очень хотелось вернуться назад домой.

ТЕМА 7. МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить правила определения рода у существительных и аббревиатур, особенности несклоняемых существительных, образования некоторых грамматических форм разных частей речи и научиться исправлять ошибки, связанные с их неверным образованием (все это с опорой на учебную литературу и словари[5]).

Основные понятия темы:

Морфологические нормы – это правила образования грамматических форм слова.

Задание 1. *Определите род у следующих существительных и аббревиатур. Подберите к ним подходящие по смыслу прилагательные (или причастия), учитывая правила синтаксического согласования.*

1) Атташе, авеню, адвокат, амплуа, ассорти, аэрозоль, белоручка, бра, безе, боа, боди, бродяга, видео, визави, врач, выскочка, гну, гуру, денди, доцент, евро, жалюзи, жюри, зануда, иваси, какаду, кантри, каре, кашне, кенгуру, киви, кимоно, колибри, коллега, колли, кольраби, кофе, крупье, кутюрье, лама, левша, манго, мартини, маэстро, меню, миледи, монпансье, недоросль, непоседа, ниндзя, пани, пари, педагог, пенальти, пенсне, пони, преподаватель, протеже, профессор, растяпа, резюме, рефери, сабо, салями, сирокко, спагетти, табу, такси, тамада, танго, толь, торнадо, турне, тюль, фламинго, фрау, хачапури, хиппи, цеце, цунами, шасси (*склоняемые и несклоняемые существительные*).

2) Айдахо, Бали, Борнео, Гоби, Дели, Калахари, Капри, Килиманджаро, Колорадо, Лимпопо, Мехико, Миссисипи, Онтарио, Сорренто, Тбилиси, Толедо, Чили (*имена собственные*).

3) АО, АТС, БАМ, бомж, ВТО, вуз, ГАЗ, ГОК, ГУМ, ДК, дот, ДСП, ДТП, жэк, колхоз, КПП, ЛДПР, МВД, МИД, НИИ, НХЛ, НЭП, общепит, ООН, ПК, полпред, СЕ, СМУ, СНГ, СССР, ТАУ, ТВ, ТРЦ, УЗТМ, ФГБОУ, ФМС, ФСБ, ЦУМ (*аббревиатуры*).

Задание 2. *Определите род у следующих сложносоставных существительных. Составьте с ними словосочетания* ***прил. + сущ.***

Диван-кровать, музей-квартира, генерал-губернатор, плащ-палатка, идея-фикс, конференц-зал, жар-птица, кафе-столовая, чудо-человек, матч-реванш, салон-парикмахерская, программа-максимум, женщина-космонавт, альфа-излучение, ракета-носитель, премьер-министр, кофе-пауза.

Задание 3. *Определите, какие фамилии при заполнении бланка письма или заявления будут склоняться, а какие нет. Обращайте внимание на пол человека. Запишите эти имена и фамилии в нужном падеже.*

Кому:

Сергей Левченко, Александр Живаго, Елена Сверчук, Анна Шевченко, Константин Ярош, Татьяна Чубинец, Вероника Лежава, Андрей Горенко, Борис Станкевич, Виталий Воробей, Ирина Шевчук, Иван Миклухо-Маклай, Виктор Доброво, Владислав Карамыш, Анна Диоп, Андрей Кожемяк, Мария Мицкевич, Петр Галаган, Маргарита Венда, Вадим Черных.

От кого:

---

[5] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем грамматических трудностей.

Николай Черныш, Наталья Седых, Светлана Карась, Семен Фоменко, Лев Щерба, Сергей Соловьев-Седой, Александр Максимаджи, Екатерина Франюк, Леонид Березняк, Юлия Родных, Максим Жук, Алёна Ремесло, Николай Стрижак, Наталия Черных, Марат Ардзинба, Вера Ноздреватых, Виктория Приходько, Евгений Столпнер, Кирилл Шапиро, Станислав Горбачевич.

Задание 33. *Заполните таблицу следующими существительными, в зависимости от того, как у них образуется форма именительного падежа множественного числа.*

Окончание **–а/ –я**	Окончание **–ы/ –и**	Варианты **–а/ –я** и **–ы/ –и**

*Отдельно укажите существительные, у которых от выбора окончания в этой форме зависит значение (например, ордер**а** – «документы» и ордер**ы** – «элементы в архитектуре»).*

1) Брелок, бухгалтер, ветер, вексель, возраст, герб, год, директор, договор, жемчуг, инженер, инспектор, клин, колос, купол, лектор, медвежонок, небо, окорок, офицер, отпуск, пандус, паспорт, плинтус, почерк, прииск, прожектор, профессор, ребенок, редактор, сектор, семя, слесарь, столяр, сторож, табель, токарь, тополь, трактор, хозяин, цех, чудо, шило, шофёр, штемпель.

2) Корпус, лагерь, образ, повод, полоз, полутон, провод, пропуск, прут, тормоз, хлеб.

Задание 4. *Образуйте форму родительного падежа множественного числа от следующих существительных. Отметьте наличие вариантов (например, ла́сты – ла́ст**ов** и ла́ст□).*

Армяне, апельсины, басни, блюдца, болгары, ботинки, брызги, буряты, валенки, гардемарины, гектары, граммы, грузины, дела, деньги, джинсы, заморозки, казахи, калории, кастрюли, килограммы, клавиши, комментарии, макароны, мандарины, мечты, микроны, мокасины, носки, осетины, партизаны, перила, перипетии, петли, плечи, полотенца, поместья, помидоры, просьбы, развилки, рельсы, русла, сани, сапоги, сбои, свадьбы, сваи, свечи, серьги, солдаты, тапочки, тиски, турки, туфли, цыгане, чукчи, чулки, южане, юнги, яблоки, ясли.

Задание 5. *Раскройте скобки, заменяя цифровые обозначения словами, правильно определяя падеж числительных и существительных.*

1. Выборы в Государственную Думу состоялись в (358 округов). **2.** Появилась серия вспомогательных пособий с (5 735 чертежей). **3.** Теплоход с (657 отдыхающих) плыл вниз по Волге. **4.** За время последней экспедиции мы прошли свыше (2 580 километров). **5.** Нарушения техники безопасности были выявлены на (4 893 предприятия).

Задание 6. *Исправьте неверное употребление числительных в следующих предложениях:*

1. Лекция по философии будет прочитана для обоих студенческих групп. **2.** Мать-героиня воспитала семерых сыновей и четверых дочерей. **3.** Забор тянулся по обоим сторонам улицы и ограничивал движение. **4.** Двоих подруг она уже встретила по приезде в родной город. **5.** Главные достопримечательности Санкт-Петербурга расположены по обеим берегам Невы.

Задание 7. *Выпишите из предложений неправильно образованные грамматические формы. Запишите исправленный вариант.*

1. Всем стало понятно, что ейное предложение по реконструкции здания не будет одобрено. **2.** После второго матча наша команда оказалась в более лучшем положении. **3.** Староста пожаловалась преподавателю, что наша группа не влазиет в аудиторию 3519. **4.** Съездя в другой город, она поняла, как хорошо на родине. **5.** Ремонтники уже второй месяц не могли сменить треснутое стекло в окне. **6.** Он схватился за канат двумями руками. **7.** Хозяйка встретила гостей в бигудях и халате. **8.** Наши альпинисты покорили самые высочайшие вершины мира. **9.** Я надеялся, что к началу сессии выздоровлю. **10.** В этот раз студенты справились с заданием еще более хуже.

Задание 8. *Найдите нарушения морфологических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

1. Новый преподаватель кажется более образованнее. **2.** Студенческое общежитие находится в полтора километрах от здания университета. **3.** ФНС был создан как федеральный орган исполнительной власти. **4.** В магазине «Лео-строй» разнообразные варианты цветных жалюзей. **5.** Куратор совсем не интересовался ихними проблемами в учебе. **6.** МВФ выделило очередной транш в 1,5 миллиарда долларов. **7.** В столовой нельзя пользоваться лопнутыми стаканами. **8.** Эту сумму мы добавим к тысяче двести сорокам рублям. **9.** На конференцию молодых ученых пригласили самых умнейших студентов старших курсов. **10.** Вскоре Сергей Исаев стал популярной тамадой на свадьбах и других торжествах. **11.** На вновь открытое предприятие требуются бухгалтера, сторожи и инженера АСУП. **12.** Южнее Сочи находится солнечное Сухуми. **13.** На дипломную практику горный комбинат принял троих девушек с нашего курса. **14.** Мама традиционно купила пять килограмм мандарин и апельсин для праздничного новогоднего стола. **15.** Увидя раздраженное состояние преподавателя, студентка решила с ним не спорить.

ТЕМА 8. СИНТАКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила построения словосочетаний и предложений

Основные понятия темы:

Синтаксические нормы – это правила, регулирующие порядок и связь слов в словосочетании и предложении.

Задание 1. *Раскройте скобки, правильно определив падеж зависимого слова. При необходимости используйте предлоги. Запишите получившиеся словосочетания.*

Согласно (устав университета), точка зрения (события), благодаря (поддержка друга), анонс (предстоящие гастроли), вопреки (мнение большинства), наперекор (судьба), вклад (развитие науки), жажда (слава), заведующий (кафедра), по (возвращение) из отпуска, отзыв (курсовая работа), рецензия (новый фильм), оплачивать (проезд), свидетельствовать (необходимость перемен), доказывать (новая теория), поделиться (результаты исследования), апеллировать (здравый смысл), по (прибытие) поезда; предостеречь (опасность) – предупредить (опасность), обращать внимание (недостатки) – уделять внимание (подготовка к экзаменам), уверенность (свои силы) – вера (победа).

Задание 2. *Найдите предложения, в которых неверно употреблен деепричастный оборот. Предложите свой вариант исправления.*

Образец: Подводя итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации ***(действие, названное деепричастием, не относится к подлежащему).***

Варианты исправления: 1) Подводя итог проделанной работы, я выдвинул ряд предложений по модернизации. 2) Когда я подвел итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации. 3) После подведения ряда итогов проделанной работы мною был вдвинут ряд предложений по модернизации.

1. Будучи ребенком, Дмитрия всегда интересовали вопросы, связанные с техникой. **2.** Читая произведения русской классики, меня охватывает чувство гордости за отечественную литературу. **3.** Не чувствуя ни усталости, ни голода, наш путь к вершине продолжался. **4.** Узнав эту прекрасную новость, радости студентов не было предела. **5.** Первым, слегка хромая, из автобуса вышел седой старик. **6.** Записываясь на практику, у студентов были очень ограничены возможности выбора места ее прохождения. **7.** Вспоминая родные места, мне видится наш маленький кирпичный домик в тени тополей. **8.** Глядя на ярко освещенные стены Зимнего дворца, у меня возникло желание приехать сюда еще раз. **9.** Позвонив в третий раз, он с грустью понял, что никого нет дома. **10.** Произведя ряд расчетов, задача была решена студентами в течение 15 минут.

Задание 3. *Найдите предложения, в которых неправильно согласовано подлежащее со сказуемым. Запишите исправленный вариант.*

1. Много знаменитых людей закончили наш университет. **2.** Немало средств были потрачены на восстановление полуразрушенного памятника архитектуры. **3.** Несколько важных дат будут отмечены в календаре помимо официальных государственных праздников. **4.** На собрание по поводу летней практики явились лишь 31 студент. **5.** Часть студентов не справились с итоговой контрольной работой. **6.** Множество горожан приняли участие в шествии «Бессмертного полка». **7.** Ряд важных вопросов не были решены во время последнего заседания Ученого совета. **8.** Половина участников соревнований были размещены в студенческом общежитии. **9.** Тысяча периодических изданий имеются в открытом доступе в электронной библиотеке. **10.** Газета «Екатеринбургские новости» опубликовали интересную статью о творчестве молодых поэтов и писателей Урала.

Задание 4. *Найдите нарушения синтаксических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

1. Согласно распоряжения ректора всем студентам и сотрудникам необходимо пройти флюорографический осмотр. **2.** Открыв дверь в аудиторию, перед моими глазами предстала странная картина. **3.** Важно изучать условия жизни человека и как они связаны с процессами, происходящими сегодня в нашем обществе. **4.** Молодежь всегда принимали участие в студенческой самодеятельности и спортивных мероприятиях. **5.** В своей новой статье автор исследует и размышляет о возможностях искусственного интеллекта. **6.** Приказ был подписан ректором университета, устанавливающий обязательное посещение занятий, и доведен до сведения сотрудников вуза, преподавателей и студентов. **7.** Несколько членов Ученого совета не присутствовали на очередном заседании. **8.** В район приехал инструктор для подготовки специалистов по борьбе с сельскохозяйственными вредителями из местных жителей. **9.** Ученики горного лицея поступают в престижные учебные заведения, родители которых гордятся их успехами в учебе. **10.** Можно было согласиться лишь с теми положениями доклада, где приводились статистические данные для подтверждения гипотезы. **11.** Сдав нормативы ГТО, большинству из нас был вручен золотой значок. **12.** Учебное пособие не только предназначено для преподавателей, а также и для студентов и аспирантов. **13.** Скоро будет заселен многоквартирный дом, выросший на глазах за несколько месяцев и который уже приняла комиссия. **14.** Нам предложили поселиться в номере-люкс новой гостиницы для туристов с видом на море. **15.** Преподаватель попросил студентов, чтобы они ему напомнили на следующем занятии, чтобы он им распечатал раздаточный материал к семинарскому занятию.

ТЕМА 9. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СТИЛЕЙ

Цель – повторить систему функциональных стильных стилей русского языка, научиться определять стиль текста и доказывать свою точку зрения в этом вопросе.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Функциональный стиль – это исторически сложившаяся и социально осознанная разновидность языка, функционирующая в определенной сфере человеческой деятельности и общения, создаваемая особенностями употребления в этой сфере языковых средств и их специфической организацией.

В основе классификации стилей лежат экстралингвистические факторы: сфера применения языка, обусловленная ею тематика и цели общения. Сферы применения языка соотносятся с видами деятельности человека, соответствующими формам общественного сознания: наука, идеология, право, искусство, религия. Выделяются стили официальной речи (книжные): **научный**, **официально-деловой**, **публицистический**, **литературно-художественный**, **церковно-религиозный**. Им противопоставлен стиль неофициальной речи – **разговорный**, экстралингвистической основой которого является сфера бытовых отношений и общения (быт как область отношений людей вне их непосредственной производственной и общественно-политической деятельности).

Сферы применения языка в значительной мере влияют на тематику и содержание высказывания. Каждая из них имеет свои актуальные темы. Например, в научной сфере обсуждаются проблемы научного познания мира, в сфере бытовых отношений – бытовые вопросы. Однако в разных сферах может обсуждаться одна и та же тема, но цели преследуются неодинаковые, вследствие чего высказывания различаются и по содержанию, и по форме (см. **Задание 1**).

Каждый стиль обладает определёнными языковыми особенностями (прежде всего лексическими и грамматическими). Можно говорить лишь об относительной замкнутости функциональных стилей: большинство языковых средств в каждом стиле нейтральные, межстилевые. Однако ядро каждого стиля образуют присущие именно ему языковые средства с соответствующей стилистической окраской и едиными нормами употребления.

Следует отбирать слова и конструкции в соответствии с выбранным стилем, особенно в письменной речи. Употребление разностилевых языковых средств в рамках одного текста ведет к появлению стилистических ошибок. Часто встречаются ошибки, связанные с неуместным употреблением канцеляризмов, а также злоупотреблением специальными терминами в ненаучном тексте и использованием разговорной и просторечной лексики в книжных текстах (см. **Задание 2**).

Можно сделать вывод, что **стилистические нормы** – это 1) правила употребления языковых средств в соответствии с выбранным стилем и 2) правила выбора стиля, соответствующего условиям общения.

Таким образом, специфические черты каждого функционального стиля можно описать, ориентируясь на целый ряд признаков, которые обозначаются как **стилеобразующие факторы**, а также на его стилевые и языковые особенности. Кроме того, каждый стиль включает в себя тексты разных жанров (см. **Задание 3**).

Функциональный стиль	Стилеобразующий фактор						Жанры
	Доминирующая языковая функция	Форма общественного сознания	Основная форма речи	Типичный вид речи	Тон речи	Тип адресата	
Научный	Сообщение	Научное сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный	Массовый (подготовленный к восприятию научной информации)	Учебник, монография лекция, научная статья, аннотация, реферат, конспект, тезисы, курсовая работа, выпускная работа, диссертация, доклад
Официально-деловой	Сообщение / воздействие	Правовое сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный / императивный	Массовый	Конституция, закон, приказ, указ, распоряжение, положение, регламент, заявление, автобиография, резюме, характеристика
Публицистический	Сообщение + воздействие	Идеологическое сознание	Письменная и устная	Монолог и диалог	Обусловленный содержательно	Массовый	Репортаж, интервью, очерк, дискуссионное выступление, статья, информационная заметка
Литературно-художественный	Воздействие	Эстетическое сознание	Письменная	Обусловленный родом и жанром литературы	Обусловленный эстетической задачей	Массовый (подготовленный к восприятию классических произведений)	Роман, повесть, рассказ, новелла, стихотворение, поэма, баллада
Церковно-религиозный	Воздействие	Религиозное сознание	Письменная и устная	Монолог	Обусловленный ситуативно	Массовый	Исповедь, проповедь, житие, молитва
Разговорный	Общение	Обыденное сознание	Устная	Диалог и полилог	Обусловленный ситуативно	Личный (конкретный собеседник)	Дружеская беседа, семейная беседа, бытовой спор, байка

Задание 1. *Прочитайте тексты, посвященные одной теме. Определите функционально-стилевую принадлежность текстов, опираясь на стилеобразующие факторы и языковые особенности каждого из них.*

Текст 1

Гроза – атмосферное явление, заключающееся в электрических разрядах между так называемыми кучево-дождевыми (грозовыми) облаками или между облаками и земной поверхностью, а также находящимися над ней предметами. Эти разряды – молнии – сопровождаются осадками в виде ливня, иногда с градом и сильным ветром (иногда до шквала). Гроза наблюдается в жаркую погоду при бурной конденсации водяного пара над перегретой сушей, а также в холодных воздушных массах, движущихся на более теплую подстилающую поверхность.

Текст 2

Как передает наш корреспондент, вчера над центральными районами Пензенской области прошла небывалой силы гроза. В ряде мест были повалены телеграфные столбы, порваны провода, с корнем вырваны столетние деревья. В двух деревнях возникли пожары в результате удара молнии. К этому прибавилось еще одно стихийное бедствие: ливневый дождь вызвал сильное наводнение. Нанесен значительный ущерб сельскому хозяйству. Временно было прервано железнодорожное и автомобильное сообщение между соседними районами.

Текст 3

Доводим до Вашего сведения, что вчера после полуночи над районным центром – городом Нижний Ломов и прилегающей к нему сельской местностью – пронеслась сильная гроза, продолжавшаяся около получаса. Скорость ветра достигала 30-35 метров в секунду. Причинен значительный материальный ущерб жителям деревень Ивановка, Щепилово и Вязники, исчисляемый, по предварительным данным, сотнями тысяч рублей. Имели место пожары, возникшие вследствие удара молнии. Сильно пострадало здание школы в деревне Курково, для его восстановления понадобится капитальный ремонт. Вышедшая из берегов в результате проливного дождя река Вад затопила значительную площадь. Человеческих жертв нет. Образована специальная комиссия для выяснения размеров причиненного стихийным бедствием ущерба и оказания помощи пострадавшему местному населению. О принятых мерах будет незамедлительно доложено.

Текст 4

Ты не поверишь, какая гроза прошла вчера над нами! Я человек не робкого десятка, и то испугался насмерть.

Сначала все было тихо, нормально, я уже собирался было лечь, да вдруг как сверкнет молния, бабахнет гром! И с такой силищей, что весь наш домишко задрожал. Я уже подумал, не разломалось ли небо над нами на куски, которые вот-вот обрушатся на мою несчастную голову. А потом разверзлись хляби небесные... В придачу ко всему наша безобидная речушка вздулась, распухла и ну заливать своей мутной водицей все вокруг. А совсем рядом, что называется – рукой подать, загорелась школа. И стар и млад – все повысыпали из изб, толкутся, орут, скотина ревет – вот страсти какие! Здорово я перепугался в тот час, да, слава Богу, все скоро кончилось.

Текст 5

При Крещении священник крестообразно помазывает лоб христианина святым миром, говоря: «Печать дара Духа Святаго». Впоследствии всякий раз, когда христианин осеняет себя крестным знамением, он поклоняется спасительной Страсти Господней и призывает крестную силу, иже есть сила крестной смерти нашего Христа. Говоря: «Кресте Христов, спаси нас силою твоею», мы призываем силу крестной жертвы Господа. Поэтому крест обладает великой силой. Например, началась гроза. Сверкают молнии, и в большой железный крест на колокольне тоже может ударить молния. Однако, если стоящий под этим железным крестом христианин имеет на себе вот такой маленький крестик и говорит: «Кресте Христов, спаси мя силою твоею», то молния ему не повредит. В первом случае действуют природные законы: молния попадает в крест и сбивает его на землю. Во втором случае такой вот малюсенький крестик хранит верующего человека, призвавшего на помощь силу Креста.

Текст 6

Между далью и правым горизонтом мигнула молния, и так ярко, что осветила часть степи и место, где ясное небо граничило с чернотой. Страшная туча надвигалась не спеша, сплошной массой; на ее краю висели большие, черные лохмотья; точно такие же лохмотья, давя друг друга, громоздились на правом и на левом горизонте. Этот оборванный, разлохмаченный вид тучи придавал ей какое-то пьяное, озорническое выражение. Явственно и не глухо проворчал гром. Егорушка перекрестился и стал быстро надевать пальто.

Вдруг рванул ветер и со свистом понесся по степи, беспорядочно закружился и поднял с травою такой шум, что из-за него не было слышно ни грома, ни скрипа колес. Он дул с черной тучи, неся с собой облака пыли и запах дождя и мокрой земли. Лунный свет затуманился, стал как будто грязнее, звезды еще больше нахмурились, и видно было, как по краю дороги спешили куда-то назад облака пыли и их тени.

Чернота на небе раскрыла рот и дыхнула белым огнем; тотчас же опять загремел гром.

Дождь почему-то долго не начинался... Было страшно темно. А молнии в потемках казались белее и ослепительнее, так что глазам было больно.

Вдруг над самой головой его [Егорушки] со страшным, оглушительным треском разломалось небо; он нагнулся и притаил дыхание, ожидая, когда на его затылок и спину посыплются обломки... Раздался новый удар, такой же сильный и ужасный. Небо уже не гремело, не грохотало, а издавало сухие, трескучие, похожие на треск сухого дерева звуки. (*А. П. Чехов. Степь*)

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях стилистические ошибки и запишите исправленный вариант.*

1. Некоторым министрам необходимо включить мозги, чтобы до них дошло, что на прожиточный минимум люди в России могут только существовать. **2.** В статье сообщается, что левые лекарства отследят по аптекам и конфискуют. **3.** Мэр города рассказал, что в настоящее время ведется возведение двух бюджетных высоток в Пионерском поселке. **4.** Новый сотрудник редакции сумел нарыть некий компромат на верхушку министерства, но опубликовать материалы ему не дали. **5.** Директор гимназии был в ауте, когда ему сообщили, что гимназия получила-таки грант в размере 1 млн. рублей. **6.** Бытие в хрущевках и интенсивные трудовые затраты скрашивала душевная атмосфера, царившая в те годы в коллективе. **7.** Благополучие родных деревень отстаивает наш председатель, который по восемнадцать часов в сутки мотается по полям, фермам, частит по делам в Екатеринбург. **8.** Трудно понять, почему ученый допустил такую промашку в расчетах. **9.** Семь школ, которые дислоцируются в нашем районе, переполнены, поэтому некоторым детям приходится ездить за тридевять земель. **10.** Избранников народа одолевает такое количество проблем, что у некоторых уже крыша поехала.

Задание 3. *Определите, к какому стилю принадлежит каждый из предложенных текстов*[6]*. Попытайтесь обосновать свою точку зрения.*

Текст 1

В психологии и этике делового общения речь пойдет не столько об абстрактных общепсихологических категориях и принципах, сколько о профессиональных психологических и в то же время практически ориентированных знаниях, которые могут обеспечить успех той или иной деятельности. Под **деловым** понимается общение, обеспечивающее успех какого-то общего дела, создающее условия для сотрудничества людей, чтобы осуществить значимые для них цели. Деловое общение содействует установлению и развитию отношений сотрудничества и партнерства между коллегами по работе, руководителями и подчиненными, партнерами, соперниками и конкурентами. Оно предполагает такие способы достижения общих целей, которые не только не исключают, но, наоборот, предполагают также и достижение лично значимых целей, удовлетворение личных интересов.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 2

Веруем в Единого Бога Отца Всемогущего, Творца неба и земли.

Веруем также в Иисуса Христа, Его Единородного Сына и Господа нашего, Который был зачат Духом Святым, рожден девой Марией, Который страдал во времена Понтия Пилата, был распят, умер и был погребен, сошел в царство смерти, на третий день воскрес из мертвых, вознесся на Небо и воссел одесную Всемогущего Бога Отца, откуда вернется судить живых и мертвых.

Веруем также во Святого Духа, Святую Соборную Церковь, собрание святых, в прощение грехов, воскресение мертвых и жизнь вечную.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 3

В Горном университете прошел День открытых дверей. На площадке перед Большим актовым залом – Залом УГМК развернулся настоящий наукоград: кроме презентации различных направлений подготовки, школьников ждали специализированные мастер-классы.

Об основах робототехники будущим абитуриентам рассказывали сотрудники кафедры горных машин и комплексов и робот Герман. О далеких экспедициях и романтике походов – студенты-геологоразведчики. У стенда **Уральского геологического музея** ребята рассматривали минералы под микроскопом, а вместе с инструкторами **студенческого патриотического центра «Святогор»** учились основам безопасного обращения с оружием.

[6] Задание может быть выполнено как тестовое.

Всего на **День открытых дверей** в **Горный университет** пришли около тысячи школьников. Многие из них уже серьезно задумались о том, чтобы стать частью дружной семьи горняков.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 4

В соответствии с Федеральным законом от 18.06.2001 N 77-ФЗ «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», Постановлением Правительства РФ от 25.12.2001 N 892 «О реализации Федерального закона «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», санитарно-эпидемиологическими правилами СП 3.1.2.3114-13 «Профилактика туберкулеза» и в целях раннего выявления заболеваний органов грудной клетки среди студентов и сотрудников университета

ПРИКАЗЫВАЮ:

Организовать с 10 апреля по 12 мая 2017 года флюорографический профилактический осмотр студентов и сотрудников университета в передвижном цифровом флюорографическом кабинете, установленном во дворе I учебного здания, с предъявлением каждым студентом и сотрудником копии полиса обязательного медицинского страхования.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 5

Страны, которые являются участниками процесса торговли минеральным сырьем, решают разные задачи, что отражается на структуре их экономики, влияет на характер воспроизводственных процессов, порождает специфические для каждой страны проблемы. Взаимодействие экспортеров и импортеров сырья накладывает отпечаток на международные отношения, являясь причиной возникновения конфликтов, создания экономических и военно-политических союзов. Стремление к поддержанию и расширению экспорта вызывает дополнительные потребности в производстве сырья внутри страны, в развитии минерально-сырьевой базы. Импорт сырья следует рассматривать как источник удовлетворения потребностей и стимулирование развития несырьевых отраслей.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 6

Отец наш шибко тада заболел // У него было очень больное сердце // А что такое больное сердце в те годы / это же неизлечимая болячка! Он работал у нас мастером в заводе / в формовочном цехе / где делались изделия для сталелитейного завода / для нижнетагильского // Ковшовые кирпичи / розетки / воронки всякие / сифоны / вообщем / всякая всячина // Всё было для фронта / всё для победы // Щас этого никто не понимает / особенно нынешняя молодёжь // Какие же тяжёлые дни пережило наше поколение! И не дай вам Бог узнать / что такое война! Да даже твои родители ещё воспитывались в этом послевоенном духе // Ну да ладно / всё равно меня трудно понять…

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 7

Реклама работает на подсознательном уровне, обращается к иррациональному в природе человека. Ее влияние и глубже и сильнее, чем мы думаем, потешаясь над каким-нибудь слабоумным персонажем вроде пропагандиста бытовой техники. Кого и в чем может убедить этот шут гороховый? Оказалось – нас. Но не в том, что его товары дешевле и лучше, а совсем в другом – в преимуществе нового образа жизни.

От рекламы не требуется реализма. Задавая высокие нравственные стандарты, она порождает особое позитивное мышление. Задача рекламы состоит в том, чтобы потребитель подсознательно стремился отождествить себя с героем «коммершелз». Тогда он купит сковородку не для того, чтобы жарить яичницу, а для того, чтобы стать участником идеальной экранной жизни.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 8

Наутро поднявшееся яркое солнце быстро съело тонкий ледок, подернувший воды, и весь теплый воздух задрожал от наполнивших его испарений отжившей земли. Зазеленела старая и вылезающая иглами молодая трава, надулись почки калины, смородины и липкой спиртовой березы, и на обсыпанной золотым светом лозине загудела выставленная облетавшаяся пчела. Залились невидимые жаворонки над бархатом зеленей и обледеневшим жнивьем, заплакали чибисы над налившимися бурою неубравшеюся водой низами и болотами, и высоко пролетели с весенним гоготаньем журавли и гуси. Заревела на выгонах облезшая, только местами еще не перелинявшая скотина, заиграли кривоногие ягнята вокруг теряющих волну блеющих матерей, побежали быстроногие ребята по просыхающим, с отпечатками босых ног тропинкам, затрещали на пруду веселые голоса баб с холстами, и застучали по дворам топоры мужиков, налаживающих сохи и бороны. Пришла настоящая весна.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 9

К нашему большому сожалению, мы должны сообщить Вам, что партия лакокрасочных материалов, отгруженных Вами на судне «Ленинград» по контракту 27-005/40289, не соответствует по качеству нашим спецификациям, на основании которых был заключен контракт.

Согласно параграфу № 03 в договоре, мы имеем право отказаться от приемки этой партии товара. Однако, принимая во внимание наши длительные деловые отношения и то обстоятельство, что предыдущие поставки лакокрасочных материалов в счет данного контракта были произведены в соответствии с условиями договора и надлежащего качества, мы согласны принять эту партию товара, если Вы предоставите нам скидку в 10 %.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 10

Человек должен быть широк. Из универсализма вытекает креативность, а ЕГЭ не обеспечивает ни того, ни другого. Даже те ребята, которые прекрасно сдали тесты по выбранным предметам, далеко не всегда в состоянии объяснить, откуда взялись все эти ответы, вывести их самостоятельно. А предложение «докрутить» чуть дальше и глубже вообще ставит в тупик: «Почему вы у нас спрашиваете то, что вы нам не рассказали?» Но креативность как раз и состоит в умении давать такие ответы. Учащийся – это же не шляпа, в которую положили кролика, чтобы его же и достать. Это неинтересно.

Убрать ЕГЭ нельзя. Но если оставить все как есть, мы обречены на дальнейшее отставание в науке, в любых творческих профессиях. Поэтому необходимо уточнить функционал ЕГЭ. А для этого надо все же назвать кошку кошкой и понять, что такое образование.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 11

На религию после революции 1917 года было наложено так называемое табу. Христианское вероисповедание и все реалии, связанные с ним, воспринимались только как культурное наследие и пережиток царского режима. Соборы и церкви были лишь памятниками архитектуры, жития святых – памятниками литературы, иконы и фрески – памятниками художественного творчества. Очень многие храмы были разрушены или применялись не по своему прямому назначению; они становились складами, конторами, монастыри превращались в тюрьмы и колонии. Люди, особенно священнослужители, преследовались за свою веру. Как следствие, лексика религиозного характера со временем стала постепенно переходить в пассивный состав языка, используясь в основном в составе фразеологизмов и афоризмов (<u>как Бог на душу положит</u>; <u>как у Христа за пазухой</u>; <u>человек предполагает, а Бог располагает</u>). Некоторые слова изменили свою семантику (<u>воскресение</u>, <u>братия</u>), многие приобрели в современном русском языке отрицательную окраску (<u>вертеп</u>).

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

ТЕМА 10. НАУЧНЫЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой научного стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности научных текстов.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Научный стиль – один из важнейших функциональных стилей литературного языка, относящийся к письменно-книжному типу речи и обслуживающий сферу науки и производства. Цель текста научного стиля может заключаться в передаче объективной информации о природе, человеке и обществе, доказательстве ее новизны, истинности или ценности.

Основные стилевые черты научного стиля:

– **объективность**, которая проявляется в изложении разных точек зрения на рассматриваемую проблемы, в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения, в сосредоточенности на предмете высказывания;

– **логичность**, которая проявляется в последовательности и непротиворечивости изложения научной теории и создается с помощью особых синтаксических конструкций (сложные предложения с придаточными причины, условия, следствия; предложения с вводными словами *во-первых, во-вторых, наконец, итак, следовательно* и др.);

– **доказательность**, которая проявляется в цепочке рассуждений, аргументации определенных положений и гипотез;

– **точность**, которая достигается благодаря использованию терминов (т. е. слов и словосочетаний, обозначающих понятия особой области знания или деятельности), однозначных слов; четким оформлением синтаксических связей;

– **обобщенность** и **отвлеченность**, которые проявляются в отборе слов (преобладание имен существительных над глаголом, общенаучные слова, имена существительные с абстрактным значением, конкретные существительные в обобщенном значении), в употреблении грамматических форм (глаголы настоящего времени во «вневременном» значении, возвратные и безличные глаголы, преобладание форм 3-го лица, форм несовершенного вида), в использовании синтаксических конструкций (неопределенно-личные предложения, страдательные обороты), в существовании авторского «мы», характерного только для научного стиля;

– **насыщенность фактической информацией**;

– **отсутствие выражения эмоций** (отсутствуют разговорные элементы, эмоционально-экспрессивная лексика, неполные конструкции и т. п.).

Основные языковые особенности научного стиля:

Языковые особенности	**Примеры**
Лексические	
1) термины	*обогащение полезных ископаемых, месторождение, осадочные породы, смешанослойный минерал, рудное тело* и др.
2) общенаучная лексика	*закон, теория, аспект, носитель, конструкция* и др.
3) книжная лексика абстрактного значения	*применение, явление, замедление, обязательство, подготовка* и др.
Морфологические	
1) частотность существительных	(Примерно 40 % существительных на единицу текста)

2) частотность форм родительного падежа существительных	*попадание в водоемы масло-смазывающих продуктов* (род. п.) *отдельных узлов* (род. п.) *механического оборудования* (род. п.) *гидротехнических сооружений* (род. п.) и т. п.
3) широкое использование существительных среднего рода	*отношение, употребление, дело, доказательство, заполнение* и др.
4) преобладание глаголов несовершенного вида настоящего времени	*равняется, оказывается, возрастает, наблюдается, составляет* и др.
5) полузнаменательные глаголы-связки	*есть, быть, являться*
6) употребление причастий и деепричастий	*подчеркнутый, обрабатываемый, соответствующий; замечая, решая, сменив* и др.
Синтаксические	
1) вводные слова и конструкции	*вероятно, возможно, таким образом; по словам ученых, по мнению большинства исследователей* и др.
2) бессубъектные конструкции	*карьер был разработан; оборудование было закуплено; проект был одобрен* и др.
3) безличные предложения	*необходимо отметить; следует подчеркнуть; можно сделать ряд выводов* и др.
4) обобщенно-личные предложения	*подчеркнем следующие положения; выделим важные особенности; отметим ряд недостатков* и др.
5) цепочки однородных членов	*Хорошие каталоги Интернета обеспечивают разнообразный дополнительный сервис: поиск по ключевым словам в базе данных, списки последних поступлений, списки наиболее интересных из них, выдачу случайной ссылки, автоматическое оповещение по электронной почте о свежих поступлениях.*
6) многокомпонентные сложные предложения с союзной связью	*Если эксперимент оправдывает надежды, то гипотеза детализируется и конкретизуется, а затем ставится новый эксперимент.*

Подстили научной речи:

Тематические

Научно-технический	Научно-естественный	Научно-гуманитарный

Функциональные

(с соответствующим жанром)

Собственно научный	Научно-информативный	Научно-справочный	Учебно-научный	Научно-популярный

Задание 1. *Проанализируйте текст по следующей схеме:*

1. *Охарактеризуйте текст по стилеобразующим факторам научного стиля.*

2. *Докажите принадлежность текста к научному стилю с опорой на основные стилевые черты.*

3. *Определите отнесенность текста к тематическому и функциональному подстилю научного стиля.*

4. *Составьте план текста и сформулируйте главную мысль.*

5. *Выделите в тексте языковые особенности научного стиля.*

Вариант 1: ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ[7]

В геологии существует более ста различных специальностей и специализаций. Одни из них тесно связаны с химией (геохимическое направление), другие – с физикой (геофизическое направление), третьи – с биологией (палеонтологическое и палеобиологическое направления), четвертые – с математикой и кибернетикой (компьютерное моделирование геологических процессов), пятые – с астрономией и астрофизикой (космическая геология) и т. д.

В недрах Земли находятся залежи полезных ископаемых, вопросами поиска и разведки которых занимается геология. На земной поверхности протекают разнообразные геологические процессы, люди возводят здания и различные инженерные сооружения, строят транспортные магистрали. Задачей геологов является обеспечение их устойчивости и безопасного функционирования. Правильное решение этих двух основных практических задач немыслимо без глубокого знания общих закономерностей строения и развития отдельных геосфер. Раскрытие данных закономерностей и познание лежащих в их основе причин невозможны без изучения всей Земли, так как наша планета представляет собой единую природную среду и развивается так же, как и все планеты Солнечной системы.

Знание происхождения и эволюции Земли, условий образования и развития земной коры, ее строения и состава во взаимодействии с внешними оболочками – водной (гидросферой) и воздушной (атмосферой), а также с внутренними оболочками – земным ядром и мантией – составляет необходимое звено мировоззрения. Оно позволяет понять, как осуществляется постепенный переход от неживого неорганического мира к органическому, как эволюционируют живые существа и вместе с ними изменяются геологические процессы.

Велико и познавательно значение геологии как науки о Земле, ее строении, происхождении и развитии. Она затрагивает проблемы происхождения и эволюции жизни и

---

[7] Геология: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Н. В. Короновский, Н. А. Ясаманов. – 7-е изд., перераб. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 6-7.

природных условий. Геология всегда стояла в центре ожесточенной борьбы научных воззрений и научных школ против религиозных предрассудков.

Практическое значение геологии огромно и разнообразно. Весь арсенал современной науки и техники основан на использовании продуктов земных недр – нефти, угля, различных металлов, строительных материалов, подземных вод и др. Воды минеральных источников используют в лечебных и бальнеологических целях. Для поисков, разведки и извлечения разнообразного минерального сырья из земных недр требуется прежде всего разработка методов обнаружения залежей полезных ископаемых, которые необходимы для промышленности, сельского хозяйства и строительства.

Среди полезных ископаемых различают рудные, или металлические, из которых добывают различные металлы, и нерудные, или неметаллические. Из последних добывают удобрения, каменную соль, серу, строительные материалы, драгоценные (алмаз, рубин, сапфир, изумруд), полудрагоценные (аметист, циркон, топаз, цитрин, нефрит, малахит и др.) и поделочные камни (яшма, кварциты и др.), а также горючие полезные ископаемые (нефть, каменный и бурый уголь, горючие сланцы, газ). Подземные воды (пресные и минеральные) также являются полезными ископаемыми. Поисками залежей подземных вод и практическим их использованием занимается специальная отрасль геологии – гидрогеология. В особые научные дисциплины выделились геология рудных и геология нерудных месторождений, геология горючих полезных ископаемых. Без знания геологического строения территории не обходится ни одно строительство промышленных и гражданских зданий, транспортных магистралей, трубопроводов и средств связи. Эта особая отрасль геологии именуется инженерной геологией. Работами, проводимыми в районах развития многолетней мерзлоты, занимается такая наука, как мерзлотоведение.

Все перечисленные специальные научные дисциплины образуют самостоятельный раздел геологии, который называется *практической*, или *прикладной*, геологией.

ВАРИАНТ 2: ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ[8]

Современная мировая экономика характеризуется неуклонным ростом потребления минерального сырья, расширением круга используемых в промышленности элементов, вовлечением в производство новых типов месторождений полезных ископаемых. Укрепление и совершенствование минерально-сырьевой базы России – основная задача геологической службы.

Обеспечение ресурсами и запасами не только действующих отраслей горнодобывающей промышленности, но и ее перспективных направлений требует оперативного решения проблемы освоения новых видов полезных ископаемых. Успешное осуществление геолого-разведочных работ возможно лишь при условии постоянного совершенствования теории и методов поисков и разведок месторождений полезных ископаемых. Результативность геолого-разведочной отрасли определяется уровнем научных и методических разработок, степенью использования современных поисково-разведочных средств.

---

[8] Геология и разведка месторождений полезных ископаемых: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / [В. В. Авдонин, В. В. Мосейкин, Г. В. Ручкин и др.]; под ред. В. В. Авдонина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 5-6.

Научные основы поисков и разведок месторождений полезных ископаемых созданы трудами нескольких поколений отечественных геологов, среди которых в первую очередь необходимо назвать Г. Д. Ажгирея, Я. Н. Белевцева, А. Г. Бетехтина, Ю. А. Билибина, П. П. Бурова, А. Б. Каждана, В. М. Крейтера, В. А. Обручева, А. П. Прокофьева, В. И. Смирнова, С. С. Смирнова, А. А. Якжина и др.

Многими ведущими учеными были написаны замечательные учебники и методические руководства по поискам и разведкам месторождений, не утратившие своего значения до настоящего времени. Тем не менее в последние годы произошли существенные изменения в самой структуре минерально-сырьевой базы, оценке перспектив использования природных ресурсов и методов их вовлечения в промышленное использование.

В геолого-разведочной отрасли можно отметить несколько областей, в которых наблюдаются наиболее значимые изменения.

Во-первых, это касается совершенствования теории и методики поисковых работ. Во-вторых, широкое внедрение компьютерных технологий во все направления геолого-разведочного процесса качественно изменило методику подсчета запасов и оценки месторождений на всех стадиях их освоения.

Существенные изменения происходят и в методике добычных работ, в особенности в связи с требованиями экологической безопасности.

Наконец, необходимо учитывать еще одно важное обстоятельство. Наряду с неуклонно возрастающей потребностью в различных видах минерального сырья отчетливо проявляется тенденция истощения минерально-сырьевой базы, снижения открываемости новых месторождений, вовлечения в промышленное производство неблагоприятных по геологической позиции месторождений и руд более низкого качества. Эти причины стимулируют повышенный интерес к минерально-сырьевому потенциалу Мирового океана. Вследствие интенсификации научно-исследовательских и поисково-разведочных работ в океане в последние годы сложилась качественно новая ситуация – возникла необходимость решения проблем освоения минерально-сырьевых ресурсов океана в практической плоскости, что ознаменовалось интенсивными усилиями по разработке теоретических основ, методики и технических средств морских геолого-разведочных работ.

Авторский коллектив настоящего учебника постарался отразить в нем все важнейшие достижения, касающиеся поисков, разведки и эксплуатации месторождений и характеризующие современное состояние геолого-разведочной отрасли.

Вариант 3: ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА[9]

Полезные ископаемые, располагающиеся в земной коре в пределах территории страны, образуют ее минерально-сырьевую базу. Эти природные ресурсы называют богатством недр государства.

Добычу полезных ископаемых обеспечивают горно-добывающие отрасли промышленности, перспективы развития которых зависят прежде всего от состояния природных ресурсов. Их освоение играет важнейшую роль в развитии экономики России.

В нашей стране выявлены в промышленных концентрациях все виды минерального сырья, используемого в мировой практике.

---

[9] Городниченко В. И., Дмитриев А. П. Основы горного дела: учебник для вузов. М.: Издательство «Горная Книга», Издательство московского государственного горного университета, 2008. С. 7-8.

Оценка прогнозных ресурсов, которую сегодня осуществляют в основном до глубины освоенных промышленностью недр, составляющей для твердых полезных ископаемых около 1 км, свидетельствует о том, что в России в обозримом будущем исчерпания минеральных ресурсов не предвидится, тем более что результаты исследований сверхглубоких скважин подтверждают наличие промышленных концентраций полезных компонентов на глубинах до 10 км.

По данным Министерства природных ресурсов России, в нашей стране 60–70 % запасов важнейших видов полезных ископаемых сосредоточено в ограниченном числе крупных месторождений. В настоящее время сохраняют свое значение освоенные крупные месторождения полезных ископаемых и имеют большие перспективы развития месторождения в регионах Сибири, Дальнего Востока и Севера.

В Сибири находится около 84 % разведанных запасов угля России (категории А, В, Ci), из них бурых и каменных углей примерно поровну. В этих запасах сосредоточено до 90 % коксующихся углей России и около 85 % особо ценных для коксования углей марок ГЖ, Ж, КЖ, К, ОС.

В настоящее время в Сибири, включая республику Саха, добывается около 70 % углей России. Как считают эксперты, этот показатель будет возрастать в связи с сокращением добычи угля в европейской части страны, а также на Урале и Дальнем Востоке. Можно предположить, что основная роль в обеспечении потребностей страны в углях в будущем будет принадлежать Кузбассу.

Повышение эффективности производства имеет особое значение для горно-добывающих отраслей промышленности, которые обеспечивают топливом, минеральным сырьем и материалами многие отрасли экономики страны: черную и цветную металлургию, энергетику, химическую, строительных материалов, сельское хозяйство и др.

Результаты работы горных предприятий в значительной степени определяют уровень эффективности производства во всех других отраслях, потребляющих их продукцию.

Так, в общих затратах на производство цветных металлов затраты на добычу руды составляют более 50 %. В затратах на производство электроэнергии 60–70 % составляют затраты на топливо.

Повышение эффективности горного производства должно осуществляться путем его технического перевооружения, обеспечивающего снижение затрат на производство продукции, повышение качества продукции, экономное и рациональное использование трудовых и материальных ресурсов, комплексное освоение богатства земных недр.

Задание 2. *Отредактируйте предложения таким образом, чтобы они соответствовали научному стилю, запишите исправленный вариант. Определите, с чем связаны допущенные ошибки.*

1. В своей курсовой работе я хотел бы ответить на очень актуальные в наше нелегкое время вопросы. **2.** Авторы этих статей абсолютно неправильно думают, что только их точка зрения имеет право на существование. **3.** Выводы оказались неожиданными, на первый взгляд просто сумасшедшими. **4.** Однако вначале необходимо разобраться, есть ли угроза энергетического голода. **5.** Мне кажется, что первый способ решения проблемы более целесообразный. **6.** Стоит представить, а какой будет польза от этого изобретения. **7.** Компьютерный вирус – это сильный паразит! **8.** Современное состояние экономики, энергетики и экологии выдвигает необходимость проведения интердисциплинарных исследований. **9.** Это приводит к необходимости изыскания и выделения огромных усилий общества, чтобы противостоять результатам экологически опасных действий. **10.** В настоящее время сетевые технологии претерпевают бурное развитие. **11.** Свобода в современной России – это не столько свобода сотрудничества и доброжелательного диалога, как своевольное навязывание своего понимания свободы ради сокрушения чужой. **12.** Математическая модель включала в себя систему уравнений, описывающая течение газа около криволинейной поверхности. **13.** Земля должна рассматриваться как некая квазизамкнутая система, ресурс жизнеобеспечения которой большой, но ограничен. **14.** Изучение новых материалов дает свои плоды. **15.** Используя метод аналогий, на кафедре систем управления разработан комплекс программных средств для изучения систем путем их моделирования.

ТЕМА 11. ОФИЦИАЛЬНО-ДЕЛОВОЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой официально-делового стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности документов, их жанр, видеть реквизиты.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Официально-деловой стиль – это стиль, который обслуживает правовую и административно-общественную сферы деятельности. Он используется при написании документов, деловых бумаг и писем в государственных учреждениях, суде, а также в разных видах делового устного общения.

Среди книжных стилей официально-деловой стиль выделяется относительной устойчивостью и замкнутостью. С течением времени он, естественно, подвергается некоторым изменениям, но многие его черты: исторически сложившиеся жанры, специфическая лексика, морфология, синтаксические обороты – придают ему в целом консервативный характер.

Основные стилевые черты официально-делового стиля:

– **объективный**, **абстрагированный (неличный) характер изложения**, который проявляется в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения (отсутствуют местоименные и глагольные формы 2-го лица, ограничены – 1-го лица);

– **точность и детальность изложения**, которые не допускают каких-либо разночтений; быстрота понимания не является важной, так как заинтересованный человек в случае необходимости прочитает документ несколько раз, стремясь к полному пониманию;

– **стандартизированность**, **стереотипность изложения**, которая проявляется в том, что разнородные явления жизни в официально-деловом стиле укладываются в ограниченное количество стандартных форм (*анкета, справка, инструкция, заявление, деловое письмо* и т. д.);

– **долженствующе-предписующий характер изложения**, т. е. **волюнтативность** (выражение воли), которая в текстах выражается семантически (подбором слов) и грамматически (формы первого лица глагола – *предлагаю*, *приказываю, поздравляю*; формами должествования – *надлежит, необходимо*, *следует*, *предлагается*);

– **отсутствие выражения эмоций и оценок** (не употребляются эмоционально-экспрессивные средства).

Эти черты находят свое выражение 1) в отборе языковых средств (лексических, морфологических и синтаксических); 2) в оформлении деловых документов.

Основные языковые особенности официально-делового стиля:

Языковые особенности	Примеры
Лексические	
1) языковые штампы (канцеляризмы, клише)	*ставить вопрос, на основании решения, по собственному желанию, по семейным обстоятельствам, входящие-исходящие документы, контроль за исполнением возложить, по истечении срока* и др.
2) профессиональная терминология	*недоимка, алиби, черный нал, теневой бизнес, жилищный найм, прокурорский надзор, единовременное пособие* и др.
3) архаизмы	*оным удостоверяю, сей документ, в надлежащем виде, во избежание* и др.
4) тяготение к использованию родовых понятий с широкой и бедной семантикой	*прибыть* (вместо *приехать, прилететь, прийти* и т. д.), *транспортное средство* (вместо *автобус, самолет, «Волга»* и т. д.), *населенный пункт* (вместо *деревня, город, село* и т. д.), *помещение (вместо: квартира, цех, ангар, вестибюль, кров, обитель, апартаменты и т. д.)*
Морфологические	
1) существительные-названия людей по признаку, обусловленному действием	*налогоплательщик, ответчик, арендатор, свидетель* и др.
2) существительные, обозначающие должности и звания в форме мужского рода	*сержант полиции Ушакова, инспектор Неверова, ответчик Прошина* и др.
3) отглагольные существительные с частицей *не*-	*нелишение, неявка, несоблюдение, непризнание* и др.
4) производные предлоги	*в связи, в течение, за счет, в силу, по мере, в отношении, на основании* и др.
5) инфинитивные конструкции	*провести осмотр, оказать помощь, доказать невиновность* и др.
6) глаголы настоящего времени в значении обычно производимого действия	*обвиняемому обеспечивается право на защиту, за неуплату взимается штраф* и др.
7) сложные слова, образованные от двух и более основ	*бракосочетание, правонарушение, налогообложение, землепользование, пассажироперевозки, дачевладелец, нетрудоспособность, работодатель, квартиросъемщик, материально-*

	технический, осенне-зимний, ремонтно-эксплуатационный, вышеуказанный, нижепоименованный и др.
8) нанизывание существительных с суффиксом -*ние*	*Приготовлением к преступлению признается приискание и приспособление средств или орудий или умышленное создание условий для совершения преступлений*....
9) гигантский пласт официальных наименований номенклатуре учреждений, профессий, должностей и т. п.	*Российское акционерное общество «Единая энергетическая система России», Открытое акционерное общество «Нефтяная компания «Лукойл», Всероссийский научно-исследовательский институт документоведения и архивного дела, главный научный сотрудник, заместитель командира полка по инженерной службе, главный специалист сектора делопроизводства компании, председатель Военной коллегии Верховного Суда Российской Федерации, депутат Государственной Думы РФ и др.*
10) широкое использование аббревиатур	*РФ, МИД, МЧС, ФСБ, РЖД, Сбербанк, МОК, СМИ, РПЦ, УГГУ, ЕГЭ, ОСАГО, ТРЦ, ТК, УФМС, МОУ, ФГБОУ, ГТО, ГОСТ, ФГОС, КамАЗ, Роспечать и др.*
11) употребление цепочки имен существительных в родительном падеже	*Для применения (род. п.) мер (род. п.) общественного воздействия (род. п.); в целях широкой гласности (род. п.) работы (род. п.) Министерства (род. п.) высшего образования (род. п.); результаты деятельности (род. п.) органов (род. п.) налоговой полиции (род. п.)* и др.
Синтаксические	
1) употребление простых предложений с однородными членами, причем ряды этих однородных членов могут быть весьма распространенными (до 8–10)	*Объектами общей собственности крестьянского хозяйства является имущество: земельный участок, насаждения, хозяйственные или иные постройки, мелиоративные и другие сооружения, продуктивный и рабочий скот, птица, сельскохозяйственная и иная техника, оборудование, транспортные средства, инвентарь и другое имущество* и др.
2) наличие пассивных конструкций	*платежи вносятся в указанное время, сроки выплат установлены на год* и др.

3) преобладание сложных предложений, в особенности сложноподчиненных, с придаточными условия	*При наличии спора о размерах причитающихся уволенному работнику сумм администрация обязана уплатить указанное в настоящей статье возмещение в том случае, если спор решен в пользу работника.*

Документ – зафиксированная на материальном носителе информация с реквизитами, позволяющими её идентифицировать.

Форма документа (схема, отражающая семантико-информативную структуру текста) предоставляет в распоряжение его составителя определенный набор **реквизитов** (необходимые элементы оформления документа) и определенную их **композицию** (последовательность и порядок их размещения в тексте). Состав реквизитов, требования к реквизитам и бланкам документов устанавливаются ГОСТом. В настоящее время это ГОСТ Р 6.30-2003 «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов».

	Состав реквизитов документа
1.	Государственный герб Российской Федерации
2.	Герб субъекта Российской Федерации
3.	Эмблема организации или товарный знак
4.	Код организации
5.	Основной государственный регистрационный номер юридического лица (ОГРН)
6.	Идентификационный номер налогоплательщика / код причины постановки на учет (ИНН / КПП)
7.	Код формы документа
8.	Наименование организации
9.	Справочные данные об организации
10.	Наименование вида документа (жанр документа)
11.	Дата составления документа
12.	Регистрационный номер документа
13.	Ссылка на регистрационный номер или дату документа
14.	Место составления или издания документа
15.	Адресат
16.	Гриф утверждения документа
17.	Резолюция
18.	Заголовок к тексту
19.	Отметка о контроле
20.	Текст документа
21.	Отметка о наличии приложения
22.	Подпись
23.	Гриф согласования документа
24.	Визы согласования документа
25.	Оттиск печати
26.	Отметка о заверении копии
27.	Отметка об исполнителе

28.	Отметка об исполнении документа и направлении его в дело
29.	Отметка о поступлении документа в организацию
30.	Идентификатор электронной копии документа

Состав реквизитов конкретного документа определяется его видом и назначением. К наиболее частотным реквизитам можно отнести: **адресата**, **адресанта**, **название жанра документа**, **основной текст документа**, **список приложений**, **дату** и **подпись**. Логическому делению текста способствует его рубрикация, деление на части с помощью внутренних заголовков, подзаголовков, нумерация или графически единообразное выделение всех однотипных частей.

Способы классификации документов:

1. ***По месту составления***: *внутренние* и *внешние* документы. **Внутренний** документ создаётся в рамках одной организации, где работают и составитель, и адресат текста (*приказы администрации предприятия, служебные записки, должностные инструкции* и др). **Внешние** документы предназначаются адресатам, работающим на других предприятиях (*все виды деловых писем, приказы и распоряжения вышестоящих организаций* и др.).
2. ***По содержанию***: *простые* и *сложные*. **Простые** документы посвящены решению одного вопроса (*заявление, объяснительная записка* и другие виды личной документации), **сложные** – двух и более (*приказы, письма, инструкции*).
3. ***По форме***: *индивидуальные* и *типовые*. **Индивидуальные** документы предполагают некоторую самостоятельность текста и элементы творческого подхода, что не исключает их стандартизованности (*отдельные виды писем, служебных и докладных записок*). **Типовые** документы строятся на базе заранее заданного текста путём видоизменения его отдельных элементов; чаще всего эти документы одинаковы для групп однородных предприятий (*штатное расписание, положение о персонале* и др.). Если в типовом документе постоянные элементы отпечатаны типографским способом, а для переменных предусмотрены пробелы, которые заполняются при его составлении, то такой документ называют **трафаретным** (*анкеты, некоторые виды справок, трудовые договоры*).
4. ***По срокам исполнения***: *срочные* и *бессрочные*. В **срочных** документах содержится указание на выполнение некоторых действий в ограниченный временной период (*распоряжения, указания* и др.). Действие **бессрочных** документов не ограничено временными рамками (*указы, законы, некоторые виды инструкций*).
5. ***По происхождению***: *служебные* и *личные*. **Служебные** документы направлены на реализацию интересов организации (*приказы, деловые письма, контракты*). **Личные** документы, как правило, отражают взаимодействие отдельного физического лица с официальными органами или другими лицами (*заявление, доверенность, расписка, объяснительная записка* и др.).
6. ***По виду оформления***: *подлинник* (подписанный и надлежащим образом оформленный экземпляр документа, составленный в первый раз), *копия* (абсолютно точно воспроизводит подлинник, но имеет ограниченную юридическую силу, за исключением нотариально заверенных.), *дубликат* (копия, имеющая одинаковую силу с подлинником, выдающаяся в случае его утери) и *выписки* (воспроизведение только одной из частей подлинника).
7. ***По функции***: **организационные** документы, направленные на регламентацию деятельности организации или предприятия (*устав, положение, штатное расписание,*

положение о персонале, должностную инструкцию), **распорядительные** документы, содержащие конкретные распоряжения (*приказы, распоряжения, указания, решения*)., **информационно-справочные** документы, документы **по персоналу предприятия** (*трудовой договор, личные карточки, учётные карточки, анкеты*), **письма**, **договоры**.

Задание 1. *Проанализируйте текст официально-делового стиля:*

1. *Укажите характеристику данного текста с точки зрения классификации документов.*

2. *Обозначьте реквизиты и композиционные элементы государственного документа.*

3. *Опишите стилевые и языковые особенности текста*[10].

Федеральный закон от 1 июня 2005 г. N 53-ФЗ
«О государственном языке Российской Федерации»

С изменениями и дополнениями от: 2 июля 2013 г., 5 мая 2014 г.

Принят Государственной Думой 20 мая 2005 года

Одобрен Советом Федерации 25 мая 2005 года

Настоящий Федеральный закон направлен на обеспечение использования государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации, обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации, защиту и развитие языковой культуры.

Статья 1. Русский язык как государственный язык Российской Федерации

1. В соответствии с Конституцией Российской Федерации государственным языком Российской Федерации на всей ее территории является русский язык.

2. Статус русского языка как государственного языка Российской Федерации предусматривает обязательность использования русского языка в сферах, определенных настоящим Федеральным законом, другими федеральными законами, Законом Российской Федерации от 25 октября 1991 года N 1807-I «О языках народов Российской Федерации» и иными нормативными правовыми актами Российской Федерации, его защиту и поддержку, а также обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации.

3. Порядок утверждения норм современного русского литературного языка при его использовании в качестве государственного языка Российской Федерации, правил русской орфографии и пунктуации определяется Правительством Российской Федерации.

4. Государственный язык Российской Федерации является языком, способствующим взаимопониманию, укреплению межнациональных связей народов Российской Федерации в едином многонациональном государстве.

5. Защита и поддержка русского языка как государственного языка Российской Федерации способствуют приумножению и взаимообогащению духовной культуры народов Российской Федерации.

6. При использовании русского языка как государственного языка Российской Федерации не допускается использование слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка (в том числе нецензурной брани), за

---

[10] Возможна работа по вариантам: <u>1 вариант</u> – анализ Статьи 1; <u>2 вариант</u> – анализ Статьи 3; <u>3 вариант</u> – анализ статьи 4.

исключением иностранных слов, не имеющих общеупотребительных аналогов в русском языке.

7. Обязательность использования государственного языка Российской Федерации не должна толковаться как отрицание или умаление права на пользование государственными языками республик, находящихся в составе Российской Федерации, и языками народов Российской Федерации.

<…>

Статья 3. Сферы использования государственного языка Российской Федерации

1. Государственный язык Российской Федерации подлежит обязательному использованию:

1) в деятельности федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности, в том числе в деятельности по ведению делопроизводства;

2) в наименованиях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности;

3) при подготовке и проведении выборов и референдумов;

4) в конституционном, гражданском, уголовном, административном судопроизводстве, судопроизводстве в арбитражных судах, делопроизводстве в федеральных судах, судопроизводстве и делопроизводстве у мировых судей и в других судах субъектов Российской Федерации;

5) при официальном опубликовании международных договоров Российской Федерации, а также законов и иных нормативных правовых актов;

6) во взаимоотношениях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности и граждан Российской Федерации, иностранных граждан, лиц без гражданства, общественных объединений;

7) при написании наименований географических объектов, нанесении надписей на дорожные знаки;

8) при оформлении документов, удостоверяющих личность гражданина Российской Федерации, за исключением случаев, предусмотренных законодательством Российской Федерации, изготовлении бланков свидетельств о государственной регистрации актов гражданского состояния, оформлении документов об образовании и (или) о квалификации установленного в соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2012 года N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» образца, а также других документов, оформление которых в соответствии с законодательством Российской Федерации осуществляется на государственном языке Российской Федерации, при оформлении адресов отправителей и получателей телеграмм и почтовых отправлений, пересылаемых в пределах Российской Федерации, почтовых переводов денежных средств;

9) в продукции средств массовой информации;

9.1) при показах фильмов в кинозалах;

9.2) при публичных исполнениях произведений литературы, искусства, народного творчества посредством проведения театрально-зрелищных, культурно-просветительных, зрелищно-развлекательных мероприятий;

10) в рекламе;

11) в иных определенных федеральными законами сферах.

1.1. В сферах, указанных в пунктах 9, 9.1, 9.2 и 10 части 1 настоящей статьи, и в иных предусмотренных федеральными законами случаях наряду с государственным языком Российской Федерации могут использоваться государственные языки республик, находящихся в составе Российской Федерации, другие языки народов Российской Федерации, а в случаях, предусмотренных законодательством Российской Федерации, также иностранные языки.

<…>

Статья 4. Защита и поддержка государственного языка Российской Федерации

В целях защиты и поддержки государственного языка Российской Федерации федеральные органы государственной власти в пределах своей компетенции:

1) обеспечивают функционирование государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации;

2) разрабатывают и принимают федеральные законы и иные нормативные правовые акты Российской Федерации, разрабатывают и реализуют направленные на защиту и поддержку государственного языка Российской Федерации соответствующие федеральные целевые программы;

3) принимают меры, направленные на обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации;

4) принимают меры по совершенствованию системы образования и системы подготовки специалистов в области русского языка и преподавателей русского языка как иностранного языка, а также осуществляют подготовку научно-педагогических кадров для образовательных организаций с обучением на русском языке за пределами Российской Федерации;

5) содействуют изучению русского языка за пределами Российской Федерации;

6) осуществляют государственную поддержку издания словарей и грамматик русского языка;

7) осуществляют контроль за соблюдением законодательства Российской Федерации о государственном языке Российской Федерации, в том числе за использованием слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка, путем организации проведения независимой экспертизы;

8) принимают иные меры по защите и поддержке государственного языка Российской Федерации.

<…>

Президент Российской Федерации В. Путин

Задание 2. *Проанализируйте следующий текст*[11]*:*

1. *Обозначьте реквизиты и структурно-содержательные элементы документа.*

2. *Опишите стилевые и языковые особенности.*

3. *Имеются ли в тексте документа средства, не соответствующие требованиям официально-делового стиля? Докажите свою точку зрения.*

---

[11] Текст Регламента приводится без изменений и исправлений.

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор УГГУ, профессор
__________Н.П. Косарев

РЕГЛАМЕНТ
ношения форменной одежды преподавателями,
сотрудниками и студентами УГГУ

1. Общие положения

Форменная одежда УГГУ – важнейший наряду с флагом и гербом символ корпоративной чести и достоинства, принадлежности преподавателей, сотрудников и студентов к высшему учебному заведению – Уральскому государственному горному университету.

Ношение форменной одежды в установленных случаях является почетным правом и обязанностью (моральным долгом) всех преподавателей, сотрудников и студентов УГГУ, облегченных этим доверием. По решению ректора почетное право ношения форменной одежды предоставляется заслуженным выпускникам.

Отказ от форменной одежды рассматривается как пренебрежение горняцким единством и неуважение к корпоративной символике Уральского государственного горного университета.

2. Руководящий состав университета: члены Ученого совета, включая ректорат, деканов, заведующих кафедрами, представителей студенческого, ветеранского и профсоюзного актива, а также руководителя управления отделов и служб, не входящие в Ученый совет, обязаны носить форму в следующих случаях:

– на всех рабочих совещаниях, проводимых ректором, первым проректором и проректором по научной работе;
– на заседаниях Ученого совета и Президиума Ученого совета университета, ученых советах факультетов;
– на торжественных собраниях сотрудников и студентов, митингах, конференциях, проводимых по планам ректората и деканатов;
– при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и других официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также политическими, общественными и научными организациями.

3. Преподаватели университета, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

– во время лекционных занятий;
– при участии в собраниях студентов, преподавателей, конференциях и митингах;
– при посещениях ректората и деканатов.

4. Сотрудники из числа административно-управленческого персонала (помощники ректора, проректоров, референты, секретари) обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

– при нахождении на рабочем месте в дни проведения крупных общеуниверситетских мероприятий, при приеме делегаций, гостей и в иных случаях по распоряжению ректора;
– при участии, в том числе при орг. техническом обеспечении заседании Ученого совета и ректорских совещаний;

– при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

5. Студенты – представители студенческого актива, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде:

– при посещении ректората, деканатов;
– на всех официальных мероприятиях, проводимых в университете;
– при участии в официальных мероприятиях, проводимых вне стен университета органами власти, политическими, общественными, научными и образовательными учреждениями.

6. По собственной инициативе студенты, сотрудники и преподаватели университета могут находиться в форменной одежде во всех случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и ее функциональному назначению.

Ученый секретарь совета, профессор О. В. Ошкордин
28.09.2005 г.

Задание 3. *Проанализируйте текст*[12] *с точки зрения использованных языковых средств, характерных для официально-делового стиля. Опишите средства, с помощью которых в тексте реализуется такая стилевая черта, как волюнтативность.*

Есть ли в Правилах отступления от требований официально-делового стиля? Подтвердите свою точку зрения, опираясь на текст документа.

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор ФГБОУ ВПО "УГГУ"
________ Н.П.Косарев
________ 2014 г.

Правила внутреннего распорядка обучающихся
в ФГБОУ ВПО «Уральский государственный горный университет»
Дата введения 01 сентября 2014 года

<…>

5. Основные права и обязанности обучающихся

5.1 Права обучающихся

Обучающиеся в университете имеют право:

– получать образование в соответствии с ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) обучаться в пределах этих стандартов по индивидуальным учебным планам, ускоренным курсам обучения;

– бесплатно пользоваться библиотечно-информационными ресурсами, получать дополнительные (в том числе платные) образовательные услуги;

– участвовать в управлении университетом;

[12] Текст Правил внутреннего распорядка приводится без изменений и исправлений.

– свободно выражать собственные мнения и убеждения;

– выбирать факультативные (необязательные для данного направления подготовки (специальности) и элективные (избираемые в обязательном порядке) курсы, предлагаемые факультетом и кафедрой;

– участвовать в формировании содержания своего образования при условии соблюдения требований ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) среднего профессионального и высшего образования; указанное право может быть ограничено условиями договора, заключенного между студентом и физическим или юридическим лицом, оказывающим ему содействие в получении образования и последующем трудоустройстве;

– осваивать помимо учебных дисциплин по избранным направлениям подготовки (специальностям) любые другие учебные дисциплины, преподаваемые в университете, в порядке, предусмотренном Уставом, а также преподаваемые в других высших учебных заведениях (по согласованию между их руководителями);

– определять по согласованию с деканатом и кафедрами набор дисциплин по специальности в пределах, установленных учебным планом, а также посещать дополнительно любые виды учебных занятий, проводимых в университете;

– ставить перед деканом и ректором, руководителем территориально обособленного учебного подразделения вопрос о замене преподавателей, не обеспечивающих должное качество учебного материала, нарушающих расписание занятий, иные правила организации учебно-воспитательного процесса;

– участвовать в обсуждении и решении важнейших вопросов деятельности университета и его обособленных структурных подразделений, в том числе через общественные организации и органы управления;

– бесплатно пользоваться услугами учебных, научных, лечебных и других подразделений университета в порядке, установленном Уставом;

– принимать участие во всех видах научно-исследовательских работ, конференциях, симпозиумах;

– совмещать учебу с профессиональной деятельностью и иной работой;

– представлять свои работы для публикации, в том числе в изданиях университета;

– обжаловать приказы и распоряжения администрации высшего учебного заведения в установленном законодательством РФ порядке;

– переходить с платного договорного обучения на бесплатное обучение в порядке, предусмотренном Уставом университета;

– получать от университета информацию о положении дел в сфере занятости населения и возможностях трудоустройства по специальности в соответствии с заключенными договорами и законодательством о занятости выпускников образовательных учреждений.

Обучающиеся в университете по заочной форме, выполняющие учебный план, имеют право на дополнительный оплачиваемый и не оплачиваемый отпуск по месту работы, на сокращенную рабочую неделю и на другие льготы, которые предоставляются в порядке, устанавливаемом законодательством РФ (ст. 173-176 ТК РФ).

Обучающиеся в университете имеют право на свободное посещение мероприятий, не предусмотренных учебным планом.

Обучающиеся в университете имеют право на перевод в другое образовательное учреждение, реализующее образовательную программу соответствующего уровня, при согласии этого образовательного учреждения и успешном прохождении ими аттестации.

Обучающиеся в университете по очной форме обучения имеют право на получение отсрочки от призыва на военную службу в соответствии с Федеральным законом «О воинской обязанности и военной службе».

5.2 Обязанности обучающихся

Обучающиеся в университете обязаны:

– добросовестно посещать учебные занятия, глубоко овладевать теоретическими знаниями, практическими навыками и современными методами для работы по избранной специальности;

– выполнять в установленные сроки все виды заданий, предусмотренных соответствующими учебными планами и программами обучения;

– постоянно повышать общую культуру, нравственность и физическое совершенство;

– нетерпимо относиться к недостаткам в учебно-воспитательном процессе и быту;

– бережно и аккуратно относиться к учебным и иным помещениям, оборудованию, учебным пособиям, литературе, приборам, другому имуществу университета; без соответствующего разрешения студентам запрещается выносить предметы и оборудование из лабораторий, кабинетов, аудиторий, учебных, бытовых корпусов и других помещений;

– нести материальную ответственность за ущерб, причиненный имуществу университета в соответствии с нормами действующего законодательства;

– незамедлительно сообщать в администрацию университета о возникновении ситуации, представляющей угрозу жизни и здоровью людей, сохранности имущества университета;

– соблюдать требования Устава университета, настоящие Правила и Правила проживания в общежитиях;

– поддерживать деловую репутацию, честь и престиж университета.

Обучающиеся в территориально обособленном учебном подразделении университета (филиале) помимо указанных выше правомочий пользуются правами и исполняют обязанности, предусмотренные Положением о соответствующем структурном подразделении или договорами о профессиональной подготовке, включая договоры на индивидуальную подготовку специалиста.

При неявке на занятия по уважительным причинам обучающийся ставит об этом в известность декана факультета, руководителя (уполномоченного работника) иного учебного структурного подразделения и в первый день явки на учебу представляет данные о причине неявки и документы установленного образца (справки, письма, телеграммы и т. п.), содержащие сведения оправдательного характера.

5.3 Требования к ношению формы

Обучающиеся в университете должны быть дисциплинированными и опрятными, вести себя достойно в университете, на улице, в общественном месте и в быту. В соответствии с решением Ученого совета университета от 25.06.2004 года, обучающиеся обязаны носить форменную одежду в ниже перечисленных случаях:

– на всех совещаниях, проводимых ректором, проректорами и деканами факультетов;

– на торжественных собраниях коллектива, митингах и конференциях;

– при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и иных официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также общественными и научными организациями, на которых обучающиеся университета являются его представителями;

– при участии, в т. ч. организационно-техническом обеспечении заседаний Ученого совета университета и ректорских совещаний; при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

– в иных случаях по распоряжению ректора.

По собственной инициативе обучающиеся университета могут находиться в форменной одежде в иных случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и её функциональному назначению.

Запрещается ношение предметов формы одежды измененных или неустановленных образцов, а также знаков различия, не предусмотренных Положением о форменной одежде.

<…>

ТЕМА 12. ОФОРМЛЕНИЕ ДЕЛОВЫХ БУМАГ

Цель – научиться оформлять основные жанры деловых бумаг.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (требуется записать определение, основные реквизиты и образец):

Заявление – это документ, содержащий просьбу, предложение или жалобу какого-либо лица.

Заявление, как и большинство деловых бумаг, составляется в произвольной форме от руки или печатается на листе бумаги формата А4.

Основные реквизиты заявления:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Сведения об адресате (должность, ФИО полностью, в некоторых случаях адрес или другая контактная информация).

3. Наименование жанра документа.

4. Основной текст заявления с точным изложением просьбы, предложения или жалобы.

5. Опись приложений к документу, если они имеются.

6. Дата.

7. Подпись.

Образец оформления заявления

Декану ФГиГ
проф. Талалаю А. Г.
от студента группы МПГ-16
Волкова Михаила Владимировича

Заявление

Прошу отпустить меня с занятий на 3 дня с 25 по 27 октября 2018 года в связи с участием в областных соревнованиях по футболу.

Копию справки-вызова прилагаю.

01.10.2018 г.

Доверенность – это документ, выдаваемый одним лицом (доверителем) другому лицу (доверенному) для представительства перед третьими лицами и дающий право доверенному лицу действовать от имени доверителя.

Доверенность предоставляет полномочия доверенному лицу предпринимать за доверителя какое-либо действие. В зависимости от вида полномочий различают три вида доверенности: 1) **разовая** (дает право на совершение одного конкретного действия), 2) **специальная** (дает право на совершение однородных действий), 3) **генеральная** (дает право на общее управление имуществом доверителя).

Основные реквизиты разовой доверенности:

1. Наименование жанра документа.

2. Наименование доверителя (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

3. Наименование доверенного лица (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

4. Формулировка доверяемой функции.

5. Дата.

6. Подпись.

Образец оформления разовой доверенности

Доверенность

Я, Зорянова Евгения Михайловна, студентка группы ВД-16 (паспорт: серия 3209 № 345177, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Чкаловском районе гор. Екатеринбурга 09.06.2009 г., проживающая по адресу: г. Екатеринбург, ул. 8 марта, д. 104, кв. 190), доверяю Соловчуку Сергею Станиславовичу, студенту группы ГМО-17 (паспорт: серия 5404 № 654321, выдан Железнодорожным РУВД г. Ульяновска 13.09. 2008 г., проживающему по адресу: г. Екатеринбург, ул. Сулимова, д. 63, кв. 77), получить в кассе УГГУ мою стипендию за март 2017 года.

25.02.2017 г.

Расписка – это документ, подтверждающий произведенное кем-либо определенное действие (получение ценных предметов).

Расписка всегда составляется от руки. Если она имеет особо важное значение, ее необходимо заверить.

Основные реквизиты расписки:

1. Наименование жанра документа.

2. Наименование лица, получившего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

3. Наименование лица, выдавшего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

4. Точное наименование полученных ценностей с указанием количества (цифрами и прописью).

5. Дата, до которой необходимо вернуть полученные ценности.

6. Дата.

7. Подпись.

Образец оформления расписки

Расписка

Я, Воробьева Наталия Александровна, студентка группы УП-17 (паспорт: серия 5009 № 2435672, выдан отделом УФМС Ленинского района г. Новосибирска 25.09.2005 г., проживающая по адресу: Свердловская область, г. Первоуральск, ул. Горького, д. 7, кв. 5), получила от Штиппеля Артемия Павловича, инженера кафедры ГД (паспорт: серия 6507 № 575849, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Кировском районе г. Екатеринбурга 05.10.2004 г., проживающего по адресу: г. Екатеринбург, пер. Красный, д. 34, кв. 33), 10 000 (десять тысяч) рублей.

Обязуюсь вернуть указанную сумму до 31 декабря 2017 г.

07 ноября 2017 г.

Докладная записка – это документ, информирующий адресата о сложившейся ситуации, а также содержащий выводы и предложения составителя.

Основной текст докладной записки делится на две части:

- в первой излагаются причины, послужившие поводом для ее написания;
- во второй анализируется сложившаяся ситуация, содержатся выводы и предложения о действиях, которые необходимо предпринять.

Основные реквизиты докладной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Наименование жанра документа.

3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.

4. Опись приложений к документу, если они имеются.

5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).

6. Дата.

Образец оформления докладной записки

Ректору УГГУ
проф. Душину А. В.

Докладная записка

24 декабря 2018 г. примерно в 12.30 я сдал свой пуховик в гардероб 4 учебного корпуса. Через два часа (после окончания праздничных мероприятий) я попытался получить пуховик по бирке, но его не оказалось на вешалке. Студенты, дежурившие в гардеробе в тот день, отказались объяснять, что произошло и куда пропала моя одежда.

Прошу разобраться в сложившейся ситуации и помочь с поисками пуховика.

Описание прилагается.

Студент группы ТБ-17 *Вутенко Б. Н./*
25 декабря 2018 г.

Объяснительная записка – это документ, объясняющий причины какого-либо события, факта, поступка (нарушения трудовой или учебной дисциплины, невыполнение задания, поручения и т. д.).

Основной текст объяснительной записки делится на две части:

- в первой излагаются, констатируются факты нарушения;
- во второй объясняются причины нарушения.

Основные реквизиты объяснительной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Наименование жанра документа.

3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.

4. Опись приложений к документу, если они имеются.

5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).

6. Дата.

Образец оформления объяснительной записки

Зав. кафедрой ИЯДК
доц. Юсуповой Л. Г.

Объяснительная записка

05.03.2018 г. я опоздала на практическое занятие по иностранному языку по причине транспортной аварии на перекрестке улиц Малышева и Гагарина.

Выданную транспортным предприятием справку прилагаю.

Студентка группы МЭ-15 *<u>/Вайслер Ю. М./</u>*
07.03.2018 г.

Задание 1. *Напишите от своего имени следующие жанры деловых бумаг:*

а) заявление с просьбой продлить Вам сессию на неделю;

б) заявление с просьбой принять Вас на работу;

в) доверенность на получение Вашей стипендии в этом месяце;

г) расписку в получении Вами образцов минералов для выполнения лабораторной работы;

д) докладную записку о пропаже Ваших личных вещей из аудитории;

е) объяснительную записку о пропуске Вами занятий в течение недели;

ж) объяснительную записку о неявке на экзамен.

Задание 2. *Исправьте допущенные ошибки в оформлении и содержании следующих документов. Обратите внимание на нарушение разного типа языковых норм (орфографических, пунктуационных, лексических и грамматических). Запишите исправленный вариант.*

Текст 1

Декану УГГУ
От студента III курса очной формы обучения факультета гражданской защиты Волк Василия Васильевича

заявление

В связи с отъездом на лидерские сборы очень прошу разрешить не посещать мне занятия на следующей неделе.

09.09.18 г.

Текст 2

Ректору УГГУ

Н. П. Косареву

доверенность.

Я, Задорин Виктор, студент УГГУ, даю право на получение получаемой мной стипендии студенту Гудину Александру Геннадьевичу (паспорт 6509 номер 124338, ул. Мира, 90-1).

1.5.18 г. /Задорин В. З./

Текст 3

Кафедре ИЯДК

расписка

Я – Пустник Валентин Тимурович, прошу выдать мне учебные пособия для практических занятий. Автор – Мясникова Юлия Марковна в размере одной штуки. Паспортные данные – серия 6102, номер 879521, УФМС России, дата рождения – 19.02.2000 года, проживаю в городе Лангепас на улице Парковая, 7.

Обязуюсь вернуть в срок.

25 сентября

Текст 4

Декану ГМФ
Козину Владимиру
Зиновьевичу

Докладная

Уважаемый Владимир Зиновьевич!

Сегодня я, Курпатова Вера, студентка ГМФ, оставила без присмотра свои вещи в учебной аудитории 2240. При возвращении моих вещей в аудитории не было. Я очень расстроилась.

Пропали: куртка черная кожанная, красная сумка в цветочек, белый платок.

1 октября 2018 года

Текст 5

Зав. кафедры ГТФ Волкову М. Н.
От студента Хлебникова Семена.

Объяснительная о прогуле

Я, Семен Хлебников, отсутствовал на занятиях два месяца всвязи болезни. Справку из 6 городской больницы прилогаю.

01.11.18 *Хлебников С.*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. *Голуб И. Б.* Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. Б. Голуб. – Электрон. текстовые данные. – М.: Логос, 2014. – 432 с. – 978-5-98704-534-3. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/39711.html
2. *Культура устной и письменной речи делового человека*: Справочник. Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания).
3. *Меленскова Е. С.* Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 78 с.
4. *Федосюк М. Ю., Ладыженская Т. А., Михайлова О. А., Николина Н. А.* Русский язык для студентов-нефилологов: учебное пособие. М.: Флинта: Наука, 2014 (и другие стереотипные издания).

Дополнительная литература

1. *Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи: учебное пособие для вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 544 с. (и другие стереотипные издания)
2. *Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи для инженеров: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Феникс, 2003. 384 с.
3. *Веселкова Т. В.* Культура устной и письменной коммуникации [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т. В. Веселкова, И. С. Выходцева, Н. В. Любезнова. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 268 с. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/54473.html
4. *Гавриленко Р. И., Меленскова Е. С., Шалина И. В.* Русский язык и культура речи: учебное пособие. 4-е изд., стереотип. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 84 с.
5. *Голуб И. Б.* Русский язык и культура речи: учебное пособие. М.: Логос, 2005. 432 с. (и другие стереотипные издания)
6. *Данцев А. А., Нефёдова Н. В.* Русский язык и культура речи для технических вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2001. 320 с. (и другие стереотипные издания)
7. Дускаева Л. Р., Протопопова. О. В. Стилистика официально-деловой речи: учебное пособие. М.: Академия, 2012. 272 с.
8. *Карякина М. В*. Русский язык и культура речи. Подготовка к контрольному тестированию. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 71 с.
9. *Коренькова Е. В., Пушкарева Н. В.* Русский язык и культура речи: учебник. М.: Проспект, 2013. 376 с.
10. *Котюрова М. П.* Стилистика научной речи: учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования. М.: Академия, 2012. 240 с.
11. *Лапынина Н. Н.* Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: курс лекций / Н. Н. Лапынина. — Электрон. текстовые данные. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 161 с. – 978-5-89040-431-2. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/22667.html
12. *Лыткина О. И.* Теоретический курс культуры речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. И. Лыткина. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2009. – 105 с. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/46332.html

13. *Меленскова Е. С.* Русский язык делового общения: учебное пособие для студентов всех специальностей и направлений подготовки. Екатеринбург: УГГУ, 2018. 80 с.

14. *Меленскова Е. С.* Русский язык и культура речи: учебное пособие с упражнениями и контрольными работами для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 80 с.

15. *Меленскова Е. С.* Стилистика русского языка: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 86 с.

16. *Миняева В. И.* Репетитор по русскому языку. Орфография. Пунктуация. Культура речи: учебное пособие. 5-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: УГГУ, 2007. 239 с.

17. *Петрова Ю. А.* Культура и стиль делового общения [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю. А. Петрова. – Электрон. текстовые данные. – М.: ГроссМедиа, 2007. – 190 с. – 5-476-003-476. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/1129.html

18. *Скворцов Л. И.* Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Скворцов Л. И. – Электрон. текстовые данные. – М.: Мир и Образование, Оникс, 2009. – 1104 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/14555.html

19. *Словарь-справочник по культуре речи*: для школьников и студентов / Отв. ред. А. А. Евтюгина. - Екатеринбург: У-Фактория, 2004. 334 с.

20. *Усанова О. Г.* Культура профессионального речевого общения [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / О. Г. Усанова. – Электрон. текстовые данные. – Челябинск: Челябинский государственный институт культуры, 2008. – 93 с. – 5-94839-062-4. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/56426.html

ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. *ГОСТ 6.30-2003*. «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов» (электронная публикация http://docs.cntd.ru/document/1200031361).
2. *Грамота (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramota.ru.
3. *Колтунова М. В.* Язык и деловое общение. Нормы. Риторика. Этикет. М.: Экономика, 2000. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://bibliotekar.ru/delovoe-obschenie/index.htm
4. *Культура письменной речи (сайт)* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramma.ru.
5. *Русский язык и культура речи/* под ред. Максимова В. И. М., 2001 [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.bibliotekar.ru/russkiy-yazyk/
6. *Русский язык*: *энциклопедия русского языка (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://russkiyyazik.ru.
7. *Стилистический энциклопедический словарь русского языка (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://stylistics.academic.ru.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет геологии и геофизики

Кафедра Математики

В. Б. Сурнев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Екатеринбург 2020

Министерство высшего образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Уральский государственный горный университет

Факультет геологии и геофизики

Кафедра Математики

В. Б. Сурнев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Екатеринбург 2020

УДК 512.64
ББЛ 22.143
С 90

С 90 В. Б. Сурнев
Высшая математика. Решебник задач по высшей математике: -
Учебно-методическое пособие. Екатеринбург. ФГБОУ ВО УГГУ. 2020. – 338 с.

ISBN

Пособие охватывает все разделы дисциплины «Математика», предусмотренные государственными стандартами подготовки специалистов специальности «Горное дело». В каждой главе пособия приводятся краткие теоретические сведения и примеры решения типовых задач, предлагаются задания для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности 21.05.04 – «Горное дело»: специализация № 6 «Обогащение полезных ископаемых», специализация № 10 «Электрификация и автоматизация горного производства», специализация N 8 "Горнопромышленная экология", специализация № 9 "Горные машины и оборудование". Учебное пособие моет быть использовано и для других специальностей и направлений подготовки горно-геологического профиля высших учебных заведений.

Рецензенты:
Кафедра информатики ФГБОУ ВО УГГУ, зав. кафедрой канд. техн. наук, доцент А. В. Дружинин

Д-р физ.-мат. наук, в. н. с., ИГФ УрО РАН им. Ю. П. Булашевича А. Ф. Шестаков.

Сурнев Виктор Борисович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ» предназначено для студентов технических направлений подготовки и технических специальностей университетов. Цель данного пособия – оказание помощи студентам в самостоятельной работе по освоению общего курса высшей математики технического вуза. Перечислим некоторые причины, побудившие автора к созданию данного пособия.

Хорошо известно, что без самостоятельной работы сколько-нибудь твёрдое освоение курса высшей математики совершенно невозможно. За то малое количество часов аудиторных занятий, которое отводится современными учебными планами, особенно для направлений подготовки бакалавров, никакой преподаватель не сможет обучить студентов даже основам математики, не говоря уже об овладении методами последней на уровне, нужном для плодотворного изучения специальных дисциплин учебных планов таких, как, например, теоретическая механика, теоретическая электротехника и так далее.

Желательно, чтобы студент научился самостоятельно выбирать метод решения задачи, поставленной в предметной области, и мог использовать для его реализации знания по высшей математике, полученные в университете. Последнее может быть достигнуто только упорным и творческим самостоятельным трудом, чему и призвано помочь данное пособие.

В настоящее время достаточно велико число желающих получить высшее образование с использованием дистанционных методов обучения. Несмотря на наличие у подавляющего большинства обучающихся в свободном доступе вычислительной техники разного уровня, «книжный вариант» самостоятельного изучения дисциплины математика не потерял своей актуальности. Для многих студентов наличие печатного пособия по практическому освоению курса высшей математики предпочтительнее её электронного варианта.

Предлагаемое учебное пособие появилось как результат многолетнего преподавания автором высшей математики в техническом вузе – ФГБОУ ВО Уральский государственный горный университет. Пособие содержит материал по основным разделам общего курса высшей математики. Некоторые разделы, включаемые обычно в общий курс высшей математики, в пособии не представлены.

В качестве примера назовём теорию функций комплексной переменной (ТФКП). По мнению автора ТФКП является по существу самостоятельной дисциплиной и требует отдельного издания. К тому же в русскоязычной литературе имеются в большом числе практические пособия по данной дисциплине.

Аналогично, теория вероятностей и математическая статистика в совокупности являются отдельной дисциплиной со своими теориями и методами. Поэтому включение теории вероятностей и математической статистики в качестве раздела в пособие по общему курсу высшей математики нецелесообразно.

Также отсутствует в пособии теория уравнений с частными производными, которая является по мнению автора отдельной дисциплиной, имеющей своё историческое название – «Математическая физика».

Кроме перечисленных разделов высшей математики в пособии не представлена теория операторов, которая известна также под названием «Функциональный анализ». Данная математическая дисциплина вынужденно исключена из современных учебных планов и программ в связи с сокращением времени на изучение высшей математики.

Список разделов, включённых в данное пособие, легко увидеть из оглавления, поэтому перечислять их нет необходимости. Сделаем лишь несколько замечаний относительно структуры пособия.

Перед каждым разделом помещены краткие теоретические сводки, цель которых напомнить студенту, изучившему предварительно теоретический материал по лекционному курсу, необходимые для разбора предлагаемых примеров и решения заданий формулы.

Дальше приводятся с подробным решением примеры типовых задач, перемежающиеся иногда с дополнительными сведениями и с практико-ориентированными примерами из предметных областей.

После примеров с решениями приводятся в достаточном количестве задания для самостоятельной работы. В заданиях для самостоятельной работы ответы не приводятся. Сделано это намеренно, с целью побудить студентов в процессе самостоятельных занятий к общению между собой и с преподавателем.

В заключение отметим, что особое внимание в пособии уделяется трудным для освоения студентами разделов высшей математики, имеющих на первый взгляд абстрактный характер, например, линейной алгебре и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Прикладной характер данных разделов не может быть обоснован на начальных стадиях обучения в вузе и выяснится лишь при изучении специальных дисциплин.

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ БЩЕЙ АЛГЕБРЫ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие 1. Теория множеств

Множества, операции, отношения

Предварительные сведения

Множество – неопределяемое понятие. Множество можно задать. Конечное множество задаётся списком, например,

$$M = \{a, b, \dots k\},$$

где $a, b, \dots k$ – **элементы** множества.

Бесконечное множество задаётся при помощи признака, позволяющего установить принадлежность элементов данному множеству:

$$M = \{x : x \in K\}.$$

Читается: M есть множество элементов x, обладающих свойством (свойствами) K, и только эти элементы являются элементами данного множества.

Над множествами можно производить операции.

Множества M_1 и M_2 считаются **равными**, если

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2 \wedge y \in M_2 \Rightarrow y \in M_1.$$

Пересечение множеств: $M_1 \bigcap M_2 \overset{def}{=} \{x : x \in M_1 \; и \; x \in M_2\}$.

Объединение множеств: $M_1 \bigcup M_2 \overset{def}{=} \{x : x \in M_1 \; или \; x \in M_2\}$.

Разность множеств: $M_1 - M_2 \equiv M_1 \setminus M_2 = \{x : x \in M_1 \; и \; x \notin M_2\}$.

Произведение множеств: $M_1 \times M_2 = \{\{x, y\} : x \in M_1, \, y \in M_2\}$.

Здесь $\{x, y\}$ – упорядоченная пара элементов $x \in M_1, \, y \in M_2$.

Закон тождества гласит:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_1.$$

Пусть $x \in M \wedge y \in M$. **Бинарной алгебраической операцией** называется отображение

$$\varphi : \{x, y,\} \to z \in M.$$

Алгебраическая операция называется **ассоциативной**, если

$$(\forall x,\ y,\ z\in M)\ \ x*(y*z)=(x*y)*z\,.$$

Алгебраическая операция называется **коммутативной**, если

$$(\forall x,\ y\in M)\ \ x*y{=}y*x.$$

Алгебраическая операция $(\circ)$ называется **дистрибутивной** относительно алгебраической операции $(*)$, если $(\forall x,\ y,\ z\in M)$

1) $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$,
2) $z\circ(x*y)=(z\circ x)*(z\circ y)$.

Множество $G\neq\varnothing$ с заданной на нём бинарной алгебраической (внутренней) операцией $(*)$, называется **группой**, если выполнены следующие аксиомы:

1) $(\forall\ x,\ y,\ z\in G)\ \ x*(y*z)=(x*y)*z$;
2) $(\exists\ e\in G):(\forall\ x\in G)\ \ x*e=e*x=x$;
3) $(\forall\ x\in G)\left(\exists\ x^{-1}\in G\right):\ x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$.

Группа называется **абелевой**, или **коммутативной**, если алгебраическая (групповая) операция коммутативна.

Непустое множество K с двумя алгебраическими операциями **сложением** и **умножением** называется **кольцом**, если выполнены аксиомы:

1) K есть абелева группа по операции сложения (**аддитивная группа кольца**);
2) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть $(\forall x,\ y,\ z\in K)\ \ x(y+z)=xy+xz$ и $(y+z)x=yx+zx$.

Непустое множество P вместе с двумя алгебраическими операциями – **сложением** и **умножением**, называется **полем**, если выполняются следующие аксиомы:

1) P есть аддитивная абелева группа по сложению;
2) $P-\{0\}$ есть мультипликативная абелева группа по умножению;
3) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть $(\forall\ x,\ y,\ z\in P)\ \ x(y+z)=xy+xz,\ (y+z)x=yx+zx$.

Примеры с решением

Пример 1.1.1. Найти все подмножества множества $M = \{2,\ 7,\ 9\}$.

Р е ш е н и е. Подмножествами данного множества являются: пустое множество $\varnothing$; само множество M; одноэлементные множества $\{2\},\ \{7\},\ \{9\}$; двухэлементные множества $\{2,\ 7\},\ \{2,\ 9\},\ \{7,\ 9\}$. $\otimes$

Пример 1.1.2. Найти пересечение, объединение и разность множеств $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\},\ B = \{b,\ e,\ f,\ k\}$.

Р е ш е н и е. Пересечение множеств $A \bigcap B$ содержит три элемента

$$A \bigcap B = \{b,\ e,\ f\},$$

объединение множеств содержит семь элементов

$$A \bigcup B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ k\},$$

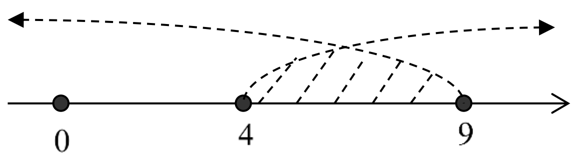
разность

$$A - B = \{a,\ c,\ d\}. \otimes$$

Пример 1.1.3. Найти пересечение множеств решений неравенств

$$2x - 3 > x + 1,\ 3x - 8 < 2x + 1,$$

полагая, что $x \in R^1$.



..ис. 1.

Р е ш е н и е. Решением первого неравенства является множество действительных чисел $x > 4$, решением второго неравенства является множество действительных чисел $x < 9$. Их пересечением (рисунок 1.1.1) является множество $M = \{x \in R^1 \colon 4 < x < 9\}$. $\otimes$

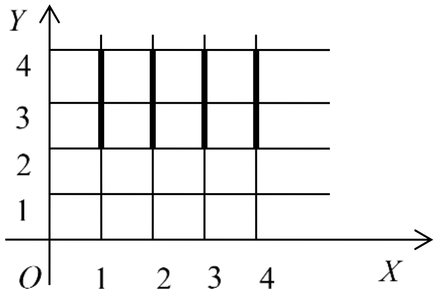
Пример 1.1.4. Найти произведение $A \times B$ множеств $A = \{m,\ p\},\ B = \{e,\ f,\ k\}$.

Р е ш е н и е. Составляем, согласно определению, всевозможные упорядоченные пары, первой компонентой которых является элемент множества A, а второй – элемент множества B:

$$A \times B = \{\{m,\ e\},\ \{m,\ f\},\ \{m,\ k\},\ \{p,\ e\},\ \{p,\ f\},\ \{p,\ k\}\}. \otimes$$

Пример 1.1.5. Изобразить на координатной плоскости произведение $A \times B$ множеств $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \in R^1 : 2 \le y \le 4\}$.

Р е ш е н и е. Множество A конечно, а множество B – бесконечно, поэтому произведение множеств состоит из бесконечного множества упорядоченных пар, первым компонентом которых являются числа 1, 2, 3 или 4, а вторым – любое действительное число из замкнутого промежутка $[2, 4]$. Множество пар координатной плоскости изобразится



в виде четырёх отрезков, параллельных оси ординат (рисунок 2). $\otimes$

Пример 1.1.6. Доказать транзитивность отношения равенства для произвольных множеств.

Р е ш е н и е. Пусть X, Y и Z – произвольные множества. Покажем, что из $X = Y$ и $Y = Z \Rightarrow X = Z$.

Пусть $x \in X$. Тогда, так как $X = Y$, имеем $x \in Y$. Но так как $Y = Z$, получаем $x \in Z$.

Обратно, из $x \in Z$ следует, что $x \in X$. По закону тождества получаем $X = Z$. $\otimes$

Пример 1.1.7. Доказать, что для произвольных множеств A, B и C справедливо равенство: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Р е ш е н и е. Покажем, что

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Пусть $x \in A \setminus (B \cap C)$. Откуда следует, что $x \in A$ и $x \notin B \cap C$. То есть, $x \in A$ и $x \notin B$, или $x \in A$ и $x \notin C$. Поэтому

$$x \in A \setminus B, \text{ или } x \in A \setminus C,$$

то есть

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Следовательно, в соответствие с определением части множества включение

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

доказано.

Включение $(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)\subset A\setminus(B\bigcap C)$ доказывается аналогично.

Из доказанных включений с учётом закона тождества получаем требуемое равенство $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$. $\otimes$

Пример 1.1.8. Проверить непосредственно, что для множеств

$$X=\{3,5,7\},\ Y=\{7,9\},\ Z=\{0,1\}$$

выполняется следующее равенство: $(X\bigcup Y)\times Z=(X\times Z)\bigcup(Y\times Z)$.

Р е ш е н и е. Для левой части равенства непосредственно получаем $X\bigcup Y=\{3,5,7,9\}$ и далее имеем:

$$(X\bigcup Y)\times Z=\{3,5,7,9\}\times\{0,1\}=$$

$$=\{\{3,0\},\{5,0\},\{7,0\},\{9,0\},\{3,1\},\{5,1\},\{7,1\},\{9,1\}\}.$$

Для правой части получаем аналогично:

$$(X\times Z)\bigcup(Y\times Z)=\{\{3,5,7\}\times\{0,1\}\}\bigcup\{\{7,9\}\times\{0,1\}\}=$$

$$=\{\{3,0\},\{5,0\},\{7,0\},\{3,1\},\{5,1\},\{7,1\}\}\bigcup\{\{7,0\},\{7,1\},\{9,0\},\{9,1\}\}=$$

$$=\{\{3,0\},\{5,0\},\{3,1\},\{5,1\},\{7,0\},\{7,1\},\{9,0\},\{9,1\}\}.$$

Сравнивая полученные равенства, видим, что оба множества состоят из одних и тех же элементов, то есть, равны друг другу. $\otimes$

Пример 1.1.9. Выяснить, является ли на подмножестве

$$R^+=\{x\in R^1: x>0\}$$

множества действительных чисел R^1 алгебраической операция $x*y=x^2$ и указать, обладает ли эта операция свойствами коммутативности и ассоциативности.

Р е ш е н и е. Пусть x, y, z – любые элементы из R^+. Тогда, очевидно, $(\forall x\in R^+)\,x^2\in R^+$, то есть операция $(*)$ является бинарной алгебраической операцией. Так как по определению операции имеем

$$(\forall x\neq y)\,x*y=x^2\neq y*x=y^2,$$

то операция $(*)$ не является коммутативной. Далее, так как

$$(\forall x\neq y\neq z\in R^+)\,x*(y*z)=x^2\neq(x*y)*z=(x*y)^2=x^4,$$

то операция $(*)$ не является ассоциативной. $\otimes$

Пример 1.1.10. Ассоциативна ли на множестве действительных чисел R^1 операция $x * y = \sin x \cdot \sin y$.

Р е ш е н и е. Для определённой операции имеем:

$$(\forall x,\ y,\ z \in R)\,(x * y) * z = \sin(\sin x \cdot \sin y) \cdot \sin z,$$

$$x * (y * z) = \sin x \cdot \sin(\sin y \cdot \sin z).$$

Очевидно, что $(x * y) * z = x * (y * z)$ выполняется не для всех $x,\ y,\ z$, следовательно, операция $(*)$ свойством ассоциативности не обладает. $\otimes$

Пример 1.1.11. На множестве $M = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ задано отношение «***меньше***». Изобразить это отношение: 1) выписав все упорядоченные пары; 2) построив граф отношения.

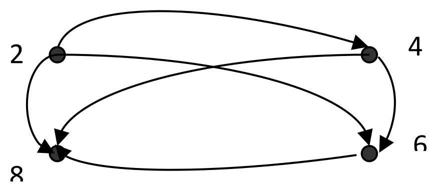


Рис. 1.8.3.

Р е ш е н и е. Отношение имеет вид:

$$2 < 4,\ 2 < 6,\ 2 < 8,\ 4 < 6,\ 4 < 8,\ 6 < 8.$$

Запишем отношение в виде подмножества $\mathfrak{R} \subset M \times M$ произведения множества M на себя, то есть в виде множества упорядоченных пар:

$$\{2,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{2,\ 8\},\ \{4,\ 6\},\ \{4,\ 8\},\ \{6,\ 8\}.$$

Граф отношения приведён на рисунке 3. $\otimes$

Пример 1.1.12. Пусть $M = \{f,\ p,\ q\}$ и задано подмножество $\mathfrak{R}$ множества $M \times M$

$$\{\{f,\ p\},\ \{f,\ q\},\ \{f,\ f\},\ \{p,\ f\},\ \{q,\ f\},\ \{p,\ q\},\ \{p,\ p\},\ \{q,\ p\},\ \{q,\ q\}\}.$$

Обладает ли определяемое этим подмножеством отношение свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности?

Р е ш е н и е. Очевидно, что для элементов множества $\mathfrak{R}$ истинны следующие высказывания:

$$1)\ \{f,\ f\},\ \{p,\ p\},\ \{q,\ q\} \in \mathfrak{R};$$

$$2)\,\{f,\,p\}\wedge\{p,\,f\}\in\Re,\,\{f,q\}\wedge\{q,\,f\}\in\Re,$$
$$\{p,\,q\}\wedge\{q,\,p\}\in\Re;$$

$$3)\,\{f,\,p\}\in\Re\wedge\{p,\,q\}\in\Re\Rightarrow\{f,\,q\}\in\Re,$$
$$\{f,\,q\}\in\Re\wedge\{q,\,p\}\in\Re\Rightarrow\{f,\,p\}\in\Re,$$
$$\{p,\,f\}\in\Re\wedge\{f,\,q\}\in\Re\Rightarrow\{p,\,q\}\in\Re.$$

Поэтому отношение $\Re$ на множестве M, заданное множеством упорядоченных пар элементов M, рефлексивно, симметрично и транзитивно. $\otimes$

Пример 1.1.13. Показать, что отношение включения $\subset$ является отношением порядка.

Р е ш е н и е. 1) Пусть X – произвольное множество. Так как всегда $X \subset X$, то отношение $\subset$ рефлексивно. 2) Пусть X, Y, Z – произвольные множества, для которых выполняются включения $X \subset Y$ и $Y \subset Z$. Если $x \in X$, то в силу $X \subset Y$ имеем $x \in Y$, а так как $Y \subset Z$, то и $x \in Z$. Поэтому $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$, то есть отношение $\subset$ транзитивно. 3) Так как по закону тождества имеем

$$(X \subset Y \wedge Y \subset X) \Leftrightarrow X = Y,$$

то отношение $\subset$ антисимметрично.

Отношение $\subset$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично и, следовательно, является отношением порядка. $\otimes$

Пример 1.1.14. Пусть функция $f: M_1 \to M_2$, где $M_1 \subset R^1$ и $M_2 \subset R^1$, задана формулой $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Требуется: найти множество определения M_1 и множество значений M_2 этой функции; выяснить, является ли данная функция отображением или преобразованием; выяснить, является ли f инъективной, сюръективной или биективной.

Р е ш е н и е. Множеством определения функции f является множество $M_1 = \{x \in R^1 : -1 \le x \le 1\}$, а множеством значений – множество $M_2 = M_1$, следовательно f осуществляет отображение M_1 на M_1, то есть является преобразованием. Так как $(\exists x \in M_1): f(x) = f(-x)$, то преобразование f не является инъективным, но очевидно, что f – сюръективно. Следовательно, отображение f не является биективным. $\otimes$

Пример 1.1.15. Доказать, что множество натуральных чисел N с операцией $(*): x * y = \min\{x, y\}$ является полугруппой.

Р е ш е н и е. Исходя из определения полугруппы, нужно проверить, что операция $(*)$ является алгебраической и ассоциативной. Так как

$$(\forall x,\ y \in N)\ x * y = \min\{x,\ y\} \in N,$$

то операция $(*)$ является алгебраической. Проверим её на ассоциативность, имеем:

$$(\forall x,\ y,\ z \in N)\ (x * y) * z = \min\{\min\{x,\ y\},\ z\} = \min\{x,\ \min\{y,\ z\}\}.$$

Операция $(*)$ ассоциативна. Поэтому $(N,\ *)$ – полугруппа. $\otimes$

Пример 1.1.16. Доказать, что множество положительных действительных чисел $R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$, в котором операции «сложения» и «умножения на число» введены по правилам

$$\left(\forall x,\ y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R\right) x + y \overset{def}{=} x \cdot y \wedge \alpha \cdot x \overset{def}{=} x^{\alpha},$$

является векторным пространством.

Р е ш е н и е. Согласно определению векторного пространства, в множестве R^+ должны выполняться две группы аксиом.

Аксиомы сложения:

1) $(\forall x,\ y \in A)\ x + y = y + x$ (**коммутативность**);

2) $(\forall x,\ y,\ z \in M)\ \ x * (y * z) = (x * y) * z$. (**ассоциативность**);

3) $(\exists 0 \in A) : (\forall x \in A)\ x + 0 = x$ (существование нулевого элемента);

4) $(\forall x \in A)(\exists(-x) \in A):\ x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

Аксиомы умножения на число:

5) $(\forall x \in A \wedge \forall \alpha,\ \beta \in R)\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

6) $(\forall x,\ y \in A \wedge \forall \alpha \in R)\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

7) $(\forall x \in A)\ 1 \cdot x = x$;

8) $(\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R)\ (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

Во множестве R^+ операция «сложения» является бинарной алгебраической операцией, а операция «умножения на число» является внешней бинарной операцией, так как

$$\left(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R^1\right) x \cdot y \in R^+ \wedge x^\alpha \in R^+.$$

Проверим выполнение аксиом.

1) Коммутативность операции «сложения» выполняется, так как

$$\left(\forall x, y \in R^+\right) x \cdot y = y \cdot x.$$

2) Ассоциативность операции «сложения» выполняется, так как

$$\left(\forall x, y, z \in R^+\right) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3) В качестве нулевого элемента выбираем единицу, так как

$$\left(\forall x \in R^+\right) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

4) Противоположный элемент

$$-x = \frac{1}{x},$$

так как $\left(\forall x \in R^+\right) x \cdot \frac{1}{x} = 1.$

5) Так как $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$, то

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

6) Так как $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$, то

$$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

7) Так как $x^1 = x$, то

$$1 \cdot x = x.$$

8) Так как $x^{\alpha \cdot \beta} = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha}$, то

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Все аксиомы векторного пространства выполняются, следовательно, множество R^+ с введёнными операциями является векторным пространством над полем действительных чисел R^1.

$\otimes$

Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа

Предварительные сведения

Комплексными числами называются упорядоченные пары действительных чисел вида (a, b), для которых операции сложения и умножения вводятся посредством определения результата их выполнения в соответствии со следующими аксиомами.

1. Два комплексных числа (a, b) и (c, d) считаются **равными** в том и только в том случае, если $a = c$ и $b = d$, что при помощи логической символики записывается так:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d. \qquad (3.1)$$

2. **Сумма** двух комплексных чисел (a, b) и (c, d) является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b) + (c, d) \overset{def}{=} (a + c, b + d). \qquad (3.2)$$

3. **Произведение** двух комплексных чисел (a, b) и (c, d) является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b)(c, d) \overset{def}{=} (ac - bd, ad + bc). \qquad (3.3)$$

4. Комплексное число $(a, 0)$ **отождествляется с действительным (вещественным) числом** a: $(a, 0) \equiv a$. В частности, $(0, 0) \equiv 0$.

Числа вида $(0, b)$ называются **мнимыми числами**. Число $i \overset{def}{=} (0,1)$ называется мнимой единицей, причём $i^2 = (-1,0) \equiv -1$.

Нетрудно показать, что множество всех комплексных чисел является полем.

Алгебраическая форма комплексного числа

$$z = a + bi \equiv a + ib.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – **модуль** комплексного числа, $\varphi = arctg\,\dfrac{b}{a}$ – **аргумент** комплексного числа.

Операции над комплексными числами производятся путём обычного раскрытия скобок с учётом того, что $i^2 = (-1, 0) = -1$.

В тригонометрической форме операции над комплексными числами выполняются по следующим правилам.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right),$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Корни n-й степени из комплексного числа α существуют и все они даются формулой

$$\beta_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

при любом целом числе k.

Примеры с решением

Пример 1.2.1. Построить точку, изображающую комплексное число

$z = -3 - 4i$.

Р е ш е н и е. В данной задаче $z = a + bi = -3 - 4i$. Так как на комплексной плоскости $a = x$ и $b = y$, то точка, изображающая на комплексной плоскости число z, имеет координаты $x = -3$ и $y = -4$. ⊗

Пример 1.2.2. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -4 - 4\sqrt{3}i$.

Р е ш е н и е. Модуль числа $|z| = \sqrt{(-4)^2 + \left(-4\sqrt{3}\right)^2} = 8$. Точка z лежит в третьей четверти, поэтому $\arg z = arctg\sqrt{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$. ⊗

Пример 1.2.3. Выполнить указанные действия:

$$\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i} - \frac{(3+4i)(2+i)}{2-i}.$$

Р е ш е н и е. Выполняем действия, раскрывая скобки и учитывая свойство мнимой единицы $i^2 = -1$. ⊗

Пример 1.2.4. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $-2 < \operatorname{Im} z \le 3$.

Р е ш е н и е. Так как на комплексной плоскости $\operatorname{Im} z = y$, то искомое множество точек является полосой, заключённой между прямыми линиями с уравнениями $y = -2$ и $y = 3$, причём точки первой прямой этому множеству не принадлежат, а точки второй прямой принадлежат. ⊗

Пример 1.2.5. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $|z - 1| < 3$.

Р е ш е н и е. Положим $z = x + iy$. Тогда имеем $z - 1 = (x - 1) + iy$, откуда получаем

$$|z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 3,$$

или

$$(x-1)^2+y^2<9.$$

Искомое множество точек комплексной плоскости является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке $(1;\,0)$. $\otimes$

Пример 1.2.6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $\log_3|z-3i|<1$.

Р е ш е н и е. Положим $z=x+iy$. Тогда для числа $z-3i$ имеем

$$z-3i=x+i(y-3),$$

откуда получаем

$$|z-3i|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}\,.$$

Решая неравенство

$$\log_3\sqrt{x^2+(y-3)^2}<1,$$

получаем $x^2+(y-3)^2<9$. Искомое множество точек является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке с координатами $(0;\,3)$. $\otimes$

Пример 1.2.7. Представить комплексное число

$$z=-\cos\vartheta+i\sin\vartheta$$

в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е. Стандартная запись комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. По формулам приведения имеем $-\cos\vartheta=\cos(\pi-\vartheta)$. Поэтому, полагая $r=1$ и $\varphi=\pi-\vartheta$, получаем стандартную запись комплексного числа в тригонометрической форме

$$z=\cos(\pi-\vartheta)+i\sin(\pi-\vartheta).\ \otimes$$

Пример 1.2.8. Представить комплексное число $z=4-4\sqrt{3}\cdot i$ в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е. 1) Находим модуль: $|z|=\sqrt{4^2+\left(-4\sqrt{3}\right)^2}=8$.

2) Находим аргумент. Так как $\cos\varphi=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{-4\sqrt{3}}{8}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, $z=8\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$. $\otimes$

Пример 1.2.9. Выполнить умножение комплексных чисел:

$$8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{16}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя формулу умножения, получаем:

$$8\cdot\frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}i.\ \otimes$$

Пример 1.2.10. Выполнить деление комплексных чисел:

$$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right):4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Р е ш е н и е. Используем формулу деления комплексных чисел, получаем:

$$\frac{2}{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i.\ \otimes$$

Пример 1.2.11. Возвести комплексное $2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ число в седьмую степень.

Р е ш е н и е. По формуле возведения комплексного числа в степень имеем:

$$\left[2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right]^7=2^7\left(\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=-64\sqrt{2}+64\sqrt{2}i.\ \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $M=\{4, 8, 11, 22\}$. Образовать всевозможные подмножества этого множества и указать их число.

2. Пусть

$$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ Y=\{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Найти $X\cap Y,\ X\cup Y,\ X-Y,\ Y-X$.

3. Пусть $X=[1, 3)\cup(5, 7]$ и $Y=[2, 6]$. Найти $X\cap Y,\ X\cup Y,\ X-Y,\ Y-X$.

4. Найти пересечение и объединение множеств решений неравенств:

$$3x+4\ge 7x-16,\ |x-3|<1.$$

5. Изобразить на декартовой плоскости произведение множеств:

а) $X=\{x: 2\le x\le 6\},\ Y=\{y: 3<y\le 5\}$;

б) $X=R,\ Y=\{y: -2<y\le 3\}$;

в) $[0, 1]\times[0, 1]$;

г) $[1,\ 2]\times(-\infty,\ +\infty)$;

д) $(0,\ +\infty)\times[-2,\ -3]$.

6 . Доказать, что для произвольных множеств X , Y , Z справедливы равенства:

а) $X \bigcup (X \bigcap Y) = X$;

б) $X \bigcap (X \bigcup Y) = X$

в) $(X \bigcup Y) \setminus (X \bigcap Y) = (X \setminus Y) \bigcup (Y \setminus X)$;

г) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y$;

д) $Y \bigcup (X \setminus Y) = X \bigcup Y$;

е) $(X \bigcup Y) \times Z = (X \times Z) \bigcup (Y \times Z)$;

ж) $(X \bigcap Y) \times Z = (X \times Z) \bigcap (Y \times Z)$;

з) $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z)$;

и) $X \bigcup Y \subset Z \Rightarrow X \times Y = (X \times Z) \bigcap (Z \times Y)$.

7 . Слушатели потока в 100 человек изучают английский, немецкий и французский языки. Причём, 28 слушателей изучают английский язык, 30 - немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - английский и французский, 5 - немецкий и французский. Сколько слушателей изучают только один язык? (проиллюстрировать решение задачи геометрически, используя диаграммы Эйлера).

8 . Истинны или ложны для любых X , Y , Z следующие высказывания:

а) $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$;

б) $(X \neq Y \wedge Y \neq Z) \Rightarrow X \neq Z$.

9 . Найти множество истинности предиката: $\left\langle \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1} < 0 \right\rangle$.

10 . Найти множество истинности предиката:

$$\left\langle \begin{matrix} \textit{Корни системы} \\ \textit{уравнений} \end{matrix} \begin{cases} x - y = m - 1 & \textit{одновременно} \\ 2x - y = 3 - m & \textit{положительны.} \end{cases} \right\rangle$$

11. Найти множество истинности предиката: $\langle x \cdot (x-2) \cdot (x+3) > 0 \rangle$.

12 . Записать высказывания, используя логические символы:

1) «существует такое число x, что для любого числа y справедливо равенство $x+y=0$ »;

2) «если число больше 6, то его квадрат больше 36».

13. Выяснить, являются ли алгебраическими операции сложения, вычитания, умножения и деления на указанных подмножествах множества R действительных чисел и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

а) N; б) $N_{2k}=\{2k:k\in N\}$; в) $N_{2k-1}=\{2k-1:k\in N\}$;

г) Z; д) $Z_{2k}=\{2k:k\in Z\}$; е) R; ж) $R-\{0\}$;

з) $R^{+}=\{x\in R:x>0\}$; и) $R-Q$; к) $\{0,1\}$.

14. Выяснить, являются ли алгебраическими указанные операции на подмножестве $R^{+}=\{x\in R:x>0\}$ множества действительных чисел R, и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

1) $x*y=\dfrac{x+y}{2}$; 2) $x*y=x+y-1$; 3) $x*y=x^2y$;

4) $x*y=\sqrt{xy}$; 5) $x*y=|x-y|$; 6) $x*y=x^y$;

7) $x*y=x^2+y^2$; 8) $x*y=x\cdot y^{\frac{x}{|x|}}$.

15. На множестве $X=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ рассматриваются отношения «x равно y», «x кратно y» и «x больше y на 2». Какое из приведённых ниже подмножеств множества $X\times X$ задаёт соответствующее отношение?

а) $\{\{4,\ 2\},\ \{6,\ 2\},\ \{8,\ 2\},\ \{6,\ 4\},\ \{8,\ 4\},\ \{8,\ 6\},\ \{2,\ 2\},\ \{4,\ 4\},\ \{6,\ 6\},\ \{8{,}8\}\}$;

б) $\{\{4,\ 2\},\ \{6,\ 4\},\ \{8,\ 6\}\}$;

в) $\{\{2,\ 2\},\ \{4,\ 4\},\ \{6,\ 6\},\ \{8,\ 8\}\}$.

16. Доказать, что:

а) множество натуральных чисел N с операциями $(*): x*y=x$ и $(\circ): x\circ y=1$ является полугруппой;

б) множества всех целых чисел Z, всех рациональных чисел Q и всех действительных чисел R являются аддитивными группами, если в качестве групповой операции выбрано сложение чисел.

17 . Найти действительные числа x и y, если:

а) $\dfrac{5x+2xi-3y-3yi}{3+4i}=2$; б) $\dfrac{2u+4i}{2x+y}-\dfrac{y}{x-i}=0$.

18 . Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если:

а) $z=\dfrac{(1-2i)^3}{i}+4i^{16}$; б) $z=\dfrac{3-2i}{1-4i}+i^9$;

в) $z=\dfrac{5i-2}{3i+1}+i+\dfrac{8i-3}{2-i}$; г) $z=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{17+31i}{7+i}+\dfrac{12}{(1+i)^4}\right)+i$.

19 . Выполнить указанные действия:

1) $(1+2i)^6$;

2) $(2+3i)\cdot(4-5i)+(2-3i)\cdot(4+5i)$;

3) $(x-1-i)\cdot(x-1+i)\cdot(x+1+i)\cdot(x+1-i)$;

4) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$;

5) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

6) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$;

7) $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$;

8) $\dfrac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$;

9) $\dfrac{(3-4i)(2-i)}{2+i}-\dfrac{(3+4i)(2+i)}{2-i}$;

10) $\dfrac{5+12i}{8-6i}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$;

11) $\left[\dfrac{1}{3}\left((1-i)^4+\dfrac{7-24i}{4-3i}\right)+i\right]\dfrac{8}{(1+i)^2}$.

20. Найти такие вещественные числа x и y, что следующие пары комплексных чисел будут комплексно-спряжёнными:

а) $z_1=y^2-2y+xy-x+y+(x+y)i$, $z_2=-y^2+2y+11-4i$;

б) $z_1=x+y^2+1+4i$, $z_2=ixy^2+iy^2-3$.

21. Решить уравнения:

1) $|z|+z=1+2i$;

2) $2|z|-4az+1+ai=0$ $(a\in R)$;

3) $|z|+z=2-i$;

4) $3z^2-(14-8i)z+8(4-3i)=0$;

5) $2(2-i)z^2+(7-i)z+5(1+i)=0$;

6) $(2+4i)z^2+2z+6-6i=0$;

7) $z^4-12z^2+64=0$.

22. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}(1-i)x-(3+i)y=4,\\ 5x-(4+2i)y=4i;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1-i)x+3iy=5,\\ 2x-(3-3i)y=6.\end{cases}$

23. Построить точки, изображающие комплексные числа:

1) $z_1=-3+3i$; 2) $z_2=5-i$; 3) $z_3=2i$; 4) $z_4=-\sqrt{2}i$.

24. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

1) $z_1=-3+3i$; 2) $z_2=-2i$; 3) $z_3=5-\sqrt{2}$.

25. Найти множество точек комплексной плоскости, для которых:

1) $-\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$; 2) $1\le|z+1|<3$; 3) $|z+i|=1$;

4) $\frac{\pi}{4} \le \arg(z-2+i) \le \pi$; 5) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi, \\ |1-2i-z| = 2; \end{cases}$

6) $|z-1-i| \ge |z-2+i|$; 7) $|z-1+2i| \ge 3$; 8) $|z-2i| + |z-i| = 1$.

26. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $z = 16 - 16\sqrt{3}i$; 2) $z = -6\sqrt{3} - 6i$; 3) $z = (\sqrt{5}-2)i$.

27. Представить комплексные числа в алгебраической форме:

1) $z = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

2) $z = 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

28. Представив комплексные числа в тригонометрической форме, выполнить указанные действия:

$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)(-3+\sqrt{3}i)$;

$4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) : (\sqrt{3}-i)$;

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)(1+i)$; $(-\sqrt{5}+\sqrt{5}i)^3(1+i)^2$; $\frac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)}$.

29. Извлечь корни из комплексных чисел, предварительно представив их в тригонометрической форме:

1) $\sqrt{-6+6\sqrt{3}i}$;

2) $\sqrt[3]{-13{,}5\sqrt{2} - -13{,}5\sqrt{2}i}$;

3) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$.

30. Представив комплексные числа

$z_1 = -1-i$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $z_3 = 1+\sqrt{3}i$

в тригонометрической форме, вычислить выражение $\dfrac{z_1 z_3}{z_2}$.

2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Практическое занятие 1. Векторная алгебра

Предварительные сведения

Множество X абстрактных элементов (**векторов**) $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z},\ \ldots$ называется **векторным пространством** над полем P, если для его элементов выполнены перечисленные ниже аксиомы.

1^0. Для любых векторов $\vec{x},\ \vec{y} \in X$ однозначно определена **операция сложения**, результатом которой является вектор, обозначаемый $\vec{x}+\vec{y} \in X$ и называемый **суммой** векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, причём операция сложения обладает следующими свойствами:

1) $\left(\forall \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \in X\right)\left(\vec{x}+\vec{y}\right)+\vec{z} = \vec{x}+\left(\vec{y}+\vec{z}\right)$ – **ассоциативность;**

2) $\left(\forall \vec{x},\ \vec{y} \in X\right)\vec{x}+\vec{y} = \vec{x}+\vec{y}$ – **коммутативность**.

2^0. Существует однозначно определённый элемент $\vec{0} \in X$, такой, что $\left(\forall \vec{x} \in X\right)$

$$\vec{x}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{x} = \vec{x},$$

который называется **нуль-вектор**.

3^0. Существует однозначно определённый вектор $-\vec{x} \in X$, такой что $\left(\forall \vec{x} \in X\right)$

$$\vec{x}+\left(-\vec{x}\right) = \left(-\vec{x}\right)+\vec{x} = \vec{0},$$

который называется **обратным к вектору** $\vec{x} \in X$.

4^0. Для любого числа $\alpha \in P$ и для любого вектора $\vec{x} \in X$ определена операция **умножения вектора на число**, результатом которой является вектор $\alpha \cdot \vec{x} \in X$, называемый **произведением вектора $\vec{x}$ на число α**, причём операция умножения векторов на числа обладает следующими свойствами: $(\forall \alpha, \beta \in P)$ и $\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X\right)$

1) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;

2) $\alpha \cdot \left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$;

3) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$;

4) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \left(\beta \cdot \vec{x}\right)$.

Система векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right\} \subset X$ называется **линейно независимой**, если

$$\left(\alpha_1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 x_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}\right) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** в противном случае.

Максимальная по числу векторов линейно независимая система векторов

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right\} \subset X^n,$$

(содержащая n векторов), называется ***базисом векторного пространства***, само векторное пространство в этом случае называется **n-мерным векторным пространством** и обозначается X^n. Таким образом, в n-мерном векторном пространстве существует линейно независимая система, содержащая только n векторов, а любая система, содержащая n+1 вектор будет уже линейно зависимой.

В реальном трёхмерном пространстве (в его математической модели) векторы – это направленные отрезки. Базис трёхмерного пространства R^3 состоит из трёх взаимно перпендикулярных векторов единичной длины:

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3,$$

которые образуют базис декартовой системы координат.

Любой вектор $\vec{x} \in X^n$ можно представить в виде разложения

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \ldots + x^n \vec{e}_n$$

по векторам как-либо выбранной линейно независимой системе n векторов

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right\} \subset X^n,$$

образующей базис пространства.

Алгебраическая операция сложения векторов и внешняя операция умножения вектора на число определяются так:

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i + y^i\right) \vec{e}_i = \left(x^1 + y^1\right) \vec{e}_1 + \left(x^2 + y^2\right) \vec{e}_2 + \ldots + \left(x^n + y^n\right) \vec{e}_n;$$

$$\alpha \vec{x} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i = \alpha x^1 \vec{e}_1 + \alpha x^2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha x^n \vec{e}_n.$$

Линейная комбинация векторов находится по формуле:

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha x^i + \beta y^i\right) \vec{e}_i.$$

В трёхмерном пространстве скалярное произведение векторов является функцией, значение которой находится по формуле

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3,$$

или по эквивалентной формуле

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left\|\vec{x}\right\| \cdot \left\|\vec{y}\right\| \cdot \cos\varphi,$$

где **норма вектора**

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2},$$

а φ – угол, образованный приведёнными к общему началу векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Примеры с решением

Пример 2.1.1. В декартовой системе координат задана точка $A(1;\, 5;\, 3)$. Найти координаты точки B, расположенной симметрично точке $A(1;\, 5;\, 3)$ относительно координатной плоскости X^1OX^2.

Р е ш е н и е. Координаты точки B по осям OX^1 и OX^2 такие же, как и уточки A, а координата по оси OX^3 имеет противоположный знак. Следовательно, $B(1;\, 5;\, -3)$. ⊗

Пример 2.1.2. В декартовой системе координат своими разложениями по каноническому базису заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,\ \vec{y} = 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,\ \vec{z} = 3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти значение линейной комбинации

$$\vec{u} = 3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}$$

этих векторов и сделать вывод о линейной зависимости, или линейной независимости системы $\left\{\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}\right\}$ и взаимном расположении векторов.

Р е ш е н и е. Находим линейную комбинацию:

$$3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z} =$$

$$= 3\left(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) + 2\left(2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3\right) - \left(3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) =$$

$$= 0\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Значением линейной комбинации трёх векторов с ненулевыми коэффициентами является нуль-вектор. Поэтому система векторов линейно зависима. Так как векторы заданы в пространстве R^3, заключаем, что они компланарны, то есть лежат в одной плоскости. ⊗

Пример 2.1.3. В декартовой системе координат заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{y} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3.$$

Найти норму вектора $\vec{z} = 2\vec{x} - 5\vec{y}$.

Р е ш е н и е. Находим вектор

$$\vec{z} = 2\vec{x} - 5\vec{y} = 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\right) - 5\left(4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3\right) =$$

$$= -18\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 24\vec{e}_3.$$

Находим норму вектора $\vec{z}$: $\left\|\vec{z}\right\| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-24)^2} = \sqrt{916}$. ⊗

Пример 2.1.4. На плоскости R^2 задан параллелограмм, три вершины которого имеют, соответственно, координаты $O(0;\,0),\ B(1;\,2),\ D(5;\,0)$ (рисунок 1.1). Найти:

1) координаты вершины C;

2) косинус угла между сторонами OB и OD;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

Р е ш е н и е. 1) По определению координаты вершины C равны координатам вектора $\vec{OC}$ (рисунок 1.1), который равен сумме векторов

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

Так как $\vec{OB} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, а $\vec{OD} = 5\vec{e}_1$, то $\vec{OC} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

2) Вычисляем скалярное произведение векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\left(\vec{OB}, \vec{OD}\right) = 5.$$

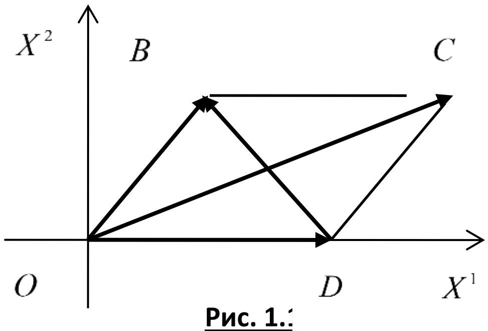


Рис. 1.

3) Вычисляем длины векторов: $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$:

$$\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}236;$$

$$\left\|\overrightarrow{OD}\right\| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

4) Находим $\cos\left\{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right\}$: $\cos\left\{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right\} = \dfrac{5}{5 \cdot 2{,}236} \approx 0{,}447.$

5) Находим диагональ $\overrightarrow{DB}$:

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 - 5\overrightarrow{e}_1 = -4\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 .$$

6) Далее, $\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10};$ $\left\|\overrightarrow{DB}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$

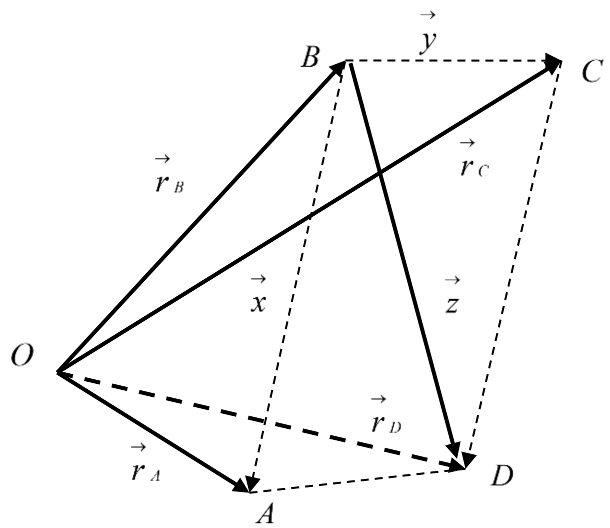
7) Находим косинус угла между диагоналями:

$$\cos\left\{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{DB}\right\} = \frac{\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{DB}\right)}{\left\|\overrightarrow{OC}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{DB}\right\|} = \frac{(-4)\cdot 6 + 2\cdot 2}{2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \otimes$$

Пример 2.1.5. Даны радиус-векторы трёх последовательных вершин параллелограмма $ABCD$. Найти радиус-вектор четвёртой вершины и косинусы углов между диагоналями параллелограмма, если известно, что:

$$\overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3,\ \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2 + 5\overrightarrow{e}_3,\ \overrightarrow{r}_C = -7\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 - 10\overrightarrow{e}_3;$$

Р е ш е н и е. Изобразим ситуацию на рисунке, не заботясь о точности изображения. Главное, чтобы рисунок отображал ситуацию качественно.



Из рисунка видно, что:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{x},\ \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{y},\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{z},$$

$$\vec{r}_D = \vec{r}_B + \vec{z} = \vec{r}_B + \vec{r}_A - \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_C - \vec{r}_B.$$

Подставляя разложения векторов в полученную формулу, вычисляем все требуемые в задаче величины. $\otimes$

Пример 2.1.6. В пространстве R^2 своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \sqrt{7}\,\vec{e}_2,\ \vec{y} = \vec{e}_1 + \sqrt{24}\,\vec{e}_2.$$

Найти какой-либо вектор $\vec{z}$, направленный по биссектрисе угла $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}$.

Р е ш е н и е. 1) Находим длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = 4;$$

$$\left\|\vec{y}\right\| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{24}\right)^2} = 5.$$

2) Находим орты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\vec{e}_{\vec{x}} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} = \frac{3}{4}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\vec{e}_2; \ \vec{e}_{\vec{y}} = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} = \frac{1}{5}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{24}}{5}\vec{e}_2.$$

3) Находим диагональ ромба, построенного на ортах $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$:

$$\vec{z} = \vec{e}_x + \vec{e}_y = \frac{19}{20}\vec{e}_1 + \frac{5\sqrt{7}+8\sqrt{6}}{20}\vec{e}_2.$$

Диагональ ромба направлена по биссектрисе угла, образованного его сторонами, поэтому найденный вектор $\vec{z}$ является искомым вектором. ⊗

Пример 2.1.7. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами задан вектор

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти направляющие косинусы данного вектора.

Р е ш е н и е. 1) Находим длину вектора:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

2) Находим орт вектора: $\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{e}_1 + \frac{-2}{\sqrt{21}}\vec{e}_2 + \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{e}_3.$

3) Направляющие косинусы вектора равны координатам его орта, поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_1\right\} = \frac{1}{\sqrt{21}}, \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_2\right\} = -\frac{2}{\sqrt{21}}, \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_3\right\} = \frac{4}{\sqrt{21}}. \ ⊗$$

Пример 2.1.8. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \ \vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Найти скалярное произведение $\left(\vec{x}-2\vec{y}, 3\vec{x}+\vec{y}\right)$ двумя способами.

Р е ш е н и е. 1. Находим линейные комбинации $\vec{x}-2\vec{y}$ и $3\vec{x}+\vec{y}$:

$$\vec{x}-2\vec{y}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+4\vec{e}_3-2\left(\vec{e}_1+4\vec{e}_2-2\vec{e}_3\right)=-\vec{e}_1-10\vec{e}_2+8\vec{e}_3,$$

$$3\vec{x}+\vec{y}=3\left(\vec{e}_1-2\vec{e}_2+4\vec{e}_3\right)+\left(\vec{e}_1+4\vec{e}_2-2\vec{e}_3\right)=4\vec{e}_1-2\vec{e}_2+10\vec{e}_3.$$

Находим скалярное произведение $\left(\vec{x}-2\vec{y}, 3\vec{x}+\vec{y}\right)$:

$$\left(-\vec{e}_1-10\vec{e}_2+8\vec{e}_3, 4\vec{e}_1-2\vec{e}_2+10\vec{e}_3\right)=$$

$$=-4+20+80=96.$$

2. Используем свойства скалярного произведения:

$$\left(\vec{x}-2\vec{y}, 3\vec{x}+\vec{y}\right)=\left(\vec{x}, 3\vec{x}\right)+\left(\vec{x}, \vec{y}\right)+\left(-2\vec{y}, 3\vec{x}\right)+\left(-2\vec{y}, \vec{y}\right)=$$

$$=3\left(\vec{x}, \vec{x}\right)+\left(\vec{x}, \vec{y}\right)-6\left(\vec{y}, \vec{x}\right)-2\left(\vec{y}, \vec{y}\right)=$$

$$=3\left\|\vec{x}\right\|-5\left\|\vec{x}\right\|\left\|\vec{y}\right\|\cos\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}-2\left\|\vec{y}\right\|.$$

Теперь можно произвести вычисления, используя данные задачи. $\otimes$

Пример 2.1.9. Дано: $\left\|\vec{x}\right\|=3$, $\left\|\vec{y}\right\|=2\sqrt{5}$, $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}=\dfrac{\pi}{4}$. Найти

$$\left(\vec{x}+3\cdot\vec{y}, 3\cdot\vec{x}-\vec{y}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\left(\vec{x}+3\vec{y},3\vec{x}-\vec{y}\right)=3\left\|\vec{x}\right\|^2-\left(\vec{x},\vec{y}\right)+9\left(\vec{y},\vec{x}\right)-3\left\|\vec{y}\right\|^2=$$

$$=3\left\|\vec{x}\right\|^2+8\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|\cos\left\{\vec{x},\vec{y}\right\}-3\left\|\vec{y}\right\|^2=-33+24\sqrt{10}.\ \otimes$$

Пример 2.1.10. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы три вектора:

$$\vec{a}_1=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3,\ \vec{a}_2=5\vec{e}_1-3\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2+\vec{e}_3.$$

1) Показать, что векторы $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\}$ образуют новый базис в пространстве R^3.

2) Найти координаты вектора $\vec{x}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2+6\vec{e}_3$ относительно базиса $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\}$.

Р е ш е н и е. 1) Исходя из определения линейной независимости, составляем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_1+5\alpha_2-2\alpha_3=0,\\ 2\alpha_1-3\alpha_2+4\alpha_3=0,\\ -3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.\end{cases}$$

Решая эту СЛАУ методом Гаусса, получаем $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Следовательно, система векторов линейно независима и, так как число векторов совпадает с размерностью пространства, является одним из базисов в пространства R^3.

2) Для нахождения координат вектора $\vec{x}$ относительно нового базиса записываем разложение вектора $\vec{X}$ по векторам этого базиса и СЛАУ, следующую из этого разложения и инвариантности вектора как геометрического объекта:

$$\vec{x} = x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2 + x^3\vec{a}_3 \Rightarrow \begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 = 1, \\ -3x^1 + x^2 + x^3 = 6. \end{cases}$$

Решаем СЛАУ методом Гаусса.

1) Из первого уравнения $x^1 = 3 - 5x^2 + 2x^3$. Подставляя во второе и третье уравнения, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 16x^2 - 5x^3 = 15. \end{cases}$$

2) Из второго уравнения $x^2 = \frac{8}{13}x^3 + \frac{15}{13}$. Подставляя в третье уравнение, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 63x^3 = 115. \end{cases}$$

Обратный ход: из третьего уравнения

$$x^3 = \frac{115}{63}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим

$$x^2 = \frac{95}{63}.$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение, получаем

$$x^1 = -\frac{56}{63}. \otimes$$

Пример 2.1.11. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы радиус-векторы

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3,\ \vec{y} = 10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,\ \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Найти расстояние между конечными точками векторов

$$\vec{u}=\left(\vec{x},2\vec{z}\right)\vec{x}+\vec{y},$$

$$\vec{v}=\vec{x}+\left(2\vec{x},\vec{z}\right)\vec{y}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим скалярное произведение $\left(\vec{x},2\vec{z}\right)$:

$$\left(\vec{x},2\vec{z}\right)=\left(2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3,2\left(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)\right)=2\cdot2+1\cdot4+(-3)\cdot2=2.$$

2) находим вектор $\vec{u}=\left(\vec{x},2\vec{z}\right)\vec{x}+\vec{y}$:

$$\vec{u}=\left(\vec{x},2\vec{z}\right)\vec{x}+\vec{y}=2\left(2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3\right)+\left(10\vec{e}_1-3\vec{e}_2-4\vec{e}_3\right)=$$

$$=14\vec{e}_1-\vec{e}_2-10\vec{e}_3.$$

3) Находим скалярное произведение $\left(2\cdot\vec{x},\vec{z}\right)$:

$$\left(2\cdot\vec{x},\vec{z}\right)=\left(2\left(2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3\right),\left(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)\right)=$$

$$=\left(2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3,\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)=4+4-6=2.$$

4) Находим вектор $\vec{v}=\vec{x}+\left(2\vec{x},\vec{z}\right)\vec{y}$:

$$\vec{v}=\vec{x}+\left(2\vec{x},\vec{z}\right)\vec{y}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3+2\left(10\vec{e}_1-3\vec{e}_2-4\vec{e}_3\right)=$$

$$=22\vec{e}_1-5\vec{e}_2-11\vec{e}_3.$$

5) Находим расстояние между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

$$\rho\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9. \otimes$$

Пример 2.1.12. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы три точки $A(2;\ 4;\ 6)$, $B(1;\ 3;\ 5)$, $C(0;\ 2;\ 3)$. Найти длины сторон треугольника ABC, косинусы углов при вершинах треугольника и проекцию вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$ на направление вектора $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$.

Р е ш е н и е. 1) Находим векторы, определяющие стороны треугольника:

$$\vec{AB} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3;$$

$$\vec{AC} = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3;$$

$$\vec{BC} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

2) Находим длины сторон треугольника ΔABC:

$$\left\|\vec{AB}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3};$$

$$\left\|\vec{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17};$$

$$\left\|\vec{BC}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

3) Находим косинусы углов при вершинах треугольника по формуле

$$\cos\vartheta = \frac{\left(\vec{x}, \vec{y}\right)}{\left\|\vec{x}\right\| \cdot \left\|\vec{y}\right\|} = \frac{x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3}{\sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2}\sqrt{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2 + \left(y^3\right)^2}}:$$

$$\cos\left\{\vec{AB},\ \vec{AC}\right\} = \frac{\left(\vec{AB},\ \vec{AC}\right)}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{AC}\right\|} = \frac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{51}};$$

$$\cos\left\{\vec{BA},\ \vec{BC}\right\} = \frac{\left(\vec{BA},\ \vec{BC}\right)}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|} = \frac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{4}{\sqrt{18}};$$

$$\cos\left\{\vec{CA},\ \vec{CB}\right\} = \frac{\left(\vec{CA},\ \vec{CB}\right)}{\left\|\vec{CA}\right\|\cdot\left\|\vec{CB}\right\|} = \frac{10}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{102}}.$$

4) Находим проекцию вектора $\vec{AB}+\vec{AC}$ на направление вектора $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$:

$$\Pr_{\vec{z}}\left\{\vec{AB}+\vec{AC}\right\} = \frac{(-3)\cdot 1+(-3)\cdot 2+(-4)\cdot(-5)}{\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}} = \frac{11}{\sqrt{30}}. \otimes$$

Пример 2.1.13. Пусть на плоскости X^1OX^2 даны две точки $A_1\left(x_1^1;\ x_1^2\right)$ и $A_2\left(x_2^1;\ x_2^2\right)$. Найти координаты точки $A\left(x^1;\ x^2\right)$, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda$.

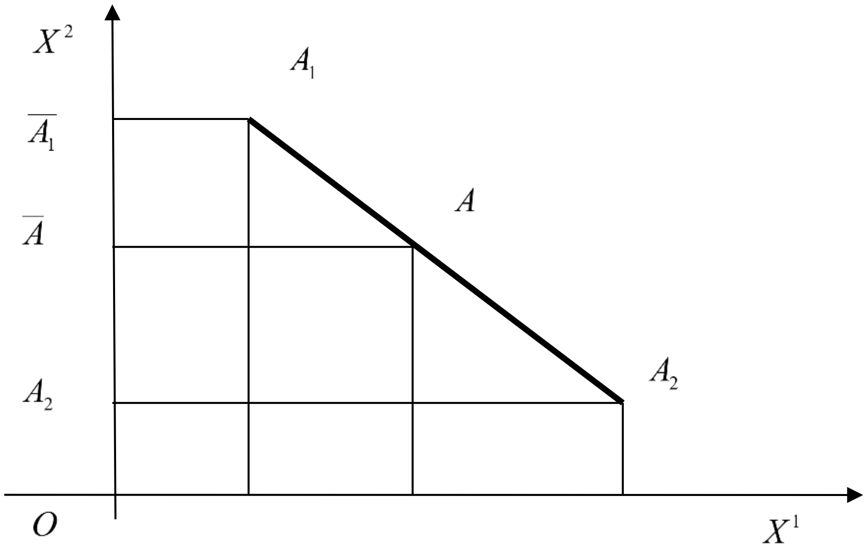
Р е ш е н и е. Предположим, что отрезок A_1A_2 не параллелен оси OX^1. Точки A_1, A, A_2 спроектируем на оси OX^1, и OX^2 (рисунок).

Имеем по условию задачи

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda.$$

Далее получаем, что

$$\overline{A_1}\,\overline{A} = \left| x_1^2 - x^2 \right|,\ \overline{A}\overline{A_2} = \left| x^2 - x_2^2 \right| \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\left| x_1^2 - x^2 \right|}{\left| x^2 - x_2^2 \right|}.$$



Точка $\overline{A}$ лежит между точками A_1 и A_2, поэтому

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\left| x_1^2 - x^2 \right|}{\left| x^2 - x_2^2 \right|} = \frac{x_1^2 - x^2}{x^2 - x_2^2}.$$

Из последнего равенства находим

$$x^2 = \frac{\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2\left(x_1^2 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^2 \right)}{\lambda_2\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right)} = \frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{\lambda + 1}.$$

Аналогично находим первую координату точки A:

$$x^1 = \frac{\lambda_2 x_1^1 + \lambda_1 x_2^1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2\left(x_1^1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^1 \right)}{\lambda_2\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right)} = \frac{x_1^1 + \lambda x_2^1}{\lambda + 1}. \otimes$$

Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения.

Прямая линия и плоскость

Предварительные сведения

Векторное произведение векторов как результат алгебраической операции умножения векторов

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} y^i \vec{e}_i = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + y^3 \vec{e}_3$$

находится по формуле

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left(x^2 y^3 - x^3 y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3 y^1 - x^1 y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1 y^2 - x^2 y^3\right)\vec{e}_n.$$

Смешанное произведение векторов – это функция, значение которой находится по формуле

$$\left(\left[\vec{x}, \vec{y}\right], \vec{z}\right) = x^1 y^2 z^3 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2 - x^1 y^3 z^2 - x^2 y^1 z^3 - x^3 y^2 z^1.$$

Параметрические уравнения прямой линии в трёхмерном пространстве имеют вид

$$x^i = x_0^i + t \cdot a^i,$$

где $i = 1, 2, 3$, x_0^i – координаты опорной точки, a^i – координаты направляющего вектора, $t \in (-\infty, +\infty)$ – параметр.

Параметрические уравнения плоскости в трёхмерном пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + a_1^1 \cdot t_1 + a_2^1 \cdot t_2, \\ x^2 = x_0^2 + a_1^2 \cdot t_1 + a_2^2 \cdot t_2, \\ x^3 = x_0^3 + a_1^3 \cdot t_1 + a_2^3 \cdot t_2. \end{cases}$$

Неявное уравнение плоскости в трёхмерном пространстве записывается в виде

$$A \cdot x^1 + B \cdot x^2 + C \cdot x^3 + D = 0,$$

где коэффициенты при неизвестных суть координаты **нормального** вектора плоскости

$$\vec{N} = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3,$$

удовлетворяющего условию

$$\left(\vec{N}, \vec{x}\right) = 0,$$

где $\vec{x}$ – произвольный вектор на плоскости.

Примеры с решением

Пример 2.2.1. Вычислить площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу векторах

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{y} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Если в некоторой декартовой системе координат векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы своими разложениями

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3,\ \vec{y} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + y^3\vec{e}_3,$$

то справедлива формула

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{e}_3.$$

Применим эту формулу для решения задачи.

1) Вычисляем векторное произведение:

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = ((-2)\cdot(-6) - (-1)\cdot 1)\vec{e}_1 + ((-1)\cdot(-2) - 3\cdot(-6))\vec{e}_2 +$$

$$+ (3\cdot 1 - (-2)\cdot(-2))\vec{e}_3 = 13\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

2) Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}\left\|\left[\vec{x}, \vec{y}\right]\right\|.$$

Вычисляем площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\left[\vec{x}, \vec{y}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + 20^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{169 + 400 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{570}. \otimes$$

Пример 2.2.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \vec{y} = 3\vec{a} + \vec{b},$$

если

$$\left\|\vec{a}\right\| = \left\|\vec{b}\right\| = 1 \text{ и } \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{6}.$$

Р е ш е н и е. Вычисляем векторное произведение, используя его свойства:

$$\left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \left[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}\right] = 3\left[\vec{a}, \vec{a}\right] + \left[\vec{a}, \vec{b}\right] +$$

$$+ 9\left[\vec{b}, \vec{a}\right] + 3\left[\vec{b}, \vec{b}\right] = -8\left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$

По определению площадь параллелограмма равна:

$$S = \left\|\left[\vec{x}, \vec{y}\right]\right\| = 8\left\|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right\| = 8\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4. \ \otimes$$

Пример 2.2.3. Найти орт вектора, перпендикулярного векторам

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{y} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Предлагается решить задачу самостоятельно. $\otimes$

Пример 2.2.4. Получить уравнение плоскости $H^2 \subset R^3$, проходящей через начало координат O и через две точки $M_1(4; -2; 1)$, $M_2(2; 4; -3)$.

Р е ш е н и е. Радиус-векторы точек M_1 и M_2

$$\vec{x} \equiv \vec{OM_1} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{y} \equiv \vec{OM_2} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Нормальный вектор плоскости находим как векторное произведение, используя формулу

$$\vec{N} = \left[\vec{OM_1}, \vec{OM_2}\right] \equiv \left[\vec{x}, \vec{y}\right] =$$

$$= \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{e}_3 =:$$

$$= \left[(-2)\cdot(-3) - 1\cdot 4\right]\vec{e}_1 + \left[1\cdot 2 - 4\cdot(-3)\right]\vec{e}_2 + \left[4\cdot 4 - (-2)\cdot 2\right]\vec{e}_3 =$$

$$= 2\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 + 20\vec{e}_3.$$

Из условия ортогональности радиус-вектора

$$\vec{OM} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$$

текущей точки M плоскости её нормальному вектору

$$\left(\vec{N}, \vec{OM}\right) = 0,$$

получаем уравнение плоскости в неявном виде:

$$x^1 + 7x^2 + 10x^3 = 0. \otimes$$

Пример 2.2.5. Найти угол между плоскостями, определяемыми уравнениями:

$$3x^1 - x^2 + 3 = 0,\ x^1 - 2x^2 + 5x^3 - 10 = 0.$$

Р е ш е н и е. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами

$$\vec{N}_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2,\ \vec{N}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{N}_1, \vec{N}_2\right\} = \frac{\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right)}{\left\|\vec{N}_1\right\| \cdot \left\|\vec{N}_2\right\|} = \frac{3\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. $\otimes$

Пример 2.2.6. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей с уравнениями

$$x^1 + x^2 + x^3 - 2 = 0,\ x^1 - x^2 - 3x^3 + 6 = 0.$$

Р е ш е н и е. Проверяем, что плоскости не параллельны (то есть их нормальные векторы не коллинеарны), для чего проверяем пропорциональны или нет координаты нормальных векторов:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-3}.$$

Координаты не пропорциональны, следовательно, нормальные векторы неколлинеарны, то есть плоскости не параллельны.

Так как прямая линия принадлежит обеим плоскостям, её направляющий вектор ортогонален нормальным векторам плоскостей, поэтому находим его как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\vec{a} = \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2\right] = \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{e}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{e}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{e}_3 =$$

$$= [1\cdot(-3) - 1\cdot(-1)]\vec{e}_1 + [1\cdot 1 - 1\cdot(-3)]\vec{e}_2 + [1\cdot(-1) - 1\cdot 1]\vec{e}_3 =$$

$$= -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Направляющий вектор прямой не параллелен ни одной из координатных плоскостей, поэтому прямая линия пересекает все три координатные плоскости. Найдём, например, точку пересечения прямой и плоскости X^1OX^3, для чего решаем систему трёх уравнений

$$\begin{cases} x^1 + \quad x^3 = \quad 2, \\ x^1 - 3x^3 = -6 \\ \quad x^2 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение $x_0^1 = 0,\ x_0^2 = 0,\ x_0^3 = 2$.

Подставляя найденные координаты направляющего вектора и точки в канонические уравнения прямой линии, получаем канонические уравнения

$$\frac{x^1}{-2} = \frac{x^2}{4} = \frac{x^3 - 2}{-2}.\ \otimes$$

Пример 2.2.7. Найти точку пересечения прямой линии с уравнениями

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 1}{-4},$$

и плоскости с уравнением $x^1 + x^2 + 2x^3 - 9 = 0$.

Р е ш е н и е. Проверяем, пересекается ли прямая линия с плоскостью, для чего находим скалярное произведение нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой линии:

$$\left(\vec{N},\ \vec{l}\right)=\left(\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2-4\vec{e}_3\right)=-6\neq 0.$$

Векторы не ортогональны, а следовательно, прямая линия и плоскость не параллельны. Параметрические уравнения прямой линии имеют вид:

$$\begin{cases} x^1=2+t, \\ x^2=3+t, \\ x^3=-1-4t. \end{cases}$$

Найдём значение параметра t_0, соответствующее точке пересечения прямой линии и плоскости, для чего подставим x^1, x^2, x^3 из параметрических уравнений прямой линии в уравнение плоскости. Решая получившееся уравнение, найдём $t_0=-1$. Подставляя найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, находим координаты точки пересечения:

$$x_0^1=1,\ x_0^2=2,\ x_0^3=3.\ \otimes$$

Пример 2.2.8. Найти расстояние от точки $M(1;\,0;\,1)$ до плоскости H^2 с уравнением $4x^1+6x^2+4x^3-25=0$.

Р е ш е н и е. Расстояние от точки M до плоскости – это длина вектора $\overrightarrow{M_0M}$ с начальной точкой M и конечной точкой M_0 – проекцией точки M на плоскость H^2.

Проекция точки на плоскость – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Поэтому следует составить уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(1;\,0;\,1)$ перпендикулярно плоскости с уравнением

$$4x^1+6x^2+4x^3-25=0,$$

и найти точку её пересечения с плоскостью.

Если в качестве направляющего вектора прямой линии выбрать нормальный вектор плоскости $\vec{l}=\vec{N}=4\vec{e}_1+6\vec{e}_2+4\vec{e}_3$, то канонические уравнения прямой линии примут вид

$$\frac{x^1-1}{4}=\frac{x^2}{6}=\frac{x^3-1}{4},$$

откуда получаем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x^1=1+4t, \\ x^2=\quad 6t, \\ x^3=1+4t. \end{cases}$$

Подставляя общее выражение для координат текущей точки прямой линии из параметрических уравнений в уравнение плоскости, получаем уравнение для параметра, решение которого даёт для параметра значение

$$t_0=\frac{1}{4},$$

соответствующее искомой точке пересечения прямой линии и плоскости.

Подставляя это значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, получаем находим искомые координаты проекции M_0 точки $M(1;\,0;\,1)$ на плоскость H^2:

$$x^1=2,\ x^2=\frac{3}{2},\ x^3=2.$$

Вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=(2-1)\vec{e}_1+\left(\frac{3}{2}-0\right)\vec{e}_2+(2-1)\vec{e}_3=\vec{e}_1+\frac{3}{2}\vec{e}_2+\vec{e}_3.$$

Расстояние

$$\rho\left(M,\,H^2\right)=\sqrt{1+\frac{9}{4}+1}=\frac{\sqrt{17}}{2}.\ \otimes$$

Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства

Предварительные сведения

Аддитивная абелева группа E называется **абстрактным векторным пространством** (над полем P), если на ней определена внешняя бинарная операция – **умножение элементов группы E на элементы поля P**, то есть $(\forall x \in E)$ и $(\forall \alpha \in P)$ $(\exists \alpha \cdot x \in E)$, причём выполняются следующие аксиомы:

1) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

3) $1 \cdot x = x$;

4) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

Простейшим примером векторного пространства является множество обычных трёхмерных векторов, которое изучалось выше. Здесь отметим лишь, что из определения векторного пространства следует, что

$$(\forall x \in E) - x = (-1)x,$$

где $1 -$ единица поля P, и

$$0x = 0.$$

В последнем равенстве 0 в левой части – это нуль поля P, 0 в правой части равенства – это нулевой элемент из группы E. Элементы векторного пространства называются **абстрактными векторами**.

Система векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$ называется **линейно независимой**, если

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** – в противном случае. Если векторное пространство содержит линейно независимую систему из n векторов, а любая система, содержащая $n+1$ векторов, уже линейно зависима, то говорят, что пространство E является n **мерным векторным пространством**. Любая линейно независимая система $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset E$ из n векторов образует **базис** пространства. Любой вектор $x \in E$ можно представить в виде разложения

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

где коэффициенты разложения называются **координатами** вектора относительно заданного базиса. Подмножество $L \in E$ называется **линейным многообразием** в E, если

$$(\forall \alpha, \beta \in P)(x, y \in L) \Rightarrow (\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in L).$$

Остальные определения теории векторных пространств, в том числе евклидовых, приведены выше на страницах 25-28.

Примеры с решением

Пример 2.3.1. Пусть P – числовое поле. На множестве объектов

$$P^n = \left\{ |a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}, a_k \in P \right\},$$

которые назовём вектор-столбцами, определим операции сложения вектор-столбцов и умножения вектора-столбца на числа из поля P:

1) $\left(\forall |a\rangle, |b\rangle \in P^n\right) \; |a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \ldots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ \$

2) $\left(\forall |a\rangle \in P^n\right)$ и $(\forall \alpha \in P)$ $\alpha \cdot |a\rangle = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \dots \\ \alpha \cdot a_n \end{pmatrix}$.

Показать, что множество P^n является n-мерным векторным пространством.

Р е ш е н и е. Для доказательства требуется проверить выполнение всех аксиом векторного пространства и построить хотя бы один базис из вектор-столбцов.

Аксиомы сложения.

1) Аксиома ассоциативности выполняется в силу ассоциативности операции сложения в поле P, действительно

$$\left[|a\rangle + |b\rangle\right] + |c\rangle = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \dots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \dots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \dots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}\right] = |a\rangle + \left[|b\rangle + |c\rangle\right].$$

2) Аксиома коммутативности выполняется в силу коммутативности операции сложения в поле P, действительно

$$|a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \dots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = |b\rangle + |a\rangle$$

.

3) Вектор-нуль определим так

$$|0\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома о нейтральном элементе выполняется, действительно имеем:

$$\left(\forall|a\rangle\in P^n\right)\ |a\rangle+|0\rangle=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+0\\a_2+0\\\dots\\a_n+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}.$$

4) Противоположный вектор-столбец определим так

$$\left(\forall|a\rangle\in P^n\right)-|a\rangle=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\dots\\-a_n\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома об обратном (противоположном элементе) выполняется, действительно имеем:

$$|a\rangle+\left(-|a\rangle\right)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\dots\\-a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-a_1\\a_2-a_2\\\dots\\a_n-a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}.$$

Аксиомы умножения вектор-столбца на числа. Аналогично показывается, что выполняются аксиомы умножения вектор-столбца на числа:

1) $\left(\forall|a\rangle\in P^n\right)$ и $\left(\forall\alpha\in P\right)$

$$\alpha\left(|a\rangle+|b\rangle\right)=\alpha\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\alpha(a_1+b_1)\\\alpha(a_2+b_2)\\\dots\\\alpha(a_n+b_n)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix};$$

2) $(\forall \alpha,\ \beta \in P)$

$$(\alpha+\beta)|a\rangle = (\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_1 \\ (\alpha+\beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha+\beta)a_n \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle;$$

3) $1\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$;

4) $(\alpha\beta)|a\rangle = (\alpha\beta)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_1 \\ (\alpha\beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha\beta)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta a_1) \\ \alpha(\beta a_2) \\ \dots \\ \alpha(\beta a_n) \end{pmatrix} = \dots = \alpha[\beta|a\rangle],$

Таким образом, все аксиомы векторного пространства выполняются и, следовательно, множество P^n является векторным пространством.

Рассмотрим следующее тождественное преобразование:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого разложения видно, что в силу произвольности вектор-столбца $|a\rangle$, он представлен разложением по вектор-столбцам специального вида

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система этих вектор-столбцов образует простейший, или ***канонический*** базис в векторном пространстве P^n.

Теперь очевидно, что множество P^n является n-мерным векторным пространством. $\otimes$

Пример 2.3.2. Показать, что если система векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right\}$ линейно независима, то и любая её подсистема также линейно независима.

Р е ш е н и е. Пусть $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\}$ – подсистема данной системы, то есть $m < n$.

Предположим, что условие задачи неверно, то есть подсистема $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\}$ линейно зависима. Тогда можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю одновременно, что справедливо тождество

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0}.$$

Учитывая свойство нуль вектора

$$\left(\forall \vec{x} \in X\right) \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

добавим его в обе части последнего тождества, представив его в виде линейной комбинации оставшихся векторов исходной системы с нулевыми коэффициентами

$$\vec{0} = 0\,\vec{x}_{m+1} + \ldots + 0\,\vec{x}_n.$$

Получаем

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{x}_m + 0\,\vec{x}_{m+1} + \ldots + 0\,\vec{x}_n = \vec{0},$$

то есть линейная комбинация векторов исходной системы с коэффициентами, не все из которых равны нулю одновременно, даёт нулевой вектор. По определению это означает линейную зависимость векторов системы $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right\}$, что противоречит условию задачи.

Следовательно, предположение о линейной зависимости ***произвольной*** подсистемы $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\}$ линейно независимой системы $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\right\}$ не верно. $\otimes$

Пример 2.3.3. Показать, что система из двух векторов линейно зависима в том и только в том случае, если векторы коллинеарны.

Р е ш е н и е. *Необходимость.* Если из двух векторов $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}$ хотя бы один равен нуль вектору, то векторы коллинеарны. Поэтому предположим, что векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Пусть система $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}$ линейно зависима. Покажем, что векторы коллинеарны. По определению найдутся такие числа $\alpha, \beta \in R$, что

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0},$$

причём эти числа неравны нулю одновременно.

Пусть $\beta \neq 0$. Тогда получаем:

$$\vec{y} = \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\vec{x}.$$

Обозначая $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, получим

$$\vec{y} = \lambda \vec{x},$$

то есть по определению векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Достаточность. Пусть теперь векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, покажем, что система $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\}$ линейно зависима. По определению коллинеарности имеем, например:

$$\vec{y} = \lambda \vec{x}.$$

Пусть $\nu \neq 0$, тогда можем записать

$$\vec{y} = \frac{\lambda}{\nu} \nu \vec{x},$$

откуда получаем

$$\nu \vec{y} = \lambda \nu \vec{x},$$

или

$$\mu \vec{x} + \nu \vec{y} = \vec{0},$$

где $\mu = -\lambda \nu$. Так как $\lambda \neq 0$ и $\nu \neq 0$, то система векторов $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ линейно зависима. ⊗

Пример 2.3.4. Показать, что система трёх векторов пространства R^3 линейно зависима в том и только в том случае, если векторы компланарны.

Р е ш е н и е. Предположим, что никакие два вектора из тройки векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ не коллинеарны (в противном случае система векторов заведомо будет линейно зависимой).

Необходимость. Пусть система $\left\{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right\}$ линейно зависима, покажем, что векторы системы компланарны. В силу линейной зависимости системы, можно подобрать три неравных одновременно нулю числа $\alpha, \beta, \gamma \in R$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0}.$$

Пусть, например, $\gamma \neq 0$. Тогда имеем:

$$\vec{z} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \right) \vec{x} + \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) \vec{y}.$$

Приложив векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ к общей точке O, легко видеть, что вектор $\vec{z}$ равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \right) \vec{x},\ \vec{b} = \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) \vec{y},$$

а это и означает, что они лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ компланарны, покажем, что система $\left\{\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\right\}$ линейно зависима. Доказательство почти очевидно. Действительно, компланарность векторов означает, что справедливо, например, равенство

$$\vec{x} = \mu\,\vec{y} + \lambda\,\vec{z}.$$

Следовательно, один из векторов системы линейно выражается через два других. Тогда из свойств линейно зависимых систем векторов следует линейная зависимость системы векторов $\left\{\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\right\}$.$\otimes$

Пример 2.3.5. Выяснить вопрос о линейной зависимости или линейной независимости следующей системы вектор-столбцов:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ |a_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ |a_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ |a_4\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим линейную комбинацию векторов системы с произвольными коэффициентами и потребуем, чтобы её значением был нуль вектор-столбец:

$$\alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle + \alpha_3|a_3\rangle + \alpha_4|a_4\rangle = |0\rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Используя правила выполнения операций с вектор-столбцами, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Совершая последовательные подстановки из первого уравнения во второе, из второго в третье и так далее, получаем, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

что и доказывает линейную независимость данной системы вектор-столбцов. $\otimes$

Пример 2.3.6. Пусть

$$\left\{ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m,\ \vec{a}_{m+1},\ \ldots,\ \vec{a}_{n-1},\ \vec{a}_n \right\}$$

– некоторая система векторов векторного пространства и пусть

$$\left\{ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m \right\},$$

– её максимальная по числу векторов линейно независимая подсистема.

Показать, что любой из векторов $\vec{a}_{m+1},\ \ldots,\ \vec{a}_{n-1},\ \vec{a}_n$ можно выразить в виде разложения по векторам подсистемы $\left\{ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m \right\}$.

Р е ш е н и е. Так как подсистема $\left\{ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m \right\}$ – максимальная по числу векторов линейно независимая система, то добавляя к ней любой из оставшихся векторов, например, вектор $\vec{a}_{m+1}$, получим уже линейно зависимую систему

$$\left\{ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m,\ \vec{a}_{m+1} \right\}.$$

Следовательно, можно подобрать такие неравные одновременно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}.$$

В этом равенстве $\alpha_{m+1} \neq 0$ так как в противном случае имели бы равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0},$$

в котором не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ одновременно равны нулю. Но тогда система векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\right\}$ будет линейно зависимой, что противоречит условию задачи.

Из равенства

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}$$

следует, что

$$\vec{a}_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_m.$$

Вводя обозначения

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}},\ \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}},\ \ldots,\ \beta_m = -\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}},$$

получаем

$$\vec{a}_{m+1} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_m \vec{a}_m,$$

что и доказывает сформулированное утверждение. $\otimes$

Пример 2.3.7. Дана система функций

$$\left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\}.$$

Показать, что эта система функций является линейно независимой в пространстве функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Р е ш е н и е. По определению линейной независимости условие

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} = 0 \ \left(\forall t \in (-\infty, +\infty)\right)$$

влечёт за собой выполнение условия $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Составим СЛАУ для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для этого положим в тождестве $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество по t и полагая $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество ещё раз и, снова полагая $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0.$$

Объединяя полученные равенства в систему уравнений для неизвестных коэффициентов, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, применяя метод Гаусса, получаем единственное решение

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Таким образом, система функций $\left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\}$ является базисом подмножества функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Поэтому множество функций вида

$$f(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \lambda e^{3t}$$

образует подпространство в пространстве таких функций. $\otimes$

Пример 2.3.8. Используя процедуру ортогонализации Шмидта, ортонормировать систему векторов $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\} \subset E^4$, заданных в некотором ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$ своими разложениями:

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

Р е ш е н и е. Для ортогонализации системы векторов

$$\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\} \subset E^4$$

воспользуемся формулами процедуры ортогонализации Шмидта.

Для этого положим

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

то есть

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Далее имеем:

$$\vec{a}_2 = \vec{g}_2 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_2\right)}{\left\|\vec{a}_1\right\|^2}\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 -$$

$$-\frac{1}{4}(-4)\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4;$$

$$\vec{a}_3 = \vec{g}_3 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_3\right)}{\left\|\vec{a}_1\right\|^2}\vec{a}_1 - \frac{\left(\vec{a}_2, \vec{g}_3\right)}{\left\|\vec{a}_2\right\|^2}\vec{a}_2 =$$

$$= 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_4 - \frac{3}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) -$$

$$-\left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4\right) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Для получения ортонормированной системы, векторы системы нормируем:

$$\vec{e}_{a1} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{e}_{a2} = \frac{1}{4}\left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4\right);$$

$$\vec{e}_{a3} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{\vec{e}_{a1}, \vec{e}_{a2}, \vec{e}_{a3}\right\}$ ортонормированная. ⊗

Пример 2.3.9. Показать, что линейная оболочка $L\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\right\}$, где элементы L вычисляются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x,\ \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1\right),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x,\ \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

Р е ш е н и е. Находим скалярное произведение и скалярные квадраты векторов предполагаемого базиса:

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0;$$

$$\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Видим, что система векторов $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\right\}$ является ортонормированной и, следовательно, её можно принять за один из базисов линейного многообразия L. ⊗

Пример 2.3.10. Пусть X – множество ведущих радиус-векторов точек прямой линии. Операции в этом множестве введены обычным образом. Выяснить, является ли это множество векторным подпространством евклидова пространства R^2.

Р е ш е н и е. 1) Пусть прямая не проходит через начало системы координат (рисунок 3.1).

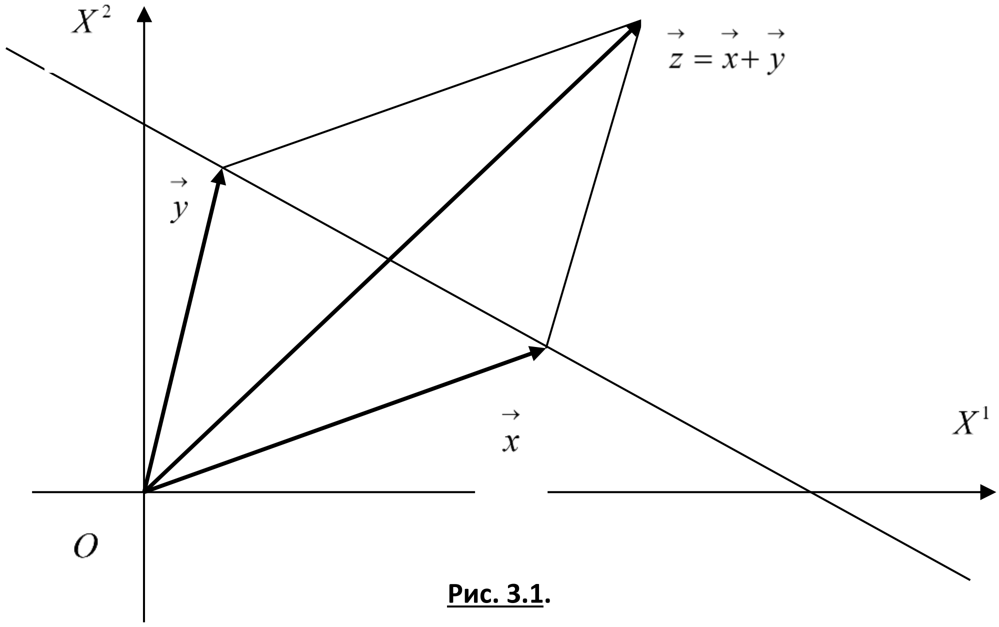


Рис. 3.1.

Очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии не принадлежит множеству X, так как конечная точка радиус-вектора их суммы не лежит на данной прямой линии. Следовательно, операция сложения векторов в данном случае не является алгебраической. Множество X не является векторным подпространством пространства R^2.

2) Если прямая линия проходит через начало системы координат, то очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии принадлежит множеству X и, следовательно, операция сложения векторов в данном случае является алгебраической. Множество X является векторным подпространством пространства R^2. ⊗

Пример 2.3.11. Дана система функций

$$\{\cos t,\ \sin t,\ \sin 2t\}.$$

Показать, что множество функций вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t,$$

где $\alpha,\ \beta,\ \lambda \in R^1$, является подпространством векторного пространства функций, непрерывных на промежутке $(-\pi,\ \pi)$.

Р е ш е н и е. Покажем сначала, что система функций

$$\{\cos t,\ \sin t,\ \sin 2t\}$$

является линейно независимой на промежутке $(-\pi,\ \pi)$.

В соответствие с определением линейной независимости потребуем выполнения условия

$$\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 \sin 2t = 0.$$

При различных значениях $t \in (-\pi,\ \pi)$ получаем бесконечное множество систем линейных алгебраических уравнений. Положим, например,

$$t = 0,\ t = \frac{\pi}{6},\ t = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \dfrac{1}{2}\alpha_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha_3 = 0, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система уравнений. Решая СЛАУ методом Гаусса, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Поэтому система функций $\{\cos t,\ \sin t,\ \sin 2t\}$ линейно независима на промежутке $(-\pi,\ \pi)$.

Легко видеть, что любая функция вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t$$

является линейной комбинацией функций системы $\{\cos t,\ \sin t,\ \sin 2t\}$, что и доказывает требуемой. $\otimes$

Пример 2.3.12. Показать, что система векторов

$$\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2\right\} \subset E^4,$$

заданных в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства E^4

$$\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4\right\} \subset E^4$$

разложениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_1^1\,\vec{e}_1 + a_1^2\,\vec{e}_2 + a_1^3\,\vec{e}_3 + a_1^4\,\vec{e}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= a_2^1\,\vec{e}_1 + a_2^2\,\vec{e}_2 + a_2^3\,\vec{e}_3 + a_2^4\,\vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{aligned} \qquad (1)$$

линейно независима. Дополнить систему до ортонормированного базиса всего пространства E^4.

Р е ш е н и е. Находим значение скалярного произведения:

$$\left(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2\right) = \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) = 0.$$

Следовательно, система векторов $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2\right\}$ ортогональна.

Для того чтобы дополнить эту систему до ортогонального базиса пространства евклидова E^4, найдём векторы

$$\vec{x} = x^1\,\vec{e}_1 + x^2\,\vec{e}_2 + x^3\,\vec{e}_3 + x^4\,\vec{e}_4$$

такие, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \left(\vec{x},\ \vec{a}_1\right) = 0, \\ \left(\vec{x},\ \vec{a}_2\right) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Из условий (2) получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решаем СЛАУ (3) методом Гаусса, принимая x^3 и x^4 за свободные неизвестные, то есть, например, полагая $x^3 = a$ и $x^4 = b$. Полученное решение СЛАУ (3) записывается в виде

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

или

$$\vec{x} = a\,\vec{a}_3 + b\,\vec{a}_4,$$

где векторы фундаментальной системы решений

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 0\,\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 0\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Легко проверяется, что фундаментальная система $\left\{\vec{a}_3,\ \vec{a}_4\right\}$ ортогональна и в совокупности с векторами $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2\right\}$ также образует ортогональную систему $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ \vec{a}_4\right\}$. Для получения ортонормированного базиса пространства E^4 нормируем векторы этой системы:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\left\|\vec{a}_1\right\|} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\left\|\vec{a}_2\right\|} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right);$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\left\|\vec{a}_3\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right);$$

$$\vec{h}_4 = \frac{\vec{a}_4}{\left\|\vec{a}_4\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{e}_2 + \vec{e}_4\right).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4\right\}$ ортонормирована. $\otimes$

Пример 2.3.13. В евклидовом пространстве E^4 в некотором ортонормированном базисе

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$$

задана система векторов:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4,\ \vec{a}_2 = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - 5\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, можно ли на векторах этой системы как на направляющих векторах построить подпространство H^2 пространства E^4. Если это возможно, то написать параметрические уравнения подпространства H^2.

2) Найти базис $\left\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\right\}$ и построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$ к подпространству H^2, записать параметрические уравнения ортогонального дополнения $H^{2\perp}$.

Р е ш е н и е. 1) Координаты векторов системы $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ непропорциональны – векторы неколлинеарны. Следовательно, система векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ линейно независимая. Векторы системы могут служить одним из базисов (быть направляющими векторами) линейного двумерного многообразия. Векторное параметрическое уравнение такого многообразия в общем случае имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2,$$

где $\vec{x}_0$ – вектор сдвига многообразия. Если $\vec{x}_0 = \vec{0}$, то многообразие превращается в подпространство. В последнем случае ведущий вектор точек этого многообразия превращается в текущий вектор подпространства и представляется в виде:

$$\vec{x} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2.$$

Откуда имеем параметрические уравнения подпространства:

$$\begin{cases} x^1 = t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 2t_1 + 4t_2, \\ x^3 = -3t_1 + 3t_2, \\ x^4 = t_1 - 5t_2. \end{cases}$$

Таким образом, подпространство является, очевидно, двумерной плоскостью, проходящей через начало системы координат.

2) Пусть

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

– произвольный вектор из ортогонального дополнения $H^{\perp}$. Так как система $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ – базис подпространства H, то должны выполняться условия

$$\begin{cases} \left(\vec{a}_1, \vec{x}\right) = 0, \\ \left(\vec{a}_2, \vec{x}\right) = 0. \end{cases}$$

Эти условия приводят к СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 = 0, \\ -3x^1 + 4x^2 + 3x^3 - 5x^4 = 0. \end{cases}$$

Применение метода Гаусса приводит к следующему результату: СЛАУ совместна и неопределённа, а множество её решений выражается следующей формулой

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5}a - \frac{7}{5}b \\ \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a и b – свободные неизвестные. Следовательно, имеем векторное подпространство с направляющими векторами

$$\vec{a}_3 = \frac{9}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_4 = -\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

Нетрудно проверить, что полученные векторы $\left\{\vec{a}_3,\ \vec{a}_4\right\}$ образуют линейно независимую систему, а любая их линейная комбинация ортогональна любой линейной комбинации векторов $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2\right\}$.

Следовательно, на этих векторах можно построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$, параметрические уравнения которого имеют вид, аналогичный параметрическим уравнениям подпространства H^2:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{9}{5}\tau_1 - \frac{7}{5}\tau_2, \\ x^2 = \frac{3}{5}\tau_1 + \frac{1}{5}\tau_2, \\ x^3 = \tau_1, \\ x^4 = \tau_2. \end{cases} \otimes$$

Пример 2.3.14. В аффинном пространстве A^4 координатами относительно репера $\left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ заданы четыре точки:

$$A_1(1;\,4;\,2;\,0),\ A_2(3;\,7;\,3;\,2),\ A_3(2;\,6;\,3;\,-1),\ A_4(1;\,4;\,5;\,2).$$

Получить уравнения гиперплоскости, проходящей через заданные точки.

Р е ш е н и е. Обозначим точку A_1 через $O^* \equiv A_1$ и примем её за начало репера на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Рассмотрим векторы:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \overrightarrow{O^*A_2} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= \overrightarrow{O^*A_3} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 &= \overrightarrow{O^*A_4} = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4. \end{aligned} \qquad (1)$$

Требуя, чтобы для линейной комбинации этих векторов выполнялось условие

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0},$$

решая вытекающую из этого условия СЛАУ для неопределённых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ методом Гаусса, выясняем, что данное условие выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Из этого результата заключаем, что система векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ линейно независима и её можно выбрать в качестве базиса репера

$$\left\{O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$$

на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Пусть $M\left(x^1;\,x^2;\,x^3;\,x^4\right)$ – текущая точка гиперплоскости, координаты которой определены относительно репера $\left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ вмещающего пространства A^4. Тогда её радиус-векторы $\overrightarrow{OM}$ относительно репера $\left\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ пространства A^4 и

$\overrightarrow{O^*M}$ относительно репера $\left\{O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ гиперплоскости $H^3 \subset A^4$ могут быть, соответственно, представлены в виде разложений:

$$\begin{aligned} &\vec{x} \equiv \overrightarrow{OM} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4, \\ &\overrightarrow{O^*M} = t_1 \vec{a}_1 + t_1 \vec{a}_2 + t_1 \vec{a}_3. \end{aligned} \qquad (2)$$

Векторное уравнение гиперплоскости имеет вид:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \overrightarrow{O^*M}, \qquad (3)$$

где

$$\vec{x}_0 \equiv \overrightarrow{OO^*} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3. \qquad (4)$$

Подставляя (1), (2) и (4) в (3), получаем ***параметрические уравнения***

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x^2 = 4 + 3t_1 + 2_2, \\ x^3 = 2 + t_1 + t_2 + 3t_3, \\ x^4 = 2t_1 - t_2 + 2t_3, \end{cases} \qquad (5)$$

гиперплоскости $H^3 \subset A^4$. Для получения неявного уравнения гиперплоскости выразим три параметра t_1, t_2, t_3 из первых трёх уравнений (5), решая СЛАУ

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = x^1 - 1, \\ 3t_1 + 2t_2 = x^2 - 4, \\ t_1 + t_2 + 3t_3 = x^3 - 2 \end{cases} \qquad (6)$$

методом Гаусса, и подставим их в четвёртое уравнение. В процессе решения устанавливаем, что СЛАУ совместна и имеет единственное решение:

$$t_1 = 2x^1 - x^2 + 2;$$

$$t_2 = -3x^1 + 2x^2 - 5;$$

$$t_3 = \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}.$$

Подстановка в четвёртое из уравнений (5) приводит к неявному уравнению гиперплоскости $H^3 \subset A^4$, проходящей через заданные четыре точки:

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0. \otimes$$

Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы, определители и СЛАУ

Предварительные сведения

Оператор – это отображение $\hat{A}: X^m \to Y^n$. Оператор называется линейным, если

$$\left(\forall \alpha, \beta \in R^1\right) \wedge \left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X^m\right): \hat{A}\left(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}\right) = \alpha \hat{A}\vec{x} + \beta \hat{A}\vec{y}.$$

При фиксированных базисах в

$$\left\{\vec{e}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\right\} \subset X^m \text{ и } \left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n\right\} \subset Y^n$$

линейный оператор имеет своим представителем **матрицу**:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \ldots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы по столбцам находятся как коэффициенты разложения образов $\vec{y} \in Y^n$ векторов $\vec{x} \in X^m$ по базису пространства Y^n.

Действия с линейными операторами определяются следующим образом. Если

$$\hat{A}: X^m \to Y^n,\ \hat{B}: X^m \to Y^n,$$

то

$$\hat{C} \overset{def}{=} \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow \left(\forall \vec{x} \in X^m\right) \hat{C}\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}.$$

Матричные элементы матрицы суммы операторов вычисляются по формуле $c_j^i = a_j^i + b_j^i$.

Произведение оператора на число

$$\hat{T} = \alpha \hat{A} \Leftrightarrow \left(\forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C} \vec{x} = \alpha \left(\hat{A} \vec{x} \right).$$

Матричные элементы матрицы произведения на число вычисляются по формуле $c_j^i = \alpha a_j^i$.

Если $\hat{A} : X^m \to Y^n$ и $\hat{B} : X^m \to Y^n$, то композиция операторов $\hat{C} = \hat{B} \circ \hat{A}$:
$$\hat{C} \vec{x} \overset{def}{=} \left(\hat{B} \hat{A} \right) \vec{x} = \hat{B} \left(\hat{A} \vec{x} \right).$$

Элементы матрицы композиции линейных операторов находятся по формуле

$$c_k^i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i a_k^j .$$

Формула разложения определителя матрицы оператора $\hat{A} : X^n \to X^n$ по элементам любой строки или любого столбца определителя, например для столбца с номером k, имеет вид:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_k^i M_k^i =$$

$$= (-1)^{1+k} a_k^1 M_k^1 + (-1)^{2+k} a_k^2 M_k^2 + \ldots + (-1)^{n+k} a_k^n M_k^n .$$

Примеры с решением

Пример 2.4.1. В пространстве R^3 оператор $\hat{P}$ действует по правилу
$$\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right) \hat{P} \vec{x} = x^1 \vec{e}_1,$$

то есть ставит в соответствие произвольному вектору $\vec{x}$ его координатную проекцию на ось OX^1. Показать, что оператор линейный и найти его матрицу.

Р е ш е н и е. покажем, что оператор линейный. По определению для линейного оператора справедливо равенство:

$$\hat{P} \left(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \right) = \alpha_1 \hat{P} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{P} \vec{x}_2 .$$

Проверим его выполнение для заданного оператора:

$$\hat{P}\left(\alpha_1 \vec{x}_1+\alpha_2 \vec{x}_2\right)=$$

$$=\hat{P}\left[\alpha_1\left(x_1^1 \vec{e}_1+x_1^2 \vec{e}_2+x_1^3 \vec{e}_3\right)+\alpha_2\left(x_2^1 \vec{e}_1+x_2^2 \vec{e}_2+x_2^3 \vec{e}_3\right)\right]=$$

$$=\hat{P}\left[\left(\alpha_1 x_1^1+\alpha_2 x_2^1\right)\vec{e}_1+\left(\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2\right)\vec{e}_2+\left(\alpha_1 x_1^3+\alpha_2 x_2^3\right)\vec{e}_3\right]=$$

$$=\left(\alpha_1 x_1^1+\alpha_2 x_2^1\right)\vec{e}_1=\alpha_1 x_1^1 \vec{e}_1+\alpha_2 x_2^1 \vec{e}_1=\alpha_1 \hat{P}\vec{x}_1+\alpha_2 \hat{P}\vec{x}_2.$$

Определение выполняется и оператор $\hat{P}$ линейный.

Действуя оператором $\hat{P}$ последовательно на базисные векторы, получаем:

$$\hat{P}\vec{e}_1=1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3,$$

$$\hat{P}\vec{e}_2=0\cdot\vec{e}_1=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3,$$

$$\hat{P}\vec{e}_3=0\cdot\vec{e}_1=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3.$$

Теперь матрица оператора принимает следующий вид:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{P}$ называется ***оператором ортогонального проектирования на ось*** OX^1. ⊗

Пример 2.4.2. Показать, что оператор $\hat{A}: R^3 \to R^3$, действующий по правилу

$$\left(\forall \vec{x}\in R^3\right)\ \hat{A}\vec{x}=\left[\vec{a},\left[\vec{x},\vec{b}\right]\right],$$

где фиксированные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими разложениями

$$\vec{a}=2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-\vec{e}_3,\ \vec{b}=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$$

по каноническому базису, является линейным, и найти его матрицу.

Р е ш е н и е. Из свойств векторного произведения следует, что:

$$\hat{A}\left(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\right)=\left[\vec{a},\left[\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{b}\right]\right]=\left[\vec{a},\alpha\left[\vec{x},\vec{b}\right]+\beta\left[\vec{y},\vec{b}\right]\right]=$$

$$=\alpha\left[\vec{a},\left[\vec{x},\vec{b}\right]\right]+\beta\left[\vec{a},\left[\vec{y},\vec{b}\right]\right]=\alpha\hat{A}\vec{x}+\beta\hat{A}\vec{y}.$$

Матрицу оператора определяем, находя образы базисных векторов. При этом возможны три варианта решения:

1) использовать свойства векторного произведения;

2) использовать формулу для вычисления векторного произведения;

3) использовать для двойного векторного произведения формулу

$$\left[\vec{A},\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right]=\vec{B}\left(\vec{A},\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A},\vec{B}\right).$$

Используем второй вариант решения, находя векторное произведение

$$\hat{A}\vec{e}_k=\left[\vec{a},\left[\vec{e}_k,\vec{b}\right]\right]$$

по формуле

$$\left[\vec{x},\vec{y}\right]=\left(x^2y^3-x^3y^2\right)\vec{e}_1+\left(x^3y^1-x^1y^3\right)\vec{e}_2+\left(x^1y^2-x^2y^1\right)\vec{e}_3.$$

Пусть $k=1$, тогда получаем:

$$\left[\vec{e}_1,\vec{b}\right]=\left(0\cdot1-0\cdot(-1)\right)\vec{e}_1+\left(0\cdot1-1\cdot1\right)\vec{e}_2+\left(1\cdot(-1)-0\cdot1\right)\vec{e}_3=-\vec{e}_2-\vec{e}_3.$$

Далее имеем:

$$\hat{A}\vec{e}_1=\left[\vec{a},\left[\vec{e}_1,\vec{b}\right]\right]=-5\vec{e}_1+2\vec{e}_2-2\vec{e}_3.$$

Аналогично находим:

$$\hat{A}\vec{e}_2=\left[\vec{a},\left[\vec{e}_2,\vec{b}\right]\right]=-4\vec{e}_1+\vec{e}_2-4\vec{e}_3,$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_3, \vec{b}\right]\right] = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Матрица оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 2.4.3. Показать, что если $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_m\right\} \subset X^n$ – линейно зависимая система векторов, то и система образов $\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots, \hat{A}\vec{x}_m\right\} \subset X^n$ при действии линейного оператора $\hat{A}: X^n \to X^n$ также линейно зависимая.

Р е ш е н и е. Составим справедливое в силу линейной зависимости системы векторов равенство

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

где не все коэффициенты $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ равны нулю одновременно. Действуя на обе части последнего равенства оператором $\hat{A}$, в силу его линейности получаем:

$$\alpha_1 \hat{A}\vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A}\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m \hat{A}\vec{x}_m = \vec{0},$$

Так как среди коэффициентов $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ есть ненулевые, то система образов

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots, \hat{A}\vec{x}_m\right\}$$

линейно зависима. $\otimes$

Пример 2.4.4. Показать, что если система

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2 \ldots, \hat{A}\vec{x}_m\right\} \subset X^n$$

образов векторов системы

$$\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}\subset X^n$$

при действии оператора $\hat{A}: X^n \to X^n$ линейно независимая, то и сама система $\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}\subset X^n$ также линейно независимая.

Р е ш е н и е. Для системы векторов $\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}$ потребуем выполнения равенства нуль вектору линейной комбинации, предполагая, что не все коэффициенты её равны нулю одновременно

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_m\vec{x}_m=\vec{0},$$

то есть предположим, что система $\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}$ линейно зависимая.

Действуя на обе части равенства оператором $\hat{A}$, получим

$$\alpha_1\hat{A}\vec{x}_1+\alpha_2\hat{A}\vec{x}_2+\ldots+\alpha_m\hat{A}\vec{x}_m=\vec{0},$$

где в силу линейной независимости системы образов векторов

$$\left\{\hat{A}\vec{x}_1,\ \hat{A}\vec{x}_2\ldots,\ \hat{A}\vec{x}_m\right\}$$

выполняется условие

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0.$$

Следовательно, предположение о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\ldots,\ \vec{x}_m\right\}$$

неверное. Система линейно независимая. $\otimes$

Пример 2.4.5. Пусть $\vec{x}\in R^3$ – произвольный вектор. Вычислить коммутатор

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\vec{x} \equiv \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\vec{x}$$

операторов $\hat{A} : R^3 \to R^3$ и $\hat{B} : R^3 \to R^3$, представленных в каноническом базисе пространства R^3 своими матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Коммутатор операторов – коммутатор их матриц, равен:

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 22 & 16 \\ 8 & 16 & 26 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 4 & 14 \\ 15 & 12 & 23 \\ 14 & 20 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix}$$

Находим коммутатор операторов – результат воздействия оператора $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$, для чего находим координаты образа вектора:

$$\left(AB - BA\right)\left| x \right\rangle = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x^1 + 18x^2 + 2x^3 \\ -7x^1 + 4x^2 + 3x^3 \\ -2x^1 - 12x^2 - 22x^3 \end{pmatrix}.$$

Теперь образ вектора равен:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\vec{x} = \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\vec{x} = \left(18x^1 + 18x^2 + 2x^3\right)\vec{e}_1 +$$

$$+\left(-7x^1 + 4x^2 + 3x^3\right)\vec{e}_1 + \left(-2x^1 - 12x^2 - 22x^3\right)\vec{e}_1. \otimes$$

Пример 2.4.6. В каноническом базисе трёхмерного пространства R^3 действия операторов $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{pmatrix};\ B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\left(2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\right)\vec{x}$.

Р е ш е н и е. Находим матрицы операторов, исходя из координатной формы записи действия оператора в фиксированном базисе:

$$A|x\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a_3^1x^3 \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3 \\ a_1^3x^1 + a_2^3x^2 + a_3^3x^3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая данные условия задачи с координатной формулой действия оператора, находим их матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Производим указанные в условии задачи действия с матрицами:

$$2A + AB = 2\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -10 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix}.$$

Находим координаты образа вектора $\vec{x}$, используя координатную форму записи:

$$(2A+AB)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x_1-13x_2-16x_3 \\ 3x_2+10x_3 \\ 6x_1-13x_2-16x_3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{x}=(6x_1-13x_2-16x_3)\vec{e}_1+(3x_2+10x_3)\vec{e}_2+(6x_1-13x_2-16x_3)\vec{e}_3. \otimes$$

Пример 2.4.7. Найти $\left(\hat{A}\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\hat{B}\vec{y}\right)$, если

$$\vec{x}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2+6\vec{e}_3;\ \vec{y}=-3\vec{e}_1-\vec{e}_2-5\vec{e}_3;$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим вектор $\hat{A}\vec{x}+\vec{y}$ в координтаном представлении:

$$A|x\rangle+|y\rangle=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A}\vec{x}+\vec{y}=22\vec{e}_1+16\vec{e}_2+13\vec{e}_3.$$

2) Находим вектор $\vec{x}+\hat{B}\vec{y}$ в координтаном представлении:

$$|x\rangle+B|y\rangle=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ -14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -19 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x}+\hat{B}\vec{y}=-19\vec{e}_1-17\vec{e}_2-8\vec{e}_3.$$

3) Находим указанное в условии скалярное произведение:

$$\left(\hat{A}\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\hat{B}\vec{y}\right)=22\cdot(-19)+16\cdot(-17)+13\cdot(-8)=-794.\ \otimes$$

Пример 2.4.8. Решить методом Гаусса СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1-x^2+x^3-x^4=5, \\ x^1+2x^2-2x^3+3x^4=-6, \\ 3x^1+x^2-x^3+2x^4=-1. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. 1) Удобно поменять местами первое и второе уравнения системы (1), так как у второго уравнения коэффициент при первом неизвестном равен 1:

$$\begin{cases} x^1+2x^2-2x^3+3x^4=-6, \\ 2x^1-x^2+x^3-x^4=5, \\ 3x^1+x^2-x^3+2x^4=-1. \end{cases} \qquad (2)$$

Выражаем из первого уравнения СЛАУ (2) неизвестное x^1 и подставляем результат в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} x^1+2x^2-2x^3+3x^4=-6, \\ -5x^2+5x^3-7x^4=17, \\ -5x^2+5x^3-7x^4=17. \end{cases} \qquad (3)$$

Два последних уравнения в (3) одинаковы, поэтому одно уравнение можно отбросить:

$$\begin{cases} x^1+2x^2-2x^3+3x^4=-6, \\ -5x^2+5x^3-7x^4=17. \end{cases} \qquad (4)$$

Принимаем в (4) неизвестные x^3, x^4 за свободные неизвестные и, полагая $x^3=a$ и $x^4=b$, выражаем через них x^2, x^1, имеем общее решение СЛАУ:

$$x^2=-\frac{17}{5}+a-\frac{7}{5}x^4,\ x^1=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}b,\ x^3=a,\ x^4=b.$$

2) Приведём матричную реализацию метода Гаусса. Перепишем систему уравнений в виде расширенной матрицы и поменяем местами первую и вторую строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая мысленно первую строку матрицы первый раз на 2, а второй раз на 3 и вычитая в реальности последовательно из второй и третьей строки (как вектор-строку), получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки матрицы идентичны, то есть второе и третье уравнения системы одинаковы. Отбрасывая третью строку, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная система уравнений имеет вид (4):

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ \quad -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases}$$

Дальше решение повторяет выполненные в первом пункте операции.

Дадим интерпретацию полученного общего решения СЛАУ, для чего запишем вектор-столбец решения так

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b \\ -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если теперь переписать полученный результат в символическом виде

$$|x\rangle = |x_0\rangle + a|a\rangle + b|b\rangle,$$

где

$$|x\rangle=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\\x^4\end{pmatrix},\ |x_0\rangle=\begin{pmatrix}4/5\\-17/5\\0\\0\end{pmatrix},\ |a\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ |b\rangle=\begin{pmatrix}-1/5\\-7/5\\0\\1\end{pmatrix},$$

То становится очевидным, что общее решение системы уравнений с геометрической точки зрения представляет собой двумерное линейное многообразие проходящее через “точку” $|x_0\rangle$ и имеющее направляющие векторы $|a\rangle$ и $|b\rangle$. $\otimes$

Пример 2.4.9. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&1\\4&-1&-5\end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго и третьего столбцов, получим:

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-5&-1\\4&-5&-9\end{vmatrix}.$$

2) В полученном определителе в первой строке отличен от нуля только один первый элемент. Применяя формулу разложения определителя по элементам первой строки, получаем:

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-5&-1\\4&-5&-9\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5&-1\\-5&-9\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&-1\\4&-9\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&-5\\4&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-1\\-5&-9\end{vmatrix}=45-5=40.\ \otimes$$

Пример 2.4.10. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Определитель матрицы $\det A = 5 \neq 0$. Матрица A невырожденная, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_1^1 = 1;\ A_2^1 = -3;\ A_3^1 = 1$$

$$A_1^2 = 3;\ A_2^2 = 1;\ A_3^2 = -2;$$

$$A_1^3 = -2;\ A_2^3 = 1;\ A_3^3 = 3.$$

Находим присоединённую матрицу:

$$adjA = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка по формулам $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ подтверждает правильность расчёта. $\otimes$

Пример 2.4.11. Матричным методом решить СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 3x^2 = 0, \\ 2x^1 + 4x^2 = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Проверяем условие невырожденности основной матрицы системы уравнений, для чего вычисляем определитель основной матрицы системы:

$$\det A = -2 \neq 0.$$

Обратная матрица существует.

2) Перепишем СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3) Находим алгебраические дополнения элементов основной матрицы системы: $A_1^1 = 4, A_2^1 = -2, A_1^2 = -3, A_2^2 = 1$.

4) Составляем матрицу алгебраических дополнений и, транспонируя её, находим присоединённую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adjA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det A} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6) Находим значения неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 = 9,\ x^2 = -3. \otimes$$

Пример 2.4.12. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Имеем матричное уравнение вида $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы его решить, нужно найти матрицу A^{-1} и умножить уравнение на неё слева. Тогда решение запишется в виде $X = A^{-1}B$.

1) Проверяем условие невырожденности. Определитель матрицы A равен:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0.$$

Матрица невырождена, следовательно, обратная матрица существует.

2) Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_1^1 = 3,\ A_2^1 = -1,\ A_1^2 = -5,\ A_2^2 = 2.$$

Составляем союзную матрицу и находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Умножаем данное матричное уравнение на матрицу A^{-1} слева:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверка правильности вычислений осуществляется путём подстановки в исходное уравнение. $\otimes$

Пример 2.4.13. Решить СЛАУ, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 5, \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 = 1, \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 11. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$x^1 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{12}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \frac{11}{12}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{40}{12} - \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = \frac{24}{12} = 2.$$

Аналогично находим x^2 и x^3:

$$x^2=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}3&5&1\\2&1&1\\2&11&3\end{vmatrix}=-2;\ x^3=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}3&2&5\\2&3&1\\2&1&11\end{vmatrix}=3.\ \otimes$$

Пример 2.4.14. Пусть $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ \vec{a}_4\right\}\subset X^4$ – некоторый (старый) базис пространства X^4 и

$$T=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T}:X^4\to X^4$ в этом базисе. Найти матрицу линейного оператора $\hat{T}$ в новом базисе

$$\left\{\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3,\ \vec{g}_4\right\}\subset X^4,$$

если известно, что векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса разложениями:

$$\vec{g}_1=\vec{a}_1,\ \vec{g}_2=\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{g}_3=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3,\ \vec{g}_4=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4.$$

Р е ш е н и е. Матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Матрица невырождена, так как $\det A=1$. Следовательно, существует обратная матрица. Для нахождения обратной матрицы найдём сначала алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_1^1 = 1;\quad A_2^1 = -1;\quad A_3^1 = 0;\quad A_4^1 = 0;$$
$$A_1^2 = 0;\quad A_2^2 = 1;\quad A_3^2 = -1;\quad A_4^2 = 0;$$
$$A_1^3 = 0;\quad A_2^3 = 0;\quad A_3^3 = 1;\quad A_4^3 = -1;$$
$$A_1^4 = 0;\quad A_2^4 = 0;\quad A_3^4 = 0;\quad A_4^4 = 1.$$

Теперь обратная матрица находится по формуле $\hat{A} = \frac{1}{\det A} adjA$ и имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При переходе от старого базиса к новому базису матрица оператора T преобразуется по формуле $T' = \left(A^{-1}\right)^T TA^T$. Проводя вычисления, получаем матрицу T':

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}. \otimes$$

Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов

Предварительные сведения

Ядро оператора $\hat{A}: X^m \to Y^n$ – это множество векторов в X^m, удовлетворяющих условию

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{0}.$$

Размерность ядра – **дефект** оператора. Множество значений оператора – это множество образов $\vec{y} \in Y^n$ векторов $\vec{x} \in X^m$. Размерность множества значений оператора – **ранг** оператора.

Примеры с решением

Пример 2.5.1. Найти ядро $K\left(\hat{A}\right)$ линейного оператора $\hat{A}: X^4 \to X^3$, заданного в некоторых базисах

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset X^4, \left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset X^3$$

этих пространств матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По определению ядро

$$K\left(\hat{A}\right) = \left\{\vec{x} \in X^4 : \hat{A}\vec{x} = \vec{0}\right\},$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем СЛАУ вида

$$\begin{cases} x^1 + \qquad\qquad 2\cdot x^3 + 4\cdot x^4 = 0, \\ \qquad 3\cdot x^2 + \quad x^3 + 2\cdot x^4 = 0, \\ \quad - \quad x^2 \quad - 2\cdot x^3 \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ, например, метом Гаусса, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0\end{array}\right).$$

Принимая неизвестное x^4 за свободное неизвестное и, полагая $x^4 = t$, где t может принимать произвольные значения из R, получаем:

$$x^3 = \frac{2}{5}t,\ x^2 = -\frac{4}{5}t,\ x^1 = -\frac{24}{5}t.$$

Откуда для ядра оператора имеем

$$K\left(\hat{A}\right) = \left\{\vec{x} \in X^4 : \vec{x} = t\,\vec{a};\, t \in R\right\},$$

где

$$\vec{a} = -\frac{24}{5}\vec{e}_1 - \frac{4}{5}\vec{e}_2 + \frac{2}{5}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Таким образом, ядро оператора является одномерным линейным многообразием $L\left\{\vec{a}\right\}$ с направляющим вектором $\vec{a}$. ⊗

Пример 2.5.2. Пусть Y – множество симметричных матриц 2-го порядка с обычными матричными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Показать, что это множество является векторным подпространством векторного пространства всех квадратных матриц второго порядка.

Р е ш е н и е. Сначала покажем, что множество X квадратных матриц 2-го порядка вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

является векторным пространством. Для этого надо показать, что операция сложения, являясь алгебраической, удовлетворяет четырём аксиомам для операции сложения векторного пространства.

То, что операция сложения во множестве X алгебраическая, очевидно. Легко видеть, что операция сложения ассоциативна и коммутативна, то есть

$$A + B = B + A;\ (A+B)+C = A+(B+C).$$

Во множестве X имеется нейтральный элемент

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

и противоположный элемент

$$-A=\begin{pmatrix}-a_1^1 & -a_2^1\\ -a_1^2 & -a_2^2\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить и выполнение аксиом для операции умножения на число.

Легко видеть, что во множестве X каноническим базисом является система матриц вида

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Действительно, произвольная матрица может быть записана в виде разложения по матрицам этой системы:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Множество симметричных матриц Y вида

$$A=\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1\\ a_2^1 & a_2^2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1^1 & b_2^1\\ b_2^1 & b_2^2\end{pmatrix}$$

является подпространством векторного пространства X. Действительно, симметрические матрицы образуют подмножество пространства X. Операции сложения и умножения на число не нарушают свойства симметричности матрицы. Действительно, результат выполнения этих операций является, очевидно, снова симметричной матрицей:

$$A+B=\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1\\ a_2^1 & a_2^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1^1 & b_2^1\\ b_2^1 & b_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1^1+b_1^1 & a_2^1+b_2^1\\ a_2^1+b_2^1 & a_2^2+b_2^1\end{pmatrix},$$

$$\alpha A=\alpha\cdot\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1\\ a_2^1 & a_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_1^1 & \alpha\cdot a_2^1\\ \alpha\cdot a_2^1 & \alpha\cdot a_2^2\end{pmatrix}.\ \otimes$$

Пример 2.5.3. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1. ***Первый метод*** (элементарные преобразования матрицы). Ранг матрицы подчинён неравенству $r(A)\le \min(m,n)=3$ ($n-$число строк, $m-$число столбцов). Для нахождения ранга применим элементарные преобразования матрицы.

Вычтем первую строку матрицы из второй строки и, умножив её мысленно на 3, из третьей:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -2\\ 0 & 5 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Вычёркивая из матрицы третью строку, совпадающую со второй строкой, получаем

$$A\cong\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Здесь символ $\cong$ использован для обозначения эквивалентности матриц по рангу в процессе преобразований.

Видим, что наивысший порядок отличного от нуля минора равен 2 (левый угловой минор является треугольным). Таким образом, ранг матрицы $r=2$.

2. ***Второй метод*** (окаймляющих миноров). Минор

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=5\ne 0.\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

Минор, окаймляющий первый минор

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2-2=0.$$

Следующий окаймляющий минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Все окаймляющие миноры равны нулю, следовательно, ранг матрицы

$r(A) = 2$.⊗

Пример 2.5.4. Найти ранг $r\left(\hat{A}\right)$, множество значений $\hat{A}\left(X^5\right)$ и дефект $d\left(\hat{A}\right)$ линейного оператора $\hat{A}: X^5 \to X^3$, если этот оператор в некоторых базисах пространств X^5 и X^3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Пусть отмечены базисы

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\right\} \subset X^5, \left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\} \subset X^3,$$

в которых матрица оператора имеет указанный вид.

1) Находим ранг матрицы оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Угловой минор третьего порядка преобразованной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы $r(A)=3$.

2) Вектор-столбцы преобразованной матрицы, образующие её базисный минор, составлены из координат базисных векторов множества значений оператора, то есть базис множества значений имеет вид

$$|a\rangle_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ |a\rangle_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ |a\rangle_3=\begin{pmatrix}-2\\10\\-9\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{a}_1=\vec{g}_1,$$

$$\vec{a}_2=\vec{g}_2,$$

$$\vec{a}_3=-2\vec{g}_1+10\vec{g}_2-9\vec{g}_3.$$

Множеством значений оператора является линейная оболочка системы векторов $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\right\}$:

$$\hat{A}\left(X^5\right)=\left\{\vec{y}\in X^3:\left(\forall\alpha,\beta,\eta\in R^1\right)\vec{y}=\alpha\cdot\vec{a}_1+\beta\cdot\vec{a}_2+\eta\cdot\vec{a}_3\right\},$$

3) По теореме о связи ранга и дефекта линейного оператора имеем

$$r\left(\hat{A}\right)+d\left(\hat{A}\right)=5,$$

откуда получаем $d\left(\hat{A}\right)=2$. Итак, $r\left(\hat{A}\right)=3$, $d\left(\hat{A}\right)=2$. ⊗

Пример 2.5.5. Найти базисы суммы и пересечения подпространств

$$L_1\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\right\}=\left\{\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3\right\},$$

$$L_2\left\{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3\right\}=\left\{\beta_1\vec{b}_1+\beta_2\vec{b}_2+\beta_3\vec{b}_3\right\},$$

если $\alpha_k,\ \beta_k\in R^1$ и

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3;$$

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,\ \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим базисы подпространств:

$$\dim L_1 = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2,$$ базисный минор $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$;

$$\dim L_2 = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2,$$ базисный минор $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Базисом L_1 является подсистема

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

а базисом L_2 подсистема

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Чтобы найти базис подпространства $L_1 + L_2$, вычислим ранг матрицы, столбцами которой являются векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$ базисный минор $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, имеем

$$\dim(L_1 + L_2) = 3$$

и базис подпространства $L_1 + L_2$ есть система $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{b}_1\right\}$.

Теперь базис пересечения подпространств

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 4 - 3 = 1.$$

Таким образом, базис $L_1 \cap L_2$ состоит из одного вектора.

Вектор $\vec{b}_2$ разложим по базису $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{b}_1\right\}$ подпространства $L_1 + L_2$:

$$\vec{b}_2 = \alpha_2^1 \vec{a}_1 + \alpha_2^2 \vec{a}_2 + \beta_2^1 \vec{b}_1.$$

Составляем систему уравнений, используя разложения векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Решение этой СЛАУ даёт:

$$\alpha_2^1 = 2,\ \alpha_2^2 = 1,\ \beta_2^1 = -1,$$

Таким образом,

$$\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{b}_1,$$

Следовательно, вектор

$$\vec{c} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

является базисом подпространства $L_1 \cap L_2$. $\otimes$

Пример 2.5.6. Выяснить вопрос о совместности СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 3, \\ x^1 + 3x^2 - x^3 = 1, \\ 3x^1 - x^2 + x^3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выписываем основную и расширенную матрицы СЛАУ:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix};\ B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 7\end{array}\right).$$

Минор второго порядка в левом верхнем углу (см. предыдущий пример) равен $5\neq 0$. Все миноры третьего порядка, как у матрицы A, так и у матрицы B, равны нулю: ранги основной и расширенной матриц $r(A)=r(B)=2$. Следовательно, СЛАУ совместна. $\otimes$

Пример 2.5.7. Выяснить, при каких значениях параметра a СЛАУ с основной матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

и столбцом правых частей $|b\rangle=\begin{pmatrix}2 & 1 & a\end{pmatrix}^T$ является совместной.

Р е ш е н и е. Нетрудно видеть, что ранг матрицы A СЛАУ $r(A)=2$. Расширенная матрица имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -1 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

Вычеркнем в расширенной матрице третий и четвёртый столбцы. Так как ранг матрицы не изменится, то имеем

$$\det B=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & a\end{pmatrix}=3a+6.$$

Если $a\neq -2$, то $\det B\neq 0$ и $r(B)=3\neq r(A)$ – СЛАУ несовместна. Если $a=-2$, то $\det B=0$. Так как у матрицы B имеются отличные от нуля миноры, то $r(B)=2=r(A)$. Поэтому при $a=-2$ СЛАУ совместна. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Даны векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Найти линейную комбинацию (вектор)

$$\vec{u} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$$

и норму (длину) вектора $\vec{u}$:

1) $\vec{x} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$;

2) $\vec{x} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{z} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\alpha = -4$, $\beta = 3$, $\gamma = -2$;

3) $\vec{x} = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{y} = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{z} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\alpha = 7$, $\beta = -5$, $\gamma = -1$.

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если:

1) $A(2;-2;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(4;-4;5)$;

2) $A(0;-2;6)$, $B(-12;-2;-3)$, $C(-9;-2;-6)$;

3) $A(2;3;-1)$, $B(4;5;-2)$, $C(3;1;1)$.

3. На плоскости R^2 заданы своими координатами три вершины A, B и C параллелограмма. Найти:

1) координаты четвёртой вершины D;

2) косинус угла между сторонами AB и AC;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

1) $A(-1;2;-2)$, $B(3;4;-5)$, $C(1;1;0)$;

2) $A(-2;-2;0)$, $B(-1;-2;4)$, $C(5;-2;1)$;

3) $A(3;3;-1)$, $B(3;2;0)$, $C(4;4;-1)$.

4. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами заданы векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Найти $\left(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\gamma\vec{x}+\lambda\vec{y}\right)$, если дано:

1) $\vec{x}=\vec{e}_1+5\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{y}=\vec{e}_1+7\vec{e}_2+\vec{e}_3$,

$\alpha=4$, $\beta=-3$, $\gamma=1$, $\lambda=2$;

2) $\vec{x}=2\vec{e}_1+5\vec{e}_2+8\vec{e}_3$, $\vec{y}=\vec{e}_1-3\vec{e}_2-7\vec{e}_3$,

$\alpha=-2$, $\beta=-5$, $\gamma=-1$, $\lambda=-2$;

3) $\vec{x}=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-8\vec{e}_3$, $\vec{y}=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2+7\vec{e}_3$,

$\alpha=11$, $\beta=6$, $\gamma=2$, $\lambda=-7$.

5. Найти $\left(\vec{x}-4\vec{y},6\vec{x}+\vec{y}\right)$, если дано:

1) $\left\|\vec{x}\right\|=4$, $\left\|\vec{y}\right\|=5$, $\left\{\vec{x},\hat{\ }\vec{y}\right\}=\frac{\pi}{4}$;

2) $\left\|\vec{x}\right\|=6$, $\left\|\vec{y}\right\|=1$, $\left\{\vec{x},\hat{\ }\vec{y}\right\}=\frac{\pi}{3}$;

3) $\left\|\vec{x}\right\|=2{,}5$, $\left\|\vec{y}\right\|=1{,}5$, $\left\{\vec{x},\hat{\ }\vec{y}\right\}=\frac{\pi}{6}$.

6. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами задан вектор $\vec{x}$. Найти направляющие косинусы и орт данного вектора, если дано:

1) $\vec{x}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+4\vec{e}_3$;

2) $\vec{x}=-\vec{e}_1-3\vec{e}_2+5\vec{e}_3$;

3) $\vec{x} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$.

7. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:

1) $\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \vec{y} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3,\ \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$;

2) $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,\ \vec{z} = -\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$;

3) $\vec{x} = 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{y} = 2\vec{e}_2,\ \vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если дано:

1) $\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 2,\ \left\|\vec{b}\right\| = 1,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{6}$;

2) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 2,\ \left\|\vec{b}\right\| = 2,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{4}$;

3) $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b},\ \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b},\ \left\|\vec{a}\right\| = 1,\ \left\|\vec{b}\right\| = 2,\ \left\{\vec{a}, \vec{b}\right\} = \frac{\pi}{2}$.

9. В пространстве R^3 получить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(3,\ 1,\ 2)$ и найти косинусы углов, образованных её нормальным вектором с осями координат. Построить эту плоскость.

10. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей, проходящих через точки $A_1(0;\ 0;\ 0)$; $B_1(3;\ 3;\ 0)$; $C_1(0;\ 3;\ 3)$ и $A_2(4;\ 5;\ 0)$; $B_2(1;\ 6;\ 3)$; $C_2(2;\ 0;\ 7)$ соответственно.

11. В пространстве R^3 получить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;\ 7;\ 3)$ и имеющей нормальный вектор, заданный точками $M_1(-2;\ -1;\ -8)$ и $M_2(2;\ 1;\ 8)$. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{ON_1}$, $\overrightarrow{ON_2}$ и $\overrightarrow{ON_3}$, где N_1, N_2 и N_3– точки пересечения данной плоскости и осей координат.

12. В пространстве R^3 найти угол между плоскостями, проходящими через точки M_1, M_2, M_3 и N_1, N_2, N_3:

1) $M_1(0;\,7;\,-4)$; $M_2(4;\,8;\,-1)$; $M_3(-2;\,1;\,3)$;
$N_1(2;\,3;\,1)$; $N_2(2;\,0;\,3)$; $N_3(1;\,2;\,0)$;

2) $M_1(1;\,-2;\,2)$; $M_2(-3;\,2;\,3)$; $M_3(3;\,0;\,6)$;
$N_1(0;\,3;\,5)$; $N_2(0;\,-1;\,3)$; $N_3(4;\,0;\,0)$.

13. Найти точку пересечения прямой линии и плоскости:

1) $\dfrac{x^1-2}{1}=\dfrac{x^2-3}{1}=\dfrac{x^3+1}{-4}$, $x^1+x^2+3x^3-10=0$;

2) $\dfrac{x^1+1}{2}=\dfrac{x^2-3}{-4}=\dfrac{x^3+1}{5}$, $x^1+2x^2-x^3+5=0$.

14. Найти координаты проекции точки M_0 на плоскость:

1) $M_0(0;\,-3;\,-2)$; $2x^1+10x^2+10x^3-1=0$;

2) $M_0(1;\,0;\,-1)$; $2x^2+4x^3-1=0$.

15. В пространстве R^3 найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2 и M_3:

1) $M_1(0;\,7;\,-4)$, $M_2(4;\,8;\,-1)$, $M_3(-2;\,1;\,3)$, $M_0(-10;\,11;\,13)$;

2) $M_1(5;\,8;\,3)$, $M_2(10;\,5;\,6)$, $M_3(8;\,7;\,4)$, $M_0(7;\,17;\,14)$;

3) $M_1(1;\,3;\,5)$, $M_2(-5;\,5;\,2)$, $M_3(7;\,-1;\,8)$, $M_0(0;\,0;\,0)$.

16. Пусть $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n\right\}\subset X^n$ – некоторый базис в векторном пространстве X^n, и $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m\right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Используя метод Гаусса, найти базу и размерность этой системы векторов.

1) $\dim X^n=4$:

$$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = 4\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

2) $\dim X^n = 5$:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_4 = 6\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_5 = -5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5.$$

17. Пусть $L\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ и $L\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ – некоторые подпространства векторного пространства X^4, и пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset X^4$ – некоторый его базис. Найти базис суммы и пересечения этих подпространств.

1) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{b}_1 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{b}_1 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 8\vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4. \end{cases}$

18. Пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset E^4$ – некоторый базис в евклидовом пространстве E^4, и $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Показать, что эта система ортогональна и представить пространство в виде ортогональной суммы

$$E^4 = L_1^2 \oplus L_2^2,$$

где $L_1^2 = L\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\}$, а $L_2^2 = L_1^{2\perp}$.

1) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 3\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6_3 - 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + = -6\vec{e}_3. \end{cases}$

19. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ – некоторый фиксированный вектор из R^3, а операторы $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$, действуют по правилам $\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)$

1) $\hat{A}\vec{x} = \left(\vec{a}, \vec{x}\right)\vec{a}$, 2) $\hat{A}\vec{x} = \left[\vec{a}, \vec{x}\right]$.

Показать, что эти операторы линейные и найти их матрицы.

20. Показать, что операторы

$$\hat{A}: R^3 \to R^3,\ \hat{B}: R^3 \to R^3,\ \hat{C}: R^3 \to R^3,$$

действие которых задано координатными соотношениями

1) $\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$,

2) $\hat{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 - 3 \end{pmatrix}$,

3) $\hat{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

являются линейными и записать их матрицы.

21. В каноническом базисе трёхмерного пространства R^3 действия операторов $\hat{A}: R^3 \to R^3$ и $\hat{B}: R^3 \to R^3$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix};\ \hat{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора:

1) $\left(\hat{A}^2 + 2\hat{B}\right)\vec{x}$; 2) $\left(2\hat{A}^2 + 3\hat{B}^2\right)\vec{x}$; 3) $\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\vec{x}$.

22. Найти матрицы, обратные данным матрицам:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Решить СЛАУ матричным методом и по формулам Крамера:

$$1)\begin{cases} x_1+3x_2-\quad x_3=2,\\ 2x_1-3x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-2x_2-\quad x_3=4;\end{cases}\quad 2)\begin{cases} x_1+3x_2+\quad x_3=-5,\\ 3x_1-4x_2+3x_3=11,\\ 2x_1+4x_2-\quad x_3=-9.\end{cases}$$

24. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

$$1)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8,\\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5,\\ 3x_1-4x_2+5x_3=10;\end{cases}\quad 2)\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1+3x_2+x_3=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3=11;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8,\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8.\end{cases}$$

25. Разложить вектор $\vec{x}$ по системе векторов $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\right\}$:

1) $\vec{a}_1=-\vec{e}_2+2\vec{e}_3,\ \vec{a}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+4\vec{e}_3,$

$\vec{x}=-2\vec{e}_1+9\vec{e}_3.$

2) $\vec{a}_1=\vec{e}_1-3\vec{e}_2,\ \vec{a}_2=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=-\vec{e}_2+2\vec{e}_3,$

$\vec{x}=5\vec{e}_1-12\vec{e}_2-\vec{e}_3.$

3) $\vec{a}_1=3\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,\ \vec{a}_2=-3\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{a}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,$

$\vec{x}=2\vec{e}_2+4\vec{e}_3.$

26. В каноническом базисе пространства R^3 дана линейно независимая система векторов

$\vec{x}_1=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2,$

$\vec{x}_2=2\vec{e}_2+2\vec{e}_3,$

$$\vec{x}_3 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

и матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будет ли линейно независимой система векторов $\hat{A}\vec{x}_1,\ 2\hat{A}\vec{x}_2,\ 3\hat{A}\vec{x}_3$?

27. Проверить, что $(AB)C = A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Вычислить многочлен

$$P(X) = X^3 - 3X + 2$$

от матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

а) $5A + 2X = 0$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$;

и) $(-1)A + 3X = 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

30. Вычислить определители:

ф) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$.

31. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

32. Решить неравенства:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

33. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

34. Решить матричные уравнения:

а) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

35. Решить методом Гаусса СЛАУ:

а) $\begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 = 4, \\ 3x^1 + 4x^2 - 2x^3 = 11, \\ 3x^1 - 2x^2 + 4x^3 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 = 6, \\ 2x^1 - x^2 - 2x^3 - 3x^4 = 8, \\ 3x^1 + 2x^2 - x^3 + 2x^4 = 4, \\ 2x^1 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 = -8. \end{cases}$

36. Пространство R^3 подвергается деформации под действием линейного оператора $\hat{A}$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти объём треугольной пирамиды с вершинами

$$A(0;\ 0;\ 0);\ B(3;\ 3;\ 0);\ C(0;\ 3;\ 3);\ D(3;\ 0;\ 3)$$

до и после деформации пространства.

37. Пусть $\left\{ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ \vec{a}_4 \right\} \subset X^4$ – некоторый базис, а

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T} : X^4 \to X^4$. Найти матрицу оператора в базисе $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4 \right\} \subset X^4$, если:

а) $\vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4,\ \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + \vec{a}_4,$

$$\vec{g}_3 = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4,\ \vec{g}_4 = 5\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4;$$

б) $\vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 3\vec{a}_4,\ \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4,$

$$\vec{g}_3 = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4,\ \vec{g}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4.$$

38. Используя понятие ранга матрицы и теоремы о совместности, выяснить вопрос о совместности следующих СЛАУ:

а) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 + 3x^4 = 0. \end{cases}$

39. При каких значениях параметра a СЛАУ является совместной:

а) $\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 = a, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = -1, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^1 - 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 2, \\ 7x^1 - 4x^2 + x^3 + 3x^4 = a, \\ 5x^1 + ax^2 - 4x^3 - 6x^4 = 3. \end{cases}$

40. Найти ядро оператора, заданного в пространстве R^3 своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дать геометрическую интерпретацию и получить параметрические уравнения ядра.

41. Найти ядро, дефект, ранг и множество значений линейного оператора $\hat{A} : R^m \to R^n$, заданного в некоторых базисах

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m, \right\} \subset R^m, \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \right\} \subset R^n$$

своей матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА E^n

Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве

Предварительные сведения

Пусть $\hat{T} : X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$ – линейный оператор. Тогда, если для вектора $\vec{x} \in X^n \left(\vec{x} \neq \vec{0}\right)$

и некоторого числа μ выполняется соотношение

$$\hat{T}\vec{x} = \mu\vec{x},$$

то вектор $\vec{x}$ называется **собственным вектором** оператора $\hat{T}$, соответствующим **собственному значению** μ. Если в пространстве X^n зафиксирован базис, то последнее равенство сводится к однородной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(t_1^1-\mu\right)x^1 + t_2^1 x^2 + \dots + t_n^1 x^n = 0, \\ t_1^2 x^1 + \left(t_2^2 - \mu\right)x^2 + \dots + t_n^2 x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ t_1^n x^1 + t_2^n x^2 + \dots + \left(t_n^n-\mu\right)x^n = 0. \end{cases}$$

Система $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\}$ собственных векторов линейного оператора $\hat{T}: X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$, соответствующих попарно различным собственным значениям $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, линейно независима.

Линейный оператор $\hat{T}$, действующий в n-мерном пространстве X^n и имеющий n попарно различных собственных значений, называется **оператором простой структуры**. Матрица оператора простой структуры имеет диагональный вид.

Из критерия нетривиальной совместности однородной СЛАУ следует, что

$$T(\mu) \overset{def}{=} \det\left(t_j^i - \mu\delta_j^i\right) = \begin{vmatrix} t_1^1-\mu & t_2^1 & \ldots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2-\mu & \ldots & t_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^n & t_2^n & \ldots & t_n^n-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство есть **характеристическое уравнение**, а многочлен в левой части – **характеристический многочлен**. Из характеристического уравнения определяются собственные значения линейного оператора, а из однородной СЛАУ его собственные векторы.

Подпространство $X_{inv} \subset X^n$ называется **инвариантным подпространством оператора** $\hat{T}: X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$, если

$$\left(\forall \vec{x} \in X_{inv}\right) \; \vec{y} = \hat{T}\vec{x} \in X_{inv}.$$

Пусть $\hat{T}: E^m \to E^n$ – некоторый линейный оператор. Оператор $\hat{T}^*: E^n \to E^m$ называется **сопряжённым по отношению к оператору** $\hat{T}$, если $\left(\forall \vec{x} \in E^m, \forall \vec{y} \in E^n\right)$ выполняется условие

$$\left(\hat{T}\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{T}^*\vec{y}\right).$$

Матрица оператора, сопряжённого с оператором $\hat{T}^*: E^n \to E^m$ связана следующим соотношением:

$$t_j^{k^*} = \overline{t_k^j}.$$

В случае вещественных пространств комплексное сопряжение отсутствует.

Если $\hat{T}: E^m \to E^n,\ \hat{R}: E^m \to E^n$ – некоторые операторы и $\beta \in C$ – произвольное число, то справедливы следующие пять свойств сопряжённого оператора:

1) $\left(\hat{T}^*\right)^* = \hat{T}$; 2) $\left(\hat{T}^*\right)^{-1} = \left(\hat{T}^{-1}\right)^*$; 3) $\left(\beta\hat{T}\right)^* = \overline{\beta}\hat{T}^*$;

4) $\left(\hat{T}+\hat{R}\right)^* = \hat{T}^* + \hat{R}^*$; 5) $\left(\hat{T}\hat{R}\right)^* = \hat{R}^*\hat{T}^*$.

Линейный оператор $\hat{T}: E^n \to E^n$ называется **самосопряжённым (эрмитовым)**, если $\hat{T}^* = \hat{T}$. Матрица самосопряжённого оператора является симметрической, то есть связана с матрицей самого оператора соотношением

$t_j^i = t_i^j$.

Оператор $\hat{T}$, действующий в вещественном евклидовом пространстве E^n, называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n\right)\left(\hat{T}\vec{x}, \hat{T}\vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \vec{y}\right).$$

Ортогональные операторы $\hat{T}: E^n \to E^n$ в вещественном евклидовом пространстве E^n обладают следующими свойствами:

1) единичный оператор является ортогональным;
2) композиция ортогональных операторов также является ортогональным оператором;
3) оператор, обратный ортогональному оператору, также является ортогональным;
4) если $\hat{T}: E^n \to E^n$ – ортогональный оператор, то оператор $\alpha \cdot \hat{T}$ является ортогональным в том и только в том случае, если $\alpha = \pm 1$.

Оператор $\hat{T}: E^n \to E^n$ является ортогональным в том и только в том случае, если он переводит хотя бы один ортонормированный базис снова в ортонормированный базис.

Пусть $\hat{T}: X^n \to \hat{T}\left(X^n\right)$ и

$$F_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \in C[x]$$

– некоторый многочлен. Тогда оператор

$$F_m\left(\hat{T}\right) = a_0\hat{I} + a_1\hat{T} + a_2\hat{T}^2 + \ldots + a_m\hat{T}^m$$

называется многочленом от оператора $\hat{T}$ или ***операторным многочленом***.

Примеры с решением

Пример 2.1.1. В каноническом базисе $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\right\} \subset R^2$ оператор $\hat{T}$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Р е ш е н и е. 1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(T - \mu \cdot I) = 0;\ \mu^2 - 7 \cdot \mu + 10 = 0.$$

Откуда получаем собственные значения оператора $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 5$.

2. Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_1 = 2$, для чего решаем СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_1^1 = -1,\ x_1^2 = 1 \Rightarrow \left|x_1\right\rangle = c\left|a_1\right\rangle,\ c \in R^1 \Rightarrow \left|a_1\right\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c\,\vec{a}_1$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

3. Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_2 = 5$, решая СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_2^1 = {c \over 2},\ x_2^2 = c,\ c \in R^1 \Rightarrow \left|x_2\right\rangle = c\left|a_2\right\rangle \Rightarrow \left|a_2\right\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c\,\vec{a}_2$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Оператор имеет два одномерных собственных подпространства

$$L\left\{\vec{a}_1\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1 ; t \in R^1\right\}$$

и

$$L\left\{\vec{a}_2\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2 ; t \in R^1\right\},$$

с образующими векторами

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2.\ \otimes$$

Пример 2.1.2. Найти матрицу, собственные значения и собственные подпространства оператора (аффинора) зеркального отражения относительно координатной плоскости X^1OX^2 в пространства R^3.

Р е ш е н и е. Оператор зеркального отражения в пространстве R^3 относительно координатной плоскости X^1OX^2, очевидно, действует по правилу (рисунок 2.2.1)

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)\ \vec{y} = \hat{R}\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 - x^3\vec{e}_3.$$

Подействуем на базисные векторы оператором отражения:

$$\hat{R}\vec{e}_1 = \vec{e}_1;\ \hat{R}\vec{e}_2 = \vec{e}_2;\ \hat{R}\vec{e}_3 = -\vec{e}_3.$$

Следовательно, для матрицы оператора отражения относительно координатной плоскости X^1OX^2 получаем:

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора $\hat{R}$ имеет вид:

$$R(\mu) = \det\begin{pmatrix} 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1-\mu \end{pmatrix} = (1-\mu)\cdot(1-\mu)\cdot(-1-\mu).$$

Откуда видно, что многочлен имеет простой корень $\mu_1 = -1$ и двукратный корень $\mu_2 = 1$.

1) Для собственного значения $\mu_2 = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, c \in R^1$$

– любое действительное число. Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = -1$, есть линейная оболочка вида

$$c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\left\{\vec{e}_3\right\} = \left\{\vec{x} \in R^3 : \vec{x} = c \cdot \vec{e}_3;\ c \in R^1\right\},$$

то есть ось OX^3.

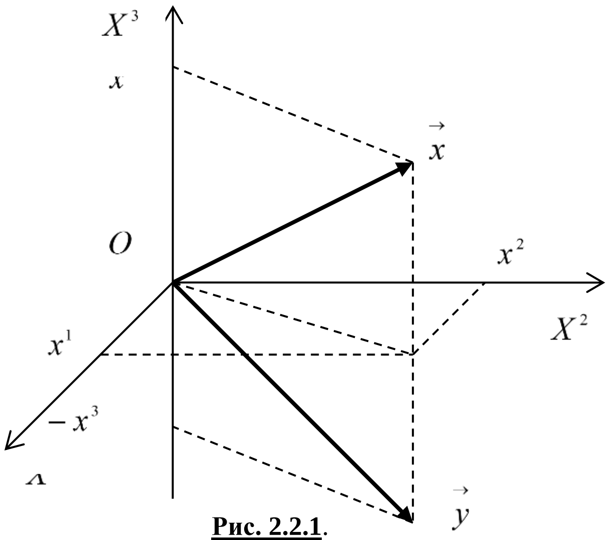


Рис. 2.2.1.

2) Для собственного значения $\mu_2 = 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$|x\rangle \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a, b \in R^1$ – любые действительные числа. Получаем собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = 1$, являющееся линейной оболочкой вида

$$L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} = \left\{\vec{x} \in R^3 : \vec{x} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2;\ a, b \in R^1\right\},$$

то есть координатной плоскостью X^1OX^2. Это подпространство является прямой суммой двух собственных подпространств $OX^1 \oplus OX^2$. ⊗

Пример 2.1.3. В евклидовом пространстве E^3 в ортонормированном (каноническом) базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ оператор $\hat{T}: E^3 \to E^3$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора.

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение:

$$T = \begin{pmatrix} 3-\mu & 0 & 0 \\ 1 & 2-\mu & -1 \\ 1 & -1 & 2-\mu \end{pmatrix} \Rightarrow (3-\mu)(\mu^2 - 4\mu + 3) = 0.$$

Собственные значения $\mu_1 = 1,\ \mu_{2,3} = 3.$

Собственный вектор, соответствующий $\mu_1 = 1$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$\left|a_1\right\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий $\mu_{2,3} = 3$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 0x^1 + 0^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$\left|a_2\right\rangle = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \left|x_3\right\rangle = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем два собственных подпространства:

$$X_1 = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1\right\};\ X_2 = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2 + \tau\vec{a}_3; t, \tau \in R^1\right\}. \otimes$$

Пример 2.1.4. Линейный оператор $\hat{T} : E^3 \to E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ задан матрицей

$$T_e = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве E^3 ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

Р е ш е н и е. Составим характеристический многочлен оператора $\hat{T}$:

$$T(\mu) = \begin{vmatrix} 11-\mu & 2 & -8 \\ 2 & 2-\mu & 10 \\ -8 & 10 & 5-\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 + 18\mu^2 + 81\mu - 1458.$$

Откуда характеристическое уравнение

$$\mu^3 - 18\mu^2 - 81\mu + 1458 = 0 \Rightarrow (\mu - 18)(\mu^2 - 81) = 0,$$

или

$$(\mu - 18)(\mu - 9)(\mu + 9) = 0.$$

Откуда собственные значения оператора

$$\mu_1 = -9,\ \mu_2 = 9,\ \mu_3 = 18.$$

Оператор является симметрическим, то есть самосопряжённым. Поэтому все собственные значения оператора различны, а собственные векторы ортогональны. Найдём собственные векторы оператора $\hat{T}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$.

1) Для собственного значения $\mu_1 = -9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор – угловой. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 10x^1 + x^2 = 4a, \\ 2x^1 + 11x^2 = -10a; \end{cases} \det A = 108 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, первое собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^1 = L\left\{\vec{a}_1\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Для собственного значения $\mu_2 = 9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 8a, \\ 2x^1 - 7x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -18 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, второе собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^2 = L\left\{\vec{a}_2\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

3) Для собственного значения $\mu_3 = 18$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения этой СЛАУ применим критерий нетривиальной совместности однородной СЛАУ.

Определитель СЛАУ

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = 108.$$

Поэтому первые два уравнения СЛАУ линейно независимы. Принимая третью координату вектора за свободное неизвестное, то есть, полагая $x^3 = a$, где a – произвольное действительное число, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -7x^1 + 1x^2 = -5a, \\ 2x^1 - 16x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -54 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, третье собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^3 = L\left\{\vec{a}_3\right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

4) Найденные собственные векторы ортогональны. Нормируем их:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\left\|\vec{x}_1\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}\vec{a}_1 = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\left\|\vec{x}_2\right\|} = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}}\vec{a}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\left\|\vec{x}_3\right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}}\vec{a}_3 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3.$$

5) Матрица перехода от старого базиса к новому базису

$$A:\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right\} \to \left\{\vec{h}_1,\ \vec{h}_2,\ \vec{h}_3\right\}$$

имеет вид:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};\ \det A = -1 \neq 0;\ A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице перехода от старого базиса к новому базису и транспонированная к ней имеют вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} adg A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \left(A^{-1}\right)^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора в новом базисе $\left\{\vec{h}_1,\ \vec{h}_2,\ \vec{h}_3\right\}$:

$$T_a = \left(A^{-1}\right)^T T_e A^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 2.1.5. В евклидовом пространстве E^3 в ортонормированном (каноническом) базисе $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right\}$ оператор $\hat{T}: E^3 \to E^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\hat{T}^*$ в базисе

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим матрицу сопряжённого оператора в старом (ортонормированном) базисе:

$$T_e^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем матрицу перехода от старого базиса к новому базису и транспонируем её:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу, обратную к матрице перехода от старого базиса к новому базису. Определитель матрицы

$$\det A = -2.$$

Алгебраические дополнения

$$A_1^1 = -2,\ A_2^1 = 0,\ A_3^1 = 0,$$

$$A_1^2 = 2,\ A_2^2 = -1,\ A_3^2 = -1,$$

$$A_1^3 = 0,\ A_2^3 = -1,\ A_3^3 = 1;$$

$$adgA = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора $\hat{T}^*$ в новом базисе:

$$T_g^* = \left(A^{-1}\right)^T T_e^* A^T = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 2.1.6. Ранее показано, что линейная оболочка $L\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\right\}$, где элементы L вычисляются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x,\ \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2}\cdot(\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x,\ \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

1) Найти матрицу оператора дифференцирования $\hat{D}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ и матрицу сопряжённого оператора $\hat{D}^*$.

2) Выяснить, является ли оператор $\hat{D}$ симметрическим.

Р е ш е н и е. Находим матрицу оператора дифференцирования в базисе

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2.$$

Для чего находим образы базисных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$:

$$\hat{D}\vec{e}_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos x - \sin x) =$$

$$= 0\cdot\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\vec{e}_2;$$

$$\hat{D}\vec{e}_2 = \frac{d}{dx}(\sin x - \cos x) = \cos x + \sin x = \sqrt{3}\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2.$$

Следовательно, матрица оператора $\hat{D}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное многообразие является вещественным пространством, поэтому матрица сопряжённого оператора $\hat{D}^*$ равна транспонированной матрице оператора $\hat{D}$, то есть

$$D^* = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_2^1 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ для матрицы оператора $\hat{D}$ имеем $d_2^1 \neq d_1^2$, оператор не является симметрическим. $\otimes$

Пример 2.1.7. В евклидовом пространстве E^3 линейный оператор $\hat{T}$ переводит систему векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ в систему векторов $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right\}$. Является ли этот оператор самосопряжённым, если:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|g_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};\ |g_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ |g_3\rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По условию задачи имеем

$$\hat{T}\vec{a}_1 = \vec{g}_1,\ \hat{T}\vec{a}_2 = \vec{g}_2,\ \hat{T}\vec{a}_3 = \vec{g}_3,$$

откуда для векторов-столбцов из координат получаем:

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_2^3 + t_3^3 = 1; \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3; \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_1^1 + t_2^1 = -5, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{matrix}$$

Из последних равенств получаем три СЛАУ для элементов матрицы оператора:

для элементов первой строки

$$\begin{cases} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^1 + t_2^1 = -5; \end{cases}$$

для элементов второй строки

$$\begin{cases} t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1; \end{cases}$$

для элементов третьей строки

$$\begin{cases} \qquad\quad t_2^3 + t_3^3 = 1, \\ t_1^3 \qquad\quad + t_3^3 = 3, \\ t_1^3 + t_2^3 \qquad\quad = 4. \end{cases}$$

Решая эти СЛАУ по формулам Крамера, получаем матрицу оператора:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $(\forall i \neq j = 1, 2, 3)\ t_i^j = t_j^i$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ является самосопряжённым. $\otimes$

Пример 2.1.8. Матрица линейного оператора $\hat{T} : E^3 \to E^3$ в базисе векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset E^3$ имеет вид:

$$T' = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, является ли оператор $\hat{T}$ ортогональным, если в ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ имеют место разложения

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3,\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Р е ш е н и е. 1) *Первый способ.* Проверим выполнение определения ортогональности, то есть выполнение условия

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n\right)\ \left(\hat{T}\vec{x}, \hat{T}\vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \vec{y}\right).$$

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E^3$ в произвольном базисе $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\} \subset E^3$ по формуле

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij} x^i y^j ,$$

где

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3, \ \vec{y} = y^1 \vec{a}_1 + y^2 \vec{a}_2 + y^3 \vec{a}_3,$$

а матрица метрических коэффициентов имеет вид

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_3\right) \\ \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3\right) \\ \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3\right) \end{pmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь получаем для скалярного произведения произвольных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ следующий результат:

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij} x^i y^j = 2x^1y^1 + x^1y^2 + x^1y^3 +$$

$$+ x^2y^1 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + x^3y^1 + x^3y^2 + 2x^3y^3.$$

Находим координаты образов векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ при действии оператора $\hat{T}$:

$$\hat{T}\vec{x}=\vec{u}\Rightarrow T|x\rangle=\begin{pmatrix}u^1\\u^2\\u^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1&0\\-1&0&0\\\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}x^1+x^2\\-x^1\\\frac{2}{3}x^1+x^3\end{pmatrix};$$

$$\hat{T}\vec{y}=\vec{v}\Rightarrow T|y\rangle=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1&0\\-1&0&0\\\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}y^1+y^2\\-y^1\\\frac{2}{3}y^1+y^3\end{pmatrix}.$$

После подстановки найденных координат образов векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и метрических коэффициентов g_{ij} в формулу для скалярного произведения

$$\left(\hat{T}\vec{x},\hat{T}\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g_{ij}u^iv^j$$

и сравнения с формулой для скалярного произведения прообразов, убеждаемся в справедливости равенства

$$\left(\hat{T}\vec{x},\hat{T}\vec{y}\right)=\left(\vec{x},\vec{y}\right).$$

2) *Второй способ.* Матрица перехода от старого (ортонормированного) базиса $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$ к новому базису $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\}$ и обратная к ней матрица имеют, соответственно, вид:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

Так как формула преобразования матрицы оператора при переходе от старого базиса к новому базису имеет вид

$$T' = \left(A^{-1}\right)^T TA^T,$$

то для матрицы оператора в старом базисе $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right\}$ получаем:

$$T = A^T T' \left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в том, что полученная матрица является ортогональной, можно с помощью свойств ортогональных матриц. Например, умножая матрицу T на транспонированную матрицу T^T, получим

$$TT^T = T^T T = I.$$

Таким образом, выполняется свойство $T^T = T^{-1}$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ и, соответственно, его матрица являются ортогональными. $\otimes$

Пример 2.1.9. Пусть $\hat{T} : X \to X$. Показать, что если $X_{inv}^{(1)},\ X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, то $X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$ и $X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$ также являются инвариантными подпространствами оператора $\hat{T}$.

Р е ш е н и е. Пусть $X_{inv}^{(1)},\ X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$. Предположим, что вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$. Но тогда вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)}$ и $\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$, следовательно, и его образ

$$\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}.$$

Теперь очевидно, что образ вектора $\vec{x}$ принадлежит пересечению этих подпространств, то есть

$$\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \bigcap X_{inv}^{(2)}.$$

Пусть теперь $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$. Тогда, по определению суммы подпространств

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,\ \vec{x}_1 \in X_{inv}^{(1)},\ \vec{x}_2 \in X_{inv}^{(2)},$$

откуда в силу того, что снова $\hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T}\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$, получаем

$$\hat{T}\vec{x} = \hat{T}\vec{x}_1 + \hat{T}\vec{x}_2 \in X_{ivn}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}. \otimes$$

Пример 2.1.10. Пусть $\hat{T} : X \to X$. Показать, что если оператор $\hat{T}$ биективный, то его инвариантное подпространство X_{inv} является инвариантным подпространством и для обратного оператора $\hat{T}^{-1}$.

Р е ш е н и е. Известно, что линейный оператор $\hat{T} : X \to X$ взаимно однозначен (биективен) в том и только в том случае, если он невырожденный.

Пусть

$$\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m\right\} \subset X_{inv}^{m}$$

– базис в X_{inv}^{m}, тогда система образов векторов исходной системы

$$\left\{\hat{T}\vec{a}_1, \hat{T}\vec{a}_2, \ldots, \hat{T}\vec{a}_m\right\}$$

принадлежат тому же инвариантному подпространству и образуют в нём другой базис.

Покажем сначала, что система образов линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию образов векторов

$$\left\{\hat{T}\vec{a}_1, \hat{T}\vec{a}_2, \ldots, \hat{T}\vec{a}_m\right\}$$

и потребуем, чтобы

$$\alpha_1 \hat{T}\vec{a}_1 + \alpha_2 \hat{T}\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \hat{T}\vec{a}_m = \vec{0}.$$

Далее получаем в силу линейности оператора $\hat{T}$

$$\hat{T}\left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m\right) = \vec{0}.$$

Так как оператор невырожденный, то

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}.$$

Последнее равенство, в силу линейной независимости системы

$$\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\right\},$$

возможно только в случае одновременного обращения в нуль всех коэффициентов линейной комбинации. Что и доказывает линейную независимость системы образов.

Пусть теперь $\left(\forall \vec{x} \in X_{inv}^m\right)$. Разложим вектор $\vec{x}$ по базису из образов векторов исходного базиса подпространства X_{inv}^m, то есть представим вектор $\vec{x}$ в виде

$$\vec{x} = x^1 \hat{T}\vec{a}_1 + x^2 \hat{T}\vec{a}_2 + \ldots + x^m \hat{T}\vec{a}_m.$$

Так как для невырожденного линейного оператора обратный оператор снова линейный, то, действуя на обе части оператором $\hat{T}^{-1}$, получаем

$$\hat{T}^{-1}\vec{x} = x^1 \hat{T}^{-1}\hat{T}\vec{a}_1 + x^2 \hat{T}^{-1}\hat{T}\vec{a}_2 + \ldots + x^m \hat{T}^{-1}\hat{T}\vec{a}_m =$$

$$= x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \ldots + x^m \vec{a}_m,$$

причём

$$x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \ldots + x^m \vec{a}_m \in X_{inv}^m,$$

так как он разложен по базису X_{inv}.

Итак, получили, что если $\vec{x} \in X_{inv}^m$, то $\hat{T}^{-1}\vec{x} \in X_{inv}^m$. ⊗

Пример 2.1.11. Показать, что любое инвариантное подпространство оператора $\hat{T}: X^n \to X^n$ является инвариантным и для операторного многочлена

$$F_p\left(\hat{T}\right) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \ldots + a_p \hat{T}^p .$$

Р е ш е н и е. Пусть операторы $\hat{A}: X^n \to X^n$ и $\hat{B}: X^n \to X^n$ имеют одно и тоже инвариантное подпространство $Y^m \subset X^n$. Тогда

$$\left(\forall \vec{x} \in Y^m\right) \vec{y}_1 = \hat{A}\vec{x} \in Y^m \wedge \vec{y}_2 = \hat{B}\vec{x} \in Y^m.$$

Так как любые линейные комбинации векторов подпространства Y^m снова являются векторами этого же подпространства, то имеем

$$\alpha \cdot \vec{y}_1 + \beta \cdot \vec{y}_2 = \alpha \cdot \hat{A}\vec{x} + \beta \cdot \hat{B}\vec{x} = \left(\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}\right)\vec{x} \in Y^m.$$

То есть подпространство $Y^m \subset X^n$, инвариантное относительно операторов $\hat{A}: X^n \to X^n$ и $\hat{B}: X^n \to X^n$, инвариантно и относительно оператора $\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}$. Далее, из того, что подпространство $Y^m \subset X^n$ является инвариантным относительно оператора $\hat{A}: X^n \to X^n$, следует, что оно инвариантно и относительно степеней этого оператора $\hat{A}^k$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$.

Теперь очевидно, что любое инвариантное подпространство оператора $\hat{T}$ является инвариантным и относительно операторного многочлена

$$F_p\left(\hat{T}\right) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \ldots + a_p \hat{T}^p . \otimes$$

Практическое занятие 2. Некоторые задачи геометрии евклидова пространства

Предварительные сведения

Система векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\} \subset E^n$ линейно зависима в том и только в том случае, если определитель Грама системы

$$G\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_m\right) \\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_m\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\vec{x}_m, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_m\right) \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве E^n некоторое подпространство L^m размерности $m<n$. Пусть дан некоторый вектор $\vec{x} \in E^n$, причём $\vec{x} \notin L^m$. Можно показать, что справедливо представление вектора $\vec{x}$ в виде следующего разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^{\perp},$$

где вектор $\vec{g}_L$ принадлежит подпространству L^m, а вектор $\vec{h}^{\perp}$ ортогонален к этому подпространству. векторы $\vec{x}$ и $\vec{g}_L$ называются, соответственно, **наклонной** к подпространству L^m и **проекцией** наклонной $\vec{x}$ на подпространство L^m. Вектор $\vec{h}^{\perp}$ называется **перпендикуляром**, опущенным из конца наклонной $\vec{x}$ на подпространство L^m.

Пусть в евклидовом пространстве E^n зафиксирована система векторов

$$\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\} \ (m<n).$$

Обозначим $\vec{h}_m^{\perp}$ перпендикуляр, опущенный из конца вектора $\vec{x}_{m+1}$ на подпространство $L\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right\}$ $(m=1, 2, \ldots, n-1)$.

Формула для вычисления объёма m-мерного параллелепипеда в пространстве E^n имеет вид:

$$V^2 = G\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\right) \equiv \begin{vmatrix} \left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_m\right) \\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_m\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\vec{x}_m, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_2\right) & \ldots & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_m\right) \end{vmatrix}.$$

Примеры с решением

Пример 2.2.1. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\} \subset R^3$, если имеют место разложения

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{x}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3,\ \vec{x}_3 = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим попарные скалярные произведения векторов системы:

$$\left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) = 14,\ \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = 33,\ \left(\vec{x}_1, \vec{x}_3\right) = 47.$$

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) = 33,\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 78,\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = 111,$$

$$\left(\vec{x}_3, \vec{x}_1\right) = 47,\ \left(\vec{x}_3, \vec{x}_2\right) = 111,\ \left(\vec{x}_3, \vec{x}_3\right) = 158.$$

Составляем определитель Грама и вычисляем его значение:

$$\begin{vmatrix} 14 & 33 & 47 \\ 33 & 78 & 111 \\ 47 & 111 & 158 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 78 & 111 \\ 111 & 158 \end{vmatrix} - 33 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 111 \\ 47 & 158 \end{vmatrix} + 47 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 78 \\ 47 & 111 \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствие с критерием Грама система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right\}$ является линейно зависимой. $\otimes$

Пример 2.2.2. Радиус-вектор $\vec{x}$ в пространстве R^3 имеет разложение по стандартному базису (рисунок 1)

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Обозначим координатную плоскость X^1OX^2 как L^2.

Представить вектор $\vec{x}$ в виде разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^{\perp},$$

где $\vec{g}_L \in L^2$, $\vec{h}^{\perp} \in L^{2\perp}$.

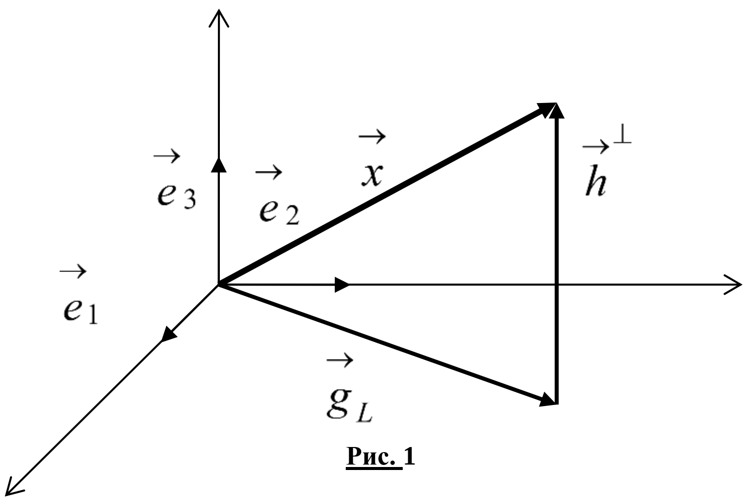


Рис. 1

Р е ш е н и е. Разложим вектор $\vec{g}_L$ по базису подпространства L^2:

$$\vec{g}_L = g^1\vec{e}_1 + g^2\vec{e}_2.$$

Вектор

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L \in L^{2\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален базису подпространства L^2. Запишем условия ортогональности вектора $\vec{h}^{\perp}$ подпространству L^2, состоящие в том, что вектор $\vec{h}^{\perp}$ должен быть ортогонален всем векторам базиса $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\right\}$:

$$\left(\vec{h}^{\perp},\ \vec{e}_1\right)=0,$$

$$\left(\vec{h}^{\perp},\ \vec{e}_2\right)=0.$$

Получаем СЛАУ

$$\begin{cases}\left(\vec{x}-\vec{g}_L,\ \vec{e}_1\right)=0,\\ \left(\vec{x}-\vec{g}_L,\ \vec{e}_2\right)=0,\end{cases}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{cases}\left(g^1\vec{e}_1+g^2\vec{e}_2,\ \vec{e}_1\right)=\left(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3,\ \vec{e}_1\right),\\ \left(g^1\vec{e}_1+g^2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2\right)=\left(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3,\ \vec{e}_2\right).\end{cases}$$

После простых преобразований имеем

$$\begin{cases}g^1=3,\\ g^2=4.\end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\vec{g}_L=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2.$$

Далее имеем:

$$\vec{h}^{\perp}=\vec{x}-\vec{g}_L=\left(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3\right)-\left(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2\right)=5\vec{e}_3.$$

Окончательно получаем

$$\vec{x}=\vec{g}_L+\vec{h}^{\perp}=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3.\ \otimes$$

Пример 2.2.3. В пространстве R^4 опустить перпендикуляр из точки $P(-1;5;3;2)$ на гиперплоскость H^3, проходящую через заданные точки

$$A_1(1;\,4;\,2;\,0),\ A_2(3;\,7;\,3;\,2),\ A_3(2;\,6;\,3;\,-1),\ A_4(1;\,4;\,5;\,2).$$

Р е ш е н и е. В пространстве R^4 все координаты точек заданы в ортонормированном базисе, который обозначим $\left\{\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3,\,\vec{e}_4\right\}$. Неявное уравнение гиперплоскости получено выше в примере 3.14 и имеет вид

$$23x^1-14x^2+2x^3-3x^4+29=0.$$

Там же записаны направляющие векторы гиперплоскости:

$$\vec{a}_1=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3+2\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_2=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3-\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_3=3\vec{e}_3+2\vec{e}_4.$$

Проверим, что точка $P(-1;5;3;2)$ не лежит в плоскости, для чего подставим координаты точки в неявное уравнение плоскости:

$$23\cdot(-1)-14\cdot5+2\cdot3-3\cdot2+29=-64\neq0.$$

Точка плоскости не принадлежит.

Поставим в соответствие точке $P(-1;5;3;2)$ её радиус-вектор

$$\vec{x}=-\vec{e}_1+5\vec{e}_2+3\vec{e}_3+2\vec{e}_4$$

– наклонную к плоскости. Представим наклонную в виде

$$\vec{x}=\vec{g}_L+\vec{h}^{\perp},$$

где вектор $\vec{g}_L\in H^3$, а вектор $\vec{h}^{\perp}\in H^{3\perp}$.

Вектор

$$\vec{h}^{\perp}=\vec{x}-\vec{g}_L\in H^{3\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален локальному базису подпространства H^3. Запишем условия ортогональности вектора $\vec{h}^{\perp}$ подпространству H^3 (плоскость проходит через начало системы координат), состоящие в том, что вектор $\vec{h}^{\perp}$ должен быть ортогонален всем векторам базиса $\left\{\vec{a}_1,\,\vec{a}_2,\,\vec{a}_3\right\}$:

$$\left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_1\right) = 0,\ \left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_2\right) = 0,\ \left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_3\right) = 0.$$

Получаем СЛАУ

$$\left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{a}_1\right) = 0,$$

$$\left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{a}_2\right) = 0,$$

$$\left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{a}_3\right) = 0.$$

Представляя наклонную $\vec{g}_L$ разложением по направляющим векторам плоскости (по локальному базису), перепишем СЛАУ в виде

$$\left(g^1\vec{a}_1 + g^2\vec{a}_2 + g^3\vec{a}_3, \vec{a}_1\right) = \left(\vec{x}, \vec{a}_1\right),$$

$$\left(g^1\vec{a}_1 + g^2\vec{a}_2 + g^3\vec{a}_3, \vec{a}_2\right) = \left(\vec{x}, \vec{a}_2\right),$$

$$\left(g^1\vec{a}_1 + g^2\vec{a}_2 + g^3\vec{a}_3, \vec{a}_3\right) = \left(\vec{x}, \vec{a}_3\right),$$

или в виде

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right)g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1\right)g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1\right)g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_1\right),$$

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2\right)g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2\right)g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_2\right),$$

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_3\right)g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3\right)g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3\right)g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_3\right).$$

Далее, находим значения попарных скалярных произведений векторов локального базиса на плоскости

$$G^T = \begin{pmatrix} \left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1\right) \\ \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2\right) \\ \left(\vec{a}_1, \vec{a}_3\right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3\right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

и записываем СЛАУ в окончательном виде:

$$\begin{cases} 18g^1 + 7g^2 + 7g^3 = 20, \\ 7g^1 + 7g^2 + g^3 = 10, \\ 7g^1 + g^2 + 13g^3 = 13. \end{cases}$$

Решение Слау ищем по формулам Крамера.

1) Находим определитель основной матрицы:

$$\det\begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 738.$$

СЛАУ совместна и определённа.

2) Находим определители, соответствующие каждому неизвестному:

$$\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} 20 & 7 & 7 \\ 10 & 7 & 1 \\ 13 & 1 & 13 \end{pmatrix} = -6306,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 18 & 20 & 7 \\ 7 & 10 & 1 \\ 7 & 13 & 13 \end{pmatrix} = 573,$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 18 & 7 & 20 \\ 7 & 7 & 10 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 471.$$

Записываем решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6306/738 \\ 573/738 \\ 471/738 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1051/123 \\ 191/123 \\ 157/123 \end{pmatrix}.$$

Записываем разложение проекции $\vec{g}_L$ на плоскость по локальному базису:

$$\vec{g}_L = -\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3.$$

Теперь находим перпендикуляр:

$$\vec{h}^{\perp} = \vec{x} - \vec{g}_L = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \left(-\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3\right).$$

Если теперь подставить в последнее равенство разложения векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ по векторам ортонормированного базиса $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$, то получим вектор $\vec{h}$ – перпендикуляр, опущенный из конца наклонной $\vec{g}_L$ на плоскость H^3. $\otimes$

Пример 2.2.4. *) Записать матрицу оператора $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ ортогонального проектирования на координатную плоскость X^1OX^2 в пространстве R^3.

Р е ш е н и е. Этот оператор любому вектору пространства R^3 ставит в соответствие его проекцию на координатную плоскость X^1OX^2 параллельно координатной оси OX^3. Согласно изложенной выше теории, оператор $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ является прямой суммой единичного оператора

$$\hat{I}_{x^1ox^2} : R^2_{x^1ox^2} \to R^2_{x^1ox^2}$$

и нулевого оператора

$$\hat{O}_{ox^3} : R^1_{ox^3} \to R^1_{ox^3}.$$

На главной диагонали его матрицы расположены 2×2 клетка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и 1×1 клетка вида (0). Остальные элементы равны нулю:

$$P^{\perp}_{x^1ox^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ является самосопряжённым.

Найдём, например, проекцию вектора $\vec{x}$ из предыдущей задачи на координатную плоскость X^1OX^2. Запишем для этого образ вектора

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

при действии оператора $\hat{P}^{\perp}_{x^1ox^2}$ в координатной форме

$$P^{\perp}_{x^1ox^2}\left|x\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результат, очевидно, совпадает с результатом предыдущей задачи. $\otimes$

Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка

Предварительные сведения

Квадратичной формой $\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ от n переменных называется формальное выражение

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}x^i x^j \quad ,$$

где $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ $\left(i,\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ – симметрические вещественные коэффициенты.

При изменении базиса в пространстве в пространстве R^n матрица квадратичной формы преобразуется по закону

$$\Phi' = A^T \Phi A.$$

Квадратичная форма, определённая на векторах пространства R^n, является положительно определённой в том и только в том случае, если в каком-либо базисе $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right\} \subset R^n$ все угловые миноры её матрицы $\phi_{ij}\left(\vec{a}_i, \vec{a}_j\right)$ положительны, то есть

$$M_1 = \varphi_{11} > 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,$$

$$\ldots,\ M_n = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Поверхностью второго порядка в пространстве R^3 называется множество точек $\vec{x} \in R^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}x^i x^j + 2\sum_{k=1}^{3}b_k x^k + c = 0.$$

В пространстве R^2 существуют две **кривые второго порядка**, называемые **центральными**. Эти кривые описываются каноническими уравнениями вида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

и называются, соответственно, **эллипсом** и **гиперболой**.

В пространстве R^3 существует три типа **невырожденные**, центральные поверхности второго порядка, определяемых каноническими уравнениями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Поверхности, задаваемые в пространстве R^3 этими уравнениями, называются соответственно, **эллипсоидом, однополостным гиперболоидом** и **двуполостным гиперболоидом**.

В трёхмерном пространстве R^3 существует **коническая поверхность** с каноническим уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0.$$

В пространстве R^3 существуют две невырожденные нецентральные поверхности с каноническими уравнениями:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=2x_3$$

– **эллиптический параболоид**;

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=2x_3$$

– **гиперболический параболоид**.

В пространстве R^3 общий вид **вырожденной поверхности** получается параллельным переносом вдоль оси OX_3 какой-либо кривой второго порядка на плоскости X_1OX_2. При этом для эллипса, гиперболы и параболы получаются поверхности, носящие соответственно названия **эллиптический**, **гиперболический** и **параболический цилиндры**. Пара параллельных, пересекающихся или слившихся прямых приводит, соответственно, к **паре параллельных**, **пересекающихся** или **слившихся плоскостей**

Примеры с решением

Пример 2.3.1. Привести квадратичную форму, имеющую в пространстве R^3 вид

$$\varphi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=3\left(x^2\right)^2+3\left(x^3\right)^2+4x^1x^2+4x^1x^3-2x^2x^3,$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Р е ш е н и е. Вид квадратичной формы задан в базисе

$$\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}\subset R^3.$$

Запишем симметричную матрицу квадратичной формы, для чего слагаемые с перекрёстными произведениями представим в виде суммы двух равных слагаемых:

$$\varphi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=$$

$$=3\left(x^2\right)^2+3\left(x^3\right)^2+\left(2x^1x^2+2x^2x^1\right)+\left(2x^1x^3+2x^3x^1\right)-\left(x^2x^3+x^3x^2\right)=$$
$$=2x^1x^2+2x^1x^3+2x^2x^1+3\left(x^2\right)^2-x^2x^3+2x^3x^1-x^3x^2+3\left(x^3\right)^2.$$

Теперь матрица квадратичной формы принимает вид:

$$\Phi\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&3&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\mu & 2 & 2 \\ 2 & 3-\mu & -1 \\ 2 & -1 & 3-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^3 - 6\mu^2 + 32 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -2,\ \mu_{2,3} = 4$.

Чтобы построить матрицу ортогонального преобразования найдём собственные векторы этого оператора. Для этого решим следующие системы линейных алгебраических уравнений.

1) Случай $\mu_1 = -2$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 + 5x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 5x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый собственный вектор

$$\vec{x}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Случай $\mu_{2,3} = 4$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} -4x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, второй и третий собственные векторы

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Векторы $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ ортогональны вектору $\vec{x}_1$, но не ортогональны между собой. Для ортогонализации системы собственных векторов применим алгоритм ортогонализации Шмидта. Положим

$$\vec{g}_1 = \vec{x}_1,\ \vec{g}_2 = \vec{x}_2,\ \vec{g}_3 = \vec{x}_3 + \alpha\vec{x}_2.$$

Так как должно быть $\left(\vec{g}_2, \vec{g}_3\right) = 0$, то

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 + \alpha\vec{x}_2\right) = 0,\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) + \alpha\left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\alpha = 0,\ \alpha = -\frac{1}{5}.$$

Приходим к ортогональной системе собственных векторов ассоциированного оператора:

$$\vec{g}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{g}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{g}_3 = \frac{2}{5}\vec{e}_1 - \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\left\|\vec{g}_1\right\| = \sqrt{6},\ \left\|\vec{g}_2\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2},\ \left\|\vec{g}_3\right\| = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Нормируя эту систему, получаем:

$$\vec{h}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2,$$

$$\vec{h}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Матрица ортогонального преобразования

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

осуществляет переход между ортонормированными базисами

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \Rightarrow \left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$$

и, следовательно, является ортогональной. Учитывая, что для ортогональной матрицы выполняется условие

$$A^{-1} = A^T,$$

Запишем формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}^T.$$

Проводя вычисления, получаем

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначая координаты в базисе $\left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$ как $\left\{y^1, y^2, y^3\right\}$, запишем канонический вид квадратичной формы

$$\phi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = -2\left(y^1\right)^2 + 4\left(y^2\right)^2 + 4\left(y^3\right)^2. \otimes$$

Пример 2.3.2. Найти значения параметра λ, при которых является положительно определённой квадратичная форма

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 4\left(x^1\right)^2 + 2x^1x^2 + \left(x^2\right)^2 + 4x^1x^3 - 6x^2x^3 + \lambda\left(x^3\right)^2.$$

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Находя её главные миноры и применяя критерий Сильвестра, имеем:

$$M_1 = \varphi_{11} = 4 > 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 52 > 0.$$

Следовательно, $\lambda > \dfrac{52}{3}$. $\otimes$

Пример 2.3.3. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение перепишем в виде

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 5.$$

Вводим новые координаты по формулам

$$x_{1'} = x_1 + 1,\ x_{2'} = x_2 - 1.$$

Эти формулы описывают параллельный перенос начала системы координат в точку $O'(-1;\,2)$, в которой уравнение принимает вида

$$x_{1'}^2 + x_{2'}^2 = 5.$$

Это уравнение, очевидно, описывает окружность с центром в точке $O'(-1;\,2)$ радиуса $R = \sqrt{5}$. $\otimes$

Пример 2.3.4. Какую линию описывает уравнение

$$x_2 = 1 - \sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}\ .$$

Р е ш е н и е. Уравнение переписываем в виде

$$x_2 - 1 = -\sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}$$

и возводим обе части в квадрат (приобретаем новые корни)

$$(x_2 - 1)^2 = 11 - 4x_1 - x_1^2.$$

Преобразуем уравнение, выделяя полный квадрат:

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 + (x_2 - 1)^2 = 15,$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 15.$$

Это уравнение описывает часть окружности с центром в точке $O'(-2;1)$ радиуса $R = \sqrt{15}$, лежащую ниже новой горизонтальной оси с уравнением $x_2 = 1$. $\otimes$

Пример 2.3.5. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2-4x_1+x_2^2-2x_2+5=0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение запишем в виде

$$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2=0.$$

Это уравнение описывает точку $M(2;1)$. ⊗

Пример 2.3.6. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$100x_1^2+25x_2^2+200x_1-100x_2-200=0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение переписываем в виде

$$100(x_1+1)^2+25(x_2-2)^2=400$$

и делим обе части на 400:

$$\frac{(x_1+1)^2}{4}+\frac{(x_2-2)^2}{16}=1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O'(-1;\ 2)$ и полуосями $a=2$ и $b=4$. ⊗

Пример 2.3.7. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1=-2\sqrt{-5-6x_2-x_2^2}.$$

Р е ш е н и е. Уравнение преобразуем к виду

$$x_1^2+4(x_2+3)^2=16,$$

возводя обе части в квадрат. Делим обе части на 16:

$$\frac{x_1^2}{16}+\frac{(x_2+3)^2}{4}=1.$$

Уравнение описывает часть эллипса с центром в точке $O'(0;-3)$ и полуосями $a=4$ и $b=2$, лежащую слева относительно оси OX_2. ⊗

Пример 2.3.8. Линия второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\right\}\subset R^2$ уравнением

$$11\left(x^1\right)^2-20x^1x^2-4\left(x^2\right)^2-20x^1-8x^2+1=0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и определить её тип.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi\left(\vec{x},\ \vec{x}\right)=11\left(x^1\right)^2-20x^1x^2-4\left(x^2\right)^2=$$

$$=11\left(x^1\right)^2-10x^1x^2-10x^2x^1-4\left(x^2\right)^2$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Квадратичной форме $\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ ставим в соответствие симметрический оператор $\hat{T}$ с матрицей $T = \Phi$ и записываем характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\mu & -10 \\ -10 & -4-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\mu^2 - 7\cdot\mu - 144 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$. Находим собственные векторы оператора $\hat{T}$, соответствующие собственным значениям $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$, для чего решаем две однородные СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 + 5x^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 - 20x^2 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений первой СЛАУ приводит к первому собственному вектору

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

а фундаментальная система решений второй – ко второму собственному вектору

$$\vec{x}_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Эти векторы ортогональны, но не нормированы. Нормируем их:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_1\right\|}\vec{x}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2;$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_2\right\|}\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2.$$

Матрица перехода от старого базиса к новому базису имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Преобразование от нового базиса к старому осуществляется при помощи обратной матрицы, которая в силу ортогональности матрицы A равна транспонированной к ней, то есть

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Координаты в новом базисе выражаются через координаты в старом базисе при помощи матрицы

$$\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^T=A,$$

обратный переход от новых координат к старым производится при помощи матрицы A^{-1}. Имеем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2\right\}$ квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\mu_1\left(y^1\right)^2+\mu_2\left(y^2\right)^2=-9\left(y^1\right)^2+16\left(y^2\right)^2.$$

Линейные слагаемые преобразуются так:

$$-20x^1=-\frac{20}{\sqrt{5}}y^1+\frac{40}{\sqrt{5}}y^2;$$

$$-8x^2=-\frac{16}{\sqrt{5}}y^1-\frac{8}{\sqrt{5}}y^2.$$

Подстановка в уравнение приводит его к виду:

$$-9\left(y^1\right)^2+16\left(y^2\right)^2-\frac{36}{\sqrt{5}}y^1+\frac{32}{\sqrt{5}}y^2+1=0.$$

Выделяя полный квадрат по $y^1,\ y^2$ и приводя подобные члены, получаем каноническое уравнение линии в виде

$$-9\left(y^1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+16\left(y^2+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5=0,$$

Откуда совершая параллельный перенос, то есть полагая

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}},\ \ z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

окончательно имеем:

$$\frac{\left(z^1\right)^2}{5/9} - \frac{\left(z^2\right)^2}{5/16} = 1.$$

Получили каноническое уравнение линии второго порядка – гиперболы. Отметим, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

перехода от старого базиса к новому базису является матрицей оператора (аффинора) поворота системы координат на такой угол φ, что $\cos\varphi = 1/\sqrt{5}$ и $\sin\varphi = 2/\sqrt{5}$. Далее, в соответствии с формулами

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}},\ z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

осуществляется параллельный перенос начала системы координат в новое положение – точку с координатами $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. ⊗

Пример 2.3.9. Поверхность второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$ уравнением

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 12\sqrt{30}x_1 -$$
$$-14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 + 506 = 0.$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду и определить её тип.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Матрица квадратичной формы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ассоциированного оператора $\mu_1 = -2,\ \mu_{2,3} = 4$. Собственные векторы

$$\vec{x}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Это ортонормированная система. Матрица перехода от старого базиса к новому базису получается непосредственно из приведённых разложений:

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

и является ортогональной ($A^{-1} = A^T$).

Преобразование координат осуществляется с помощью матрицы A

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix}$$

и приводит квадратичную форму к виду

$$\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2.$$

Линейные члены преобразуются так:

$$-12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 = -40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'}.$$

В новой системе координат уравнение поверхности принимает вид:

$$4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2 - 40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'} + 506 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, приводим уравнение к виду

$$4\left(x_{1'} - 5\sqrt{6}\right)^2 - 2\left(x_{2'} - 3\sqrt{5}\right)^2 + 4x_{3'}^2 - 4 = 0.$$

Вводя обозначения $y_1 = x_{1'} - 5\sqrt{6}$, $y_2 = x_{2'} - 3\sqrt{5}$, $y_3 = x_{3'}$, получаем следующий вид уравнения:

$$y_1^2 - \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 = 1.$$

Получили уравнение однополостного гиперболоида. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$$\hat{A}: R^3 \to R^3,$$

имеющего в каноническом базисе пространства $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$ матрицу:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix};\ 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора $\hat{A}: R^3 \to R^3$, действие которого задано приведёнными ниже координатные равенства: $\left(\forall \vec{x} \in R^3\right)$

$$1)\ A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 2x^2 \\ 3x^3 \end{pmatrix};\ 2)\ A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 + x^2 \\ x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ 0 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix};\ 4)\ A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$5)\ A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix};\ 6)\ A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

3. Линейный оператор $\hat{T}: E^3 \to E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ задан матрицей:

1) $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $T = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$;

3) $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Построить в пространстве E^3 ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

4. Пусть в пространстве зафиксирован канонический базис

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} \subset R^3$$

и пусть дан некоторый линейный оператор $\hat{A}: R^3 \to R^3$. Показать, что линейные оболочки следующего вида

$$L\left\{\vec{e}_1\right\},\ L\left\{\vec{e}_2\right\},\ L\left\{\vec{e}_3\right\},\ L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\},\ L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_3\right\},\ L\left\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$$

являются инвариантными подпространствами относительно оператора $\hat{A}$.

5. Пусть подпространства $L_1 \subset X^n$ и $L_2 \subset X^n$ инвариантны относительно оператора

$$\hat{A}: X^n \to X^n.$$

Показать, что подпространства $L_1 + L_2$ и $L_1 \bigcap L_2$ также инвариантны относительно оператора $\hat{A}$.

6. Показать, что если $L \subset X^n$ – инвариантное подпространство оператора

$$\hat{A}: X^n \to X^n,$$

то L является инвариантным подпространством и относительно операторного многочлена

$$\hat{F}\left(\hat{A}\right) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + \ldots + a_m \hat{A}^m.$$

7. Пусть $\hat{A}: X^n \to X^n$ – некоторый линейный оператор. Доказать, что если оператор $\hat{A}$ биективный, то его инвариантные подпространства являются инвариантными и относительно оператора $\hat{A}^{-1}$.

8. Пусть $\hat{T}: R^2 \to R^2$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Пусть $\hat{T}: R^3 \to R^3$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

1) $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Пусть $\hat{T}: R^4 \to R^4$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Показать, что линейная оболочка

$$L\left\{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4\right\}$$

является инвариантным подпространством оператора $\hat{T}$.

11. Получить параметрические и неявные уравнения плоскости $H^m \subset R^n$, проходящей через заданные точки

$$A_1(0;\,6;\,3;\,5;\,1),\ A_2(-3;\,2;\,4;\,1;\,0),$$
$$A_3(5;\,1;\,4;\,3;\,2),\ A_4(-1;\,3;\,-4;\,2;\,-1).$$

12. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3\right\} \subset R^3$:

1) $\vec{x}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,$

$\vec{x}_2 = 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$\$

2) $\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,$

$\vec{x}_2 = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3,$

$\vec{x}_3 = 7\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3.$

13. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,\ \vec{x}_4\right\} \subset R^4$:

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{x}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{x}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,$$
$$\vec{x}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

14. Пусть $L^3\left\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\right\}$ – линейное многообразие в E^4, а $\vec{x}$ – наклонная к многообразию L^3. Найти наименьший угол между вектором $\vec{x}$ и многообразием L^3, если:

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4.$$

15. В ортонормированном базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ пространства E^4 задана система векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_3 - 13\vec{e}_4,$$
$$\vec{a}_4 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 9\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, является ли эта система векторов линейно независимой.

2) Найти объём параллелепипеда, построенного на тройке векторов $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$.

3) Используя процесс ортогонализации Шмидта, построить на их основе новый ортонормированный базис пространства R^4.

16. В пространстве R^5 найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

1) $\vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$
$\vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4,$
$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 - \vec{e}_5;$

2) $\vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 - 2\vec{e}_5,$
$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4,$
$\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_5.$

17. Систему строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

дополнить двумя строками так, чтобы вся система стала ортогональной.

18. В пространстве R^4 даны две плоскости H_1 и H_2 с направляющими векторами

$$\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\right\} \subset H_1, \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\} \subset H_2,$$

соответственно. Найти наименьший угол, образованный векторами первой плоскости с векторами второй плоскости, если:

1) $\vec{a}_1 = \vec{e}_1,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$

$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,\ \vec{b}_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4;$

2) $\vec{a}_1 = \vec{e}_1,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$

$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$

19. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение:

1) $x_2 = -1 - \frac{3}{5}\sqrt{26 - 2x_1 + x_1^2}$;

2) $x_1 = -4x_2^2 + 8x_2 - 1$;

3) $x_1 = 2 - \sqrt{3 - x_2}$.

20. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка:

1) $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 - 80 = 0$;

2) $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16 = 0$.

21. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

1) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{16}{3}x_2 + \frac{32}{3}x_3 + 10 = 0$;

2) $\alpha x_1 - 3\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 - 7 = 0$,

где $\alpha = 5$ или $\alpha = 0$.

ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности

Предварительные сведения

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону ставится в соответствие вполне определённое действительное число, то говорят, что задана **бесконечная числовая последовательность**

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots.$$

Числа a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ называются **элементами** (**членами**) последовательности (a_n).

Числовая последовательность (a_n) называется **монотонно возрастающей** (**монотонно убывающей**), если

$$(\forall n \in N):\ a_n \le a_{n+1}\ (a_n \ge a_{n+1}),$$

и **строго монотонно возрастающей** (**строго монотонно убывающей**), если

$$(\forall n \in N):\ a_n < a_{n+1}\ (a_n > a_{n+1}).$$

Пусть $\varepsilon \in R^1$ $(\varepsilon > 0)$ и $x_0 \in R^1$. Тогда множество

$$U_\varepsilon(x_0) \overset{def}{=} \left\{ x \in R^1 : \left| x - x_0 \right| < \varepsilon \right\}$$

называется ε **-окрестностью** числа (точки) x_0.

Последовательность (x_n) действительных чисел **сходится к действительному числу** x_0, если для каждого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдётся номер n_0, такой, что начиная с этого номера, то есть, для всех номеров $n \ge n_0$, выполняется неравенство

$$\left| x_n - x_0 \right| < \varepsilon.$$

Пусть (x_n) и (y_n) – числовые последовательности, сходящиеся, соответственно, к пределам x_0 и y_0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $x_n \equiv c$, где c – некоторая постоянная величина (число), то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c;$$

2) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$, причём

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x_0 + y_0;$$

3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)$, причём

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = x_0 y_0;$$

4) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne 0$, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n}$, причём

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x_0}.$$

Примеры с решением

Пример 3.1.1. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

Р е ш е н и е. Действительно, для произвольного $\varepsilon>0$ имеем:

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+1}{n}-1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, для любого наперёд заданного $\varepsilon>0$ мы нашли номер $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, такой, что $(\forall\, n\ge n_0)\ \left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$, следовательно, 1 является пределом данной последовательности.

$\otimes$

Пример 3.3.1.2. Доказать существование предела последовательности с общим членом

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}.$$

Р е ш е н и е. Покажем, что данная последовательность монотонна и ограничена. Из формулы общего члена последовательности имеем:

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2^{n+1}+1}\Rightarrow x_{n+1}>x_n,$$

то есть последовательность монотонно возрастает и ограничена снизу, например, первым элементом x_1. При любом n, очевидно, $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$. Последовательность ограничена сверху:

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=$$

$$=\frac{1/2-1/2^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1.$$

Последовательность монотонна и ограничена, следовательно, по критерию сходимости имеет предел. $\otimes$

Пример 3.3.1.3. Доказать, что последовательность (x_n) есть бесконечно малая последовательность, если

1) $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $x_n=\frac{2n}{n^3+1}$; 3) $x_n=\frac{1}{n!}$; 4) $x_n=(-1)^n\cdot 0{,}999^n$.

Составить для каждого случая таблицу следующего вида:

ε	0,1	0,001	0,0001	…
n_0				

Р е ш е н и е. 1) По определению

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_0\in N):\ (\forall n\ge n_0)\ \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\Rightarrow n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу ε мы нашли номер $n_0=n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon=0{,}1$. Тогда

$$n_0=\left[\frac{1}{1/10}\right]+1=11.$$

И так далее, для указанных в таблице значений ε. Искомая таблица принимает вид:

ε	0,1	0,001	0,0001	…
n_0	11	1001	10001	…

2) По определению

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_0\in N):\ (\forall n\ge n_0)\ \left|\frac{2n}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{2n}{n^3}<\varepsilon\Rightarrow\frac{2}{n^2}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n^2}{2}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\Rightarrow$$

$$n>\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]\Rightarrow n_0=\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]+1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу ε мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда

$$n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{1/10}}\right] + 1 \approx [4{,}472] + 1 = 5.$$

И так далее, для указанных в таблице значений ε. Искомая таблица принимает вид:

ε	0,1	0,001	0,0001	…
n_0	5	46	142	…

Остальные примеры решаются аналогично и предлагаются для самостоятельного решения. $\otimes$

Пример 3.3.1.4. Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2-1}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2-1} = 2\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1} = 2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Используя правила действий с пределами последовательностей, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-1} = 2\cdot\frac{1}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 2. \otimes$$

Пример 3.3.1.5. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2} = \frac{2n+1}{n}\cdot\frac{3n+1}{n} = \left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right).$$

Используя правила действий с пределами, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot(3n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right) = 2\cdot 3 = 6. \otimes$$

Пример 3.3.1.6. Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \sqrt{n^2+n}-n.$$

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$. Преобразуем формулу для общего члена:

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Вычисляем предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}. \otimes$$

Пример 3.3.1.7. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем формулу для общего члена последовательности:

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

Теперь

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

Пример 3.3.1.8 (неперово число e). Показать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

сходится, то есть, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Р е ш е н и е. Приведём значение этого числа, применяемое в обычных расчётах, не требующих слишком большой точности: $e = 2{,}71828\ldots$

Приступим к строгому исследованию данного предела. Докажем сходимость последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что

$$\left(\forall b > -1\right) \wedge \left(\forall n \in N\right) \ \left(1+b\right)^n \geq 1+nb.$$

Для этого применим индукцию по n:

1) при $n=1$ имеем $1+b \geq 1+b$, что всегда выполняется;

2) предположим, что $\left(\forall n = k\right) \ \left(1+b\right)^k \geq 1+kb$;

3) покажем, что $\left(\forall b > -1\right) \wedge \left(n = k+1\right) \ \left(1+b\right)^{k+1} \geq 1+\left(k+1\right)b$.

Справедливость заключения следует из цепочки выкладок:

$$\left(1+b\right)^{k+1} = \left(1+b\right)^k\left(1+b\right) \geq \left(1+b\right)\left(1+kb\right) = 1+kb+b+kb^2 \geq 1+\left(k+1\right)b,$$

так как $kb^2 > 0$.

Так как неравенство справедливо при $n=1$, оно справедливо и при любом $n \in N$. Итак, $\left(\forall b > -1\right)$ и $\left(\forall n \in N\right)$

$$\left(1+b\right)^n \geq 1+nb. \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Для этой последовательности

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}\cdot\left(n-1\right)}{\left(n-1\right)^n\cdot\left(n+1\right)^{n+1}\cdot\left(n-1\right)} =$$

$$= \frac{\left(n^2\right)^{n+1}\cdot\left(n-1\right)}{\left(n^2-1\right)^{n+1}\cdot n} = \frac{\left(n^2-1+1\right)^{n+1}}{\left(n^2-1\right)^{n+1}}\cdot\frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} \geq \left\{используем\left(1\right)\right\} \geq$$

$$\geq \left(1+\left(n+1\right)\cdot\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = 1.$$

Таким образом,

$$\left(\forall n \in N\right) \ \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$$

а, следовательно, $y_n \le y_{n-1}$, то есть, последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + {}^{1}\!/_{n}\right)^{n+1}$$

монотонно убывает. Так как

$$\left(1 + {}^{1}\!/_{n}\right)^{n+1} > 1,$$

эта последовательность ограничена снизу. Но тогда по критерию сходимости ограниченной последовательности данная последовательность сходится.

Далее имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+{}^{1}\!/_{n}\right)^{n+1}}{\left(1+{}^{1}\!/_{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где использовано, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Так как предел в правой части равенства существует

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

то существует и предел левой части. Итак, предел существует и обозначается

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}. \otimes$$

Пример 3.3.1.9. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Р е ш е н и е. Неравенство справедливо при $n = 1, 2$, что легко проверяется. Например, для $n = 2$ имеем:

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 \ge 1 + x_1 + x_2.$$

Предположим, что неравенство справедливо при $n = k$, то есть

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k) \ge 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

и покажем, что оно справедливо и при $n = k+1$. Имеем:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \ge (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1+x_{k+1}) =$$
$$= 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} + (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_k)x_{k+1} \ge$$
$$\ge 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}.$$

По заключению индукции неравенство справедливо при любом $k = n$. $\otimes$

Пример 3.3.1.10. Показать, что если $x > -1$, то

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ (n>1),$$

причём знак равенства имеет место только при $x=0$.

Р е ш е н и е. Полагая в неравенстве предыдущего примера

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

получаем требуемое неравенство. $\otimes$

Пример 3.3.1.11. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = n[\ln(n+3)-\ln n].$$

Р е ш е н и е. Преобразуем формулу для общего члена:

$$x_n = n[\ln(n+3)-\ln n] = \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 3\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3} = 3\cdot\ln e = 3. \otimes$$

Пример 3.3.1.12. Доказать, что последовательность (a^n) является:

1) бесконечно большой последовательностью при $|a|>1$;

2) бесконечно малой последовательностью при $|a|<1$.

Р е ш е н и е. 1) Пусть $|a|>1$. Покажем, что последовательность (a^n) удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, то есть $(\forall A>0)\ (\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0)$

$$|a|^n > A. \qquad (1)$$

Зададимся произвольным числом $A>0$. Для нахождения номера n_0 решим неравенство (1) относительно номера. Получим

$$\log_{|a|}|a|^n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \lfloor\log_{|a|} A\rfloor.$$

Следовательно, выполнение неравенства (1) начинается с номера

$$n_0 = \lfloor\log_{|a|} A\rfloor + 1.$$

Что и требовалось доказать.

2) Пусть $|a|<1$. Если $a=0$, то $(\forall n \in N)\ a^n = 0$ и, следовательно, последовательность (a^n) бесконечно малая. Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$a^n=\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)^{-1}. \qquad (2)$$

Так в этом случае $\frac{1}{|a|}>1$, то последовательность $\left(\frac{1}{a^n}\right)$ является бесконечно большой последовательностью, последовательность

$$a^n=\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)^{-1}$$

– бесконечно малой последовательностью. Поэтому в силу (2) при $|a|<1$ последовательность $\left(a^n\right)$ – бесконечно малая последовательность. $\otimes$

Пример 3.3.1.13. Показать, что если $\left(x_n\right)$ – сходящаяся последовательность, а $\left(y_n\right)$ – бесконечно большая последовательность, то последовательность

$$\left(z_n\right)=\left(x_n+y_n\right)$$

– бесконечно большая последовательность.

Р е ш е н и е. Покажем, что

$$\left(\forall A>0\right)\left(\exists n_0\in N\right):\left(\forall n\geq n_0\right)\ \left|x_n+y_n\right|>A.$$

В силу критерия сходимости последовательности сходящаяся последовательность $\left(x_n\right)$ ограничена, то есть

$$\left(\exists M>0\right):\left(\forall n\in N\right)\ \left|x_n\right|<M. \qquad (1)$$

Пусть задано произвольное $A>0$. Так как последовательность $\left(y_n\right)$ бесконечно большая, то для числа $A+M$

$$\left(\exists n_0\in N\right):\left(\forall n\geq n_0\right)\ \left|y_n\right|>A+M. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем: $\left|x_n+y_n\right|\geq\left|y_n\right|-\left|x_n\right|>A+M-M=A.$

Что и требовалось доказать. $\otimes$

Пример 3.3.1.14. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cos n. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Так как $\left(\forall x\in R^1\right)\ \left|\cos x\right|<1$, то последовательность $\left(\cos n\right)$ ограничена.

Покажем, что последовательность $\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$ – бесконечно малая последовательность. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0.$$

По свойствам бесконечно малых последовательностей произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность, то есть последовательность с общим членом (1), является бесконечно малой последовательностью и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cos n=0.\ \otimes$$

Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции

Предварительные сведения

Функция $f:M\to f(M)$ называется **непрерывной в точке** $x_0\in M$, если для каждой последовательности (x_n) точек множества M, сходящейся к точке x_0, последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции f сходится к значению $f(x_0)$ функции в этой точке (определение непрерывности по Гейне).

Функция $f:M\to f(M)$ называется **непрерывной в точке** $x_0\in M$, если

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0):\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

(определение непрерывности по Коши).

Говорят, что функция f, определённая на множестве M, имеет **предел** C при $x\to x_0$, и пишут

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=C,$$

если для каждой последовательности точек

$$x_n\in M-\{x_0\}:\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0,$$

последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции сходится к точке (числу) C, то есть

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=C.$$

Говорят, что функция f, определённая на множестве M, имеет предел C при $x\to x_0$, и при этом пишут

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=C,$$

если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех точек x удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - C| < \varepsilon.$$

Пусть x_0 – предельная точка множества M. Функция $\alpha : M \to \alpha(M)$ называется **бесконечно малой функцией при условии** $x \to x_0$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пусть f *и* g *– две действительные функции, имеющие одно и то же множество определения* $M \subset R^1$, $\alpha \in R^1$ *– некоторое действительное число, а* x_0 *– предельная точка множества* M. *Тогда если пределы этих функций в точке* x_0 *существуют и соответственно равны*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = b,$$

где $a, b \in R^1$, *то справедливы следующие правила выполнения рациональных операций с пределами функций:*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha a$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \pm b$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = ab$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}$, *если* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Примеры с решением

Пример 3.3.1.15. Вычислить предел функции в точке: $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + x + 5)$.

Р е ш е н и е. Выбираем произвольную последовательность значений аргумента (x_n), сходящуюся к 1, то есть такую, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$. Используем определение по Гейне:

$$\lim_{x\to 1}\left(3x^2+x+5\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3x_n^2+x_n+5\right)=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}x_n^2+\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}5=3+1+5=9.\ \otimes$$

Пример 3.3.1.16. Показать, что $\lim\limits_{x\to 6}\left(2x-5\right)=7$.

Р е ш е н и е. Выбираем произвольное $\varepsilon>0$. Найдём для него такое $\delta>0$, что из неравенства

$$\left|x-6\right|<\delta \Rightarrow 6-\delta<x<6+\delta. \qquad (1)$$

будет следовать неравенство

$$\left|\left(2x-5\right)-7\right|<\varepsilon.$$

Производя тождественные преобразования, получаем:

$$\left|\left(2x-5\right)-7\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|2x-12\right|<\varepsilon \Rightarrow 2\left|x-6\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x-6\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow 6-\frac{\varepsilon}{2}<x<6+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее и доказывает, что $\lim\limits_{x\to 6}\left(2x-5\right)=7$. $\otimes$

Пример 3.3.1.17. Показать, что

$$\lim_{x\to 1/3}\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8.$$

Р е ш е н и е. По определению предела нужно чтобы выполнялось условие:

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right):\ \left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta \Rightarrow \left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon.$$

Решаем неравенство

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{15\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|15x-5|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{15}<x<\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{15}.$$

Таким образом, как только

$$x\in\left(\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{15},\frac{1}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{15}\right),$$

так сразу

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon.$$

Из этого следует, что $\delta=\dfrac{\varepsilon}{15}$. Итак,

$$(\forall\varepsilon>0)\ \left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{\varepsilon}{15}\Rightarrow\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\varepsilon,$$

а значит $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8$. $\otimes$

Пример 3.3.1.18. Найти предел функции в точке: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}$.

Р е ш е н и е. Непосредственно перейти к пределу в числителе и знаменателе нельзя, так как $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то есть получаем так называемую ***неопределённость вида*** $\dfrac{0}{0}$. Для «раскрытия» этой неопределённости разложим числитель и знаменатель на множители, предварительно приравняв их к нулю $\left(x^2-3x+2=0,\ 3x^2+x-4=0\right)$ и решив соответствующие квадратные уравнения. В результате получаем:

$$\frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\frac{(x-2)(x-1)}{3(x-1)\left(x+\frac{4}{3}\right)}.$$

Так как $x\to1$, но $x\neq1$, то на множитель $(x-1)$, дающий в пределе $x\to1$ нуль, можно сократить. В результате получаем:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)}{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to1}\left(x+\frac{4}{3}\right)}=-\frac{1}{7}.\ \otimes$$

Пример 3.3.1.19. Пользуясь определением непрерывности по Коши, показать, что функция $f(x)=5x^2+5$ непрерывна в точке $x_0=8$.

Р е ш е н и е. Значение функции в точке $x_0=8$ равно $f(8)=325$. По определению функция будет в точке $x_0=8$ непрерывной, если

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0):\ |x-8|<\delta\Rightarrow\left|5x^2+5-325\right|<\varepsilon.$$

Решаем последнее неравенство, чтобы найти промежуток числовой оси M такой, что как только $x\in M$, так сразу $\left|5x^2+5-325\right|<\varepsilon$. Имеем:

$$\left|5x^2+5-325\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|5x^2-320\right|<\varepsilon\Rightarrow 64-\frac{\varepsilon}{5}<x^2<64+\frac{\varepsilon}{5}\Rightarrow$$
$$\sqrt{64-\frac{\varepsilon}{5}}<x<\sqrt{64+\frac{\varepsilon}{5}}.$$

Таким образом,

$$x \in \left(\sqrt{64-\frac{\varepsilon}{5}},\ \sqrt{64+\frac{\varepsilon}{5}} \right) \Rightarrow \left| \left(5x^2+5\right)-325 \right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что функция в точке $x_0 = 8$ непрерывна. ⊗

Пример 3.3.1.20. Найти и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & x \le 0; \\ \cos x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Функция непрерывна в промежутках

$$(-\infty,\ 0],\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left[\frac{\pi}{2},\ +\infty\right).$$

Исследуем функцию в точках 0 и $\dfrac{\pi}{2}$.

Так как

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}(2-x) = 2,\ \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \cos x = 1,$$

то $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, в ней функция испытывает скачок

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) - \lim_{x\to 0+0} f(x) = 2.$$

Далее имеем:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \cos x = 0,\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} 0 = 0.$$

Так как $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, то

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

и функция в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ непрерывна. Таким образом, функция непрерывна на всей числовой оси R, кроме точки $x = 0$, которая является точкой разрыва первого рода. ⊗

Пример 3.3.1.21. Найти точки разрыва функции, определённой формулой

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3x^2-9}, & x\neq 3,\\ 1, & x=3.\end{cases}$$

Если точки разрыва существуют, то дать их классификацию.

Р е ш е н и е. Вычислим односторонние пределы при $x\to 3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{3x^2-9}=\frac{1}{18};$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{3x^2-9}=\frac{1}{18}.$$

Итак, пределы слева и справа существуют, равны, но не равны значению функции в точке $x=3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\frac{1}{18}\neq 1.$$

Имеем точку разрыва первого рода, а именно, точку устранимого разрыва. $\otimes$

Пример 3.3.1.22. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}.$$

Р е ш е н и е. Непосредственно вычислить предел нельзя. Поэтому заметим, что

$$\lim_{x\to 0}(2x\cdot\sin x)=0,\ \lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0.$$

Таким образом, функции в числителе и знаменателе при $x\to 0$ являются бесконечно малыми функциями.

Для нахождения предела их отношения заменим эти функции эквивалентными бесконечно малыми при $x\to 0$ функциями. Вспомним, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

то есть, $\sin x\approx x$ при $x\to 0$.

Далее, вспоминая, что $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и заменяя $\sin\dfrac{x}{2}\approx\dfrac{x}{2}$, получим, что

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\approx 2\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}.$$

Теперь предел легко находится как предел отношения эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2/2}=4.\ \otimes$$

Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного

Предварительные сведения

Пусть $M \subset R^1$ – допустимое множество. Действительная функция $f : M \to f(M)$ называется **дифференцируемой в точке** $x_0 \in M$, если выполняется условие:

$$\left(\exists U(x_0) \subset M\right) : \left(\forall x \in U(x_0)\right)$$

$$f(x) = f(x_0) + D(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$

Пусть f – функция, определённая на множестве $M \subset R^1$ и дифференцируемая в точке $x_0 \in M$. Тогда величина $D(x_0)$, определённая предельным соотношением

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D(x_0),$$

называется **первой производной функции** f **в точке** x_0 и обозначается

$$\frac{df}{dx}(x_0) \equiv f'(x_0) \equiv f^{(1)}(x_0).$$

Линейная по смещению $x - x_0$ часть

$$df(x_0) \overset{def}{=} \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) \equiv f'(x_0)(x - x_0)$$

приращения функции

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

дифференцируемой в точке x_0 функции f, называется **первым дифференциалом** этой функции в точке x_0.

Пусть функции $f,\ f_1,\ f_2$ определены на одном и том же множестве M и дифференцируемы в точке $x_0 \in M$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) сумма $f_1 + f_2$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d\left(f_1+f_2\right)}{dx}\left(x_0\right)=\frac{df_1}{dx}\left(x_0\right)+\frac{df_2}{dx}\left(x_0\right);$$

2) если $c\in R^1$, то функция cf дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d\left(cf\right)}{dx}\left(x_0\right)=c\frac{df}{dx}\left(x_0\right);$$

3) произведение $f_1 f_2$ дифференцируемо в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d\left(f_1 f_2\right)}{dx}\left(x_0\right)=\frac{df_1}{dx}\left(x_0\right)f_2\left(x_0\right)+f_1\left(x_0\right)\frac{df_2}{dx}\left(x_0\right);$$

4) если $f\left(x_0\right)\neq 0$, то функция $1/f$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right)\left(x_0\right)=-\frac{1}{\left[f\left(x_0\right)\right]^2}\frac{df}{dx}\left(x_0\right);$$

5) если $f_2\left(x_0\right)\neq 0$, то частное f_1/f_2 дифференцируемо в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)\left(x_0\right)=\frac{1}{\left[f_2\left(x_0\right)\right]^2}\left[\frac{df_1}{dx}\left(x_0\right)f_2\left(x_0\right)-f_1\left(x_0\right)\frac{df_2}{dx}\left(x_0\right)\right].$$

Примеры с решением

Пример 3. 2.1. Найти производную функцию и дифференциал для функции, определённой формулой

$$f\left(x\right)=4x^5-25x^{1/5}-2\sqrt{x^3}+7\sqrt[4]{x^{17}}.$$

Р е ш е н и е. Для решения задачи используем правило вычисления производной суммы (дифференцируемых) функций, правило вычисления производной функции на число, а также табличную производную $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$:

$$f'\left(x\right)=\left(4x^5-25x^{1/5}-2\sqrt{x^3}+7\sqrt[4]{x^{16}}\right)'=$$

$$=\left(4x^5-25x^{1/5}-2x^{3/2}+7x^4\right)'=20x^4-5x^{-4/5}-3x^{1/2}+\frac{119}{4}x^{\frac{13}{4}}=$$

$$= 20x^4 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}.$$

Так как дифференциал функции (в произвольной точке x) $df(x) = f'(x)dx$, то имеем:

$$df(x) = \left(20x^4 + 9x^2 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}\right)dx. \otimes$$

Пример 3. 2.2. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}.$$

Р е ш е н и е. В этом примере следует воспользоваться правилом дифференцирования частного двух (дифференцируемых) функций

$$f'(x) = \left(\frac{g_1}{g_2}\right)'(x) = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2},$$

для чего вычислим сначала производные числителя и знаменателя:

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2,\; g'(x) = (x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$$

(здесь мы воспользовались тем, что согласно таблице производных производная постоянной равна нулю, а производная степенной функции вычисляется по формуле $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$).

Теперь используем правило дифференцирования частного:

$$f'(x) = \left[\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\right]' = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2} = \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}\right]' =$$

$$= \frac{(2x-2)(x^2 + 2x + 5) - (x^2 - 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 5)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 + 4x - 16}{(x^2 + 2x + 5)^2} = 4\frac{x^2 + x - 4}{(x^2 + 2x + 5)^2}. \otimes$$

Пример 3. 2.3. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = a^2 \cdot (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2) + x^2 - 2bx + b^2,$$

и вычислить $f'(5)$ при $a = 3$, $b = 10$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$f'(x)=\left[a^2\cdot(x-a)\cdot\left(x^2+ax+a^2\right)+x^2-2bx+b^2\right]'=$$

$$=a^2\left(x^3-a^3\right)'+\left(x^2-2bx+b^2\right)'=3a^2x^2+2(x-b).$$

Далее получаем при $a=3,\ b=10$:

$$f'(5)=3\cdot3^2\cdot5^2+2\cdot(5-10)=675-10=665.\ \otimes$$

Пример 3. 2.4. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x)=\frac{x^2+2\cos x}{\sin x}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и табличные производные для синуса и косинуса, имеем:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+2\cos x}{\sin x}\right]=\frac{(2x-2\sin x)\cdot\sin x-\left(x^2+2\cos x\right)\cdot\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{2x\sin x-x^2\cos x-2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x}=\frac{2x\sin x-x^2\cos x-2}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{2x}{\sin x}-x^2\frac{ctgx}{\sin x}-\frac{2}{\sin^2 x}.\ \otimes$$

Пример 3. 2.5. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и формулу дифференцирования композиции функций

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x),$$

имеем:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'(2x-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'(2x-1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}2x(2x-1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+2-2x^2+x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{x+2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}.\ \otimes$$

Пример 3. 2.6. Найти производную функцию для функции, действие которой определённо формулой

$$f(x)=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right).$$

Р е ш е н и е. Используя правила рациональных операций с производными функций и табличную производную от логарифма, получаем:

$$f'(x)=\left[\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\right]'=$$

$$=\frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)'=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot 2\cdot(x+1)}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}=$$

$$=\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}{\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.\ \otimes$$

Пример 3. 2.7. Найти производную функцию для функции, определённой формулой $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, и вычислить производные $f'(e),\ f'\left(\dfrac{1}{e}\right),\ f'\left(e^2\right).$

Р е ш е н и е. Сначала находим производную функцию:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Вычисляем производные в указанных точках:

$$f'(e)=\frac{1-\ln e}{e^2}=0;\ f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1-\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}=\frac{1+1}{\frac{1}{e^2}}=2e^2;$$

$$f'\left(e^2\right)=\frac{1-2\ln e}{\left(e^2\right)^2}=\frac{1-2}{e^4}=-e^{-4}.\ \otimes$$

Пример 3. 2.8. Найти производную функцию $f''(x)$ для функции f, если $f(x)=e^{-x^2}$.

Р е ш е н и е. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$f'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=e^{-x^2}\cdot(-1)\cdot 2x=-2x\cdot e^{-x^2},$$

$$f''(x)=\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)'=-2\cdot e^{-x^2}-2x\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)=\left(4x^2-2\right)\cdot e^{-x^2}=$$

$$=2\cdot\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-x^2}.\ \otimes$$

Пример 3. 2.9*). Найти производную функцию $f'''(x)$ для функции f, если $f(x)=x^2\cdot\sin x$.

Р е ш е н и е. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$f'(x)=\left(x^2\cdot\sin x\right)'=2x\sin x+x^2\cos x;$$

$$f''(x)=2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x;$$

$$f'''(x)=6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x.\ \otimes$$

Рассмотрим случай мультипликативных функций, которые могут быть записаны в виде $(\forall x\in M)$

$$f(x)=g_1^{\alpha_1}(x)g_2^{\alpha_2}(x)\ldots g_m^{\alpha_m}(x),$$

где $M \subset R^1$ – общее множество определения для функций $g_k^{\alpha_k}(x)$, а числа α_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ – показатели степени. Предположим, что функция f удовлетворяет условию

$$(\forall x \in M)\ f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x) > 0.$$

Найти производную функции $f(x)$, очевидно, затруднительно даже для малых $(k = 1, 2, \ldots)$. Поступим следующим образом.

Введём новую функцию:

$$u(x) = \ln f(x) = \ln\left[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x)\right].$$

Нетрудно видеть, что эта функция имеет вид

$$u(x) = \ln f(x) = \ln\left[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x)\right] =$$
$$= \alpha_1 \ln g_1(x) + \alpha_2 \ln g_2(x) + \ldots + \alpha_m \ln g_m(x).$$

Дифференцируя функцию

$$u(x) = \ln f(x)$$

с учётом последнего равенства, получаем:

$$u'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow\ f'(x) = f(x) \cdot u'(x);$$

$$u'(x) = \alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \ldots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$f'(x) = f(x) \cdot u'(x) =$$
$$= g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \ldots g_m^{\alpha_m}(x)\left[\alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \ldots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}\right].$$

Выражение

$$u' = (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

называется ***логарифмической производной функции*** $f(x)$.

Пример 3. 2.10. Найти производную функцию для функции

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)\cdot(x+2)}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$u=\ln f=\ln x-\ln(x+1)-\ln(x+2).$$

Далее получаем:

$$u'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{-(x^2-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}.$$

Используя формулу для логарифмической производной, имеем

$$f'(x)=f(x)\cdot u'(x)=$$

$$=\frac{x}{(x+1)\cdot(x+2)}\cdot\frac{-(x^2-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{-(x^2-2)}{(x+1)^2\cdot(x+2)^2}.\ \otimes$$

Пример 3. 2.11$^{*)}$**.** Найти производную функцию для функции

$$f(x)=x^2\cdot\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.$$

Р е ш е н и е. Логарифмируя, имеем:

$$u(x)=\ln f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1).$$

Откуда получаем

$$u'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{8x^2+7x-4}{2\cdot x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)},$$

$$f'(x)=x^2\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\cdot\frac{8x^2+7x-4}{2\cdot x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)}=\frac{x\cdot(8x^2+7x-4)}{2\cdot(x+1)\cdot(2x-1)}\cdot\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.\ \otimes$$

Если функция, определённая формулой $y=f(x)$, задана неявно, то есть посредством уравнения $F(x,\ y)=0$, то для нахождения производной функции нужно продифференцировать это уравнение (то есть, обе его части) по x, помня, что $y=f(x)$, и разрешить уравнение относительно y'.

Пример 3. 2.12. Найти первую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y = \cos(x + y).$$

Р е ш е н и е. Дифференцируем обе части уравнения

$$y = \cos(x + y),$$

помня, что $y = f(x)$, получаем:

$$y' = (\cos(x + y))' = -\sin(x + y) \cdot (1 + y'),$$

откуда имеем $y' = \dfrac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$. ⊗

Пример 3. 2.13. Найти вторую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^3 - 3y + 3x = 1.$$

Р е ш е н и е. Дифференцируя по x обе части уравнения, имеем

$$3y^2 y' - 3y' + 3 = 0 \Rightarrow y^2 y' - y' + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Дифференцируя ещё раз, получаем

$$2yy'\, y' + y^2 y'' - y'' = 0,$$

откуда имеем

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2}.$$

Заменяя y' полученным выше выражением, получаем окончательно:

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2} = \frac{2y}{(1 - y^2)^3}. \otimes$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически, то есть

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$dy = \psi'(t)dt, \; dx = \varphi'(t)dt,$$

откуда имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{dx}\right)}{\varphi'(t)}.$$

Пример 3. 2.14. Найти первую и вторую производную функцию для функции y, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 + 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Непосредственно находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3t^2}; \; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3t^2}\right)}{2t} = -\frac{2}{3t^2}.$$

Так как из второго уравнения для x имеем $t = \sqrt[3]{x-5}$, отсюда получаем:

$$y_x'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{(x-5)^2}}. \otimes$$

Пример 3. 2.15*). Найти первую производную функцию для функции y, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 3\sin t, \\ x = 3\cos t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Имеем: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{3\cos t}{3\sin t} = -ctgt$. $\otimes$

Пример 3. 2.16. Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x)=\frac{3\cdot\cos x}{2x+1}.$$

Р е ш е н и е. Находим дифференциал функции y, используя определение:

$$dy=y'(x)dx=-3\frac{2x\sin x+\sin x+2\cos x}{(2x+1)^2}dx.\ \otimes$$

Пример 3. 2.17. Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x)=e^{x^3}.$$

Р е ш е н и е. Путём непосредственного дифференцирования получаем:

$$dy=y'(x)dx=\left(e^{x^3}\right)'=3x^2e^{x^3}dx.\ \otimes$$

Пример 3. 2.18. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции, определённой формулой

$$y=f(x)=\left(2x^2-3\right)^5.$$

Р е ш е н и е. Для первого дифференциала имеем:

$$df(x)=5\cdot\left(2x^2-3\right)^4\cdot 4x\cdot dx=20x\left(2x^2-3\right)^4dx.$$

Аналогично, для второго и третьего дифференциалов получаем:

$$d^2df(x)=\left|20x\left(2x^2-3\right)^4\right|(dx)^2=60\cdot\left(2x^2-3\right)^3\left(6\cdot x^2-1\right)\cdot(dx)^2;$$

$$d^3df(x)=\left|12\cdot x\cdot\left(2x^2-3\right)^2\cdot\left(6x^2-1\right)+12\cdot x\cdot\left(2x^2-3\right)^3\right|\cdot(dx)^3=$$

$$=720x\cdot\left(2x^2-3\right)^2\cdot\left(8x^2-4\right)\cdot(dx)^3=$$

$$=2880\cdot x\cdot\left(2x^2-3\right)^2\cdot\left(2x^2-1\right)\cdot(dx)^3.\ \otimes$$

Пример 3. 2.19. Вычислить приближённо $\sin 32^0$.

Р е ш е н и е. Используя приближённую формулу

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

получаем:

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{df}{dx}(x_0)\cdot(x-x_0)=f(x_0)+df(x_0).$$

Определяя функцию f формулой $f(x)=\sin x$, видим, что нам нужно вычислить значение $f(x)$ в точке $x=32^0$ при $x_0=30^0$, или в радианах $x=\frac{\pi}{180}\cdot 32,\ x_0=\frac{\pi}{6}$. Учитывая, что $\frac{d\sin(x)}{dx}=\cos x$, имеем:

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x-x_0),$$

или

$$\sin 32^0 \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{32}{180}\cdot\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{90}\approx 0{,}5+\frac{1{,}73\cdot 3{,}14}{90}\approx 0{,}5+0{,}03=0{,}53.$$

Для сравнения табличное значение с точностью до четырёх знаков $\sin 32^0=0{,}5299$. ⊗

Пример 3. 2.20*). Вывести приближённую формулу

$$\sqrt{a^2+h}\approx a+\frac{h}{2a}.$$

Найти приближённо значения $\sqrt{101}$, $\sqrt{1{,}04}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию f, определив её формулой $f(x)=\sqrt{x}$. По приближённой формуле

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

имеем:

$$\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}}\cdot\Delta x.$$

Полагая здесь $x_0=a^2,\ \Delta x=h$, получаем требуемую формулу:

$$\sqrt{a^2+h}\approx\sqrt{a^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2}}\cdot h=a+\frac{h}{2a}.$$

Вычислим $\sqrt{101}$ и $\sqrt{1{,}04}$:

$$\sqrt{101}=\sqrt{100+1}=\sqrt{10^2+1}\approx 10+\frac{1}{20}=10{,}05;$$

$$\sqrt{1{,}04}=\sqrt{1+0{,}04}\approx 1+\frac{0{,}04}{2}=1{,}02. \otimes$$

Пример 3. 2.21*). Найти приближённо приращение

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)$$

функции, определённой формулой $y=x^2$ при $x_0=2,\ \Delta x=x-x_0=0{,}01$.

Р е ш е н и е. Из приближённой формулы

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

имеем

$$f(x)-f(x_0)\approx\frac{df}{dx}(x_0)\cdot(x-x_0)=df(x_0).$$

Подставляя в формулу $x_0=2,\ \Delta x=x-x_0=0{,}01$, получаем:

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)=(2+0{,}01)^2-2^2\approx 2\cdot 2\cdot 0{,}01=0{,}04. \otimes$$

Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Предварительные сведения

Говорят, что функция $f:M\to f(M)$ имеет в точке $x_0\in M$ **локальный максимум** (**локальный минимум**), если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что

$$f(x_0)=\max_{U\cap M} f\ \left(f(x_0)=\min_{U\cap M} f\right).$$

Теорема Ферма. Если функция f определена и дифференцируема на открытом множестве $J=(a,b)$ и имеет в точке $x_0\in J$ локальный экстремум (всё равно, максимум или минимум), то $\dfrac{df}{dx}(x_0)=0$.

Теорема Ролля. Если функция f определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $\overline{J}=[a,b]$ и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $J=(a,b)$, причём $f(a)=f(b)=c$, то

$$\left(\exists x_0 \in J\right):\ \frac{df}{dx}\left(x_0\right)=0.$$

Теорема Лагранжа. Если функция f определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $\overline{J}=[a, b]$ и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $J=(a, b)$, то

$$\left(\exists x_0 \in (a, b)\right):\ f'\left(x_0\right)\equiv \frac{df}{dx}\left(x_0\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теорема Коши. Если функции f и g непрерывны на замкнутом и ограниченном промежутке $\overline{J}=[a, b]$ и дифференцируемы на открытом промежутке $J=(a, b)$, причём

$$\left(\forall x \in J\right)\ \frac{dg}{dx}(x)\neq 0,$$

то $g(b)\neq g(a)$ и

$$\left(\exists x_0 \in J\right):\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'\left(x_0\right)}{g'\left(x_0\right)}.$$

Теорема Тейлора. Если функция $f: J \to f(J)$ непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $[x_0, x]\subset J$ и $n+1$ раз дифференцируема на соответствующем открытом промежутке (x_0, x), а её производные до порядка n включительно имеют предельные значения $f^{(k)}(x_0)$, $(k=0, 1, 2, \ldots, N)$, то существует точка $\xi \in (x_0, x)$ такая, что для функции f справедливо представление

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k f}{dx^k}\left(x_0\right)\frac{\left(x-x_0\right)^k}{k!}+\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi)\frac{\left(x-x_0\right)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Примеры с решением

Пример 3.3.1. Выяснить, удовлетворяет ли функция, заданная формулой

$$f(x)=3-x^2$$

условиям теоремы Ферма на промежутке $(1, 4)$.

Р е ш е н и е. Данная функция на промежутке $(1,4)$ монотонно убывает и, следовательно, достигает своего максимума в точке 1, а минимума в точке 4. Следовательно, в промежутке $(1, 4)$ не существует точки x_0 локального экстремума, в которой $f'\left(x_0\right)=0$. Поэтому данная функция условиям теоремы Ферма на данном промежутке не удовлетворяет. $\otimes$

Пример 3.3.2. Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x)=3+2x-x^2,$$

на промежутке $[0,4]$ условиям теоремы Ферма. Если функция условиям теоремы Ферма удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (0,4)$, в которой $f'(x_0)=0$.

Р е ш е н и е. На промежутке $(0,4)$ функция дифференцируема, следовательно $(\exists x_0 \in (0,4)) f'(x_0)=0$. Находим эту точку:

$$f'(x)=2-2x \Rightarrow 2-2x_0=0 \Rightarrow x_0=1. \otimes$$

Пример 3.3.3. Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x)=x^2+6x-35,$$

на промежутке $[-5,-1]$ условиям теоремы Ролля. Если функция условиям теоремы Ролля удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (-5,-1)$, в которой $f'(x_0)=0$.

Р е ш е н и е. Функция представляет собой многочлен, который непрерывен и дифференцируем на всей числовой оси. Кроме этого, имеем

$$f(-5)=f(-1)=-40.$$

Поэтому условия теоремы Ролля для данной функции выполнены, следовательно точка $x_0 \in (-5,-1)$, в которой $f'(x_0)=0$, существует. Найдём её:

$$f'(x_0)=0 \Rightarrow 2x_0+6=0 \Rightarrow x_0=-3. \otimes$$

Пример 3.3.4. На дуге кривой, определяемой уравнением

$$y=x^3-3x$$

найти точку, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки $A(-1;2)$ и $B(3;18)$.

Р е ш е н и е. Функция определена на промежутке $[-1,3]$, непрерывна на этом промежутке и дифференцируема на открытом промежутке $(-1,3)$. Условия теоремы Лагранжа выполнены. Следовательно, по теореме Лагранжа найдётся такая точка $x_0 \in (-1,3)$, что

$$f'(x_0)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=4.$$

Так как $f'(x)=(x^3-3x)'=3x^2-3$, то имеем $3x^2-3=4$. Из этого уравнения находим $x_{01}=+\sqrt{\frac{7}{3}}$, $x_{02}=-\sqrt{\frac{7}{3}}$. Так как из этих двух точек $x_{01}\in[-1,3]$ а $x_{02}\notin[-1,3]$, то $x_0=x_{01}=\sqrt{\frac{7}{3}}$. ⊗

Пример 3.3.5. В какой точке касательная к кривой, определённой уравнением

$$y=f(x)=x^2-8x,$$

параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1;9)$, $B(5;-15)$.

Р е ш е н и е. На промежутке $[-1,5]$ функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому имеем:

$$\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\frac{-24}{6}=-4\Rightarrow f'(x_0)\equiv 2x_0-8=-4\Rightarrow x_0=2.$$

Подставляя это значение x в формулу для функции, получаем

$$y=f(2)=-12.$$

Таким образом, искомой является точка $C(2;-12)$. ⊗

Пример 3.3.6. Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x)=x^3,\ g(x)=x^2$$

на промежутке $[1,2]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку x_0, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Р е ш е н и е. Обе функции непрерывны на промежутке $[1,2]$ и дифференцируемы на промежутке $(a,b)=(1,2)$, причём $(\forall x\in(a,b))g(x)\neq 0$. Поэтому условия теоремы Коши выполнены. Так как

$$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=2x,$$

то из условия

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{7}{3}$$

находим

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{3x_0^2}{2x_0}=\frac{3}{2}x_0=\frac{7}{3}\Rightarrow x_0=\frac{14}{9}. \otimes$$

Пример 3.3.7. Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x)=x^2-2x+3,\ g(x)=x^3-7x^2+20x-5$$

на промежутке $[1,\ 4]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку x_0, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Р е ш е н и е. Обе функции на данном промежутке непрерывны и дифференцируемы. Производные функций, соответственно равны

$$f'(x)=2x-2,\ g'(x)=3x^2-14x+20.$$

Кроме этого, производная функции g в точках промежутка $(1,\ 4)$ не обращается в нуль, так как для дискриминанта уравнения $3x^2-14x+20=0$ имеем $D=b^2-4ac=-44<0$ (график функции g не имеет точек пересечения с осью OX). Следовательно, теорема Коши для данных функций справедлива. Поэтому имеем:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{11-2}{27-9}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2x_0-2}{3x_0^2-14x_0+20}=\frac{1}{2}.$$

Откуда получаем

$$x_0^2-6x_0+8=0\Rightarrow x_{01}=4,\ x_{02}=2$$

Так как из этих двух точек промежутку $(1,\ 4)$ принадлежит только точка $x_{02}=2$, то она и является искомой точкой. $\otimes$

Пример 3.3.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x^{-x}}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(e^x+x^{-x}\right)\cdot(1+x)\right)=2.\ \otimes$$

Пример 3.3.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x+3}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+1}{9x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{18x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{18}=\frac{1}{3}.\ \otimes$$

Пример 3.3.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)=[-\infty\cdot 0]$. Для раскрытия неопределённости заменим переменную:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)=\{x=-t\}=\lim_{t\to\infty}\left(-t^3\cdot e^{-t}\right)=-\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^t}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot e^x\right)=-\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^t}=-\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{e^t}=-\lim_{t\to\infty}\frac{6t}{e^t}=-6\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0.\ \otimes$$

Пример 3.3.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$. Для раскрытия неопределённости приводим выражения, стоящие в скобках, к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1-\ln x}{x\cdot\ln x-\ln x}\right).$$

Получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Применяя правило Лопиталя два раза, имеем:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1-\ln x}{x\cdot\ln x-\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+1-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.\otimes$$

Пример 3.3.12. Разложить многочлен

$$P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$$

по степеням $x-1$ по формуле Тейлора.

Р е ш е н и е. В нашем случае формула Тейлора имеет вид:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+$$

$$+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n,$$

где $x_0=1$. Находим значение многочлена и его производных в точке $x_0=1$:

$$P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1,\quad P(1)=0;$$

$$P^{(1)}(x)=5x^4-8x^3+3x^2-2x+2,\quad P^{(1)}(1)=0;$$

$$P^{(2)}(x)=20x^3-24x^2+6x-2,\quad P^{(2)}(1)=0;$$

$$P^{(3)}(x)=60x^2-48x+6,\quad P^{(3)}(1)=18;$$

$$P^{(4)}(x)=120x-48,\quad P^{(4)}(1)=72;$$

$$P^{(5)}(x)=120,\quad P^{(5)}(1)=120.$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x)=3\cdot(x-1)^3+3\cdot(x-1)^4+(x-1)^5.\otimes$$

Пример 3.3.13. Разложить многочлен

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$$

по степеням $x+1$ по формуле Тейлора.

Р е ш е н и е. Вычисляя значение многочлена и его производных в точке $x_0 = -1$, получаем:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4, \qquad P(-1) = -9;$$

$$P^{(1)}(x) = 4x^3 + 6x^2 - 16x + 4, \qquad P^{(1)}(-1) = 22;$$

$$P^{(2)}(x) = 12x^2 + 12x - 16, \qquad P^{(2)}(-1) = -16;$$

$$P^{(3)}(x) = 24x + 12, \qquad P^{(3)}(-1) = -12;$$

$$P^{(4)}(x) = 24, \qquad P^4(-1) = 24.$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x) = -9 + \frac{22}{1!}\cdot(x+1) + \frac{-16}{2!}\cdot(x+1)^2 + \frac{-12}{3!}\cdot(x+1)^3 +$$

$$+\frac{24}{4!}\cdot(x+1)^4 = -9 + 22\cdot(x+1) - 8\cdot(x+1)^2 -$$

$$-2\cdot(x+1)^3 + (x+1)^4. \quad \otimes$$

Пример 3.3.14. Представить функцию $f(x) = e^x$ в виде разложения по формуле Маклорена.

Р е ш е н и е. Формула Маклорена имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(0)\frac{x^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Очевидно выполнение равенств: $(\forall n \in N)$

$$f(0) = \frac{df}{dx}(0) = \frac{d^2 f}{d^2 x}(0) = \ldots = \frac{d^n f}{d^n x}(0) = e^0 = 1.$$

Кроме этого, очевидно, что $\dfrac{d^{n+1} f}{d^{n+1} x}(x) = e^x$.

Тогда формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В этой формуле можно положить $\xi = \theta \cdot x$, где $0 < \theta < 1$. ⊗

Приведём вид формулы Тейлора с **остаточным членом в форме Пеано**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots +$$

$$+ \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Здесь многочлен Тейлора

$$T_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \frac{(x - x_0)^1}{1!} +$$

$$+ \frac{d^2 f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

а остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^k}{k!}.$$

При условии $\Delta x \to 0$ выполняется

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = o\left((x - x_0)^n\right) = o\left((\Delta x)^n\right).$$

Теперь формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + o\left((\Delta x)^n\right).$$

Последняя форма записи называется ***формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано***.

Пример 3.3.15. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Маклорена.

Р е ш е н и е. Рассмотрим производные функции $f(x) = \sin x$ в точке x:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\sin x = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Кроме этого, имеем

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\sin(\theta x) = \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\cos\theta x.$$

Действительно, видим, что

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n\cos\theta x.$$

Здесь мы положили $\xi = \theta x$, где $0 < \theta < 1,\ x \in (a, b)$.

Формула Маклорена принимает вид

$$\sin x = \sin 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \alpha^{(2n+1)}(x) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x.$$

В виде разложения по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано это разложение записывается так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right). \otimes$$

Аналогично можно получить и разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Пример 3.3.16. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Р е ш е н и е. Записываем для $\sin x$ разложение по формуле Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right).$$

Подставляя это разложение, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} - x + o\left(x^4\right)}{x^3} = -\frac{1}{3!} - \lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^4\right)}{x^3} = -\frac{1}{6}. \otimes$$

Пример 3.3.17. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3\cdot\sin x}$.

Р е ш е н и е. Используем разложение для e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^3\cdot\left(x + \alpha_{(2)}(x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^5\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{1 + \frac{o\left(x^5\right)}{x^4}} = \frac{1}{12}. \otimes$$

Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного

Предварительные сведения

Пусть функция $f\colon J \to f(J)$ дифференцируема на множестве $J = (a, b)$ и монотонно возрастает (монотонно убывает) на нём. Тогда на этом множестве её производная неотрицательна (неположительна), то есть

$$(\forall x \in (a, b))\ f'(x) \geq 0\ \left(f'(x) \leq 0\right).$$

Пусть функция $f\colon J \to f(J)$ дифференцируема на $J = (a, b)$ и существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$. Тогда если при переходе через точку x_0 в направлении роста аргумента x производная f' функции f меняет знак с «плюса» на «минус» (с «минуса» на «плюс»), то в точке x_0 функция имеет локальный максимум (локальный минимум). Если же знак производной f' при переходе через точку x_0 не меняется, то функция в точке x_0 экстремума не имеет.

График G_f функции $f: J \to f(J)$, дифференцируемой на $J=(a, b)$, называется **выпуклым в окрестности** $U(x_0)$ **точки** $x_0 \in J$, если точки $(x;\ f(x))$, где $x \in U(x_0)$, графика лежат ниже касательной к графику в точке x_0. Если же все точки $(x;\ f(x))$, где $x \in U(x_0)$, графика G_f функции лежат выше касательной к нему в точке x_0, то график называется **вогнутым в окрестности** $U(x_0)$ **точки** x_0. ●

Пусть функция $f: J \to f(J)$ определена и дифференцируема на множестве $J=(a, b)$ и $x_0 \in (a, b)$. Тогда если при переходе через точку x_0 (в направлении роста аргумента x) график функции G_f меняет выпуклость на вогнутость (или наоборот), то точка $(x_0;\ f(x_0))$ называется **точкой перегиба** графика функции.

Пусть $f: J \to f(J)$, где $J=(a, b)$. Тогда, если вторая производная функция f'' для функции f во всех точках множества J положительна (отрицательна), то график функции G_f является вогнутым (выпуклым) на этом множестве.

Пусть дана функция $f: M \to f(M)$ и G_f – её график. Прямая линия, с уравнением $x=a$, где $a \in M$, называется **вертикальной асимптотой графика функции** f, если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x\to a+0} f(x),\ \lim_{x\to a-0} f(x)$$

не существует.

Прямая линия с уравнением

$$y=kx+b$$

называется **наклонной асимптотой графика** G_f **функции** $f: M \to f(M)$ (**правой** при $x \to +\infty$ и **левой** при $x \to -\infty$), если

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0.$$

Справедливо представление

$$f(x)=(kx+b)+\alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=0$. Нетрудно видеть также, что справедливы формулы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Примеры с решением

Пример 3.4.1. Найти промежутки монотонности функции, определённой формулой $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$.

Р е ш е н и е. Множеством определения функции является вся числовая ось. Находим первую производную функции

$$f' = 3x^2 + 6x - 9 = 3\left(x^2 + 2x - 3\right) = 3(x+1)^2 - 12.$$

Поэтому имеем:

$$f' > 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1)^2 - 12 > 0;$$

$$f' < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1)^2 - 12 < 0.$$

Корни уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

есть

$$x_1 = -3,\ x_2 = 1.$$

График функции – парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $x_0 = -1$, $y_0 = -12$. Следовательно, неравенство $f'(x) > 0$ выполняется при $x < -3$ и $x > 1$, а неравенство $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 1$.

На множестве $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ функция строго монотонно возрастает, а на множестве $(-3, 1)$ строго монотонно убывает. ⊗

Пример 3.4.2. Предприятие производит x единиц продукции в месяц. Зависимость финансовых накоплений предприятия от объёма выпуска выражается формулой

$$\Phi = -0{,}01 \cdot x^3 + 300 \cdot x - 500.$$

Определить количество единиц продукции, начиная с которого финансовые накопления предприятия начинают убывать.

Р е ш е н и е. Производная от Φ равна:

$$\Phi' = -0{,}03 \cdot x^2 + 300.$$

Финансовые накопления убывают, если

$$\Phi' = -0{,}03 \cdot x^2 + 300 < 0,$$

откуда имеем $x^2-10000>0$. Из последнего неравенства получаем: $x_1>100$, $x_2<-100$. Имеет экономический смысл только неравенство $x_1>100$. Следовательно, при $x>100$ финансовые накопления предприятия начинают убывать, то есть повышать выпуск продукции свыше 100 единиц становится экономически не выгодно. $\otimes$

Пример 3.4.3. Исследовать на наличие локальных экстремумов функцию, заданную формулой $f(x)=x^3-5x+2$.

Р е ш е н и е. 1) Производная функция для функции f есть

$$f'(x)=3x^2-5.$$

2) Находим критические точки функции, решая уравнение

$$3x^2-5=0.$$

Корни уравнения (критические точки) есть $x_1=-\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2=+\sqrt{\frac{5}{3}}$.

3) Выясняем вопрос о наличии локальных экстремумов функции согласно теореме, для чего определяем знаки производной $f'(x)$ справа и слева от каждой критической точки, результаты заносим в таблицу:

x	$x<-\sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_1=-\sqrt{\frac{5}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{3}}<x<\sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_2=\sqrt{\frac{5}{3}}$	$x>\sqrt{\frac{5}{3}}$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
f		Максимум $f(x_1)=6{,}3$		Минимум $f(x_2)=-2{,}3$	

4. Вычисляем значения функции в точках x_1, x_2 и результаты вычислений тоже заносим в таблицу.

Получаем следующий результат: функция имеет в точке

$$x_1=-\sqrt{\frac{5}{3}}$$

локальный максимум $f(x_1)=6{,}3$, а в точке

$$x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

– локальный минимуму $f(x_2) = -2{,}3$. ⊗

Пример 3.4.4. Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 3.$$

Р е ш е н и е. Множеством определения функции является вся числовая ось R.

1) Находим производную функции:

$$f'(x) = x^2 + 5x + 4.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$x^2 + 5x + 4 = 0.$$

В результате решения имеем корни: $x_1 = -1,\ x_2 = -4$. Критические точки разбивают R^1 на промежутки

$$-\infty < x < -4,\ -4 < x < -1,\ -1 < x < \infty.$$

3) Исследуем поведение первой производной функции в полученных промежутках:

в промежутке $(-\infty, -4)$ имеем $y' > 0$;

в промежутке $(-4, -1)$ имеем $y' < 0$;

в промежутке $(-1, \infty)$ имеем $y' > 0$.

Следовательно, в точке -4 имеем **максимум**; в точке -1 имеем **минимум**.

4) Вычисляем экстремальные значения функции:

$$\max f(x) = f(-4) \approx 5{,}67;\ \min f(x) = f(-1) = 1{,}17.$$ ⊗

Пример 3.4.5. Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 10.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим производную функции:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$15x^4 - 15x^2 = 0,\ x^4 - x^2 = 0,\ x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0.$$

Имеем три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

3) Находим вторую производную функцию:

$$f''(x) = 60 \cdot x^3 - 30 \cdot x.$$

4) Находим вторую производную в критических точках:

$$f''(0) = 0;\ f''(1) = 30;\ f''(-1) = -30.$$

В точке $x_2 = 1$ функция имеет **минимум**, а в точке $x_3 = -1$ - **максимум**. В точке $x_1 = 0$ функция экстремума не имеет, так как первая производная при переходе через эту точку не меняет своего знака. $\otimes$

Промежутки выпуклости и вогнутости и асимптоты графика функции

Пример 3.4.6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = (x^2 + 7x) \cdot \sqrt[3]{x} - 5x - 8.$$

Р е ш е н и е. Множество определения функции $M = R$. Преобразованная формула

$$f(x) = x^{\frac{7}{3}} + 7 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 5x - 8.$$

1) Находим нули и точки разрыва второй производной функции, для чего находим $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - 5;$$

$$f''(x) = \frac{28}{9} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Очевидно, что точка $x = -1$ является нулём второй производной $f''(x)$, а точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода второй производной $f''(x)$. Эти точки делят множество определения функции $f(x)$ на промежутки

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, +\infty).$$

2) Определяем знак второй производной в полученных промежутках:

$$(\forall x \in (-\infty, -1))\ f''(x) < 0;$$

$$(\forall x \in (-1, 0))\ f''(x) > 0;$$

$$(\forall x \in (0, +\infty))\ f''(x) > 0.$$

Следовательно: на $(-\infty, -1)$ график функции ***выпуклый***; на $(-1, 0) \bigcup (0, +\infty)$ график функции ***вогнутый***.

3) Так как функция в точке $x_0 = -1$ определена, а $f''(-1) = 0$, то в точке $x_0 = -1$ график функции испытывает перегиб, а точка

$$(x_0;\ f(x_0)) = (-1; 3)$$

является точкой перегиба графика функции. $\otimes$

Пример 3.4.7. Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{x - 3}.$$

Р е ш е н и е. 1) Точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода, следовательно, график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 3$.

2) По определению асимптоты, функция может быть представлена в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при неограниченном удалении точки графика от начала системы координат более высокого порядка, чем x, то есть

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0.$$

Чтобы записать функцию в указанном виде, разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$\frac{-x^2 + 7x}{x - 3} = -x + 4 + \frac{12}{x - 3}.$$

Так как

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{12}{x - 3} = 0,$$

график функции имеет наклонную асимптоту с уравнением $y=-x+4$. ⊗

Пример 3.4.8. Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-2x.$$

Р е ш е н и е. 1) Так как функция определена на всей числовой оси, вертикальных асимптот нет.

2) Из представления функции в виде

$$f(x)=(kx+b)+\alpha(x)$$

Следует, что для нахождения наклонных асимптот нужно найти правый и левый пределы, которые равны соответственно

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b_+=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right],$$

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ b_-=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Правый предел:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-2\right)=-1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-2x+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

Правая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y=-x.$$

Левый предел:

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x}=\{x=-z\}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\sqrt{1+z^2}+2z}{-z}=$$

$$=-\lim_{z\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}+2\right)=-3;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-2x+3x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0.$$

Левая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$y = -3x$. ⊗

Пример 3.4.9. Исследовать функцию, заданную формулой $y(x) = x\cdot e^{-x}$.

Р е ш е н и е. 1) Множеством определения функции служит всё множество действительных чисел R.

2) Нуль функции – точка $x = 0$, причём $\lim\limits_{x\to0} y(x) = 0$. Следовательно, функция в точке $x = 0$ асимптот не имеет.

3) Находим критические точки функции:

$$y'(x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}\cdot(1-x) \Rightarrow x = 1.$$

4) Имеем два промежутка $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$. На этих промежутках

$(\forall x\in(-\infty, 1))\ y'(x) > 0$,

$(\forall x\in(1, \infty))\ y'(x) < 0$,

соответственно. Следовательно, при $x\in(-\infty, 1)$ функция строго монотонно возрастает, а при $x\in(1, \infty)$ функция строго убывает.

5) Вторая производная функции равна

$$y''(x) = -e^{-x}\cdot(1-x) - e^{-x} = e^{-x}\cdot(x-2).$$

Так как в точке $x = 1$ вторая производная равна

$$y''(1) = \frac{1-2}{e} = -\frac{1}{e} < 0,$$

то функция в этой точке имеет локальный максимум, равный $\frac{1}{e}$.

6) Вторая производная функции в точке $x = 2$ обращается в нуль, а при переходе через это точку меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, график функции при $x = 2$ имеет перегиб,

причём при $x<2$ график функции выпуклый, а при $x>2$ – вогнутый. Значение функции в точке перегиба равно

$$y(2)=2\cdot e^{-2}=\frac{2}{e^2}.\ \otimes$$

Практическое занятие 6. Интегрируемость функции одного переменного

Предварительные сведения

Определённым интегралом от определённой на промежутке $[a,b]$ функции f называется предел последовательности интегральных сумм Римана

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1}),$$

если он существует. Можно показать, что этот предел существует для непрерывной на $[a,b]$ функции.

Свойства определённого интеграла:

1) $\int_a^a f(x)dx=0$;

2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$;

3) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$;

4) $\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx$;

5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ при $a<c<b$;

6) $\int_a^b f(x)dx>0$, если $\left(\forall x\in[a,b]\right)\ f(x)>0$.

Пусть f и F – две функции, определённые на открытом промежутке $M=(a,b)\subset R^1$. Функция F называется **первообразной** (**примитивной**) **функцией** для функции f на промежутке M, если она дифференцируема на этом промежутке и выполняется следующее условие:

$$\left(\forall x\in(a,b)\right)\ \frac{d}{dx}F(x)=f(x).$$

Неопределённым интегралом от функции f на промежутке (a,b) действительной числовой оси называется бесконечное множество $H(x)$ всех её первообразных. Неопределённый интеграл обозначается так:

$$H(x)=\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Если F – первообразная функция для функции f на промежутке $\overline{J}=[a,b]$, то определённый интеграл от функции f по заданному промежутку равен разности значений первообразной на концах промежутка (формула Ньютона-Лейбница):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Примеры с решением

Пример 3.5.1. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int \sqrt[3]{x^2}dx.$$

Р е ш е н и е. Непосредственно имеем:

$$\int \sqrt[3]{x^2}dx=\int x^{2/3}dx=\frac{x^{5/3}}{5/3}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C. \otimes$$

Пример 3.5.2. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\left(6x^2-3\sqrt{x}+5\right)dx.$$

Р е ш е н и е. Используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных, получаем:

$$\int\left(6x^2-3\sqrt{x}+5\right)dx=6\int x^2dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx+5\int dx=$$

$$=2x^3-2x^{3/2}+5x+C=2x^3-2\sqrt{x^3}+5x+C,$$

где все постоянные интегрирования объедены в одну постоянную C. $\otimes$

Пример 3.5.3. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\left(5x^2+11-3\sin x+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx.$$

Р е ш е н и е. Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, имеем:

$$\int\left(5x^2+11-3\sin x+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=5\int x^2dx+11\int dx-3\int \sin xdx+2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{5}{3}x^3+11x+3\cos x+2\ln|x|+ctgx+C.\ \otimes$$

По определению логарифмической производной имеем:

$$y(x)=\ln(f(x))\Rightarrow\frac{dy}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(\ln(f(x)))=\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{df}{dx}(x)\equiv\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Тогда по определению неопределённого интеграла имеем:

$$\int(\ln f(x))'dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\int\frac{df(x)}{f(x)}=\ln(f(x))+C.$$

Этот метод нахождения неопределённого интеграла называется ***методом подведения под дифференциал***.

Пример 3.5.4. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\frac{dx}{x+1}.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $dx=d(x+1)$ и, используя табличную первообразную для функции $\frac{1}{x}$, в соответствии с формулой подведения под дифференциал получаем:

$$\int\frac{dx}{x+1}=\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|+C.\ \otimes$$

Пример 3.5.5. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\frac{dx}{ax+b}.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$, имеем:

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.\ \otimes$$

Пример 3.5.6. Найти неопределённый интеграл

$$I=\int\frac{xdx}{1+x^2}.$$

Р е ш е н и е. Так как $xdx = \frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$, получаем:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C. \otimes$$

Пример 3.5.7. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{3x+2}{x+5}dx.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{3x+2}{x+5} \equiv \frac{3x+15-13}{x+5} = \frac{3(x+5)}{x+5} - \frac{13}{x+5} = 3 - \frac{13}{x+5}.$$

Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, получаем:

$$\int \frac{3x+2}{x+5}dx = \int \left(3 - \frac{13}{x+5}\right)dx = 3\int dx - 13\int \frac{1}{x+5}dx =$$

$$= 3x - 13\ln|x+5| + C. \otimes$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена на промежутке $\overline{J} \in [\alpha, \beta]$, имеет непрерывную производную на (α, β) и принимает значения в промежутке $\overline{M} \in [a, b]$, а функция $f : \overline{M} \to f\left(\overline{M}\right)$ – непрерывная функция, определённая при всех $x \in \overline{M}$. Тогда в неопределённом интеграле

$$I = \int f(x)dx + C$$

можно заменить переменную x функцией $\varphi(t)$ от переменной t, причём dx заменяется на $\frac{d\phi}{dt}(t)dt$, то есть, справедлива формула **замены переменной**

$$\int f(x)dx = \int f\left(\phi(t)\right)\frac{d\phi}{dt}(t)dt + C.$$

Если функции u и v имеют непрерывные производные $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$, то

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

(**формула интегрирования по частям**).

Пример 3.5.8. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt{x+3}dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную по формуле $t = x + 3 \Rightarrow dx = dt$, получаем:

$$\int \sqrt{x+3}dx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + C. \otimes$$

Пример 3.5.9. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^4}dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную

$$t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\frac{dt}{x^2+1},$$

получаем:

$$\int \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{9t^3} + C = -\frac{1}{9\left(x^3+3x+1\right)^3} + C. \otimes$$

Пример 3.5.10. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \cos x dx.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $\cos x dx = d(\sin x)$ и используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos x dx \equiv d(\sin x), & v = \sin x \end{matrix} \right\} =$$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x dx + C = x \cdot \sin x + \cos x + C. \otimes$$

Пример 3.5.11. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \ln x dx.$$

Р е ш е н и е. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int x \cdot \ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int xdx + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \otimes$$

Пример 3.5.12. Вычислить определённый интеграл

$$I=\int_0^1 x^2dx$$

по формуле Ньютона-Лейбница, дать геометрическую интерпретацию.

Р е ш е н и е. Проводя непосредственное интегрирование и применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем: $\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$. Полученное число $\frac{1}{3}$ имеет смысл площади криволинейного треугольника с вершинами в точках

$O(0,\,0)$, $A(1,1)$, $B(1{,}0)$. ⊗

Пример 3.5.13. Вычислить определённый интеграл

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Р е ш е н и е. Используя таблицу первообразных и формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}.\ \otimes$$

Пример 3.5.14. Вычислить определённый интеграл

$$I=\int_1^2 2^{3x-4}dx.$$

Р е ш е н и е. Используем методом “подведения под дифференциал”:

$$\int_1^2 2^{3x-4}dx=\left\{dx=\frac{1}{3}d(3x-4)\right\}=\frac{1}{3}\int_1^2 2^{3x-4}d(3x-4)=$$

$$=\left\{\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\right\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x-4}}{\ln 2}\Big|_1^2=\frac{1}{3\ln 2}\left(4-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6\ln 2}.\ \otimes$$

Пример 3.5.15. Вычислить определённый интеграл

$$I=\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5dx.$$

Р е ш е н и е. Для решения воспользуемся методом замены переменной. Введём новую переменную $t = 2 - x^2$. Дифференциал новой переменной равен

$$dt = d\left(2 - x^2\right) = -2xdx \Rightarrow \; xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

Пределы изменения новой переменной определяются так:

$$x = 0 \Rightarrow t = 2; \; x = 1 \Rightarrow t = 1.$$

Учитывая эти формулы, получаем:

$$\int_0^1 x \cdot \left(2 - x^2\right)^5 dx = \left\{ \begin{array}{l} dt = d\left(2 - x^2\right) = -2xdx; \; xdx = -\dfrac{1}{2}dt; \\ x = 0 \Rightarrow t = 2; \; x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int_2^1 t^5 dt = \frac{1}{2}\int_1^2 t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot t^6 \Big|_1^2 = \frac{1}{12} \cdot (64 - 1) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}. \otimes$$

Пример 3.5.16. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

Р е ш е н и е. Используя замену переменной интегрирования $t = \ln x$, имеем:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l|l} t = \ln x, & x = 1 \Rightarrow t = 0, \\ dt = \dfrac{dx}{x}, & x = e \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \otimes$$

Пример 3.5.17. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

Р е ш е н и е. Данный интеграл вычисляется методом «интегрирования по частям»:

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{-x}dx, & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}. \end{array} \right\} =$$

$$= x \cdot e^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} d(-x) = -x \cdot e^{-x}\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$=-e^{-1}-e^{-1}+1=1-2\cdot e^{-1}=1-{}^{2}\!/_{e}={}^{e-2}\!/_{e}.\ \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Выяснить тип монотонности последовательностей:

1) $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$; 2) $\left(\dfrac{n}{5^n}\right)$; 3) $\left(\dfrac{n}{4n-3}\right)$; 4) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$; 5) $\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

2. Используя определение, показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, если:

1) $x_n = \dfrac{3n+1}{5n+2}$, $x_0 = \dfrac{3}{5}$; 2) $x_n = \dfrac{2n-2}{3n-1}$, $x_0 = \dfrac{2}{3}$;

3) $x_n = \dfrac{4n-2}{2n+3}$, $x_0 = 2$; 4) $x_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+2}$, $x_0 = 4$;

5) $x_n = \dfrac{3-n^3}{1+n^3}$, $x_0 = -1$; 6) $x_n = \dfrac{6n-2}{2n+1}$, $x_0 = 3$;

7) $x_n = \dfrac{3+8n^2}{1+4n^2}$, $x_0 = 2$; 8) $x_n = \dfrac{5n+2}{3n+1}$, $x_0 = \dfrac{5}{3}$.

3. Вычислить предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{2n+5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^3}{(n+2)^2-(n+1)^3}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n+5)^3}{(3-n)^3}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\dfrac{n}{2^n}}{n^2-1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+bn}-an\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{\left(n+\sqrt{n}\right)\sqrt{7-n+n^2}}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{2n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+2}}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+5}+n}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n}$; 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{-n}\sin x\right)$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^n$; 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+3}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$; 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+1}\right)^{3n^2}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$; 22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$.

23. Найти множество определения M и множество значений $f(M)$ функции $f(x)=\lg x$.

24. Найти множество определения M следующих функций:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+4}$; 3) $f(x)=(x-2)\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$;

4) $f(x)=\lg(x-2)-\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$; 5) $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^3-3x^2+x}$.

25. Выяснить, какие из данных функций являются чётными, а какие нечётными:

1) $f(x)=1-x$; 2) $f(x)=x^3+x$; 3) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$;

4) $f(x)=x^5-x^3+x$; 5) $f(x)=x^2+x-1$.

26. Выяснить, является ли данная функция периодической и если функция является периодической, то найти её период:

1) $f(x)=5$; 2) $f(x)=\sin(5x+3)$; 3) $f(x)=\cos x^2$;

4) $f(x)=2[x]+1$, где $[x]$ – целая часть x.

27. Используя определение непрерывности функции по Гейне, доказать, что функция $f(x)=x^2+3x+3$ непрерывна в любой точке действительной числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

28. Используя определение непрерывности по Коши показать, что следующие функции непрерывны в заданных точках x_0:

1) $f(x)=3x-5,\ x_0=2$; 2) $f(x)=4x^2-1,\ x_0=2$;

3) $f(x)=-3x^2+8,\ x_0=4$; 4) $f(x)=4x^2+1,\ x_0=8$;

5) $f(x)=\sin x-\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

29. Решить неравенство $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-1}<0$.

30. Найти предел данной функции при $x\to x_0$:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^3-3x^2+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^4-x^3+x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$; 7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 5x-\cos 3x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x3^x}{1+x2^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

31. Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x^5+x+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$.

32. Используя таблицу производных, найти первую производную функцию для заданной функции и, если требуется, её значение в заданных точках:

1) $f(x)=\ln\dfrac{5-4x^2}{3+7x^2}$, $x_0=3$; 2) $f(x)=\ln\dfrac{(1+x^2)\cdot(1-2x)^3}{(x^2-5)^2}$;

3) $f(x)=x\cdot\ln x$, $x=1$, $x=1x=e$, $x=\dfrac{1}{e}$, $x=\dfrac{1}{e^2}$;

4) $f(x)=\sqrt[8]{x^3}-4x^6+5\ln x-7\cos x+tg\left(3x^2+2\right)+ctg6x$;

5) $f(x)=\ln^2(1-\cos x)$; 6) $f(x)=\dfrac{3^x(\sin x+\cos x\cdot\ln 3)}{1+\ln^2 3}$;

7) $f(x)=\ln\sin 3-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$; 8) $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{thx}\right)$.

33. Найти первую производную и дифференциал функции

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sin x}+\left(1+x^2\right)\cdot ctgx.$$

34. Найти $f'(0)$ и $df(0)$, если $f(x)=\dfrac{1-10^x}{1+10^x}$.

35. Найти $f'(x)$ и $df(x)$, если $f(x)=\ln\left(5e^x+7\right)$.

36. Пусть функции f и g, определённые на одном и том же множестве $M \subset R$, n-раз дифференцируемы на этом множестве. Показать, что сумма и произведение этих функций также n-раз дифференцируемы на M .

37. Найти производные указанных порядков для данных функций:

1) $f(x) = \ln(2x-3),\ f''(x) = ?$;

2) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x,\ f'''(x) = ?$;

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3},\ f'''(x) = ?$;

4) $f(x) = \ln(3x+1),\ f'''(x) = ?$;

5) $f(x) = 3^{2x+1},\ f'''(x) = ?$;

6) $f(x) = x^2 \cdot \sin x,\ f^{(3)} = ?$.

38. Найти производные и дифференциалы указанных порядков:

1) $f(x) = \cos^2 x,\ f''(x) = ?, d^2 f(x) = ?$;

2) $f(x) = e^x \cos x,\ f^{(3)}(x) = ?, d^{(3)} f(x) = ?$.

30. Проверить справедливость теоремы Ферма для функции $f(x) = 3x^2 - 1$ на промежутке $[1, 2]$.

40. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = x$ на промежутке $[0, 1]$.

41. Проверить справедливость первой теоремы о среднем для функции $f(x) = 2x - x^2$ на промежутке $[1, 3]$. Найти точку ξ, удовлетворяющую условию $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

42. Раскрыть неопределённости по правилам Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = [\infty - \infty]$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

43. Найти неопределённые интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных:

1) $\int\left(x^6-6x^5+40x^3-24x^2\right)dx$; 2) $\int\sqrt[3]{x^2}\left(8\sqrt[3]{x}-1\right)dx$;

3) $\int\dfrac{\left(4-3\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx$; 4) $\int\dfrac{x+2}{x+3}dx$; 5) $\int\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k\right)dx$;

6) $\int\left(2x^2+1\right)^3dx$; 7) $\int\left(1+\sqrt{x}\right)^4dx$; 8) $\int\dfrac{(x+1)\cdot\left(x^2-3\right)}{3x^2}dx$;

9) $\int\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$; 10) $\int\left(5^x-1\right)\left(5^{-x}+1\right)dx$;

11) $\int\dfrac{x^2+3}{x^2+1}dx$; 12) $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$; 13) $\int\dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{\cos 4x}dx$;

14) $\int\dfrac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 15) $\int\dfrac{dx}{2+3x^2}dx$.

44. Найти неопределённые интегралы методом подведения под дифференциал:

1) $\int\dfrac{dx}{ax+b}$, где a,b – постоянные;

2) $I=\int\dfrac{xdx}{1+x^2}$;

3) $\int\sqrt{x+3}dx$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=x+3$);

4) $I=\int\dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=e^x$);

5) $\int\dfrac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^4}dx$; 6) $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

7) $\int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x}dx$; 8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

9) $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^3}dx$; 10) $\int \frac{\sin 2x-\cos x}{\left(\cos^2 x+\sin x\right)^2}dx$.

45. Найти неопределённые интегралы методом подстановки:

1) $\int x\cdot e^{x^2}dx$ (***Указание:*** использовать подстановку $t=x^2$);

2) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$; 3) $\int (12x-5)^7 dx$; 4) $\int e^{4-3x}dx$;

5) $\int 6^{5x+2}dx$; 6) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}}dx$; 7) $\int \frac{e^x dx}{2e^x+7}$; 8) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

9) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x}dx$; 10) $\int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}}dx$; 11) $\int \sin x\cos^2 x dx$;

12) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$; 13) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}dx$;

14) $\int \frac{\sqrt{5tgx}}{\cos^2 x}dx$; 15) $\int e^{4\cos x-1}\sin x dx$.

46. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям:

1) $\int x^2\cdot\cos x dx$; 2) $\int x^2\cdot\sin x dx$; 3) $\int x\cdot e^x dx$;

4) $\int \left(x^2+2x+3\right)\cdot\cos x dx$; 5) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int e^{2x}\cos x dx$;

7) $\int x^2 e^x dx$; 8) $\int x\ln x dx$.

47. Найти определённый интеграл:

1) $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx$; 2) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; 3) $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$;

4) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^3}dx$; 5) $\int_1^e \frac{1+\ln^3 x}{x}dx$; 6) $\int_{-2}^{5} \sqrt[3]{5x+2}dx$;

7) $\int\limits_{0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x} dx$; 8) $\int\limits_0^{0,5} e^{\sin \pi x} \cos \pi x dx$; 9) $\int\limits_0^1 x e^{-x} dx$;

10) $\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$; 11) $\int\limits_0^{\pi} (\pi - x) \sin x dx$; 12) $\int\limits_{-1}^{0} (2x+3) e^{-x} dx$;

13) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$; 14) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\cos x} dx$; 15) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$; 16) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+tgx}{\sin 2x} dx$.

ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

РЯДЫ

Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций нескольких переменных

Предварительные сведения

Функция $f : R^n \to R^1$ называется дифференцируемой в области $\Omega \subset R^n$, если выполняется следующее условие:

$$\left(\forall \vec{x}_0 \in \Omega\right) \left(\exists U\left(\vec{x}_0\right) \subset \Omega\right) : \left(\forall \vec{x} \in U\left(\vec{x}_0\right)\right)$$

$$f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^k}\left(\vec{x}_0\right) \cdot \Delta x^k + o\left(\left\|\Delta \vec{x}\right\|\right).$$

Здесь

$$\Delta \vec{x} = \sum_{k=1}^{m} \left(x^k - x_0^k\right) \vec{e}_k \equiv \sum_{k=1}^{m} \Delta x^k \vec{e}_k ,$$

$$\lim_{\left\|\Delta \vec{x}\right\| \to 0} \frac{o\left(\left\|\Delta \vec{x}\right\|\right)}{\left\|\Delta \vec{x}\right\|} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}_0\right) \equiv$$

$$\equiv \lim_{\Delta x^k \to 0} \frac{f\left(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}\ x^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^m\right) - f\left(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}\ x_0^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^m\right)}{\Delta x^k} -$$

частная производная по переменной x^k первого порядка.

Частные производные функции нескольких переменных высших порядков находятся посредством рекуррентной формулы:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}\left(\vec{x}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\right); \ \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}\left(\vec{x}\right).$$

Вторая формула даёт выражение для смешанной частной производной второго порядка.

Справедлива следующая теорема.

Пусть $f : M \to f(M)$ ($M \subset R^n$ и $f(M) \subset R^1$) – некоторая дифференцируемая в окрестности $U\left(\vec{x}_0\right) \subset M$ точки $\vec{x}_0 \in M$ функция. Тогда, если в окрестности $U\left(\vec{x}_0\right)$ существуют (смешанные) частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}\left(\vec{x}\right), \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}\left(\vec{x}\right),$$

непрерывные в точке $\vec{x}_0$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}\left(\vec{x}_0\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}\left(\vec{x}_0\right).$$

Теорема обобщается и на смешанные производные любого порядка, вычисленные одинаковое число раз по одним и тем же переменным, даже в разном порядке.

Высшие дифференциалы определяются аналогично высшим производным посредством рекуррентной формулы следующего вида

$$d^n f\left(\vec{x}\right) \stackrel{def}{=} d\left(d^{n-1} f\left(\vec{x}\right)\right).$$

Так, например, второй дифференциал функции $f : M \to f(M)$ в точке $\vec{x} \in M \subset R^n$ вычисляется по формуле:

$$d^2 f\left(\vec{x}\right) = d\left(df\left(\vec{x}\right)\right) = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}\right) dx_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}\right) dx_k\right) dx_j.$$

Примеры с решением

Пример 4.1.1. Используя определение, найти первые частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$z(x, y) = x^2 y + 4x - 2y + 5,$$

в точке $M_0(5;1)$.

Р е ш е н и е. Для частной производной по переменной x имеем по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Фиксируя значение $y = y_0$, находим сужение функции $z(x, y)$ на прямую линию $y = y_0$, параллельную оси Ox. На этой прямой сужение

$$z(x, y_0) = y_0 x^2 + 4x - 2y_0 + 5$$

функции $z(x, y)$ является функцией одной переменной x. Используем схему нахождения производной функции одного переменного для сужения $z(x, y_0)$.

1) Придавая переменной x приращение Δx в точке $(x_0; y_0)$, получим:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0) = x_0^2 y_0 + 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 +$$
$$+ 4x_0 + 4 \cdot \Delta x - 2y_0 + 5.$$

2) Находим приращение функции $z(x, y_0)$ в точке $(x_0; y_0)$, придавая переменной x приращение Δx:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4 \cdot \Delta x.$$

3) Находим предел конечно-разностного отношения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 y_0 + 4.$$

4) Подставляя координаты точки $(x_0; y_0) = (5;1)$, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(5,1)=\left(2x_0y_0+4\right)\Big|_{\substack{x_0=5\\ y_0=1}}=14.$$

Аналогично находим частную производную в точке $(x_0;\, y_0)=(5;1)$ по второй переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(5,1)=\left(x_0^2-2\right)\Big|_{\substack{x_0=5\\ y_0=1}}=23.\ \otimes$$

Пример 4.1.2. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\, y)=x^3+3x^2y-y^3.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменные и используя формулу вычисления производной степенной функции, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, y)=3x^2+6xy\,;\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,\, y)=3x^2-3y^2.\ \otimes$$

Пример 4.1.3. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\, y)=\frac{xy}{x+y}.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменные и используя формулы вычисления производной частного и произведения двух функций, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{y^2}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\, y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{x^2}{(x+y)^2}.\ \otimes$$

Пример 4.1.4. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\, y)=(1-x)^{y^2}.$$

Р е ш е н и е. Для вычисления частной производной по переменной x фиксируем переменную y и используем формулу для производной степенной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, y) = -y^2(1-x)^{y^2-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной y фиксируем переменную x и используем формулу $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\, y) = 2y\cdot(1-x)^{y^2}\cdot\ln(1-x). \otimes$$

Пример 4.1.5. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\, y) = x^3y^2 + 2x\ln y + x^y.$$

Р е ш е н и е. Используя таблицу производных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, y) = 3x^2y^2 + 2\ln y + yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\, y) = 2x^3y + \frac{2x}{y} + x^y\ln x. \otimes$$

Пример 4.1.6. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x,\, y) = (1+xy)^y.$$

Р е ш е н и е. Фиксируя переменную y и используя формулу дифференцирования степенной функции, для частной производной по переменной x получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, y) = y(1+xy)^{y-1}\cdot y = y^2(1+xy)^{y-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной y фиксируем переменную x и используем понятие логарифмической производной:

$$z = \ln u(x,\, y) = y\ln(1+xy) \to z'_y = \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \to$$

$$z' = \frac{u'}{u} \to \frac{\partial u}{\partial y}(x,\, y) = (1+xy)^y\cdot\ln(1+xy) + (1+xy)^y\,\frac{xy}{1+xy} =$$

$$=\left(1+xy\right)^{y}\left[\ln\left(1+xy\right)+\frac{x\cdot y}{\left(1+xy\right)}\right].\otimes$$

Пример 4.1.7. Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных, заданной формулой

$$u\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

в точке $M_0\left(1;-1;-2\right)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных используем таблицу производных и правила дифференцирования функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{1}{2}\frac{2x_1}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x_1}{\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{1}{2}\frac{2x_2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x_2}{\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}=-\frac{1}{2}\frac{2x_3}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x_3}{\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(1;-1;-2\right)=-\frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(1;-1;-2\right)=\frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}\left(1;-1;-2\right)=-\frac{2}{\sqrt{216}}.\otimes$$

Пример 4.1.8. Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)=\exp\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\equiv e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

в точке $M\left(0;\,1;\,2\right)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных, используя таблицу производных и правила дифференцирования функций, дифференцируем сужения функции на отрезки прямых, параллельных осям системы координат:

1) $$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)=\frac{\partial}{\partial x_1}e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=$$

$$=2x_1e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)=0;$$

2) $$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)=\frac{\partial}{\partial x_2}e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=$$

$$=2x_2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(M)=2e^5;$$

3) $$\frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)=\frac{\partial}{\partial x_3}e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=$$

$$=2x_3e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(M)=4e^5. \otimes$$

Пример 4.1.9. Показать, что функция, заданная формулой

$$z=\ln\left(x^2+y^2\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные функции в произвольной точке (x, y):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Подставляя в правую часть уравнения, получаем

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}=0. \otimes$$

Пример 4.1.10. Показать, что функция

$$u(x_1, x_2)=x_2\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{u}{x_2^2}.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2)=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)=x_2\frac{1}{x_1^2-x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2-x_2^2\right)=\frac{2x_1x_2}{x_1^2-x_2^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)=$$

$$=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)+x_2\frac{1}{x_1^2-x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2-x_2^2\right)=\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)-\frac{2x_2^2}{x_1^2-x_2^2}.$$

Полученные выражения подставим в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x_1}\frac{2x_1x_2}{x_1^2-x_2^2}+\frac{1}{x_2}\left[\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)-\frac{2x_2^2}{x_1^2-x_2^2}\right]=$$

$$=\frac{2x_2}{x_1^2-x_2^2}-\frac{2x_2}{x_1^2-x_2^2}+\frac{\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)}{x_2}=\frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}.$$

Таким образом, приходим к тождеству:

$$\frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}=\frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}.$$

То есть функция $u(x_1, x_2)=x_2\ln\left(x_1^2-x_2^2\right)$ удовлетворяет данному уравнению

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{u}{x_2^2}. \otimes$$

Пример 4.1.11. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных, заданной формулой:

$$u(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 6xy + 5.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 10xy^2 + 6y; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 10x^2y + 6x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 + 10y^2; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 10x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = 20xy + 6. \otimes$$

Пример 4.1.12. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x, y) = e^x \ln y.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \ln y; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \ln y; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{e^x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y}. \otimes$$

Пример 4.1.13. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных $u(x, y) = \sin(x + y)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos(x + y); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x + y); \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,\, y) = -\sin(x+y).\ \otimes$$

Пример 4.1.14. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x_1,\, x_2) = x_1^{x_2}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 x_1^{x_2 - 1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$$

2) Находим частные производные второго порядка, дифференцируя частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = x_2(x_2 - 1)x_1^{x_2 - 2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = x_1^{x_2 - 1} + x_2 x_1^{x_2 - 1} \ln x_1 = x_1^{x_2 - 1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = x_2 x_1^{x_2 - 1} \ln x_1 + x_1^{x_2} \frac{1}{x_1} = x_1^{x_2 - 1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^{x_2} (\ln x_1)^2.\ \otimes$$

Пример 4.1.15. Вычислить полный дифференциал функции двух переменных, заданной формулой

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точке $M_0(1; -1)$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные функции:

1) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

3) $dz\left(1,-1\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}dx + \dfrac{\sqrt{2}}{4}dy$. ⊗

Пример 4.1.16. Вычислить приближённо $\left(0{,}98\right)^{2{,}01}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $z = x^y$. В точке $\left(1;\ 2\right)$ значение функции $z\left(1;\ 2\right) = 1$. Вычислим значение функции в точке $\left(0{,}98;\ 2{,}01\right)$. Имеем $\Delta x = -0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Находим частные производные функции $z = x^y$ в точке $\left(1;\ 2\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 0.$$

Получаем:

$$\left(0{,}98\right)^{2{,}01} = z\left(1;\ 2\right) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}} \cdot \Delta y = 1 - 0{,}04 = 0{,}96.$$ ⊗

Пример 4.1.17. Найти дифференциал функции

$$f = f\left(x+y^2,\ y+x^2\right)$$

в точке $M\left(-1;1\right)$.

Р е ш е н и е. Обозначим, например,

$$u = x + y^2,\ v = y + x^2.$$

Для нахождения дифференциала используем формулу дифференциала и правило нахождения производной композиции функций:

$$df(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M)=\frac{\partial f}{\partial u}(0;\,2)-\frac{\partial f}{\partial v}(0;\,2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M)=\frac{\partial f}{\partial u}(0;\,2)+\frac{\partial f}{\partial v}(0;\,2).$$

Подставляя в выражение для полного дифференциала, получаем:

$$df(M)=\frac{\partial f}{\partial x}(M)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(M)dy=$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial u}(0;\,2)-2\frac{\partial f}{\partial v}(0;\,2)\right]dx+\left[2\frac{\partial f}{\partial u}(0;\,2)+\frac{\partial f}{\partial v}(0;\,2)\right]dy.\ \otimes$$

Пример 4.1.18. Найти дифференциал второго порядка функции

$$f=f(x+y,\,xy).$$

Р е ш е н и е. Обозначим $u=x+y$, $v=xy$. Теперь находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}(x+y,\,xy)+\frac{\partial f}{\partial v}(x+y,\,xy)\cdot y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial f}{\partial u}(x+y,\,xy)+\frac{\partial f}{\partial v}(x+y,\,xy)\cdot x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot x+\frac{\partial^{f\,2}}{\partial u\partial v}\cdot y+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot xy+\frac{\partial f}{\partial v}=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^{f2}}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot x+\frac{\partial^{f2}}{\partial u\partial v}\cdot x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot x^2=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^{f2}}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \otimes$$

Пусть функция $u= f(x, y)$ задана ***параметрическим способом***, то есть, с помощью формул

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t).$$

Тогда функция u является функцией одного переменного t:

$$u= f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Пусть функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ дифференцируемы в некоторой точке t, то есть, существуют производные

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}(t),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}=\frac{d\psi}{dt}(t).$$

Если функция $u= f(x, y)$ дифференцируема, то придавая переменной t приращение Δt, видим, что все функции получат соответствующие приращения Δx, Δy и Δu, причём по определению дифференцируемости

$$\Delta u= f(x+\Delta x, y+\Delta y)- f(x, y)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

где $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha= \lim\limits_{\Delta t\to 0}\beta=0$. Из последнего равенства вытекает, что

$$\frac{du}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}\right\}=$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Итак, имеем формулу:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если $x = \varphi(t, s)$ и $y = \psi(t, s)$, то имеем две формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Пример 4.1.19. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z = x^3 - x^2 y,\ x = 1 - t^2,\ y = t^4.$$

Р е ш е н и е. Находим непосредственно:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(3x^2 - 2xy\right)2t + \left(-x^2\right)4t^3 =$$

$$= 4t^7 + 2t^6 + 8t^5 + 4t^4 - 4t^3 - 12t^2 + 2t. \otimes$$

Пример 4.1.20. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u = \ln\frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sin\left(x_1 + x_2 + x_3\right),$$

$$x_1 = a\sin t,\ x_2 = b\cos t,\ x_3 = ce^{-kt},$$

где a, b, c, k – некоторые постоянные.

Пример 4.1.21. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s}$ для функции $z = x^3 e^y$, если

$$x = ts,\ y = t^2 - s^2.$$

Р е ш е н и е.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}=e^{t^2-s^2}t^2s^3\left(3+2t^2\right).$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}=e^{t^2-s^2}t^3s^2\left(3-2s^2\right).\otimes$

Пусть функция $y=f(x)$ ***задана неявно посредством уравнения***

$$F(x,\, y)=0,$$

тогда её производная находится с использованием правила дифференцирования сложной функции путём прямого дифференцирования уравнения, определяющего функцию:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\, y)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\, y)\frac{dy}{dx}=0,$$

где учтено, что $\dfrac{dx}{dx}=1$. Если $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\, y)\neq 0$, то получаем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\, y)}.$$

Пусть теперь уравнение

$$F(x,\, y,\, u)=0$$

задаёт функцию двух переменных $u=\varphi(x,\, y)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}.$$

Пример 4.1.22. Найти частные производные функции $z=z(x,\, y)$, заданной неявно уравнением

$$x^2+y^2+z^2+2xy-4y-1=0.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$F(x,\, y,\, z)=x^2+y^2+z^2+2xy-4y-1,$$

следовательно, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2y;\ \frac{\partial F}{\partial y}=2x+2y-4;\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z.$$

Используя формулы дифференцирования неявно заданной функции, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{x+y}{z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{2-x-y}{z}.\ \otimes$$

Практическое занятие 2. Исследование функции нескольких переменных

Предварительные сведения

Пусть $f: M \to f(M)$ – некоторая функция n переменных, дифференцируемая в области $M \subset R^n$, а N_0 и N – точки множества её определения. Тогда **производной по направлению** вектора $\overrightarrow{N_0N}=t\vec{h}$, где $t \in R^+ \bigcup \{0\}$, в точке N_0 (с радиус-вектором $\vec{x}_0$) функции f называется правый предел

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(\vec{x}_0\right)\overset{def}{=}\lim_{t\to 0+0}\frac{f\left(\vec{x}_0+t\vec{h}\right)-f\left(\vec{x}_0\right)}{t}.$$

Градиентом функции $f: M \to f(M)$ **в точке** $\vec{x}_0 \in M$ называется вектор, имеющий в каноническом базисе пространства R^n координаты $\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}_0\right)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, то есть вектор

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f\left(\vec{x}_0\right)\equiv\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{x}_0\right)\vec{e}_k.$$

Связь производной по направлению и градиента даётся формулой:

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(\vec{x}_0\right)=\left(\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right),\vec{h}\right)=\left\|\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right)\right\|\cdot\left\|\vec{h}\right\|\cdot\cos\left\{\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right),\overrightarrow{N_0N}\right\}=$$

$$=\left\|\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right)\right\|\cdot\cos\left\{\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right),\overrightarrow{N_0N}\right\}.$$

Внутренняя точка $\vec{x}_0 \in M$ называется **точкой локального минимума** (**точкой локального максимума**) функции f, если существует окрестность $U\left(\vec{x}_0\right)$ такая, что $\left(\forall \vec{x} \in U\left(\vec{x}_0\right)\right)$ выполняется неравенство

$$f\left(\vec{x}_0\right) \le f\left(\vec{x}\right) \left(f\left(\vec{x}_0\right) \ge f\left(\vec{x}\right)\right).$$

Справедлива теорема, позволяющая исследовать на экстремум функцию двух переменных.

Пусть функция $f : M \to f(M), M \subset R^2, f(M) \subset R^1$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in M$ и удовлетворяет условию

$$\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right) = \vec{0}.$$

Составим определитель следующего вида

$$D\left(\vec{x}_0\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\vec{x}_0\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\vec{x}_0\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\vec{x}_0\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\vec{x}_0\right) \end{vmatrix}.$$

Тогда в точке $\vec{x}_0$ функция f:

1) имеет локальный минимум, если $D\left(\vec{x}_0\right) > 0$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\vec{x}_0\right) > 0$;

2) имеет локальный максимум, если $D\left(\vec{x}_0\right) > 0$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\vec{x}_0\right) < 0$;

3) не имеет экстремума, если $D\left(\vec{x}_0\right) < 0$.

Примеры с решением

Пример 4.2.1. Найти $\vec{grad}\, f$ и $\left\|\vec{grad}\, f\right\|$ для функции, определённой формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

в точке $M_0(1; -1; 2)$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные и их значение в указанной точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2z;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 2) = 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 2) = -2,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 2) = -4.$$

Теперь имеем:

$$\overrightarrow{grad}\ f\left(M_0\right) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,$$

$$\left\|\overrightarrow{grad}\ f\right\| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}.\ \otimes$$

Пример 4.2.2. Найти производную функции, заданной формулой

$$u(x, y, z) = x^2 - 2xz + y^2$$

в точке $M_0(1; 2; -1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(2; 4; -3)$.

Р е ш е н и е. Находим вектор

$$\overrightarrow{M_0M} : \overrightarrow{M_0M} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Далее, находим градиент функции в произвольной точке и в точке $M_0(1; 2; -1)$:

$$\overrightarrow{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_3 = (2x - 2z)\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 - 2x\vec{e}_3,$$

$$\overrightarrow{grad}\,u\left(M_0\right) = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Находим производную по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_0M}}(M_0)=\frac{\left(\overrightarrow{grad}\,u\Big|_M,\ \overrightarrow{M_0M}\right)}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|}=\frac{4\cdot 1+4\cdot 2+(-2)\cdot(-2)}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$=\frac{4+8+4}{\sqrt{9}}=\frac{16}{3}.\ \otimes$$

Пример 4.2.3. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой: $z(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-3y$.

Р е ш е н и е. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=2, \\ x+2y=3. \end{cases}$$

Решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3>0.$$

Точка $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ является точкой экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)>0,$$

то точка $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{7}{3}. \otimes$$

Пример 4.2.4. Исследовать на экстремуму функцию, заданную формулой:

$$z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{2}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 16, \\ x + 3y = 16. \end{cases}$$

Эта СЛАУ имеет решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/7 \\ 32/7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Точка $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$ является точкой локального экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) > 0,$$

то точка $M_0\left(\frac{16}{7};\frac{32}{7}\right)$ является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$z(M_0)\approx 36{,}6$. ⊗

Практическое занятие 3. Числовые ряды

Предварительные сведения

Пусть $(a_k)=a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_k,\, \ldots$ – некоторая последовательность действительных чисел $(a_k\in R,\, k=1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$. Сопоставим из элементов этой последовательности новую последовательность, определив её члены так:

$$s_1=a_1,$$
$$s_2=a_1+a_2,$$
$$s_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Формула для общего члена получившейся последовательности имеет, очевидно, вид

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \ \ (n=1,\, 2,\, 3,\, \ldots).$$

Последовательность (s_n) определяет **числовой ряд**

$$a_1+a_2+a_3+\ldots a_n+a_{n+1}+\ldots \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

и называется последовательностью частичных сумм числового ряда.

Бесконечный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется **сходящимся** (**расходящимся**), если сходится (расходится) последовательность его частичных сумм. Если ряд сходится, то его **суммой** называется число

$$S\overset{def}{=}\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k .$$

Необходимое условие сходимости числового ряда даётся следующей теоремой.

Последовательность (a_k) членов сходящегося числового ряда сходится к нулю.

Геометрическая прогрессия $\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}$ при $|q|<1$ сходится к

$$S = \frac{1}{1-q},$$

а при $|q| \geq 1$ расходится.

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – два ряда с положительными членами.

Если для почти всех k выполняется неравенство $a_k \leq b_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **минорантой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – **мажорантой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Признак сравнения. Каждая миноранта сходящегося ряда сходится, а каждая мажоранта расходящегося ряда расходится.

Признак Даламбера. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд с положительными членами. Если существует такое число $q \in (0, 1)$, что для почти всех номеров k выполняется неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$, то ряд сходится. Если же для почти всех k выполняется неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, то ряд расходится.

Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k,$$

где (a_k) – последовательность положительных чисел, называется **знакочередующимся рядом**.

Знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

сходится в том и только в том случае, если последовательность из абсолютных величин его членов монотонно убывает и сходится к нулю.

Примеры с решением

Пример 4.3.1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots.$$

Р е ш е н и е. Общий член ряда равен

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, для последовательности частичных сумм ряда имеем

$$s_n = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ldots = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Сумма ряда находится путём непосредственного предельного перехода:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

Пример 4.3.2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

Р е ш е н и е. Общий член ряда можно представить в виде:

$$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Записывая общий член последовательности частичных сумм ряда в виде

$$s_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$$

и переходя непосредственно к пределу, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\right] = \frac{1}{2}. \otimes$$

Пример 4.3.3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Имеем геометрическую прогрессию, которая в силу неравенства $q=\frac{1}{2}<1$ сходится и имеет сумму

$$S = \frac{1}{1-q} = 2. \otimes$$

Пример 4.3.4. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

Р е ш е н и е. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{0}{2}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. $\otimes$

Пример 4.3.5. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. $\otimes$

Пример 4.3.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

Р е ш е н и е. Для почти всех n выполняется неравенство

$$\frac{2^n}{1+2^{2n}}<\frac{2^n}{2^{2n}}=\frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ является минорантой ряда геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится, так как $q=\frac{1}{2}<1$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ по признаку сравнения сходится. $\otimes$

Пример 4.3.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}$.

Р е ш е н и е. Проверяем выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}=0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.

Общий член ряда удовлетворяет следующим условиям: $(\forall n\in N)$

$$-1\le\sin n\le 1;\ 1<2+\sin n<3;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}>0.$$

Имеем ряд с положительными членами, для которого можно применить признак сравнения.

Предположим, что ряд сходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1}<2n^{3/2}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}<\frac{2n^{3/2}}{n^2}=\frac{2}{n^{1/2}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{1/2}}$ является так называемым обобщённым гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^{\alpha}}$, который при $0<\alpha<1$ расходится. Поэтому предположение о сходимости исходного ряда подтвердить не удалось.

Предположим, что ряд расходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1}>\sqrt{n^3}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}\ge\frac{n^{3/2}}{3n^2}=\frac{1}{3n^{1/2}}.$$

Так как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^{1/2}}$ расходится, то и исходный ряд также расходится.

$\otimes$

Пример 4.3.8. Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Р е ш е н и е. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}, a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}.$$

Очевидно, что для всех n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Поэтому ряд сходится по признаку Даламбера. $\otimes$

Пример 4.3.9. Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Р е ш е н и е. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Очевидно, что для всех n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ по признаку Даламбера расходится. $\otimes$

Пример 4.3.10. Выяснить вопрос о сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Р е ш е н и е. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots.$$

Последовательность абсолютных величин членов ряда сходится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ по признаку Лейбница сходится. ⊗

Пример 4.3.11. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

суммой четырёх его первых членов.

Р е ш е н и е. Ряд сходится (см. предыдущую задачу). Ошибка, получающаяся при замене суммы ряда суммой четырёх его первых членов, меньше абсолютной величины пятого члена: $\Delta<0{,}2$. ⊗

Пример 4.3.12. Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

Р е ш е н и е. Ряд сходится (см. задачу 8.11). Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Вычисляем отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

Для всех n, очевидно, имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}<1.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно. ⊗

Пример 4.3.13. Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Р е ш е н и е. Ряд знакочередующийся, последовательность его членов монотонно убывает и сходится к нулю. Поэтому ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Сравнивая его с гармоническим рядом, замечаем, что для почти всех n (начиная с $n=2$) каждый член этого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то по признаку сравнения расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ не является абсолютно сходящимся, то есть сходится условно. $\otimes$

Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды

Предварительные сведения

Последовательность функций (f_n) называется сходящейся на множестве M **поточечно** (или **в обычном смысле**), если для **каждой точки** $x_0 \in M$ сходится числовая последовательность $(f_n(x_0))$.

Предельной функцией, или **пределом** $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ сходящейся поточечно последовательности функций (f_n), называется функция f, определённая на множестве M условием: $(\forall x_0 \in M)\ f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

Таким образом, для поточечно сходящейся функциональной последовательности неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется для каждой точки $(\forall x_0 \in M)$ и для своего ε, то есть $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$.

Функциональная последовательность (f_n) называется **равномерно сходящейся на множестве** M **к предельной функции** f, если для произвольного положительного числа ε и **для**

любой точки $x \in M$ найдётся такой номер n_0, что для всех $n \geq n_0$ выполняется условие $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$.

Таким образом, для равномерно сходящейся на множестве M функциональной последовательности неравенство

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

выполняется одновременно для всех $x \in M$ и, следовательно, $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_k : M \to f_k(M)$ называется **сходящимся на множестве** M **поточечно или в обычном смысле**, если на этом множестве поточечно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right).$$

Функция $f = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ называется **суммой ряда** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, и при этом пишут

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k .$$

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ называется **равномерно сходящимся на множестве** $M \subset R^1$, если на M равномерно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right).$$

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходящийся числовой ряд с неотрицательными членами, и пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, где $f_k : M \to f_k(M)$ – функциональный ряд. Тогда если $\left| f_k(x) \right| \leq a_k$ для всех точек $x \in M$ и для почти всех номеров $k \in N$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится на множестве M абсолютно и равномерно.

Функциональный ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ называется **степенным рядом с центром в точке** x_0. Числа a_k называются **коэффициентами** степенного ряда.

Первая теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

сходится в некоторой точке x_1, то он сходится абсолютно и равномерно во всякой точке x, удовлетворяющей условию $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

Кроме этого, для каждой такой точки x существуют такие числа $S > 0$, $0 < q < 1$, что для всех номеров k справедливо неравенство

$$|a_k| \cdot |x - x_0|^k \le Sq^k.$$

Причём, если $x \ne x_0$, $x_1 \ne x_0$ то $q = \dfrac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|}$, а число S от x не зависит.

Вторая теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

в точке x_1 не сходится абсолютно (например, расходится), то он расходится в каждой точке x, удовлетворяющей условию

$$|x - x_0| > |x_1 - x_0|.$$

Число

$$r = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

называется **радиусом сходимости**, а открытое множество $M_r = \{x : |x - x_0| < r\}$ – **множеством (интервалом) сходимости степенного ряда** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Примеры с решением

Пример 4.4.1. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\frac{4 - x}{7x + 2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4 - x}{7x + 2} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4 - x}{7x + 2} \right)^3 + \ldots + \frac{1}{2n - 1} \cdot \left(\frac{4 - x}{7x + 2} \right)^n + \ldots$$

в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Р е ш е н и е. 1) В точке $x_1 = 0$ имеем

$$2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^3 + \ldots + \frac{1}{2n - 1} \cdot 2^n + \ldots.$$

Это ряд с положительными членами. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{2^n}{2n - 1}; \; u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n + 1};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{2^n}=2\cdot\frac{2n-1}{2n+1}=2\cdot\frac{2n+1-2}{2n+1}=2\cdot\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)>1.$$

Поэтому в точке $x_1=0$ ряд расходится.

2) В точке $x_2=1$ имеем

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots.$$

Применяем признак Даламбера:

$$u_n=\frac{1}{3^n\cdot(2n-1)};\ u_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)\cdot 3^n}{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2n+1-2}{2n+1}=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<1.$$

Поэтому в точке $x_2=1$ ряд сходится. $\otimes$

Пример 4.4.2. Найти промежуток сходимости и сумму ряда

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-(n-1)x}+\ldots.$$

Р е ш е н и е. В точке $x=0$ не выполняется необходимый признак сходимости и ряд, очевидно, расходится. Рассмотрим промежутки $(-\infty,\,0)$ и $(0,\,\infty)$.

1) На промежутке $(-\infty,\,0)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}e^{-(n-1)x}=\lim_{n\to\infty}e^{(n-1)\cdot(-x)}=\{-x=t\}=\lim_{n\to\infty}e^{(n-1)t},$$

где $t\in(0,\infty)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n-1)t}\neq 0$. Снова не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд на промежутке $(-\infty,\,0)$ расходится.

2) На промежутке $(0,\,\infty)$ выполняется необходимый признак сходимости. Далее имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-nx}}{e^{-(n-1)x}}=\frac{e^{(n-1)x}}{e^{nx}}=e^{-x}=\frac{1}{e^x}.$$

На $(0,\,\infty)$ всегда $\frac{1}{e^x}<1$. Поэтому ряд сходится.

Перепишем ряд в виде:

$$1+\frac{1}{e^x}+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{e^x}\right)^n+\ldots.$$

Имеем геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{e^x}<1$. Поэтому сумма ряда равна

$$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x-1}.\ \otimes$$

Пример 4.4.3. Исследовать сходимость степенного ряда

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$a_n=\frac{1}{n},\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Ряд сходится в промежутке $-1<x<1$.

Если $x=1$, имеем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Если $x=-1$, то получаем ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots.$$

Это ряд Лейбница и, следовательно, он сходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $x\in[-1,1)$, который можно задать двойным неравенством $-1\le x<1$. $\otimes$

Пример 4.4.4. Исследовать сходимость ряда

$$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты ряда выражаются формулами:

$$a_n = \frac{1}{n^2};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, если

$$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3.$$

На левом конце промежутка сходимости $x = 1$ имеем ряд

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\dots.$$

Это знакочередующийся ряд Лейбница, который сходится, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

На правом конце промежутка сходимости $x = 3$ имеем ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots.$$

Этот ряд сходится, так как при $p > 1$ сходится ряд

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\dots,$$

что является табличным фактом.

Степенной ряд сходится для значений x, удовлетворяющих двойному неравенству $1 \le x \le 3$. $\otimes$

Пример 4.4.5. Исследовать сходимость ряда

$$1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\dots+n!(x-5)^n+\dots.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты ряда

$$a_n = n!;\ a_{n+1} = (n+1)!.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится только при $x-5=0$, то есть в точке $x = 5$. $\otimes$

Пример 4.4.6. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}$ сходится равномерно на промежутке $(-\infty,\,\infty)$.

Р е ш е н и е. Выпишем несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}=-\frac{1}{x^4+1^2}+\frac{2}{x^4+2^2}-\frac{3}{x^4+3^2}+\ldots.$$

Имеем знакочередующийся ряд, причём

$$|u_1|=\frac{1}{x^4+1}>|u_2|=\frac{2}{x^4+4}>|u_3|=\frac{3}{x^4+9}>\ldots$$

Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{x^2}{n}\right)^2+1}=0.$$

Ряд сходится для любых $x\in(-\infty,\,\infty)$.

Для остатка ряда имеем

$$|r_n|=\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}\right|<|u_{m+1}|=\left|\frac{(-1)^{(m+1)}\cdot(m+1)}{x^4+(m+1)^2}\right|<\frac{1}{m+1},$$

так как $x^4>0$. Рассмотрим неравенство $\frac{1}{m+1}<\varepsilon$. Из этого неравенства получаем $m>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Если теперь мы выберем $m_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, то $(\forall m\geq m_0)$ получаем $|r_m|<\frac{1}{m+1}<\varepsilon$. Таким образом, ряд сходится на $(-\infty,\,\infty)$ независимо от x, то есть равномерно по $x\in(-\infty,\,\infty)$. $\otimes$

Ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}\frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

для бесконечно дифференцируемой функции $f: M \to f(M)$, вне зависимости от его сходимости и суммы, называется **рядом Тейлора** для этой функции. При $x_0 = 0$ ряд называется **рядом Маклорена**.

Пример 4.4.7. Разложить функцию

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}$$

по степеням x $(x_0 = 0)$ в ряд Тейлора.

Р е ш е н и е. Данную функцию разложим на элементарные дроби:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+2}.$$

Теперь можно использовать готовое табличное разложение

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\ t\in(-1,1).$$

Применяя это разложение, получаем:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n;$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}},\ x\in(-2,2).$$

Получаем разложение для исходной функции:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

Область сходимости данного ряда – пересечение указанных областей сходимости: $M=(-1,1)\cap(-2,2)=(-1,1)$. ⊗

Пример 4.4.8. Разложить в ряд Маклорена функцию, определённую формулой $f(x)=\sin^2 x$.

Р е ш е н и е. Вычисляем производные данной функции:

$$f^{(0)}(x) = \sin^2 x;$$

$$f^{(1)}(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(3)}(x) = -4 \cdot \sin 2x = 2^2 \cdot \sin\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(4)}(x) = -8 \cdot \cos 2x = 2^3 \cdot \sin\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right);$$

……………………………………………;

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot \sin\left[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n} \cdot \sin\left[2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

…………………………………………….

Вычисляем производные в точке $x = 0$:

$$f^{(0)}(0) = 0;$$

$$f^{(1)}(0) = 0;$$

$$f^{(2)}(0) = 2;$$

$$f^{(3)}(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(0) = 2^3;$$

$$f^{(5)}(0) = 0;$$

$$f^{(6)}(0) = 2^5;$$

………….

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}=\frac{2^n\cdot\sin\left(2\cdot\xi+\frac{n\cdot\pi}{2}\right)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot x)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\sin\left(2\cdot\xi+\frac{n\cdot\pi}{2}\right).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot x)^{n+1}}{(n+1)!}=0,\ \left|\sin\left(2\cdot\xi+\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right|\le 1,$$

получаем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$. Поэтому функция $f(x)=\sin^2 x$ может быть разложена в ряд Маклорена

$$\sin^2 x=\frac{2}{2!}\cdot x^2-\frac{2^3}{4!}\cdot x^4+\frac{2^5}{6!}\cdot x^6-\frac{2^7}{8!}\cdot x^8+\ldots$$

на любом промежутке $[-b,b]$. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти частные производные первого порядка функций, заданных формулами:

1) $u(x,\ y)=x^3\sin y+y^4$; 2) $u(x,\ y)=x^2\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$.

2. Найти частные производные в заданных точках:

1) $u(x,\ y)=\frac{1-xy}{1+xy}$, $A(0;1)$;

2) $u(x,\ y)=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$, $A(1;1)$;

3) $u(x,\ y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $A(\sqrt{2};1)$.

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

1) $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $u=\ln\left(x_1+\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$;

3) $u = \ln\sin(x_1 - 2x_2)$; 4) $u = x^2yz^4$; 5) $u = \ln(x^3 - y^3 + 2z^3)$.

4. Пусть функция задана формулой $f(x,\ y) = x^2\sin^2 y$. Вычислить $df(x_0,\ y_0)$ в точке $(x_0,\ y_0) = \left(-1;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Вычислить значения полных дифференциалов функций, заданных формулами:

1) $u = \dfrac{x_2}{x_2 - x_1}$, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ dx_1 = \dfrac{1}{2},\ dx_2 = -\dfrac{1}{3}$;

2) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 5,\ dx = -0{,}1,\ dy = 0{,}3,\ dz = 0{,}2.$$

6. Вычислить приближённое значение выражения $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$.

7. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = e^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = t^2$.

8. Найти $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}$, если $f = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$.

9. Функция задана уравнением $e^u = \cos x \cos y$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

28. Найти производную функции

$$u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$$

по направлению радиус-вектора точки $M(3;\ 4)$ в начале координат.

29. Найти производную функции, определённой формулой

$$u = \frac{x_1x_2x_3}{3},$$

в точке $M_0(1;\ 2;\ 3)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$, если $M(4;\ 1;\ 6)$.

30. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x,\ y) = 3x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2.$$

31. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right).$$

32*). Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой

$$z = x^2 + y^2$$

при условии, что $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 1.$

33*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой

$$f(x, y) = xy$$

в круге $x^2 + y^2 \le 1.$

34. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:

1) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots$; 2) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots$;

3) $1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{n^2 + 5n + 6}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n^2 - 5n + 6}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{30}{25n^2 + 5n - 6}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{90}{4n^2 + 8n - 5}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{18}{n^2 + 3n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{9n^2 - 3n - 2}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{4n^2 - 1}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{16}{16n^2 - 8n - 3}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

35. Проверить, выполнение необходимого признака сходимости для рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n - 1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2 + 1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^3 + 1}}{n^2 (2 + \sin n)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

36. Исследовать сходимость ряда, используя признак сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot(1+2^n)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2+3}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\ln n}{n^3-2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+6}{n^3+5}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{n^4+3}{n^4+2}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{3^n+n}{7^n+2n}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(e^{\frac{1}{2n^3}}-1\right)$.

37. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n!)^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^5-1)}{n!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

38. Исследовать сходимость ряда, используя радикальный признак Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$.

39. Исследовать сходимость знакопеременного ряда и выяснить тип сходимости (абсолютная или условная):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-2}{3n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{n}{10^n}\right)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$.

40. Исследовать сходимость функциональных рядов в указанных точках:

1) $\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n+\ldots,$

$x=1,\ x=2,\ x=3;$

2) $\frac{1!}{1}\left(x^2-4x+6\right)+\frac{2!}{2^2}\left(x^2-4x+6\right)^2+\ldots+\frac{n!}{n^2}\left(x^2-4x+6\right)^n+\ldots,$

$x=1,\ x=2,\ x=3.$

41. Найти область сходимости функционального ряда

1) $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2\left(1+x^2\right)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2\left(1+x^2\right)^n}+\ldots;$

2) $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots;$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\left(x^2-6x+10\right)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\left(x^2-5x+9\right)^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n^2\left(x^2+3\right)^n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n\left(x^2-4x+8\right)^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n}{n^2\left(x^2-2x+6\right)^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n+\sqrt{n}\right)^x}$.

42. Найти радиус и промежуток сходимости степенного ряда:

1) $\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$;

2) $1+\dfrac{x^3}{10}+\dfrac{x^6}{10^2}+\ldots+\dfrac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}}+\ldots$;

3) $2x^5+\dfrac{4x^{10}}{3}+\dfrac{8x^{15}}{5}+\ldots+\dfrac{2^n x^{5n}}{2n-1}+\ldots$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n(n-1)/2}}{n!}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 9^n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{2n}}{4^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2+1}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^{2n-1}}{\left(2n^3+3n\right)4^n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}$.

43. Разложить данную функцию в ряд Тейлора в окрестности данной точки, или в ряд Маклорена в окрестности нуля;

1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{3+2x}$;

3) $f(x)=\sqrt[4]{16+x}$; 4) $f(x)=2^x$;

5) $f(x)=\cos^2 x$; 6) $f(x)=e^{-x^2}$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ по степеням $x-2$; 8) $f(x)=3^x$;

9) $f(x)=e^{-2x}$; 10) $f(x)=\sqrt{x+2}$.

ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практическое занятие 1. Базисные векторные поля

Предварительные сведения

Регулярной системой координат в области $D\subset E^n$ называется система гладких функций

$$\begin{cases} q^1=q^1\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right), \\ q^2=q^2\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q^n=q^n\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right), \end{cases},$$

задающих взаимно однозначное (биективное) отображение области $G\subset R^n$ на область $D\subset E^n$, и удовлетворяющих условию

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial q^1}{\partial x^1} & \ldots & \dfrac{\partial q^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial q^n}{\partial x^1} & \ldots & \dfrac{\partial q^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial q^1} & \ldots & \dfrac{\partial x^1}{\partial q^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial q^1} & \ldots & \dfrac{\partial x^n}{\partial q^n} \end{vmatrix}\neq 0$$

во всех точках области D.

Если радиус-вектор является функцией декартовых координат, то есть

$$\vec{x} = \vec{x}\left(x^1, x^2, x^3\right) = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^3} dx^3 \equiv dx^j \vec{e}_j.$$

Если радиус-вектор является функцией криволинейных координат, то есть

$$\vec{x} = \vec{x}\left(q^1, q^2, q^3\right) =$$

$$= x^1\left(q^1, q^2, q^3\right)\vec{e}_1 + x^2\left(q^1, q^2, q^3\right)\vec{e}_2 + x^3\left(q^1, q^2, q^3\right)\vec{e}_3,$$

или в скалярной форме

$$\begin{cases} x^1 = x^1\left(q^1, q^2, q^3\right), \\ x^2 = x^2\left(q^1, q^2, q^3\right), \\ x^3 = x^3\left(q^1, q^2, q^3\right), \end{cases}$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} dq^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^3} dq^3 \equiv dq^j \vec{g}_j,$$

где по определению введены новые векторы

$$\vec{g}_j \overset{def}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j},$$

которые зависят от криволинейных координат и являются, следовательно, не векторами, а **векторными полями**.

Можно показать, что векторные поля $\vec{g}_k$ при выполнении приведённого выше условия регулярности отображения, образуют базис пространства E^3. Эти поля называются **натуральными базисными векторными полями**.

Взаимные базисные векторные поля определяются по формуле

$$\vec{g}^i \overset{def}{=} \vec{\nabla} q^i,$$

или формулами

$$\vec{g}^i \overset{def}{=} g^{ij} \vec{g}_j,$$

где g^{ij} – некоторая, пока произвольная невырожденная симметрическая матрица.

Полярные координаты $\left\{q^1; q^2\right\} \equiv \left\{r; \varphi\right\}$ **на плоскости** R^2 задаются отображением

$$\hat{F}^{-1}: R^2\{r;\varphi\} \to R^2\{x^1; x^2\},$$
которое в координатной форме записи имеет вид
$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\varphi. \end{cases}$$
Координата r называется **полярным радиусом**, а координата φ – **полярным углом**. Якобиан этого преобразования равен:
$$\det\left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(r,\varphi)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Цилиндрические координаты в пространстве R^3 задаются отображением
$$\hat{F}^{-1}: R^3\{r;\varphi;h\} \to R^3\{x^1; x^2; x^3\},$$
которое в координатной форме записи имеет вид
$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\varphi, \\ \quad x^3 = h. \end{cases}$$
Здесь
$$D = \{\{r;\varphi;h\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty\}.$$
Якобиан преобразования
$$\det\left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r,\varphi,h)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Сферические координаты в пространстве R^3 задаются отображением
$$\hat{F}^{-1}: R^3\{r,\varphi,\theta\} \to R^3\{x^1, x^2, x^3\},$$
которое в координатной форме записи имеет вид (рисунок 1.3)
$$\begin{cases} x^1 = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ \quad x^3 = r\cos\theta. \end{cases}$$
Здесь

$$D = \left\{\{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta \le \pi\right\}.$$

Якобиан преобразования (1.35)

$$\det\left(\frac{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)}{\partial(r, \varphi, \theta)}\right) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\sin\theta.$$

Примеры с решением

Пример 5.1.1. Показать, что орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы координат соотношениями

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2,\ \vec{g}_{\langle\varphi\rangle} = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. В полярной системе координат связь между старыми (декартовыми) и новыми (полярными) координатами даётся обратным отображением

$$x^1 = r\cos\varphi,\ x^2 = r\sin\varphi. \qquad (2)$$

Следовательно, для радиус-вектора получаем

$$\vec{r} = r\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (3)$$

Воспользуемся формулами связи базисных векторных полей:

$$\vec{g}_j \overset{def}{=} \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\vec{e}_i = A^{i\cdot}_{\cdot j}\,\vec{e}_i. \qquad (4)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 = \cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (5)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\vec{g}_{\varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\cos\varphi)\cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\varphi)\cdot \vec{e}_2 =$$

$$= -r\sin\varphi\cdot \vec{e}_1 + r\cos\varphi\cdot \vec{e}_2. \qquad (6)$$

Так как

$$\left\|\vec{g}_r\right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_r, \vec{g}_r\right)} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

то базисное векторное поля $\vec{g}_r$ нормировано и, следовательно, имеем

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} \equiv \vec{g}_r = \cos\varphi\cdot \vec{e}_1 + \sin\varphi\cdot \vec{e}_2. \qquad (7)$$

Векторное поле $\vec{g}_{\varphi}$ не нормировано, а его норма

$$\left\|\vec{g}_{\varphi}\right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_{\varphi}, \vec{g}_{\varphi}\right)} = \sqrt{(-r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2} = r. \qquad (8)$$

Орт векторного поля $\vec{g}_{\varphi}$ равен

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} = \frac{1}{\left\|\vec{g}_{\varphi}\right\|}\vec{g}_{\varphi} = \frac{1}{r}\left(-r\sin\varphi\cdot \vec{e}_1 + r\cos\varphi\cdot \vec{e}_2\right) =$$

$$= -\sin\varphi\cdot \vec{e}_1 + \cos\varphi\cdot \vec{e}_2. \qquad (9)$$

Формулы (7) и (9) решают поставленную задачу. $\otimes$

Пример 5.1.2. В полярной системе координат закон движения точки задан уравнениями

$$x^1(t) = r(t)\cdot\cos\varphi(t),\ x^2(t) = r(t)\cdot\sin\varphi(t), \qquad (1)$$

где t – время. Найти скорость и ускорение точки в декартовых и полярных координатах.

Р е ш е н и е. Векторная параметризация движения имеет вид

$$\vec{r} = r\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\varphi\cdot\vec{e}_2. \qquad (2)$$

Вектор скорости

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{d}{dt}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cdot\cos\varphi + r\cdot\frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_1 +$$

$$+ \left(\frac{dr}{dt}\cdot\sin\varphi + r\cdot\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_2 =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cdot\cos\varphi - r\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_1 + \left(\frac{dr}{dt}\cdot\sin\varphi + r\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\vec{e}_2.$$

(3)

Найдём проекции вектора скорости на оси полярной системы координат. Для этого вычислим значения скалярных произведений вектора скорости и ортов полярной системы координат, найденных в предыдущей задаче (формулы (7) и (9)):

$$v_r \equiv \mathrm{Pr}_{\vec{e}_r}\vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle r\rangle}\right) =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\right)\cos\varphi + \left(\frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\right)\sin\varphi = \frac{dr}{dt},$$

(4)

$$v_\varphi \equiv \mathrm{Pr}_{\vec{e}_\varphi}\vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle\varphi\rangle}\right) =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\right)(-\sin\varphi) + \left(\frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\right)\cos\varphi =$$

$$= r\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (5)$$

Таким образом, вектор скорости в полярной системе координат имеет вид

$$\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{g}_{\langle r\rangle}+r\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}. \qquad (6)$$

Найдём разложение вектора ускорения по ортам полярной системы координат. Для этого используем формулы (7) и (9) из предыдущей задачи и формулу (6) из этой задачи:

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{g}_{\langle r\rangle}+\frac{dr}{dt}\frac{d\vec{g}_{\langle r\rangle}}{dt}+\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}+r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}}{dt};$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle r\rangle}}{dt}=-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1+\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2;$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}}{dt}=-\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2;$$

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{g}_{\langle r\rangle}+\frac{dr}{dt}\left(-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1+\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2\right)+$$

$$+\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}+$$

$$+r\frac{d\varphi}{dt}\left(-\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_1-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_2\right)=$$

$$=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{g}_{\langle r\rangle}+\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}.$$

Итак, в полярной системе координат для ускорения получаем следующее выражение:

$$\vec{w}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{g}_{\langle r\rangle}+\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}.\ \otimes \qquad (7)$$

Пример 5.1.3. Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$\begin{cases} r=t\cdot\sin 3t, \\ \varphi=t^3. \end{cases} \qquad (1)$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 1\,с$. Радиус дан в метрах.

Р е ш е н и е. 1) Полярные координаты точки в заданный момент времени:

$$r(1) = \sin 3 = 0{,}141;\ \varphi(1) = 1.$$

2) Дифференцируя уравнения движения (1) по времени, получаем:

$$\begin{cases} \dot{r} = \sin 3t + 3t\cos 3t, \\ \dot{\varphi} = 3t^2. \end{cases} \tag{2}$$

При $t = 1\,с$ имеем:

$$\dot{r}(1) = -2{,}829,\ \dot{\varphi}(1) = 3.$$

3) По формулам (4) и (5) предыдущей задачи находим компоненты скорости в полярных координатах:

$$v_r(1) = \dot{r}(1) = -2{,}829\,\frac{м}{с};\ v_\varphi(1) = r(1)\cdot\dot{\varphi}(1) = 0{,}423\,\frac{м}{с}.$$

4) Норма скорости:

$$v(1) = \sqrt{v_r^2(1) + v_\varphi^2(1)} = 2{,}860\,\frac{м}{с}.$$

5) Дифференцируя формулы связи полярных и декартовых координат по времени, находим компоненты скорости в декартовых координатах:

$$v^1 = \dot{x}^1 = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi;$$

$$v^2 = \dot{x}^2 = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi.$$

В заданный момент времени имеем:

$$v^1(1) = -1{,}883\,\frac{м}{с};\ v^2(1) = -2{,}148\,\frac{м}{с}.$$

Проверка правильности вычислений (норма вектора скорости в декартовых и полярных координатах должна быть одинаковой):

$$v = \sqrt{\left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2} = 2{,}85\,\frac{м}{с}.$$

6) Находим вторые производные, дифференцируя (2):

$$\ddot{r} = 6\cos 3t - 9t\sin 3t\,;\ \ddot{\varphi} = 6t\,.$$

При $t = 1$ имеем:

$$\ddot{r}(1) = -9{,}74;\ \ddot{\varphi}(1) = 6.$$

7) Находим компоненты ускорения в полярных координатах:

$$w_r(1) = \ddot{r}(1) - r(1)\dot{\varphi}^2(1) = -11{,}01\,\frac{м}{c^2}\,;$$

$$w_\varphi(1) = r(1)\ddot{\varphi}(1) + 2\dot{r}(1)\dot{\varphi}(1) = -16{,}128\,\frac{м}{c^2}\,.$$

8) Норма ускорения

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = 19{,}52\,\frac{м}{c^2}\,.$$

9) Компоненты ускорения в декартовых координатах находим двукратным дифференцированием формулы (2) по времени:

$$w^1 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\sin\varphi \equiv w_r\cos\varphi - w_\varphi\sin\varphi;$$

$$w^2 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\cos\varphi = w_r\sin\varphi + w_\varphi\cos\varphi\,.$$

При $t = 1$ имеем:

$$w^1(1) = 7{,}602;\ w^2(1) = -17{,}95.$$

Проверка:

$$w = \sqrt{\left(w^1\right)^2 + \left(w^2\right)^2} = 19{,}49\,.\ \otimes$$

Пример 5.1.4. Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$r = 22\cdot\frac{1 - \dfrac{t^2}{121}}{t};\ \ \varphi = \arccos\left(\frac{t}{11}\right).$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 9\ c$. Радиус дан в метрах.

Ответ:

r	$\dot{r}$	φ	$\dot{\varphi}$	v_r	v_φ	v	v^1	v^2
м	м/с	рад	рад/сек			м/с		
0,81	-0,45	0,61	-0,16	-0,45	-0,13	0,47	-0,3	-0,37

Пример 5.1.5. Выразить базисные векторные поля цилиндрической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Р е ш е н и е. Связь декартовых и цилиндрических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\varphi, \\ \quad x^3 = h, \end{cases} \det\left(\frac{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)}{\partial(r, \varphi, h)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

где для цилиндрических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \left\{\{r; \varphi; h\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty\right\}.$$

Для радиус-вектора имеем

$$\vec{r} = r\cos\varphi\,\vec{e}_1 + r\sin\varphi\,\vec{e}_2 + h\,\vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по цилиндрическим координатам и используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат

$$\vec{g}_j \overset{def}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial q^j}\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^j}\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^j}\vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1+\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2+\frac{\partial}{\partial r}h\cdot\vec{e}_3=\cos\varphi\cdot\vec{e}_1+\sin\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_r$

$$\left\|\vec{g}_r\right\|=\sqrt{\left(\vec{g}_r,\vec{g}_r\right)}=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1,$$

то базисное векторное поле $\vec{g}_r$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle r\rangle}\equiv\vec{g}_r.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\vec{g}_\varphi=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\varphi}\equiv\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial\varphi}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial\varphi}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial\varphi}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1+\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2+\frac{\partial}{\partial\varphi}h\cdot\vec{e}_3=$$

$$=-r\sin\varphi\cdot\vec{e}_1+r\cos\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_\varphi$

$$\left\|\vec{g}_\varphi\right\|=\sqrt{\left(\vec{g}_\varphi,\vec{g}_\varphi\right)}=\sqrt{(-r\sin\varphi)^2+(r\cos\varphi)^2}=r,$$

то поле $\vec{g}_\varphi$ ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle}=\frac{1}{\left\|\vec{g}_\varphi\right\|}\vec{g}_\varphi=\frac{1}{r}\left(-r\sin\varphi\cdot\vec{e}_1+r\cos\varphi\cdot\vec{e}_2\right)=$$

$$=-\sin\varphi\cdot\vec{e}_1+\cos\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_h$ имеем:

$$\vec{g}_h = \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial h} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial h} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial h}(r\cos\varphi)\cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial h}(r\sin\varphi)\cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial h} h\cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3.$$

Таким образом, базисное векторное поле $\vec{g}_h$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle h\rangle} = \vec{e}_3. \otimes$$

Пример 5.1.6. Выразить базисные векторные поля сферической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Р е ш е н и е. Связь декартовых и сферических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ x^2 = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ x^3 = r\cos\theta, \end{cases}$$

$$\det\left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, \theta)}\right) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\sin\theta,$$

где для сферических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \{\{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 < \theta \le \pi\}.$$

Радиус-вектор имеет вид:

$$\vec{r} = r\sin\theta\cdot\cos\varphi\,\vec{e}_1 + r\sin\theta\cdot\sin\varphi\,\vec{e}_2 + r\cos\theta\,\vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по сферическим координатам и снова используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат.

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)\cdot\vec{e}_3 =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_2 + \cos\theta\cdot\vec{e}_3.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_r\right\| = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + \cos^2\theta} = 1.$$

Поле нормированное. Следовательно, имеем:

$$\vec{g}_{\langle r\rangle} \equiv \vec{g}_r = \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_2 + \cos\theta\cdot\vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\vec{g}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\theta\cos\varphi)\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\theta\sin\varphi)\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\cos\theta)\cdot\vec{e}_3 =$$

$$= -r\sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_2.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_\varphi\right\| = \sqrt{(-r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\theta} = r\sin\theta.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\varphi\rangle} = \frac{1}{\left\|\vec{g}_\varphi\right\|}\vec{g}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\left(-r\sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{e}_1 + r\sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{e}_2\right) =$$

$$= -\sin\varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos\varphi \cdot \vec{e}_2.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\theta$ имеем:

$$\vec{g}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial \theta} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\cos\varphi)\cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\sin\varphi)\cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta)\cdot \vec{e}_3 =$$

$$= r\cos\theta\cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + r\cos\theta\sin\varphi \cdot \vec{e}_2 - r\sin\theta \cdot \vec{e}_3.$$

Норма поля

$$\left\|\vec{g}_\theta\right\| = \sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-r\sin\theta)^2} = r.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle\theta\rangle} = \frac{1}{\left\|\vec{g}_\theta\right\|}\vec{g}_\theta = \frac{1}{r}\left(r\cos\theta\cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + r\cos\theta\sin\varphi \cdot \vec{e}_2 - r\sin\theta \cdot \vec{e}_3\right) =$$

$$= \cos\theta\cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi \cdot \vec{e}_2 - \sin\theta \cdot \vec{e}_3. \otimes$$

Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления криволинейного интеграла первого рода по параметризованному замкнутому пути $\hat{W}(\overline{J}),\ \overline{J} = [\alpha, \beta]$

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3} w_k(t)\vec{e}_k$$

имеет вид:

$$\int\limits_{W_{\alpha,\beta}} f\left(\vec{x}(t)\right)dl \equiv \int\limits_{W_{\alpha,\beta}} f\left(x_1, x_2, x_3\right)dl = \int\limits_{W_{\alpha,\beta}} f\left(\vec{x}(t)\right)\left\|\frac{d\vec{x}}{dt}(t)\right\|dt =$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(w_1(t), w_2(t), w_3(t)\right)\cdot\sqrt{\left[\frac{dw_1(t)}{dt}\right]^2+\left[\frac{dw_2(t)}{dt}\right]^2+\left[\frac{dw_3(t)}{dt}\right]^2}dt.$$

В случае естественной параметризации

$$y = y(x),\ z = z(x),\ x \in \overline{J}$$

формула принимает вид

$$\int\limits_{L_{a,b}} f(x, y, z)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x), z(x))\cdot\sqrt{1+\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]^2+\left[\frac{dz(x)}{dx}\right]^2}dx,$$

где $a = x(\alpha),\ b = x(\beta)$/

Формула вычисления криволинейного интеграла второго рода для общего случая параметризации имеет вид:

$$\int\limits_{W_{\alpha,\beta}} F_1\left(\vec{x}(t)\right)dx^1 + F_2\left(\vec{x}(t)\right)dx^2 + F_3\left(\vec{x}(t)\right)dx^3 =$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[F_1\left(w_1(t), w_2(t), {}_3(t)\right)\frac{dw_1(t)}{dt} + F_2\left(w_1(t), w_2(t), {}_3(t)\right)\frac{dw_2(t)}{dt} + \right.$$

$$\left. + F_3\left(w_1(t), w_2(t), {}_3(t)\right)\frac{dw_3(t)}{dt}\right]dt.$$

Если путь задан естественной параметризацией

$$y = y(x),\ z = z(x),$$

то есть параметром является переменная x, формула переписывается так:

$$I_{W_{a,b}} = \int\limits_{W_{a,b}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\left[P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x))\frac{dy(x)}{dx} + R(x, y(x), z(x))\frac{dz(x)}{dx}\right]dx,$$

где

$$a = x(\alpha),\ b = x(\beta)$$

– пределы изменения переменной x и учтено, что $\dfrac{dx}{dx} = 1$. Аналогичные формулы можно записать и в тех случаях, когда в качестве параметра рассматривается переменная y или z.

Примеры с решением

Пример 6.2.1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_L (x+y)dl$$

по меньшей части окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$$

ограниченной точками $A(0,\,0,\,R)$, $B\left(\frac{R}{2},\,\frac{R}{2},\,\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.

Р е ш е н и е. Параметризация окружности:

$$x = t,\; y = t,\; z = \sqrt{R^2 - 2t^2}\,,\; 0 \le t \le \frac{R}{2},$$

$$\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}.$$

Используем формулу

$$\int_L f(x,\,y,\,z)dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t),\,y(t),\,z(t)\right)\cdot\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2}\,dt.$$

Получаем:

$$I = \int_L (x+y)dl = \int_0^{R/2} 2t\,\frac{\sqrt{2}Rdt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R^2\left(\sqrt{2} - 1\right). \otimes$$

Пример 6.2.2. Найти массу $1/4$ окружности

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = R^2,$$

если $\rho(x_1,\,x_2) = x_2$ и $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для случая плоского пути, заданного непрерывно дифференцируемой параметризацией. Параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x_1 = R\cos t, \\ x_2 = R\sin t. \end{cases}$$

Поэтому имеем:

$$M = \int_W \rho(x_1, x_2) dl =$$

$$= \int_0^{\pi/2} R\sin t \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin t dt = R^2. \otimes$$

Пример 6.2.3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x+y)dx - xdy,$$

где путь $W -$ отрезок прямой, соединяющий точки $M_0(0;\, 0)$ и $M_1(4;\, 2)$.

Р е ш е н и е. Используем формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода для случая плоского пути:

$$I_{W_{a,b}} = \int_{W_{a,b}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy =$$

$$= \int_a^b \left[P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x)) \frac{dy(x)}{dx} \right] dx.$$

Здесь

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \overrightarrow{M_0 M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

$$\overrightarrow{M_0 M} = t \cdot \overrightarrow{M_0 M_1},\ \begin{cases} x = 4t, \\ y = 2t, \end{cases}\ y = \frac{1}{2}x,\ x \in [0, 4].$$

Имеем:

$$\int_W (x+y)dx - xdy = \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x \right) dx = \int_0^4 xdx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = 8. \otimes$$

Пример 6.2.4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_W x^2 y dx + y^2 x dy$$

по пути с параметризацией $x = t,\ y = t^3,\ t \in [0, 1]$.

Р е ш е н и е. Используем формулу с естественной параметризацией для случая плоского пути:

$$\int\limits_{W_{\alpha,\,\beta}} F_1\left(\overrightarrow{x}\right)dx_1 + F_2\left(\overrightarrow{x}\right)dx_2 =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[F_1(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t))\frac{dx_1(t)}{dt} + F_2(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t))\frac{dx_2(t)}{dt}\right]dt$$

Получаем:

$$\int\limits_{W} x^2 y dx + y^2 x dy = \int\limits_0^1 \left(t^5 + 3t^9\right)dt = \left(\frac{t^6}{6} + 3\frac{t^{10}}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{15}. \otimes$$

Пример 6.2.5. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\hat{W}} \left(x_2{}^2 - x_3{}^2\right)dx_1 + 2x_2x_3dx_2 - x_1{}^2dx_3$$

по замкнутому пути с параметризацией $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$, начальной и конечными точками $M_0(0;\,0;\,0)$, $M_1(1;1;1)$ соответственно.

Р е ш е н и е. Для вычисления применим формулу:

$$I_{W_{a,\,b}} = \int\limits_{W_{a,\,b}} F_1\left(\overrightarrow{x}\right)dx_1 + F_2\left(\overrightarrow{x}\right)dx_2 + F_3\left(\overrightarrow{x}\right)dx_3 =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[F_1(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t))\frac{dx_1(t)}{dt} + F_2(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t))\frac{dx_2(t)}{dt} + \right.$$

$$\left. + F_3(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t))\frac{dx_3}{dt}(t)\right]dt.$$

Пределы изменения параметра $t \in [0,\,1]$, то есть $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Подстановка данных задачи даёт:

$$\int\limits_{\hat{W}} \left(x_2{}^2 - x_3{}^2\right)dx_1 + 2x_2x_3dx_2 - x_1{}^2dx_3 = \int\limits_0^1 \left[\left(t^4 - t^6\right) + 4t^6 - 3t^4\right]dt =$$

$$= \int_0^1 \left(3t^6 - 2t^4\right)dt = \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{35}. \ \otimes$$

Пример 6.2.6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_W (x+y)dx + (x-y)dy,$$

где W – окружность с уравнением $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Р е ш е н и е. Запишем параметризацию окружности:

$$\vec{x}(t) = (1+2\cos t)\vec{e}_1 + (1+2\sin t)\vec{e}_2,$$

$$0 \le t \le 2\pi.$$

Интеграл вычисляем, пользуясь формулой

$$\int_W F_1\left(\vec{x}\right)dx + F_2\left(\vec{x}\right)dy = \int_\alpha^\beta \left[F_1\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dx(t)}{dt} + F_2\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}\right]dt$$

и тем, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\sin t, \ \frac{dy(t)}{dt} = 2\cos t.$$

Имеем:

$$\oint_W (x+y)dx + (x-y)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(2+2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t - 2\sin t)2\cos t\right]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-4\sin t - 8\sin t \cdot \cos t + 4\cos 2t\right)dt = 0. \ \otimes$$

Практическое занятие 3. Кратные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

Пусть

$$P = \left\{(x;\, y) \subset R^2 : a \le x \le b;\, c \le y \le d\right\}$$

– замкнутый прямоугольник, $f: P \to R^1$ – непрерывная функция двух переменных x, y и

$$\iint\limits_P f(x, y)d\mu \equiv \iint\limits_P f(x, y)dxdy$$

– двойной интеграл от функции $f: P \to R^1$ по прямоугольнику P. Тогда, если для каждой точки $x \in [a, b]$ существует определённый интеграл

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy,$$

то существует и **повторный интеграл** от функции $f(x, y)$ вида

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right),$$

причём справедливо равенство:

$$\iint\limits_P f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right).$$

Таким образом, формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \iint\limits_P f(x, y)dxdy =$$

$$= \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right)dx \equiv \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d dy f(x, y)\right).$$

Формула вычисления тройного интеграла в декартовой системе координат через последовательное вычисление трёх (одномерных) определённых интегралов имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int\limits_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z)dz.$$

Формула вычисления двойного интеграла в криволинейной системе координат имеет следующий вид

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_2} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))\left|\det\left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)}\right)\right| d\xi d\eta,$$

где положено

$$\begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta), \\ y = \psi(\xi, \eta), \end{cases} \quad \left|\det\left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)}\right)\right| \equiv \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta} \end{pmatrix}\right|.$$

В частности, вычисление двойного интеграла в полярных координатах

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

производится по формуле

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdrd\varphi,$$

где якобиан

$$\det\left(\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \varphi)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах

$$x = r\cdot\cos\varphi,\ y = r\cdot\sin\varphi,\ z = z,\ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix},$$

где

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty,$$

имеет вид

$$\iiint\limits_{V} f(x,\ y,\ z)dxddz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)rdrd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} rdr \int\limits_{z_1}^{z_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)dz,$$

где якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Аналогично, Формула вычисления тройного интеграла в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix},$$

где

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$$

имеет вид

$$\iiint\limits_{V} f(x,\ y,\ z)dxdydz =$$

$$=\iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi dr =$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1}^{r_2} r^2 f(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta) dr.$$

Примеры с решением

Пример 6.3.1. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

Р е ш е н и е. Область интегрирования D ограничена линиями

$$x=-1,\ x=1,\ y=-\sqrt{1-x^2},\ y=1-x^2.$$

Первые две линии – вертикальные прямые линии, третья линия – нижняя полуокружность радиуса 1, четвёртая линия – парабола с вершиной в точке $(0;1)$, ветви параболы направлены вниз. Область D представим объединением двух областей: области D_1, ограниченной ветвями параболы $x=\pm\sqrt{1-y}$ и прямыми линиями $y=0$, $y=1$; области D_2, ограниченной линиями $x=\pm\sqrt{1-y^2}$, $y=-1$, $y=0$. Тогда имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}} f(x, y) dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \otimes$$

Пример 6.3.2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{D} x \ln y dx dy,$$

где $D=\{(x, y): 0\le x\le 4; 1\le y\le e\}$.

Р е ш е н и е. Так как область D является прямоугольником, то интеграл вычисляется непосредственно по формуле

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dx dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x, y) dy.$$

Имеем:

$$\iint\limits_D x\ln y dxdy = \int\limits_0^4 xdx\int\limits_1^e \ln y dy = \begin{cases} u = \ln y, & du = \dfrac{dy}{y}, \\ dv = dy, & v = y. \end{cases} =$$

$$= \int\limits_0^4 xdx\left\{ y\ln y\Big|_1^e - \int\limits_1^e dy \right\} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 \cdot \left\{ y\ln y\Big|_1^e - y\Big|_1^e \right\} = 8\cdot(e-e+1) = 8. \otimes$$

Пример 6.3.3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y = x,\ y = 2x,\ x = 2,\ x = 3.$

Р е ш е н и е. Область D ограничена, соответственно, слева – вертикальной прямой линией $x = 2$, справа – вертикальной прямой линией $x = 3$, сверху – прямой линией $y = 2x$, снизу – прямой линией $y = x$. Область простая относительно оси OY, следовательно, вычисляем интеграл по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy.$$

Имеем:

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_2^3 dx\int\limits_x^{2x}(x+2y)dy = \int\limits_2^3 dx\left(xy + y^2\right)\Big|_{y=x}^{y=2x} =$$

$$= \int\limits_2^3 \left(2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2\right)dx = 4\int\limits_2^3 x^2dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 = \frac{76}{3}. \otimes$$

Пример 6.3.4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = x^2.$

Р е ш е н и е. Пользуясь формулой вычисления двойного интеграла по простой области, получаем:

$$\iint\limits_D (2x-y)dxdy = \int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)dy = \int\limits_1^2 dx\left(2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{y=x^2} =$$

$$=\int_1^2\left(2x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{3}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{10}-\frac{x^3}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{9}{10}.\otimes$$

Пример 6.3.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$x=4y-y^2$, $x+y=6$.

Р е ш е н и е. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2-4y+x=0, \\ x+y=6, \end{cases}$$

находим точки пересечения линий: $A(4;\,2)$, $B(3;\,3)$. Поэтому площадь фигуры равна

$$S\equiv\mu(D)=\iint_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int_2^3\left(x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}\right)dy=$$

$$=\int_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right)\Bigg|_2^3=\frac{1}{6}.\otimes$$

Пример 6.3.6. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью

$$\sigma(x,\,y)=16x+\frac{9}{2}y^2$$

и ограниченной линиями с уравнениями

$$x=\frac{1}{4},\ y=0,\ y^2=16x,\ y\ge 0.$$

Р е ш е н и е. Так как

$$x=\frac{1}{16}y^2,$$

то $x\ge 0$. Поэтому область D можно задать неравенствами

$$0\le x\le\frac{1}{4},\ 0\le y\le 4\sqrt{x}.$$

Вычисляя двойной интеграл в декартовых координатах, получаем:

$$m(D)=\iint_D\sigma(x,\,y)dxdy=\iint_D\left(16x+\frac{9}{2}y^2\right)dxdy=$$

$$=\int_0^{1/4}dx\int_0^{4\sqrt{x}}\left(16x+\frac{9}{2}y^2\right)dy=\int_0^{1/4}\left(16xy+\frac{3}{2}y^3\right)\Bigg|_0^{4\sqrt{x}}dx=160\int_0^{1/4}x^{3/2}dx=2.\ \otimes$$

Пример 6.3.7. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

переходя к полярным координатам, где область D – 1-я четверть круга

$$x^2+y^2\le a^2.$$

Р е ш е н и е. Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то область в полярных координатах имеет вид

$$\Omega=\left\{(r;\varphi):0\le r\le a;\,0<\varphi\frac{\pi}{2}\right\}$$

и, применяя формулу перехода к полярной системе координат, получаем:

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_\Omega\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\,rdrd\varphi=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a r^2dr=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}r^3\Big|_0^a d\varphi=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi a^3}{6}.\ \otimes$$

Пример 6.3.8. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$, переходя к полярным координатам, если область D – кольцо, заключённое между окружностями $x^2+y^2=e^2$ и $x^2+y^2=e^4$.

Р е ш е н и е. Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\iint_D\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_\Omega\ln r^2 rdrd\varphi=2\iint_\Omega r\ln r drd\varphi=$$

$$=\left\{\Omega:0\le\varphi\le 2\pi;\,e\le r\le e^2\right\}=$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} r\ln r dr = \left\{ \begin{matrix} u = \ln r, & du = \frac{dr}{r}, \\ dv = rdr, & v = \frac{r^2}{2}. \end{matrix} \right\} =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{r^2}{2}\ln r \Bigg|_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} rdr \right\} = 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}e^2\left(3e^2 - 1\right) \right] d\varphi = \pi e^2\left(3e^2 - 1\right). \otimes$$

Пример 6.3.9. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 4.$$

Р е ш е н и е. Тело ограничено кругом на плоскости XOY с центром в начале системы координат, координатными плоскостями и плоскостью

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1.$$

Поэтому в полярных координатах имеем

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} (4 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)rdr = 16\int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) \right] d\varphi =$$

$$= 16\left[\varphi - \frac{\sqrt{2}}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi) \right] \Bigg|_0^{\pi/2} = 8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}. \otimes$$

Пример 6.3.10. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D xdxdy,$$

где область D ограничена линиями с уравнениями:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0;\ y^2 - 8y + x^2 = 0;\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x;\ x = 0.$$

Р е ш е н и е. Задаём область D неравенствами в декартовой системе координат, для чего выделяем полные квадраты в уравнениях окружностей:

$$(y-2)^2+x^2=4;\ (y-4)^2+x^2=16,$$

Центры обеих окружностей имеют координаты $(0;\,2)$ и $(0;\,4)$, а сами окружности касаются начала системы координат. Первая окружность имеет радиус 2 и лежит, следовательно, внутри второй окружности с радиусом 4. Область D лежит между окружностями и координаты её точек удовлетворяют неравенствам

$$(y-2)^2+x^2\ge 4;\ (y-4)^2+x^2\le 16.$$

Кроме этого, область D лежит между указанными прямыми линиями, проходящими через начало системы координат. Так как окружности лежат выше оси OX, то область D лежит над прямой линией $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ и справа от прямой линии $x=0$. Поэтому координаты точек области D удовлетворяют неравенствам

$$y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},\ x\ge 0.$$

Таким образом,

$$D=\left\{(x;\,y):\begin{array}{c}(y-2)^2+x^2\ge 4,\\ (y-4)^2+x^2\le 16,\\ y\ge\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x\ge 0.\end{array}\right.$$

Для вычисления используем полярную систему координат:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Формула вычисления двойного интеграла принимает вид

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy=\iint\limits_\Omega r\cos\varphi\, r\,dr\,d\varphi.$$

В неравенствах, определяющих область интегрирования, производим замену $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, получаем

$$\Omega = \left\{ (r;\varphi) : \begin{array}{l} (r\sin\varphi - 2)^2 + r^2\cos^2\varphi \ge 4, \\ (r\sin\varphi - 4)^2 + r^2\cos^2\varphi \le 16, \\ r\sin\varphi \ge \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}},\ r\cos\varphi \ge 0. \end{array} \right.$$

Решение этих неравенств относительно r и φ имеет вид

$$\Omega = \left\{ (r;\varphi) : \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 4\sin\varphi \le r \le 8\sin\varphi. \end{array} \right.$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega r\cos\varphi\, r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r^2 dr,$$

Интегрируя последовательно, получаем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r^2 dr = 35. \otimes$$

Пример 6.3.11. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V (x - 2y + z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область V – параллелепипед, заданный неравенствами

$$-1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 1.$$

Р е ш е н и е. Используя формулу (1.50)

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int\limits_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

получаем:

$$I = \iiint\limits_V (x - 2y + z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^1 (x - 2y + z)\,dz = -18. \otimes$$

Пример 6.3.12. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz,$$

где область V – пирамида, ограниченная плоскостями

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=2.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение плоскости

$$z=2-x-y,$$

«ограничивающей пирамиду» сверху, в отрезках

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1.$$

Теперь можем изобразить пирамиду (рисунок 3.1).

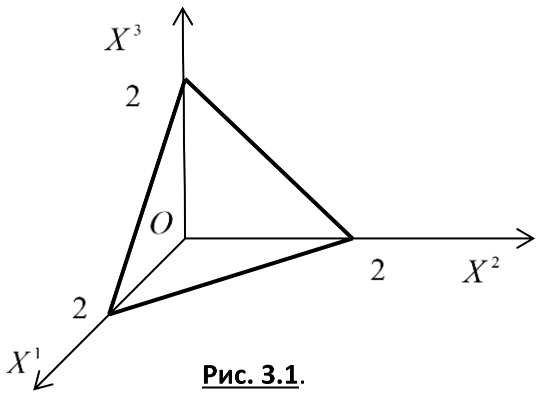


Рис. 3.1.

Применяем для решения формулу

$$\iiint\limits_V f(x,\,y,\,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int\limits_{z=u_1(x,\,y)}^{z=u_2(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)dz,$$

расставляя пределы в соответствии с условиями задачи:

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} \left[x\cdot z + y\cdot z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-y} dy = \int\limits_0^2 \left[2y - x\cdot\frac{y^2}{2} - y\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{2-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{8}{3} - 2x + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left[\frac{8}{3}x - x^2 + \frac{x^4}{24} \right]_0^2 = 2.\ \otimes$$

Пример 6.3.13. Найти объём кругового цилиндра высоты H с радиусом основания R.

Р е ш е н и е. Формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрической системе координат имеет вид:

цилиндрических координатах:

$$V_V = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^H dz = \pi R^2 H\ . \otimes$$

Пример 6.3.14. Найти объём шара радиуса R.

Р е ш е н и е. Для вычисления объёма шара используем формулу вычисления тройного интеграла в сферических координатах. Учитывая, что

$$f(x, y, z) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \equiv 1,$$

получаем:

$$V_V = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3\ . \otimes$$

Пример 6.3.15. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V \frac{x^2}{x^2+y^2} dxdydz,$$

где область V ограничена поверхностями

$z = \frac{9}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ (конус),

$z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2$ (эллиптический параболоид).

Р е ш е н и е. Область V – тело вращения вокруг оси OZ, поэтому переходим к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Для искомого интеграла получаем:

$$\iiint_V \frac{x^2}{x^2+y^2} dxdydz = \iiint_\Omega \cos^2\varphi\, r dr d\varphi dz\ .$$

Задаём область Ω' неравенствами, заменяя в уравнениях поверхностей декартовы координаты цилиндрическими координатами:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Получаем два двойных неравенства:

$$\frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2 \text{ и } \frac{11}{2} - r^2 \le z \le \frac{9}{2}r.$$

Для выбора верного неравенства решаем уравнение

$$\frac{9}{2}r = \frac{11}{2} - r^2.$$

Единственное положительное решение $r = 1$, следовательно, $0 \le r \le 1$. При этих значениях верное неравенство

$$\frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2.$$

Область

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ \frac{9}{2}r \le z \le \frac{11}{2} - r^2, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Переход к повторному интегралу даёт:

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega \cos^2\varphi\, r dr d\varphi dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} \frac{r^2\cos^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\, r dr d\varphi dz = \ldots = \pi. \otimes$$

Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволинейных и кратных интегралов

Предварительные сведения

Электрическое поле линейного непрерывно-распределённого электрического заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\int\limits_W \frac{\gamma\left(\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3}dl, \qquad (1)$$

где $\vec{x}_0$ – точка наблюдения, а линейная плотность заряда равна

$$\gamma\left(\vec{x}\right)=\frac{dQ\left(\vec{x}\right)}{dl}.$$

Площадь плоской фигуры в полярной системе координат вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{D'} r^2\left(\varphi\right)drd\varphi.$$

Формула Грина имеет вид

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)dxdy=\oint\limits_{\Gamma}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Примеры с решением

Пример 6.4.1. Найти напряжённость электрического поля однородно заряженной проволоки длиной L, имеющей форму дуги окружности радиуса r, в центре окружности, считая линейную плотность заряда постоянной.

Р е ш е н и е. Так как $\gamma\left(\vec{x}\right)=const$, то формула (1) принимает вид

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_W \frac{\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3}dl=$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int\limits_W \frac{x_0 - x}{\left\|\vec{x}_0 - \vec{x}\right\|^3} dl\right)\vec{e}_1 + \left(\int\limits_W \frac{y_0 - y}{\left\|\vec{x}_0 - \vec{x}\right\|^3} dl\right)\vec{e}_2\right]. \qquad (2)$$

Вспомним параметрические уравнения окружности (рисунок 4.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\cos t \cdot \vec{e}_1 + r\sin t \cdot \vec{e}_2 \qquad (3)$$

– векторная форма;

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \qquad (4)$$

– скалярная форма.

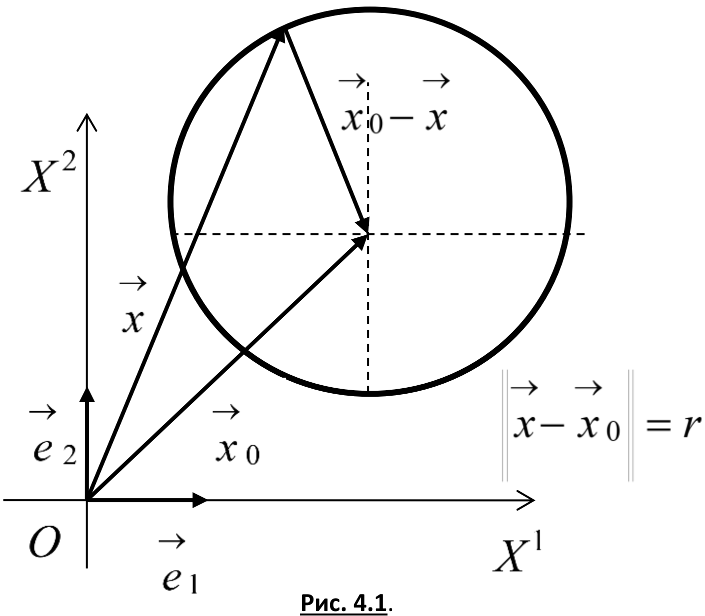


Рис. 4.1.

Чтобы воспользоваться для вычисления интеграла формулой

$$\int\limits_W f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{\left[\frac{dx}{dt}(t)\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}(t)\right]^2}dt,$$

нам нужен дифференциал длины дуги кривой $dl = \left\|\frac{d\vec{x}}{dt}\right\|dt$. По формуле (3) имеем:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -r\sin t \cdot \vec{e}_1 + r\cos t \cdot \vec{e}_2.$$

Отсюда для нормы вектора скорости получаем

$$\left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r,$$

откуда имеем

$$dl = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt = r dt.$$

С учётом того, что в рассматриваемом случае точка наблюдения помещена в центр окружности, а точки источника поля находятся в точках самой окружности и очевидного равенства

$$\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\| = \left\| \vec{x}_0 - \vec{x} \right\|,$$

дальнейшие вычисления напряжённости электрического поля в центре окружности проводятся так:

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right) = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int\limits_W \frac{x_0 - x}{\left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\|^3} dl\right)\vec{e}_1 + \left(\int\limits_W \frac{y_0 - y}{\left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\|^3} dl\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r\cos t}{r^3} r dt\right)\vec{e}_1 + \left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r\sin t}{r^3} r dt\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\cos t}{r} dt\right)\vec{e}_1 + \left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\sin t}{r} dt\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[\left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos t dt\right)\vec{e}_1 + \left(\int\limits_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin t dt\right)\vec{e}_2\right] =$$

$$=-\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[\left(\sin t\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\right)\vec{e}_1+\left(-\cos t\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\right)\vec{e}_2\right]=$$

$$=-\frac{\gamma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\vec{e}_1-\underbrace{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}_{=0}\vec{e}_2\right]=-\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}\vec{e}_1.$$

Получили следующую формулу для электрического поля, создаваемого в центре окружности линейным равномерным распределением заряда

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=-\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\vec{e}_1. \qquad (6)$$

Из формулы (6) легко получаем формулу для нормы напряжённости электрического поля

$$E=\left\|\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)\right\|=\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (7)$$

из которой следует:

1) $E=\dfrac{\gamma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ при $\alpha=\pi$;

2) $E=0$ при $\alpha=2\pi$. ⊗

Пример 6.4.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями

$$y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x=0.$$

Р е ш е н и е. Область ограничена окружностями и прямыми, поэтому решаем задачу в полярных координатах:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

При переходе к полярным координатам область D перейдёт в область D', ограниченную линиями

$$r=4\cos\varphi,\ r=8\cos\varphi,\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Искомая площадь равна $S=\iint\limits_{D'}r^2drd\varphi$. В полярных координатах область D' задаётся неравенствами

$$D' = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 4\cos\varphi \le r \le 8\cos\varphi. \end{cases}$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$S = \iint\limits_{D'} r^2 dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr.$$

Результат получается интегрированием:

$$S = \iint\limits_{D'} r^2 dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr = 24\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi = \left\{ \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right\} =$$

$$= 12\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 6\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = 8\pi - \left(6 + 3\sqrt{3}\right). \otimes$$

Пример 6.4.3. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy, \tag{1}$$

где Γ – окружность с уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, причём обход окружности осуществляется против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Формула Грина имеет вид:

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x,\, y) dx dy = \oint\limits_{\Gamma} P(x,\, y)dx + Q(x,\, y)dy.$$

Сравнивая с (1), видим, что $P(x,\, y) = -x^2 y$, $Q(x,\, y) = xy^2$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x,\, y) = x^2 + y^2.$$

Следовательно, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) dx dy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$\oint\limits_{\Gamma} -x^2y\,dx + xy^2dy = \iint\limits_{\Omega} r^2 r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3dr = \frac{1}{4}R^4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}. \otimes$$

Пример 6.4.4. Применяя формулу Грина, вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми линиями с уравнениями

$$y = x^2,\ x = y^2,\ 8xy = 1,$$

примыкающей к началу системы координат.

Р е ш е н и е. Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx.$$

Рассмотрим вид фигуры. Первая и вторая кривые линии – это стандартные параболы с осью OY и OX соответственно. Решая совместно уравнения кривых линий, найдём точки их пересечения:

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right),\ B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Применим формулу для вычисления площади плоской фигуры:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_{OA} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int\limits_{AB} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int\limits_{BO} xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} x^2dx - \frac{1}{8}\int\limits_{1/2}^{1/4} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int\limits_{1/4}^{0} \sqrt{x}\,dx = \frac{1 + 3\ln 2}{24} \approx 0{,}13. \otimes$$

Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления поверхностного интеграла первого рода имеет вид

$$\iint\limits_{F} f\left(x^1, x^2, x^3\right)dS =$$

$$= \iint\limits_{G^{12}} f\left(x^1, x^2, \varphi\left(x^1, x^2\right)\right)\sqrt{1+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\left(x^1, x^2\right)\right]^2+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\left(x^1, x^2\right)\right]^2}\,dx^1dx^2,$$

где двойной интеграл в правой части формулы вычисляется по проекции G^{12} поверхности F, задаваемой уравнением $x^3 = \varphi\left(x^1, x^2\right)$ на координатную плоскость X^1OX^2.

Если поверхность F однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то **общий поверхностный интеграл второго рода** является суммой частных интегралов

$$\iint\limits_F H_1\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^2dx^3 + H_2\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^3dx^1 + H_3\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^1dx^2 \overset{def}{=}$$

$$= \iint\limits_F H_1\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^2dx^3 + \iint\limits_F H_2\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^3dx^1 +$$

$$+ \iint\limits_F H_3\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^1dx^2,$$

где

$$\iint\limits_F H_3\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^1dx^2 = \iint\limits_{G^{12}} H_3\left(x^1, x^2, \varphi^3\left(x^1, x^2\right)\right)dx^1dx^2,$$

$$\iint\limits_F H_1\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^2dx^3 = \iint\limits_{G^{23}} H_1\left(\varphi^1\left(x^2, x^3\right), x^2, x^3\right)dx^2dx^3,$$

$$\iint\limits_F H_2\left(x^1, x^2, x^3\right)dx^3dx^1 = \iint\limits_{G^{13}} H_2\left(x^1, \varphi^2\left(x^1, x^3\right), x^3\right)dx^1dx^3$$

– двойные интегралы, вычисляемые по однозначным проекциям поверхности на координатные плоскости.

Примеры с решением

Пример 6.5.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_F \left(x^2 + y^2\right)dS,$$

где F – часть конической поверхности, заключённой между плоскостями с уравнениями $z = 0$ и $z = 1$.

Р е ш е н и е. Поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_F f(x, y, z)dS =$$

$$= \iint\limits_{G^{12}} f\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\sqrt{1+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\,dxdy. \qquad (1)$$

В силу условий задачи выбираем верхнюю часть конической поверхности с уравнением

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,$$

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

Искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл по формуле (1):

$$\iint\limits_F \left(x^2 + y^2\right) dS = \iint\limits_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

Так как область G^{12} – это круг, определённый неравенством $x^2 + y^2 \le 1$, то

$$\iint\limits_F \left(x^2 + y^2\right) dS = \iint\limits_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right) dxdy = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi\,. \otimes$$

Пример 6.5.2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_F \left(\sqrt{a^2 - x^2} + z\right) y dS,$$

где F – поверхность цилиндра

$$x^2 + z^2 = a^2,$$

заключённая между плоскостями $y = b$ и $y = c$.

Р е ш е н и е. Из уравнения

$$x^2 + z^2 = a^2$$

следует

$$z = \varphi^3(x, y) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Поверхность F разбилась на две части: $F_1\ (z \geq 0)$ и $F_2\ (z \leq 0)$. Определим элемент поверхности dS в соответствии с формулой вычисления поверхностного интеграла первого рода:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0;$$

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\, dxdy = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Подставляя элемент поверхности в формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint\limits_F f(x, y, z) dS = \iint\limits_G f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\right]^2}\, dxdy,$$

получим:

$$\iint\limits_F \left(\sqrt{a^2 - x^2} + z\right) y dS =$$

$$= \iint\limits_{F_1} \left(\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\right) y dS + \iint\limits_{F_2} \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\right) y dS =$$

$$= \iint\limits_{G_1} 2\sqrt{a^2 - x^2}\, y \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a \iint\limits_{G_1} ydxdy =$$

$$= 2a \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{b}^{c} ydy = 2a^2\left(c^2 - b^2\right). \otimes$$

Пример 6.5.3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_F x^2 y^2 z dxdy$$

по верхней стороне верхней половины сферы с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Проекцией верхней полусферы на координатную плоскость XOY является круг, ограниченный окружностью

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение верхней полусферы

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,.$$

Следовательно, искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл так:

$$\iint_F x^2 y^2 z dxdy = \iint_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$\iint_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = \iint_{G^{12}} r^5 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \sqrt{R^2 - r^2} drd\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi d\varphi \int_0^R r^5 \sqrt{R^2 - r^2} dr =$$

$$= \begin{Bmatrix} \sqrt{R^2 - r^2} = t;\ R^2 - r^2 = t^2; \\ rdr = -tdt;\ r^4 = \left(R^2 - t^2\right)^2. \end{Bmatrix} == \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \int_0^R \left(R^2 - t^2\right)^2 t^2 dt$$

$$= \frac{2}{105}\pi R^7\,.\ \otimes$$

Пример 6.5.4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_F xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

где F – верхняя сторона части плоскости с уравнением $x + z - 1 = 0$, отсечённая плоскостями с уравнениями $y = 0$, $y = 4$ и лежащая в первом октанте.

Р е ш е н и е. Заданная поверхность изображена на рисунке5.1. Для вычисления интеграла используем формулу вычисления общего поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint_F P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \iint_{G_{23}} P(\varphi(y, z), y, z)dydz + \iint_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z)dxdz +$$

$$+ \iint_{G_{12}} R(x, y, \omega(x, y))dxdy.$$

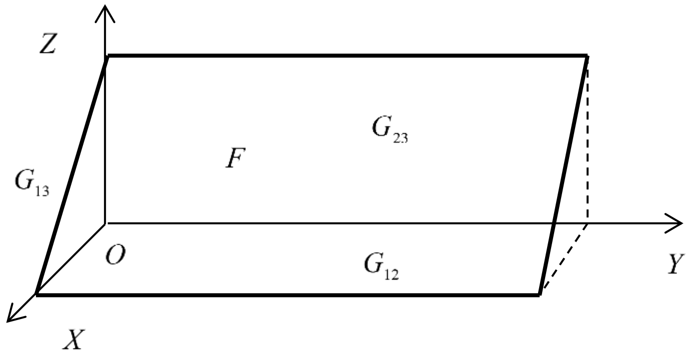


Рис. 5.1.

Так как плоскость параллельна оси OY, то

$$\iint_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z)\,dxdz = 0.$$

Получаем:

$$\iint_F xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_{G_{23}} (1-z)dydz + \iint_{G_{12}} (1-x)dxdy = 4. \otimes$$

Практическое занятие 6. Векторный анализ

Предварительные сведения

В декартовой системе координат градиент скалярного поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ вычисляется по формуле

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\vec{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\vec{e}_3.$$

Производная скалярного поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ в точке N_0 по направлению, заданному вектором $\overrightarrow{N_0N}$, имеющим орт

$$\vec{h} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{N_0N}\right\|}\overrightarrow{N_0N}$$

по определению равна

$$\frac{\partial f}{\partial h}\left(\vec{x}_0\right) \overset{def}{=} \lim_{t\to 0+0} \frac{f\left(\vec{x}_0 + t\vec{h}\right) - f\left(\vec{x}_0\right)}{t}$$

и вычисляется по одной из следующих формул

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{h}}\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right),\vec{h}\right)=\frac{\left(\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right),\overrightarrow{N_0N}\right)}{\left\|\overrightarrow{N_0N}\right\|}=\Pr_{\vec{h}}\left\{\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right)\right\}.$$

Дивергенция векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ в некоторой точке $\vec{x}$ в декартовой системе координат вычисляется по формуле:

$$div\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{\nabla},\vec{A}\left(\vec{x}\right)\right).$$

Формула для нахождения ротора векторного поля в декартовой системе координат имеет вид:

$$rot\,\vec{A}=\left[\vec{\nabla},\vec{A}\left(\vec{x}\right)\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}.$$

Потоком Φ векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ через поверхность F называется поверхностный интеграл второго рода

$$\Phi\overset{def}{=}\iint_F\left(\vec{A},d\,\vec{s}\right)=\iint_F\left(\vec{A}\left(\vec{x}\right),\vec{n}\right)dS=$$

$$=\iint_F\left(A_1\left(\vec{x}\right)\cos\theta_1+A_2\left(\vec{x}\right)\cos\theta_2+A_3\left(\vec{x}\right)\cos\theta_3\right)dS=$$

$$=\iint_F A_1\left(\vec{x}\right)\cos\theta_1 dS+\iint_F A_2\left(\vec{x}\right)\cos\theta_2 dS+\iint_F A_3\left(\vec{x}\right)\cos\theta_3 dS=$$

$$=\iint_{G^{23}}A_1\left(\omega\left(x^2,x^3\right),x^2,x^3\right)dx^2dx^3+\iint_{G^{13}}A_2\left(x^1,\psi\left(x^1,x^3\right),x^3\right)dx^1dx^3+$$

$$+\iint_{G^{12}}A_3\left(x^1,x^2,\varphi\left(x^1,x^2\right)\right)dx^1dx^2,$$

где

$$d\vec{s} = \left\| d\vec{s} \right\| \frac{d\vec{s}}{\left\| d\vec{s} \right\|} = ds\,\vec{n}\,.$$

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля через замкнутую поверхность (в направлении внешней нормали) равен тройному интегралу от дивергенции поля, взятому по области, ограниченной этой поверхностью:

$$\oiint_F \left(\vec{A}\left(\vec{x}\right), d\vec{s} \right) = \iiint_V \left(\vec{\nabla}, \vec{A}\left(\vec{x}\right) \right) dV\,.$$

Циркуляцией векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ по замкнутому контуру Γ называется криволинейный интеграл второго рода

$$C_A \overset{def}{=} \oint_\Gamma \left(\vec{A}, \vec{dl} \right) = \oint_\Gamma A_l\,dl\,.$$

Теорема Стокса. *Циркуляция векторного поля* $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ *по замкнутому контуру* Γ *равна потоку векторного поля*

$$rot\,\vec{A}\left(\vec{x}\right) = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\left(\vec{x}\right) \right]$$

через поверхность, ограниченную контуром Γ:

$$\oint_\Gamma \left(\vec{A}\left(\vec{x}\right), \vec{dl} \right) = \iint_S \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\left(\vec{x}\right) \right], d\vec{s} \right) \equiv \iint_S \left(rot\,\vec{A}\left(\vec{x}\right), \vec{n} \right) ds\,.$$

Приведём краткую сводку наиболее часто используемых формул векторного анализа:

$$grad(\varphi\psi) = \varphi \cdot grad\psi + \psi \cdot grad\varphi;$$

$$div\left(\psi\vec{A}\right) = \psi \cdot div\vec{A} + \left(\vec{A}, grad\psi\right);$$

$$div\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \left(\vec{B}, rot\vec{A}\right) - \left(\vec{A}, rot\vec{B}\right);$$

$$rot\left(\psi\vec{A}\right) = \psi \cdot rot\vec{A} + \left[grad\psi, \vec{A}\right];$$

$$grad f(\xi) = f'(\xi) \cdot grad\xi;$$

$$rot\,rot\,\vec{A} = grad\,div\vec{A} - \nabla^2\vec{A};$$

$$div grad \psi \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \psi \right) = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) \psi = \vec{\nabla}^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \left(x^1\right)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \left(x^2\right)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \left(x^3\right)^2}.$$

В декартовых координатах справедлива также формула

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{e}_1 \vec{\nabla}^2 A^1 + \vec{e}_2 \vec{\nabla}^2 A^2 + \vec{e}_3 \vec{\nabla}^2 A^3.$$

Примеры с решением

Пример 6.6.1. Найти градиент сферически-симметричного скалярного поля

$$u = \varphi(r),$$

где $r = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Р е ш е н и е. По определению градиента имеем

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(r) \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \varphi(r) \vec{e}_3 =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr} \frac{x}{r} \vec{e}_1 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{y}{r} \vec{e}_2 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{z}{r} \vec{e}_3 = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \otimes$$

Отметим, что векторное поле, определяемое соотношением $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$, называется ***потенциальным полем***, а скалярная функция φ называется ***потенциалом*** векторного поля $\vec{a}$. Само векторное поле $\vec{a} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ называется ***потенциальным*** полем. Иногда потенциальное поле определяют соотношением $\vec{a} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Пример 6.6.2. Найти дивергенцию сферически-симметричного векторного поля $\vec{a} = \varphi(r) \vec{r}$.

Р е ш е н и е. По определению дивергенции имеем:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \left(\vec{\nabla}, \varphi(r) \vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r) x] + \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r) y] + \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r) z] =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr}\frac{x^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr}\frac{y^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr}\frac{z^2}{r} + \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr}\cdot r + 3\varphi(r). \otimes$$

Векторное поле называется ***соленоидальным***, если выполнено условие $div\vec{a} = 0$. $\otimes$

Пример 6.6.3. Найти условие соленоидальности векторного поля из предыдущего примера.

Р е ш е н и е. Условие соленоидальности $\mathrm{div}\,\vec{a} = 0$ для поля $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dr}\cdot r + 3\varphi(r) = 0$$

С разделяющимися переменными. Разделяя переменные и учитывая, что в случае функций одного переменного производная $\frac{d\varphi}{dr}$ – это отношение двух дифференциалов, получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -3\frac{dr}{r}. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получаем $\ln|\varphi| = -3\ln r + C_1$. Записывая произвольную постоянную в логарифмическом виде $C_1 = \ln C$, где C – произвольная положительная постоянная, получаем $\varphi = \frac{C}{r^3}$. Здесь C уже произвольная (не обязательно положительная) постоянная. $\otimes$

Пример 6.6.4. Найти ротор сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a} = \varphi(r)\vec{r},$$

где $r = \left\|\vec{r}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Р е ш е н и е. Записывая векторное поле в разложении по декартовому базису

$$\vec{a} = \varphi(r)\vec{r} = \varphi(r)x\,\vec{e}_1 + \varphi(r)y\,\vec{e}_2 + \varphi(r)z\,\vec{e}_3,$$

и используя определение ротора, получаем:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left[\vec{\nabla}, \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi(r)x & \varphi(r)y & \varphi(r)z \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)z] - \frac{\partial}{\partial z}[\varphi(r)y]\right\}\vec{e}_1 + \left\{\frac{\partial}{\partial z}[\varphi(r)x] - \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)z]\right\}\vec{e}_2$$

$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)y] - \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)x]\right\}\vec{e}_3 = \frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r}\right)\vec{e}_1 +$$

$$+ \frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{zx}{r} - \frac{xz}{r}\right)\vec{e}_2 + \frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{xy}{r} - \frac{yx}{r}\right)\vec{e}_3 = \vec{0}\,. \otimes$$

Векторное поле, для которого выполнено соотношение $rot\,\vec{a} = \vec{0}$, называется ***безвихревым*** полем. Из предыдущей задачи следует, что сферически-симметричное векторное поле является безвихревым полем.

Пример 6.6.5. Доказать, что

$$\operatorname{div}\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \left(\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A}\right) - \left(\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{B}\right). \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Для решения применим правило действия оператора $\vec{\nabla}$ на произведение функций

$$\vec{\nabla}(\varphi\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\psi) =$$
$$= \vec{\nabla}\left(\overset{\vee}{\varphi}\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\psi\right) + \vec{\nabla}\left(\varphi\cdot\overset{\vee}{\omega}\cdot\ldots\cdot\psi\right) + \ldots + \vec{\nabla}\left(\varphi\cdot\omega\cdot\ldots\cdot\overset{\vee}{\psi}\right), \qquad (2)$$

где символ $\vee$ над функцией устанавливает порядок действия оператора $\vec{\nabla}$ на соответствующую функцию. Для скалярных полей имеется в виду просто произведение функций, для векторных полей произведение может быть как скалярным, так и векторным.

Учитывая, что

$$\operatorname{div}\left[\vec{A},\vec{B}\right]=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\vec{B}\right]\right),$$

в левой части (1) получаем:

$$\operatorname{div}\left[\vec{A},\vec{B}\right]=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\vec{B}\right]\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\overset{\vee}{\vec{A}},\vec{B}\right]\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\overset{\vee}{\vec{B}}\right]\right),$$

Первое смешанное произведение в правой части последнего равенства преобразуется к виду:

$$\left(\vec{\nabla},\left[\overset{\vee}{\vec{A}},\vec{B}\right]\right)=\left(\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right],\vec{B}\right)=\left(\vec{B},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)=\left(\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}\right). \qquad (3)$$

Аналогично, второе смешанное произведение в правой части того же равенства преобразуется к виду

$$\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\overset{\vee}{\vec{B}}\right]\right)=-\left(\vec{\nabla},\left[\overset{\vee}{\vec{B}},\vec{A}\right]\right)=-\left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{B}\right]\right)=-\left(\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}\right). \qquad (4)$$

Складывая (3) и (4), получаем (1). $\otimes$

Пример 6.6.6. Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot}\left(u\cdot\vec{A}\right)=\left[\operatorname{grad}u,\vec{A}\right]+u\cdot\operatorname{rot}\vec{A},$$

где $u(M)$ – скалярное, а $\vec{A}(M)$ – векторное поля.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть:

$$\operatorname{rot}\left(u\cdot\vec{A}\right)=\left[\vec{\nabla},u\cdot\vec{A}\right]=\left[\vec{\nabla},\overset{\vee}{u}\cdot\vec{A}\right]+\left[\vec{\nabla},u\cdot\overset{\vee}{\vec{A}}\right]=$$

$$=\left[\vec{\nabla}u,\vec{A}\right]+u\cdot\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]=\left[\operatorname{grad}u,\vec{A}\right]+u\cdot\operatorname{rot}\vec{A}.\ \otimes$$

Пример 6.6.7. Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A},$$

где Δ – ***оператор Лапласа*** $\Delta = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)$.

Р е ш е н и е. Для доказательства используем формулу для двойного векторного произведения

$$\left[\vec{A}, \left[\vec{B}, \vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A}, \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}, \vec{B}\right),$$

полагая $\vec{A} = \vec{B} = \nabla$, получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}, \vec{A}\right) - \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}. \otimes$$

Пример 6.6.8. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = x^3\vec{e}_1 - y^2\vec{e}_2 + y\vec{e}_3$$

по замкнутому контуру $(t \in [0, 2\pi])$, заданному уравнениями

$$x = \cos t,\ y = 3\sin t,\ z = \cos t - \sin t.$$

Р е ш е н и е. По определению циркуляция равна криволинейному интегралу второго рода

$$C = \oint_\Gamma \left(\vec{A}, d\vec{x}\right) = \oint_\Gamma x^3 dx - y^2 dy + y dz.$$

Криволинейный интеграл вычисляем, сводя его к определённому интегралу:

$$\oint_\Gamma x^3 dx - y^2 dx^2 + y dx^3 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\cos^3 t \sin t - 27\sin^2 t \cos t - 3\sin^2 t - 3\sin t \cos t\right) dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t dt - 27\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt - 3\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - 3\int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^3 t d(\cos t) - 27\int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) -$$

$$-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)d(2t)-3\int_0^{2\pi}\sin t d(\sin t)=-3\pi . \otimes$$

Пример 6.6.9. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=-\omega x_2\vec{e}_1+\omega x_1\vec{e}_2$$

по простому замкнутому контуру, представляющему собой окружность с центром в начале системы координат и радиусом R, в положительном направлении.

Р е ш е н и е. Параметризация окружности

$$x_1=R\cos t,\ x_2=R\sin t,$$

где $t\in[0,\ 2\pi]$. Поэтому по определению циркуляции получаем:

$$C=\oint_\Gamma\left(\vec{F},d\vec{x}\right)=\oint_\Gamma-\omega x_2dx_1+\omega x_1dx_2=$$

$$=\omega\int_0^{2\pi}\left(R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t\right)dt=2\pi R^2\omega . \otimes$$

Пример 6.6.10. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=\left(x_1+3x_2+2x_3\right)\vec{e}_1+\left(2x_1+x_3\right)\vec{e}_2+\left(x_1-x_2\right)\vec{e}_3$$

по контуру треугольника ABC, если $A(2;\,0;\,0)$, $B(0;\,3;\,0)$, $C(0;\,0;\,1)$.

Р е ш е н и е. Для решения применим формулу Стокса, согласно которой

$$C=\oint_\Gamma\left(\vec{F},d\vec{x}\right)=\iint_S\left(\vec{n},rot\vec{F}\right)ds.$$

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник, имеет вид

$$\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{1}=1,$$

или

$$3x_1+2x_2+6x_3=6.$$

Находим ротор векторного поля:

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ x_1+3x_2+2x_3 & 2x_1+x_3 & x_1-x_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1-x_2)-\frac{\partial}{\partial x_3}(2x_1+x_3)\right]\vec{e}_1-$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-x_2)-\frac{\partial}{\partial x_3}(x_1+3x_2+2x_3)\right]\vec{e}_2+$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1+x_3)-\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+3x_2+2x_3)\right]\vec{e}_3=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3.$$

Теперь циркуляция

$$C=\oint_{\Gamma}\left(\vec{F},d\vec{x}\right)=\iint_{S}\left(\vec{n},rot\vec{F}\right)ds=$$

$$=-2\iint_{G^{23}}dx_2dx_3+\iint_{G^{13}}dx_3dx_1-\iint_{G^{12}}dx_1dx_2=$$

$$=-2\int_0^3dx_2\int_0^{1-x_2/3}dx_3+\int_0^1dx_3\int_0^{2-x_3}dx_1-\int_0^2dx_1\int_0^{3-3x_1/2}dx_2=$$

$$=-2\left[x_2-\frac{1}{6}x_2^2\right]_0^3+\left[2x_3-x_3^2\right]_0^1-\left[3x_1-\frac{3}{4}x_1^2\right]_0^2=-5.\ \otimes$$

Пример 6.6.11. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F}=x_2\vec{e}_1-x_1\vec{e}_2+a\vec{e}_3\ \ (a=const)$$

вдоль окружности с уравнением

$$x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0$$

в положительном направлении двумя способами.

Р е ш е н и е. 1) Вычислим циркуляцию непосредственно, учитывая, что параметризация окружности имеет вид $(R=1)$:

$$x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t.$$

Теперь имеем:

$$C = \oint_\Gamma \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \oint_\Gamma F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) - \cos t \cos t] dt = -\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = -2\pi.$$

2) Вычислим циркуляцию по формуле Стокса. Сначала найдём ротор векторного поля:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & -x_1 & a \end{vmatrix} = -2\vec{e}_3.$$

Нормаль плоскости треугольника $\vec{n} = \vec{e}_3$. Следовательно, имеем

$$C = \oint_\Gamma \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left(\vec{n}, rot\vec{F} \right) ds = -2\iint_S \left(\vec{n}, \vec{e}_3 \right) ds = -2\iint_S dx_1 dx_2 =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr = -2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = -2\pi.\ \otimes$$

Пример 6.6.12. Найти поток радиус-вектора

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

через произвольную гладкую замкнутую поверхность F, ограничивающую область Ω, имеющую объём V.

Р е ш е н и е. Находим дивергенцию поля радиус-вектора:

$$\operatorname{div}\vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса (10.10.13):

$$\oiint_F \left(\vec{r}, d\vec{s} \right) = \iiint_V \left(\vec{\nabla}, \vec{r} \right) dV = 3\iiint_V dV = 3V.$$

Из полученной формулы следует формула для вычисления объёма области Ω при помощи поверхностных интегралов

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_F \left(\vec{r}, \vec{n}\right) ds,$$

которая в декартовых координатах принимает вид

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_F \left(xn_1 + yn_2 + zn_3\right) ds = \frac{1}{3}\oiint\limits_F \left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right) ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – координаты орта нормали $\vec{n}$. ⊗

Пример 6.6.13. Найти поток векторного поля радиус-вектора

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Через поверхность с уравнением

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ z = 0\ \left(0 \le z \le 1\right).$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\Phi = \oiint\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) ds = \iiint\limits_V div\vec{F}\, dv.$$

Так как

$$\operatorname{div}\vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

а поверхность – это конус с вершиной в точке $(0;\,0;\,1)$, ограниченный плоскостями с уравнениями $z = 0$ и $z = 1$, то переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$\Phi = \oiint\limits_S \left(\vec{r}, \vec{n}\right) ds = \iiint\limits_V div\vec{r}\, dv = 3\iiint\limits_V dv = 3\iiint\limits_\Omega r d\varphi dr dz =$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_0^{1-r} dz = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r(1-r) dr = 3 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \pi.\ ⊗$$

Пример 6.6.14. Найти поток поля

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

точечного источника электрического поля через сферу с уравнением

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Р е ш е н и е. Поток векторного поля через поверхность вычисляется по формуле

$$\Phi=\iint\limits_S\left(\vec{F},d\vec{s}\right)=\iint\limits_S\left(\vec{F},\vec{n}\right)ds=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\iint\limits_S\frac{1}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r},\vec{n}\right)ds.$$

Так как $r=R=const$ и скалярное произведение ортов

$$\left(\frac{\vec{r}}{r},\vec{n}\right)=1,$$

получаем:

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\iint\limits_S\frac{1}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r},\vec{n}\right)ds=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0R^2}\iint\limits_S ds=\frac{q4\pi R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0R^2}=\frac{4\pi q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\ \otimes$$

Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Предварительные сведения

Простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=f(x).$$

Его общее решение находится по определению первообразной:

$$y(x)=\int f(x)dx+C,$$

где C – произвольная постоянная величина.

Уравнение с разделёнными переменными имеют вид

$$X(x)dx+Y(y)dy=0.$$

Общее решение этого уравнения находится по формуле

$$\int X(x)dx+\int Y(y)dy=C.$$

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$P(x)T(y)dx+Q(x)S(y)dy=0.$$

После разделения переменных получаем уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\frac{S(y)}{T(y)}dy=0,$$

решая которое, получаем общее решение в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int \frac{S(y)}{T(y)}dy = C.$$

Линейное неоднородное ОДУ первого порядка в приведённой форме записи имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x).$$

Ему соответствует однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Однородное уравнение решается путём разделения переменных, а неоднородное методом вариации произвольной постоянной. Формула для общего решения неоднородного уравнения имеет вид

$$z(x) = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + A\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Простейшее ОДУ высшего порядка имеет вид:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Его общее решение находится путём последовательного интегрирования и имеет вид:

$$y(x) = \int\int\ldots\int f(x)\underbrace{dxdx\ldots dx}_{n\ раз} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + C_3 + \ldots$$

$$+ C_{n-2}\frac{x^2}{2!} + C_{n-1}x + C_n.$$

Линейное ОДУ высшего порядка, соответственно, неоднородное и однородно, имеет вид:

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x),$$

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = 0.$$

Задача Коши для уравнения (неоднородного, или однородного) ставится так: **найти решение соответствующего уравнения, удовлетворяющее начальным условиям**

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = y_0^1,\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0} = y_0^{n-1}.$$

Линейное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_2 y = f(x).$$

Находя линейно независимую систему решений соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1\frac{dy}{dx}+p_2y=0,$$

– **фундаментальную систему решений** (ФСР) $\{y_1,\ y_2\}$, можем составить общее решение однородного уравнения в виде линейной комбинации найденных частных решений.

При подстановке в однородное уравнение функции e^{kx} приходим к характеристическому уравнению

$$k^2+p_1k+p_2=0.$$

В зависимости от того, какие решения будут у характеристического уравнения, приходим к следующим трём случаям построения общего решения однородного дифференциального уравнения.

1) Корни характеристического уравнения простые и вещественные, то есть $k_1\neq k_2\in R^1$. Тогда ФСР есть $\left\{e^{k_1x},\ e^{k_2x}\right\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

2) Корень k вещественный, кратности 2. Тогда ФСР есть $\left\{e^{kx},\ xe^{kx}\right\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=e^{kx}\left(C_1+xC_2\right).$$

3) Корни комплексно-сопряжённые $k_1=\alpha+\beta i,\ k_2=\alpha-\beta i$. Тогда ФСР есть $\left\{e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x\right\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

Для решения неоднородного уравнения применяется **метод Лагранжа**. Решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$z(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

Составляется СЛАУ следующего вида

$$\begin{cases} y_1(x)\dfrac{dC_1(x)}{dx}+y_2(x)\dfrac{dC_2(x)}{dx}=0, \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx}\dfrac{dC_1(x)}{dx}+\dfrac{dy_2(x)}{dx}\dfrac{dC_2(x)}{dx}=f(x). \end{cases}$$

Здесь $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – новые функции, подлежащие определению, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – элементы ФСР соответствующего однородного уравнения. Решение СЛАУ относительно производных новых функций ищется любым методом. В общем виде это решение записывается так

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1(x)}{dx} = \varphi(x), \\ \dfrac{dC_1(x)}{dx} = \psi(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти независимые простейшие ОДУ, и подставляя результаты в общий вид решения неоднородного уравнения, получаем общее решение в форме

$$z(x) = A_1 y_1(x) + A_2(x) y_2(x) + y_1(x)\int \varphi(x)dx + y_2(x)\int \psi(x)dx.$$

Примеры с решением

Пример 6.7.1. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx.$$

Р е ш е н и е. 1) Перепишем данное уравнение в виде

$$2y\left(x^2+3\right)dy = 3x\left(2+y^2\right)dx.$$

2) Замечаем, что $x^2+3>0,\ 2+y^2>0.$ Поэтому можно разделить переменные, деля обе части уравнения на $\left(x^2+3\right)\left(2+y^2\right)$:

$$\frac{2y}{2+y^2}dy = \frac{3x}{x^2+3}dx.$$

3) Используем формулу для нахождения решения:

$$\int \frac{2y}{2+y^2}dy + C_1 = \int \frac{3x}{x^2+3}dx + C_2;$$

$$\ln\left(2+y^2\right) = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+3\right) + C;$$

$$C = C_2 - C_1.$$

4) Преобразуем полученный интеграл:

$$2\ln\left(2+y^2\right) - 3\ln\left(x^2+3\right) = C;$$

$$\ln\frac{\left(2+y^2\right)^2}{\left(x^2+3\right)^3} = C.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$\ln\frac{\left(2+y^2\right)^2}{\left(x^2+3\right)^3}=C$$

при всевозможных значениях параметра C. ⊗

Пример 6.7.2. Найти частное решение уравнения

$$\left(1+y^2\right)dx = xydy,$$

если $y=1$ при $x=2$.

Р е ш е н и е. 1) Разделяем переменные:

$$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{dx}{x}.$$

2) Интегрируем полученное уравнение:

$$\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int\frac{dx}{x}+\ln C;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=\ln|x|+\ln C;$$

$$\left(1+y^2\right)=Cx^2.$$

Так как C – произвольная постоянная, то имеем

$$y^2=Cx^2-1$$

3) Используем начальные условия:

$$4=2C;\ C=2;\ x^2=2\left(1+y^2\right).$$

4) Частный интеграл:

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}.$$

Ответ: $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-1}$. ⊗

Пример 6.7.3. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение с однородной правой частью.

1) Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+2\frac{y}{x}-5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2-6\frac{y}{x}}.$$

2) Совершаем подстановку

$$u(x)=\frac{y}{x},$$

где $u(x)-$новая искомая функция. Так как

$$y'=u+xu',$$

получаем новый вид уравнения:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u-5u^2}{2-6u}.$$

После простых преобразований получаем

$$\frac{du}{dx}x=\frac{1+u^2}{2-6u}.$$

3) Разделяем переменные, предполагая, что $1+u^2\neq 0,\ x\neq 0$:

$$\frac{2-6u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

4) Интегрируем:

$$2arctgu-3\ln\left(1+u^2\right)=\ln|x|+C.$$

Заменяя $u(x)=\frac{y}{x}$, получаем:

$$2arctg\frac{y}{x}-3\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^2\right)-\ln|x|=C.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$2arctg\frac{y}{x}-3\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^2\right)-\ln|x|=C. \otimes$$

Пример 6.7.4. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}+3y=e^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Здесь $p(x)=3,\ f(x)=e^{2x}$.

1) Сначала решаем однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-3y,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению:

$$\frac{dy}{dx}=-3y;$$

$$\frac{dy}{y}=-3dx;$$

$$\ln|y|=-3x+\ln C_1;$$

$$|y|=C_1e^{-3x};$$

$$y=C_2e^{-3x}.$$

2) Ищем решение исходного уравнения в виде $z=C_2(x)e^{-3x}$. Подстановка в исходное уравнение даёт:

$$\frac{dC_2(x)}{dx}=e^{5x};$$

$$C_2(x)=\int e^{5x}dx+C;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

3) Подставляем в решение:

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}.$$

Ответ: общее решение имеет вид

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}. \otimes$$

Пример 6.7.5. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}$$

с начальным условием $y(1) = 1$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right),$$

следующей из метода вариации произвольной постоянной.

1) Находим общее решение:

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right) = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(-2\int \frac{1}{x^2}e^{-\int \frac{1}{x}dx}\right) = \frac{1}{x} + Cx.$$

2) Используем начальное условие

$$\frac{1}{1^2} + C = 1,$$

откуда $C = 0$. Решение задачи Коши принимает вид:

$$z = \frac{1}{x}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{x}$. $\otimes$

Пример 6.7.6. Найти частное решение ОДУ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 1,\ \frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0$.

Р е ш е н и е. Интегрируем уравнение последовательно:

1) $\frac{dy}{dx} = \int xe^x dx + C_1 = \left\{\begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x. \end{matrix}\right\} = xe^x - \int e^x dx + C_1 =$

$= (x-1)e^x + C_1;$

2) $y = \int (x-1)e^x dx + C_1 x + C_2 = \left\{\begin{matrix} u = x-1, & du = dx, \\ dv = e^x dx, & v = e^x. \end{matrix}\right\} =$

$= (x-2)e^x + C_1 x + C_2$.

Так как в силу первого начального условия $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0$, получаем:

$(0-1)e^0 + C_1 = 0,\ C_1 = 1.$

Так как в силу второго начального условия $y\big|_{x=0} = 1$, получаем:

$(0-2)e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1,\ C_2 = 3.$

Теперь частное решение, удовлетворяющее заданным условиям, принимает вид

$y = (x-2)e^x + x + 3.$ ⊗

Пример 6.7.7. Найти общее решение ОДУ

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Решаем уравнение относительно $z = \frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Интегрируем получившиеся ОДУ последовательно:

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=1,\ \dfrac{dy}{dx}=x+C_1,\ y=\dfrac{1}{2}x^2+C_1x+C_2;$

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2,\ \dfrac{dy}{dx}=2x+C_3,\ y=x^2+C_3x+C_4.$

Совокупность этих решений образует общий интеграл ОДУ.

Так как квадратный трёхчлен имеет разложение

$$z^2-3z+2=(z-z_1)(z-z_2),$$

то общий интеграл ОДУ имеет вид:

$$\left(y-\frac{1}{2}x^2-C_1x-C_2\right)\cdot\left(y-x^2-C_3x-C_4\right)=0.\ \otimes$$

Пример 6.7.8. **Найти общее решение ОДУ**

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3.$$

Р е ш е н и е. Положим $\dfrac{d^2y}{dx^2}=z$**, тогда из уравнения получаем**

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}z^3.$$

Интегрируя получившееся уравнение, получаем

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}z^3,\ \frac{dz}{z^3}=-\frac{1}{2}dx,\ \frac{1}{z^2}=x+C_1,\ z^2=\frac{1}{x+C_1}.$$

Заменяя $z=\dfrac{d^2y}{dx^2}$**, получаем уравнение**

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\frac{1}{x+C_1}.$$

Уравнение содержит только x и y. Разрешая его относительно $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\pm 1}{\sqrt{x+C_1}}.$$

Это уравнение интегрируем последовательно:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\int\frac{dx}{\sqrt{x+C_1}}+C_2=\{dx=d(x+C_1)\}=$$

$$=\pm\int(x+C_1)^{-1/2}d(x+C_1)+C_2=\pm(x+C_1)^{1/2}+C_2$$

$$y_1=\int(x+C_1)^{1/2}dx+C_2x+C^3=(x+C_1)^{3/2}+C_2x+C^3,$$

$$y_2=-\int(x+C_1)^{1/2}dx+C_2x+C^3=-(x+C_1)^{3/2}+C_2x+C^3. \otimes$$

Пример 6.7.9. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2+k-2=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=-2,\ k_2=1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-2x},\ e^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x. \otimes$$

Пример 6.7.10. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2-2k+1=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=k_2=1.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^x,\ xe^x\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=\left(C_1+C_2x\right)e^x.\ \otimes$$

Пример 6.7.11. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+13y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2-4k+13=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=2+3i,\ k_2=2-3i.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{2x}\cos 3x,\ e^{2x}\sin 3x\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin x\right).\ \otimes$$

Пример 6.7.12. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3-2k^2-k+2=0.$$

Преобразуем характеристическое уравнение:

$$\left(k^2-1\right)\left(k-2\right)=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=-1,\ k_2=1,\ k_3=2.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-x},\ e^{x},\ e^{2x}\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{2x}.\ \otimes$$

Пример 6.7.13. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}-4y=0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3-4k^2+6k-4=0.$$

Корень ищем среди множителей свободного члена, это 2 и 4. Проверяем 2, для чего делим уголком:

$$k^3-4k^2+6k-4=\left(k-2\right)\left(k^2-2k+2\right).$$

Уравнение принимает вид:

$$\left(k-2\right)\left(k^2-2k+2\right)=0.$$

Находим оставшиеся корни характеристического уравнения

$$k_1=2,\ k_2=1+i,\ k_3=1-i.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{2x},\ e^{x}\cos x,\ e^{x}\sin x\right\}.$$

Общее решение записывается в виде:

$$y(x)=C_1e^{2x}+e^{x}\left(C_2\cos x+C_3\sin x\right).\ \otimes$$

Пример 6.7.14. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=x^2-x+1.$$

Р е ш е н и е. 1) Однородное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2-1=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1=-1,\ k_2=1.$$

Фундаментальная система решений

$$\left\{e^{-x},\ e^{x}\right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}.$$

2) Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$z(x)=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{x}.$$

Система линейных алгебраических уравнений для производных новых функций в общем виде

$$\begin{cases} y_1\dfrac{dC_1}{dx}+y_2\dfrac{dC_2}{dx}=0, \\ \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC_1}{dx}+\dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dC_2}{dx}=f(x). \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} e^{-x}\dfrac{dC_1}{dx}+e^{x}\dfrac{dC_2}{dx}=0, \\ -e^{-x}\dfrac{dC_1}{dx}+e^{x}\dfrac{dC_2}{dx}=x^2-x+1. \end{cases}$$

Решаем систему, например, по формулам Крамера, в результате получаем:

$$\frac{dC_1}{dx}=-\frac{1}{2}e^{x}\left(x^2-x+1\right);\ \frac{dC_2}{dx}=\frac{1}{2}e^{-x}\left(x^2-x+1\right).$$

3) Решение первого из уравнений:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int e^{x}\left(x^2 - x + 1\right)dx + A_1 = \ldots = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2\right)e^{x} + A_1.$$

Решение второго уравнения:

$$C_2 = -\frac{1}{2}\int e^{-x}\left(x^2 - x + 1\right)dx + A_2 = \ldots = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12\right)e^{-x} + A_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$z(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^{x} - x^2 + x - 1. \otimes$$

Пример 6.7.15. С аэростата, падающего с высоты H со скоростью v_0, сбросили балласт, после чего его падение замедлилось и через некоторое время сменилось подъёмом, так что через время t_0 аэростат поднялся на высоту, с которой сбросили балласт. Считая, что масса аэростата без балласта равна m, а сила сопротивления воздуха R и подъёмная сила аэростата T постоянны, определить, сколько времени после сброса балласта аэростат опускался.

Р е ш е н и е. Начало системы координат поместим в нижнюю точку траектории аэростата, ось OZ направим вертикально вверх (рисунок 1). По условию задачи силы, действующие на аэростат в течение всего времени движения остаются постоянными.

Уравнение второго закона динамики для опускающегося аэростата имеет вид:

$$m\ddot{z} = T + R - G, \tag{1}$$

где $G = mg$ – сила тяжести. В начальный момент времени аэростат находился на высоте H, поэтому начальные условия запишутся в виде

$$z(0) = H, \ \dot{z}(0) = -v_0. \tag{2}$$

Уравнение (1) – это простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение, не содержащее в правой части искомой функции и независимой переменной. Интегрируя два раза, получаем:

$$m\dot{z} = (T + R - G)t + C_1, \tag{3}$$

$$mz = \frac{T + R - G}{2}t^2 + C_1 t + C_2. \tag{4}$$

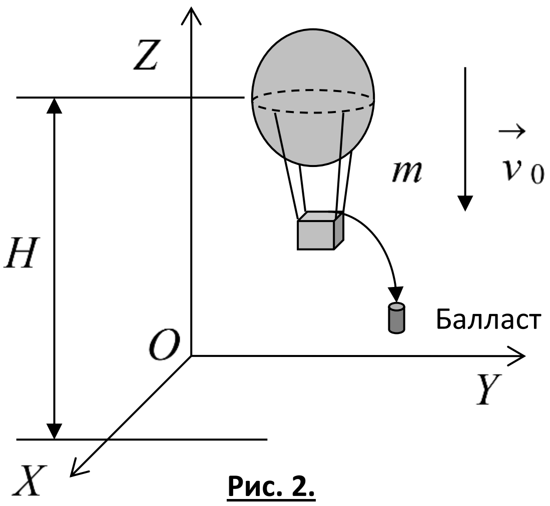


Рис. 2.

Используя начальные условия (2), получаем для постоянных: $C_1 = -mv_0,\ C_2 = mH$.

Теперь уравнения движения принимают вид:

$$\dot{z} = \frac{T+R-G}{m}t - v_0, \tag{5}$$

$$z = \frac{T+R-G}{2m}t^2 - v_0 t + H. \tag{6}$$

Для поднимающегося аэростата уравнение второго закона динамики и начальные условия имеют вид:

$$m\ddot{z} = T - R - G, \tag{7}$$

$$z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 0. \tag{8}$$

Интегрируя (7), получаем:

$$m\dot{z} = (T-R-G)t + C_1, \tag{9}$$

$$mz = \frac{T-R-G}{2}t^2 + C_1 t + C_2. \tag{10}$$

Из начальных условий (8) для постоянных получаем $C_1 = 0,\ C_2 = 0$, откуда получаем уравнение движения:

$$z = \frac{T - R - G}{2m} t^2 . \tag{11}$$

Обозначим время падения аэростата t_1, а время подьёма t_2. Из условия задачи $t_0 = t_1 + t_2$. Подставляя $t = t_1$, $\dot{z}(t_1) = 0$, $z(t_1) = 0$ в (5) и (6) и $t = t_2$, $z(t_2) = H$ в (11), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{T + R - G}{m} t_1 - v_0 = 0, \\ \dfrac{T + R - G}{2m} t_1^2 - v_0 t_1 + H = 0, \\ \dfrac{T - R - G}{2m} t_2^2 = H. \end{cases} \tag{12}$$

Исключая из уравнений системы (12) неизвестные H и v_0 с учётом того, что $t_2 = t_0 - t_1$, получаем:

$$t_1 = \frac{t_0}{1 + \dfrac{\sqrt{T + R - mg}}{T - R - mg}} . \otimes$$

Пример 6.7.16. Грузовик массой m имеет максимальную скорость $v_{\max}$ и разгоняется с места до скорости v_* за время t_*. Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равняется средняя сила тяги двигателя грузовика?

Р е ш е н и е. Силы, действующие на грузовик, изображены на рисунке 2. При решении задачи предполагаем, что средняя сила тяги двигателя $\vec{F}$ постоянна.

После проектирования на оси системы координат дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = F - R.$$

Здесь сила трения $\vec{R} = k\vec{v}$, где коэффициент динамического трения $k > 0$ неизвестен; $\vec{N}$ – сила реакции опоры (дороги); $\vec{G}$ – сила тяжести.

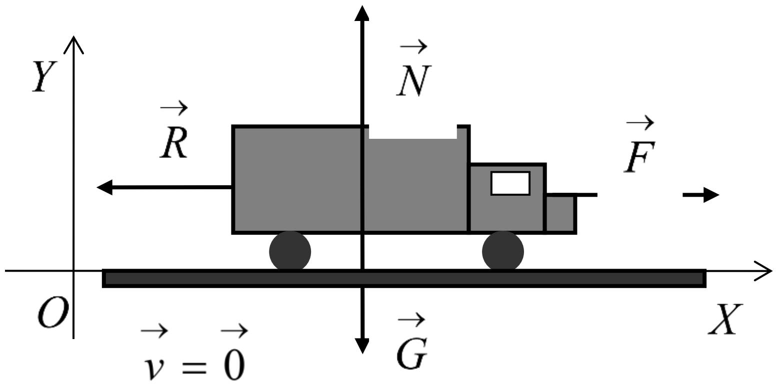


Рис. 2.

Обозначая $\dot{x} = v$, получаем:

$$m\dot{v} = F - kv \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F - kv \Rightarrow \frac{mdv}{F - kv} = dt \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k}\int\frac{d(F - kv)}{F - kv} = t + C \Rightarrow -\frac{m}{k}\ln(F - kv) = t + C.$$

Начальные условия $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = v(0) = 0$. Из условия на скорость получаем, что $C = -\frac{m}{k}\ln F$. Подстановка даёт

$$t = -\frac{m}{k}\ln(F - kv) + \frac{m}{k}\ln F = -\frac{m}{k}\ln\frac{F - kv}{F} \Rightarrow t = -\frac{m}{k}\ln\left(1 - \frac{kv}{F}\right). \quad (1)$$

Так как задана максимальная скорость $v_{\max}$, то из необходимого условия экстремума получаем:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F - kv_{\max} = 0 \Rightarrow k = \frac{F}{v_{\max}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), при $t = t_*$ и $v = v_*$, получаем:

$$t_* = -\frac{m}{F/v_{\max}}\ln\left(1 - \frac{\left(F/v_{\max}\right)v_*}{F}\right) \Rightarrow t_* = -\frac{mv_{\max}}{F}\ln\left(1 - \frac{v_*}{v_{\max}}\right) \Rightarrow$$

$$F = -\frac{mv_{\max}}{t_*}\ln\frac{v_{\max}-v_*}{v_{\max}} \Rightarrow F = \frac{mv_{\max}}{t_*}\ln\frac{v_{\max}}{v_{\max}-v_*}. \otimes$$

Практическое занятие 8. Системы ОДУ

Предварительные сведения

Системы ОДУ вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} = f^1\left(t, y^1, y^2, \ldots, y^n\right), \\ \dfrac{dy^2}{dt} = f^2\left(t, y^1, y^2, \ldots, y^n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy^n}{dt} = f^n\left(t, y^1, y^2, \ldots, y^n\right). \end{cases}$$

называются **системами ОДУ в нормальной форме**, или просто нормальными системами.

Если функции в правой части системы нормальной ОДУ зависят от искомых функций $\left\{y^1(t), y^2(t), \ldots, y^n(t)\right\}$ линейным образом, то есть

$$f^k\left(t, y^1, y^2, \ldots, y^n\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j^k y^j + f^k(t),$$

то нормальную систему ОДУ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^1 y^j + f^1(t), \\ \dfrac{dy^2}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2 y^j + f^2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy^n}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^n y^j + f^n(t). \end{cases}$$

Эквивалентная матрично-векторная форма имеет вид

$$I\frac{d}{dt}\left|y(t)\right\rangle + P(t)\left|y(t)\right\rangle = \left|f(t)\right\rangle,$$

где введены обозначения для матричного дифференциального оператора

$$L = I\frac{d}{dt} + P(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & a_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix},$$

и вектор-столбцов

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix}, \ |f(t)\rangle = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}.$$

Линейная однородная система ОДУ в нормальной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & a_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в матрично-векторной записи

$$I\frac{d}{dt}|y(t)\rangle + P(t)|y(t)\rangle = |0\rangle.$$

Система $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ из n частных решений системы

$$|y_1\rangle = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_1^2(t) \\ \dots \\ y_1^n(t) \end{pmatrix}, |y_2\rangle = \begin{pmatrix} y_2^1(t) \\ y_2^2(t) \\ \dots \\ y_2^n(t) \end{pmatrix}, \dots, |y_m\rangle = \begin{pmatrix} y_m^1(t) \\ y_m^2(t) \\ \dots \\ y_m^n(t) \end{pmatrix}$$

называется **линейно независимой на промежутке** (a, b), если $(\forall t \in (a, b))$

$$\alpha_1|y_1(t)\rangle + \alpha_2|y_2(t)\rangle + \dots + \alpha_n|y_n(t)\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Линейно независимая система $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ из n частных решений однородно системы ОДУ в нормальной форме называется **фундаментальной системой решений** (**ФСР**) этой системы. Векторы ФСР можно расположить в виде матрицы, составленной из их координат по столбцам:

$$Y(t)=\begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Если $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ – линейно независимая система частных решений системы уравнений (4.30), то любое её решение имеет вид

$$|y(t)\rangle=\sum_{k=1}^{n}C_k|y_k(t)\rangle.$$

Общее решение записывается через фундаментальную матрицу в виде:

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

или

$$|y(t)\rangle=Y(t)|C\rangle.$$

Решение задачи Коши

$$I\frac{d}{dt}|y\rangle+P(t)|y\rangle=|0\rangle,\ |y(t_0)\rangle=|y_0\rangle$$

получается из последней формулы за счёт выбора произвольного числового вектора $|C\rangle$. Действительно, имеем

$$|y_0\rangle=Y(t_0)|C\rangle \Rightarrow |C\rangle=Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle,$$

причём обратная матрица $Y^{-1}(t_0)$ существует, так как матрица $Y(t_0)$ невырожденная. Подставляя найденный вектор $|C\rangle$ в формулу для общего решения, получаем решение задачи Коши в виде

$$|y(t)\rangle=Y(t)Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle.$$

Матричная функция

$$G(t,t_0)=Y(t)Y^{-1}(t_0)$$

называется ***функцией Коши***.

Решение однородной системы ОДУ

$$\frac{dy^i(t)}{dt}+\sum_{j=1}^{n}a_j^i y^j(t)=0$$

Ищется в виде

$$y^1(t)=x^1e^{-\mu t},\ y^2(t)=x^2e^{-\mu t},\ \dots,\ y^n(t)=x^ne^{-\mu t}.$$

Подстановка в систему ОДУ приводит к однородной СЛАУ

$$\begin{cases} \left(a_1^1-\mu\right)x^1+a_2^1x^2+\ldots+a_n^1x^n=0, \\ a_1^2x^1+\left(a_2^2-\mu\right)x^2+\ldots+a_n^2x^n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1^nx^1+a_2^nx^2+\ldots+\left(a_n^n-\mu\right)x^n=0. \end{cases}$$

Условие разрешимости СЛАУ имеет вид уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1^1-\mu & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2-\mu & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n-\mu \end{vmatrix}=0,$$

которое называется **характеристическим уравнением**.

В зависимости от структуры матрицы СЛАУ реализуются три случая существования решений характеристического уравнения и, соответственно, три случая построения фундаментальной матрицы для системы ОДУ в нормальной форме.

Случай 1. Пусть все корни $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ уравнения (4.69) различные и вещественные. Этот случай реализуется, если матрица A является матрицей простой структуры. Совершая последовательные подстановки μ_k $\left(k=\overline{1, n}\right)$ в СЛАУ (4.68), получим n экземпляров СЛАУ для нахождения собственных векторов матрицы A:

$$\begin{cases} \left(a_1^1-\mu_k\right)x^1+a_2^1x^2+\ldots+a_n^1x^n=0, \\ a_1^2x^1+\left(a_2^2-\mu_k\right)x^2+\ldots+a_n^2x^n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1^nx^1+a_2^nx^2+\ldots+\left(a_n^n-\mu_k\right)x^n=0. \end{cases} \qquad (4.70)$$

Решив n экземпляров СЛАУ (4.70), найдём линейно независимую систему собственных векторов матрицы A:

$$\left|x_1\right\rangle=\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \ldots \\ x_1^n \end{pmatrix}, \left|x_2\right\rangle=\begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \ldots \\ x_2^n \end{pmatrix}, \ldots, \left|x_n\right\rangle=\begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \ldots \\ x_n^n \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение системы однородной линейной ОДУ записывается в виде

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 e^{-\mu_1 t} & x_2^1 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ x_1^2 e^{-\mu_1 t} & x_2^2 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ x_1^n e^{-\mu_1 t} & x_2^n e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 x_1^1 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^1 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ C_1 x_1^2 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^2 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 x_1^n e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^n e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Пусть корни характеристического уравнения (4.69) различные, но среди них имеются комплексно-сопряжённые. Тогда частные решения (4.72) и, следовательно, общее решение (4.75) будут комплексными функциями. Выделим одну из пар комплексно-сопряжённых корней: $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = \alpha - i\beta$. Этой паре корней соответствуют вещественные частные решения. Исследуем их.

Построим частное решение, соответствующее корню $\mu_1 = \alpha + i\beta$. Это ***комплексное*** решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ \dots \\ y_1^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_1^1 + iz_1^1 \\ x_1^2 + iz_1^2 \\ \dots \\ x_1^n + iz_1^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_2^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_2^1 + iz_2^1 \\ x_2^2 + iz_2^2 \\ \dots \\ x_2^n + iz_2^n \end{pmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \quad \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ \dots \\ y_n^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_n^1 + iz_n^1 \\ x_n^2 + iz_n^2 \\ \dots \\ x_n^n + iz_n^n \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что вещественная и мнимая части решения сами являются решениями однородной системы ОДУ. Эти решения в совокупности образуют линейно независимую систему, которую можно использовать для построения фундаментальной матрицы.

Случай 3. Пусть среди корней характеристического уравнения имеется корень μ_1 кратности k. Можно показать, что тогда ему соответствует решение системы ОДУ вида

$$y^1 = F_1(t) e^{-\mu_1 t},\ y^2 = F_2(t) e^{-\mu_1 t},\ \dots,\ y^n = F_n(t) e^{-\mu_1 t},$$

где $F_1(t),\ F_2(t),\ \dots,\ F_n(t)$ – многочлены от t степени не выше чем $k-1$, имеющие в совокупности k произвольных коэффициентов. Полагая последовательно в этом решении, что один из произвольных коэффициентов многочленов равен единице, а остальные – нулю, получим линейно независимую систему k частных решений системы уравнений ОДУ.

Если μ_1 – вещественное характеристическое число, то полученные частные решения будут вещественными.

Если $\mu_1 = \alpha + i\beta$ – комплексное характеристическое число, то имеется комплексно-сопряжённое характеристическое число $\alpha - i\beta$ той же кратности.

Построив k линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих характеристическому числу $\mu_1 = \alpha + i\beta$ и отделив в них вещественные и мнимые части, получим $2k$ линейно независимых частных решений. Таким образом, паре комплексно-сопряжённых характеристических чисел $\alpha \pm i\beta$ кратности k соответствует $2k$ линейно независимых вещественных частных решений.

В общем случае каждому простому вещественному корню характеристического уравнения соответствует одно частное решение, каждой паре простых комплексно-сопряжённых корней соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения, вещественному корню характеристического уравнения кратности k соответствуют k линейно независимых частных решения, а каждой паре комплексно-сопряжённых корней кратности k характеристического уравнения соответствуют $2k$ линейно независимых частных решения. В совокупности получается n линейно независимых частных решений, из которых можно составить фундаментальную матрицу и, следовательно, записать общее решение системы ОДУ.

Описанная совокупность действий носит название «Метод Эйлера интегрирования линейной однородной системы ОДУ».

Примеры с решением

Пример 6.8.1. Дана система ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} + y^1 + 2y^2 = 0, \\ \dfrac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение этой системы.

Р е ш е н и е. Систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частное решение ищем в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t},\ y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений частное решение и сокращая на неравный нулю множитель $e^{-\mu t}$, получаем

$$\begin{cases} (1-\mu)x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - (\mu + 4)x^2 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, характеристическое уравнение для неё имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ -3 & -\mu-4 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0.$$

Характеристические числа (собственные значения)

$$\mu_1 = -2,\ \mu_2 = -1.$$

1) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 2x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к уравнению

$$3x^1 + 2x^2 = 0.$$

Решение этого уравнения, полагая $x^2 = a \in R^1$, запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Таким образом, имеем первый собственный вектор

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее первому собственному значению, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 3x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$x^1 + x^2 = 0.$$

Полагая $x^2 = b \in R^1$, получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Второй собственный вектор имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее второму собственному вектору, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

3) Составляем фундаментальную матрицу:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение находится по формуле

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Подставляя в эту формулу выражение для фундаментальной матрицы, получаем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C_1 e^{2t} - C_2 e^t \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^t \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 6.8.2. Найти общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 - y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - y_1 - y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Решение ищем в виде

$$y_1 = x_1 e^{-\mu t},\ y_2 = x_2 e^{-\mu t},\ y_3 = x_3 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем СЛАУ для определения собственных векторов

$$\begin{cases} -\mu x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - \mu x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - \mu x_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Эта система уравнений нетривиально совместна, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} -\mu & -1 & -1 \\ -1 & -\mu & -1 \\ -1 & -1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1 = -2,\ \mu_2 = \mu_3 = 1.$$

Корню $\mu_1 = -2$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Если решать данную систему методом Гаусса, то получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем одно решение исходной системы уравнений

$$\left| y_1 \right\rangle = a \left| a_1 \right\rangle = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы СЛАУ (2) при $\mu_2 = \mu_3 = 1$ равен 1, то система уравнений сводится к одному уравнению

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Полагая $x_2 = a$, $x_3 = b$, получаем решение в виде

$$\left| x \right\rangle = a \left| a_2 \right\rangle + b \left| a_3 \right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждому из базисных решений

$$\left| a_2 \right\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =, \left| a_3 \right\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответствует одно частное решение

$$\left| y_2 \right\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \left| y_3 \right\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Определитель, составленный из этих решений

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, найденные решения образуют линейно независимую систему, то есть фундаментальную систему решений исходной системы ОДУ. Составим фундаментальную матрицу

$$Y(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение запишем в виде

$$|y(t)\rangle=\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1e^{2t}-C_2e^{-t}-C_3e^{-t} \\ C_1e^{2t}+C_2e^{-t} \\ C_1e^{2t}+C_3e^{-t} \end{pmatrix}. \otimes$$

Для решения линейной неоднородной системы ОДУ в нормальной форме можно использовать метод Лагранжа. Продемонстрируем его на примере.

Пример 6.8.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}-y_2=0, \\ \dfrac{dy_2}{dt}-y_1=\dfrac{1}{t^2}+\ln t. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Решаем систему методом Лагранжа. Для этого сначала находим общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}-y_2=0, \\ \dfrac{dy_2}{dt}-y_1=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя $y_1=x_1e^{-\mu t}$ и $y_2=x_2e^{-\mu t}$, записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \mu^2-1=0:\ \mu_1=-1;\ \mu_2=1.$$

Находим собственные векторы.

1) Для $\mu_1=-1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1-x_2=0 \Rightarrow x_2=a \Rightarrow x_1=a.$$

Вектор решения принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый собственный вектор

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_2 = 1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b.$$

Второй собственный вектор

$$|x_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь частные решения имеют вид:

$$\mu_1 = -1 \Rightarrow |y_1\rangle = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = 1 \Rightarrow |y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2) записывается так:

$$|y(t)\rangle = C_1 |y_1\rangle + C_2 |y_2\rangle = C_1 e^{-\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

откуда имеем

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},\ y_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Общее решение неоднородной системы ищем в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-t}, \\ z_2(t) = C_1(t) e^t - C_2(t) e^{-t}. \end{cases} \tag{3}$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем после дифференцирований и приведения подобных

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt}(t) \cdot e^t + \dfrac{dC_2}{dt}(t) \cdot e^{-t} = 0, \\ \dfrac{dC_1}{dt}(t) \cdot e^t - \dfrac{dC_2}{dt}(t) \cdot e^{-t} = \dfrac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Решение системы по формулам Крамера имеет вид:

$$\frac{dC_1}{dt}(t)=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2}+\ln t & -e^{-t} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t^2}+\ln t\right),$$

$$\frac{dC_2}{dt}(t)=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2}+\ln t & -e^{-t} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t^2}+\ln t\right).$$

Откуда, после интегрирования получаем

$$C_1(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)+A_1,\ C_2(t)=\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t}-\ln t\right)+A_2.$$

Подставляя в формулы (3), получаем общее решение неоднородной системы уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} z_1(t)=A_1e^t+A_2e^{-t}-\ln t, \\ z_2(t)=A_1e^t-A_2e^{-t}-\frac{1}{t}. \end{cases} \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I=\int\limits_W xy\,dl,$$

где путь $W-$ контур треугольника с вершинами: $A(-1;\,0)$, $B(1;\,0)$, $C(0;1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int\limits_W (x+y)dx-xdy,$$

где путь W – отрезок ломаной линии, соединяющий точки

$$A(0;\,0),\ B(2;\,0),\ C(4;\,2).$$

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int\limits_W xdy-ydx,$$

где $W-$ путь, заданный неявным уравнением $y=x^3$, соединяющий точки $A(0;\,0)$ и $B(2;\,8)$

.

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int\limits_W x^2dx+y^2dy,$$

где $W-$ путь, заданный неявным уравнением $y=\sqrt{x}$, соединяющий точки $A(0;\,0)$ и $B(1;1)$
.

5. Вычислить двойной интеграл

$$I=\iint\limits_D\left(5x^2y-2y^3\right)dxdy$$

по прямоугольнику $D=\{(x,\,y)\in R_2:2\le x\le 5\wedge 1\le y\le 3\}$.

6. Вычислить двойной интеграл

$$I=\iint\limits_D\left(x^2+y\right)dxdy$$

по области, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y^2=x$.

7. Вычислить двойные интегралы, переходя к полярным координатам:

а) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где D – круг $x^2+y^2\le 1$;

б) $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D – круг $x^2+y^2\le 4$;

в) $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D – круг $x^2+y^2\le 2x$;

г) $\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, где D – первая четверть круга $x^2+y^2\le 1$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями:

а) $y=\ln x$, $x-y=1$, $y=-1$;

б) $y=x^2$, $4y=x^2$, $x=2$, $x=-2$.

9. Вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V\dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена плоскостями с уравнениями

$x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

б) $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz$, где область V ограничена плоскостями с уравнениями

$x=0,\ y=0, z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1.$

10. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями с уравнениями $x^2+y^2=1,\ z=2$;

б) $\iiint\limits_V zdxdydz$, где область V ограничена поверхностями с уравнениями $x^2+y^2=1$, $z=0,\ z=a\ (a>0)$.

11. Переходя к сферическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область V – это шар $x^2+y^2+z^2\le R^2$;

б) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область V – это верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

12. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint\limits_F (x+18y+24z)ds$, где поверхность F задана неявным уравнением

$x+2y+3z=1,$

и неравенствами $x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0$;

б) $\iint\limits_F \left(x^2+y^2\right)ds$, где поверхность F задана неявным уравнением

$x^2+y^2-z^2=0,$

и неравенствами $0\le z\le 1$.

13. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint\limits_F zdxdy$, где поверхность F – верхняя сторона верхней половины сферы

$$x^2+y^2+z^2=9;$$

б) $\iint\limits_F \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где поверхность F – верхняя сторона части параболоида с уравнением

$$z=1-x^2-y^2,$$

отсечённая плоскостью $z=0$.

14. Найти производную скалярного поля $u=x^2+y^2-3x+2y$ по направлению радиуса-вектора точки $M(3;4)$ в начале координат.

15. Найти градиент плоского скалярного поля $u=\sqrt{4+x^2+y^2}$ в точке $M(2;1)$.

16. Найти производную функции, определённой формулой $u=\dfrac{xyz}{3}$, в точке $M_0(1;2;3)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$, если $M(4;1;6)$.

17. Доказать, что

а) $\operatorname{grad} r=\dfrac{\vec{r}}{r}$; б) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}=-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

18. Показать, что

$$\operatorname{grad} f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

19. Найти

а) $\operatorname{div}\vec{r}$; б) $\operatorname{div}\left(r^4\,\vec{r}\right)$; в) $\operatorname{div}\left(\left(\vec{A},\vec{r}\right)\vec{B}\right)$.

20. Найти $\operatorname{div}\vec{A}$, если:

а) $\vec{A}=(x-y)(y-z)\vec{e}_1+(y-z)(z-x)\vec{e}_2+(z-x)(x-y)\vec{e}_3$;

б) $\vec{A}=\left(x^2+y^2\right)(y-z)\vec{e}_1+\left(y^2+z^2\right)(z-x)\vec{e}_2+\left(z^2+x^2\right)(x-y)\vec{e}_3$.

21. Найти ротор векторного поля $\vec{A}(M)$:

а) $\vec{A} = \frac{y}{x}\vec{e}_1 + \frac{z}{y}\vec{e}_2 + \frac{x}{z}\vec{e}_3$;

б) $\vec{A} = yz\,\vec{e}_1 + z(x+2y)\vec{e}_2 + y(x+y)\vec{e}_3$.

22. Доказать двумя способами (в декартовых координатах и с помощью оператора Гамильтона), что для произвольного скалярного поля $\varphi(M)$ и для произвольных векторных полей $\vec{A}(M)$ и $\vec{B}(M)$ справедливы следующие формулы:

а) $\left(\vec{A}, \nabla\right)\varphi\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{A}, \nabla\varphi\right) + \varphi\left(\vec{A}, \nabla\right)\vec{B}$;

б) $\vec{C}\cdot\nabla\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \vec{A}\cdot\left(\left(\vec{C}, \nabla\right), \vec{B}\right) + \vec{B}\cdot\left(\left(\vec{C}, \nabla\right), \vec{A}\right)$;

в) $\left(\vec{C}, \nabla\right)\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \left[\vec{A}, \left(\vec{C}, \nabla\right)\vec{B}\right] - \left[\vec{B}, \left(\vec{C}, \nabla\right)\vec{A}\right]$.

23. Найти результат действия векторных дифференциальных операций:

а) $\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\varphi)$;

б) $\operatorname{rot}(\varphi\operatorname{grad}\psi)$;

в) $\operatorname{rot}\left[\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{\mathrm{B}}\right]$.

24. Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2y\,\vec{e}_1 + 6x\,\vec{e}_2$;

б) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2x\,\vec{e}_1 + 3y\,\vec{e}_2$;

в) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 2y\,\vec{e}_2 + 6z\,\vec{e}_3$.

25. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ вдоль заданного замкнутого контура с заданной параметризацией:

а) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = y\vec{e}_1 - z\vec{e}_2 + x^2 y\vec{e}_3,$

$x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,\ t \in [0,\ 2\pi]$;

б) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = z\vec{e}_1 - x\vec{e}_2 + yz\vec{e}_3,$

$x = 2\cos t,\ y = 6\sin t,\ z = 3,\ t \in [0,\ 2\pi]$;

в) $\vec{A}\left(\vec{x}\right) = 4y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + y\vec{e}_3,$

$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2 - \cos t - \sin t,\ t \in [0,\ 2\pi]$.

26. Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1) Решить уравнение $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$.

2) Решить уравнение $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$.

3) Решить уравнение $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

27. Найти общее решение уравнения с однородной правой частью.

1) Найти интегральные кривые уравнения $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

2) Найти интегральные кривые уравнения $y' = \frac{y}{x} - 1$.

3) Найти интегральные кривые уравнения

$\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$.

28. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Если указаны начальные условия, то найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

1) $(2x+1)\frac{dy}{dx}=4x+2y$.

2) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0$, $y(0)=0$.

3) $x\frac{dy}{dx}+y-e^x=0$, $y(a)=b$.

4) $\frac{dy}{dx}\cos^2 x+y=\operatorname{tg}x$, $y(0)=0$.

5) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x$, $y(e)=\frac{e^2}{2}$.

6) $\frac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=\cos x$, $y(0)=0$.

7) $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{\sin x}$, $y(0)=0$.

8) $x\frac{dy}{dx}+y=x^2$.

9) $x^2\frac{dy}{dx}-2xy=3$.

10) $x^2\frac{dy}{dx}-2xy=3y$.

11) $\frac{dy}{dx}-ay=e^{bx}$.

29. Найти общее решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка выше второго.

1) $\frac{d^3y}{dx^3}-8y=0$. 2) $\frac{d^4y}{dx^3}-y=0$. 3) $\frac{d^4y}{dx^4}-5\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$.

4) $\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^3y}{dx^3}+8\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}+4y=0$.

5) $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 6\dfrac{d^4y}{dx^4} + 9\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$.

30. Найти общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = -12x^2 + 6x - 4$.

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 4e^x$.

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = -4e^x + 3$.

4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 6\sin 2x$.

5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = -13\sin 2x$.

31. Найти общее решение однородных систем ОДУ методом Эйлера.

1) $\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} - 2y^1 + 3y^2 = 0, \\ \dfrac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dt} - 2y^1 + 3y^2 = 0, \\ \dfrac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 4y_1 + y_2 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - 3y_1 - y_2 + y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - y_1 - y_3 = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} + y_1 - y_2 - y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - y_1 + y_2 - y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = 0. \end{cases}$

5) $\dfrac{d}{dt}|y\rangle = A|y\rangle$, $|y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $$\frac{d}{dt}|y\rangle = A|y\rangle,\ |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

32. Решить неоднородные системы ОДУ методом Лагранжа.

1) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 = \cos t, \\ \dfrac{dy_2}{dt} + y_1 = 1. \end{cases}$$
2) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 2y_1 + 4y_2 = 4e^{-2t}, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - 2y_1 + 2y_2 = 0. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -t + 2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} + y_1 = 1, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = -t + 1. \end{cases}$$

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный университет»

О. В. Садырева, И. Г. Коршунов

Ф И З И К А

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург

2020

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:

- Внимательно прочитать условие задачи.
- Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
- Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
- Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
- Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
- Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать но оси координат и записать в скалярной форме.
- Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
- После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.
- Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.

2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением 1,2 м/с2 , останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?

3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.

4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.

5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?

6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S = 800 + 8t - 0{,}5\, t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?

8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.

9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

10. На горизонтальной платформе шахтной клети находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 $м/^2$, при спуске с ускорением 9,8 $м/с^2$.

11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.

13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. =736 Вт). Определить коэффициент трения.

14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением 0,5 $м/^2$, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30°.

15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5°.

16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 $мин^{-1}$.Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки 1,2 кН·м. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом 0,6 м, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен 0,5.

19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой $8c^{-1}$.Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1м.

23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергия поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом 0,4м и имеющий массу 100 кг, был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с. Определить момент сил трения.

2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 106 Па и температуре 20°С? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л. Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и темпера-тура 16°С. Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°С и 7°С. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом C_2 H_2 при температуре 27° С до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена из-расходована, если давление в баллоне при температуре 23°С стало равным 14 МПа ? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°С. Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450° С. Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600° С, если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно 10^5 Па, а начальная температура 17° С?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 см^3 воздуха в секунду при давлении 50 атм ?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800° С. До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°С, γ=1,4?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до 10^{-15} мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 см^3 при указанном давлении и температуре 27° С ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана CH_4 до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20° С, а после него 2600° С. Молярная масса 0,016 кг/моль.

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода CO, принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°С до 100° С надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47° С, а объем увеличился в 10 раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600° С до 2000° С. Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны 1,25 кДж/(кг·К) и 0,96 кДж/(кг·К).

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 $м^3$ в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227° С. Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежечасно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9° С. Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит 0,02Кл заряда. Ширина ремня 0,3м, скорость его движения 20 м/с. Какой заряд проходит ежесекундно через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?

48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6 \cdot 10^3$ км и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м.

49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ, заряд каждой пластины 10 нКл. Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см.

50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ, расстояние 1 мм, диэлектрик слюда ($\varepsilon = 6$), площадь каждой пластины 300 см^2 ?

51. Какую работу надо совершить , чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от 0,03 м до 0,1 м? Площадь пластин 100 см^2. Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В.

52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В, потребляя ток в 40 А. Напряжение на электростанции 120 В, а расстояние до нее 1 км. Определить сечение медных соединительных проводов ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом м).

53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 1,5 мм для изготовления спирали вулканизатора , применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали 5,5 Ом, а удельное сопротивление нихрома $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом м?

54. Цена деления прибора $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ А /дел. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом. Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А?

55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре 30^0 С. Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м. Площадь сечения проводов 0,8 мм^2, $\rho = 0{,}017$(Ом$\cdot$ мм^2 /м), $\alpha = 0{,}0044$ град-1.

56. ЭДС батареи 12 В, ток короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?

57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность 9,5 Вт, а при токе 8 А мощность 14,4 Вт.

58. Ток в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от 0 до 10 А в течение 30 с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние 5 см от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром 10 см, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе 0,2 А. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля 12,8 А /м . Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли,
если обмотка тангенс–буссоли имеет 10 витков радиусом 25 см. При токе 0,64 А стрелка отклоняется на угол 45°.

63. Плоский контур площадью 20 см ^{2} находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,03 Тл. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром 51 см и вакуумным зазором 2 мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800.

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита , если проводник массой 10 г и длиной 1м при токе в нем 19,6 А висит в поле , не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл движется проводник длиной 10 см со скоростью 15 м /с, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника 15 см^2, Индукция магнитного поля в сердечнике 1,4 Тл. Вычислить величину средней ЭДС , возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение 0,001с.

68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 см^2, длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника
0,56м.

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой 5 мм и частотой 1500 мин$^{-1}$. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 мин$^{-1}$. Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 мин$^{-1.}$ Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 с$^{-1}$.

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0{,}5\sin t$, $y = 2\cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5\sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0{,}1\sin 0{,}5\pi t$ (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2{,}3\cdot 10^3$ кг/м^3.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6}\sin 10^4\pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5\cdot 10^3$ м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см^2 и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см^2.

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2{,}5\cdot^{10-6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух

пластин площадью 75 $см^2$ каждая, рас-стояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 25 нФ. На обкладках конденсатора сосредоточен заряд 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2{,}5 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 0,01 $м^2$ и расстоянием между ними 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м.

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГн. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В. На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50\cos 10^4 \pi t$(В). Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80пФ и катушки с индуктивностью 1,2 мГн. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 $см^2$ имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 $см^2$ каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 см^2 каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга I мм, расстояние от щелей до экрана 3м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластинки освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0°, длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза (n=1,5) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете (λ =600 нм).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Нью-она в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1°. Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет (λ=0,6 мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на I мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен 35°. Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.
116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43°. Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57°. Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45°. Во сколько раз
уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60°?

120. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4$К. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 К, определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт. Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 $см^2$.

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна 0,55 Дж. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре 1100 К посылает на измерительный прибор некоторое тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм. Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 $см^2$, чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм. Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона I эВ?

128. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм. Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм.

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм.

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы

отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 $см^2$ ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно 2,2·10-7$Н/м^2$. Сколько фотонов падает на I $см^2$за одну секунду?

6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна 1,097·107$м^{-1}$.

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.
136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона $9{,}1\cdot10^{-31}$кг, масса протона $1{,}67\cdot10^{-27кг}$.

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью $6\cdot10^6$м/с, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51МэВ.

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки, составляет 0,85 скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения (λмин =77,6 пм). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии (n=2).
Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.
46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?
147. В одномерной потенциальной яме шириной l находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса L_Z орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной
l
с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии (n=3).

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция $_{38}Sr^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько β-частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа $_{11}Na^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат $_{92}U^{238}$ массой 1 г излучает $1{,}24\cdot10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода $_{53}J^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько β-частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора $_{15}P^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.

158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра $_7N^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. (m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра $_6C^{12}$, если известно, что m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0$n1 = 1,00867 а.е.м.; m $_{12}C^6$ = 12,00000 а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. (m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода $_8O^{16}$, если m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.;
m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_8O^{16}$ = 1 5,99491 а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома $_{11}Na^{23}$, если m $_{11}Na^{23}$ = 22,98977а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $_3Li^7$, если известно, что m $_3Li^7$ =7,01601 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода $_1H^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра $_5B^{11}$,если известны следующие массы: m $_5B^{11}$ = 11,00931 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра $_{11}Na^{23}$, если известны следующие массы: m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_{11}Na^{23}$ = 22,98977 а.е.м.; m $_{11}Na^{22}$ = 21,99444 а.е.м.

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра $_2He^4$,если известны массы: m $_0n$ ^{1}= 1,00867 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_2He^3$ = 3,01603 а.е.м.

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра $_8O^{16}$ ($_8O^{16} \rightarrow {}_7N^{15} + {}_1H^1$). m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_8O^{16}$ = 15,99491 а.е.м.; m $_7N^{15}$ = 15,00011 а.е.м.

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$, если m $_{13}Al^{27}$ =2 6,98154 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_{15}P^{30}$= 29,97263 а.е.м.; m $_0n$ ^{1}= 1,00867 а.е.м.

172.Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: $1H^2 + {}_1H3 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1$, если m $_1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; m $_1H^3$ =3,01605 а.е.м.; m $_0n^1$ =1,00867 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция $_2He^3 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1H^1$. Вычислить энергию этой реакции. (m $_2He^3$ = 3,01603 а.е.м.; m $_1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.).

174. Вычислить энергию ядерной реакции $_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1$. (m $_7N^1$ ^{4}= 14,00307а.е.м.; m $_0n^1$ =1,00867 а.е.м ; m $_6C^{14}$= 14,00324 а.е.м.; m $_1H^1$= 1,00783 а.е.м.).

175. Определить энергию ядерной реакции $_3Li6 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4$. (m $_3Li^6$ = 6,01513 а.е.м.; m $_1H$ ^{2}= 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ =4 ,00260 а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра $_6C^{14}$? Известны массы: m $_6C^{14}$ = 14,00324 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.; m $_6C^{13}6$ = 13,00335а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить $_6C^{12}$ на три равные части.(m $_6C^{12}$= 12,00000 а.е.м.; m $_2He^4$= 4,00260 а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции $_{20}Ca^{14} + _{1}H^{1} \rightarrow _{19}K^{41} + 2He^{4}$. (m $_{20}Ca^{4\ 4}$= 43,95549 а.е.м.; m $_{1}H^{1}$ = 1,00783 а.е.м.; m $_{2}He^{4}$ = 4,00260 а.е.м.; m $_{19}K^{41}$= 40,96184 а.е.м.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

8.1 Основная литература

.

1.	И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с.
2.	В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.)
3.	Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23753.html - ЭБС «IPRbooks».
4.	Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62614.html -ЭБС «IPRbooks».
5.	Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с.

Дополнительная литература

1. И..Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/48021.html -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/30092.html - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45392.html - ЭБС «IPRbooks».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$3.00 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2)
Число Авогадро	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8.31 Дж/(моль$\cdot$К)
Постоянная Больцмана	k	$1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	*1а.е.м.*	$1.660 \cdot 10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	h $\hbar$	$6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с $1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж/с

Приложение 2

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Множитель	Приставка			Множитель
Наименование	Обозначение			Наименование	Обозначение		
	русское	между-народное			русское	между-народное	
экса	Э	E	10^{18}	деци	д	d	10^{-1}
пэта	П	P	10^{15}	санти	с	c	10^{-2}
тера	Т	T	10^{12}	милли	м	m	10^{-3}
гига	Г	G	10^{9}	микро	мк	μ	10^{-6}
мега	М	M	10^{6}	нано	н	n	10^{-9}
кило	к	k	10^{3}	пико	п	p	10^{-12}
Гекто	г	h	10^{2}	фемто	ф	f	10^{-15}
Дека	да	da	10^{1}	атто	а	a	10^{-18}
Примечание: Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.)							

Приложение 3

Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

Приложение 4

Внесистемные единицы

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна атомная единица массы	т а.е.м.	10^{3} кг $1.66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута час сутки	мин ч сут	60 с 3600 с 86400 с
Плоский угол	градус минута секунда град	…● …′ …″ град	$1.74 \cdot 10^{-2}$ рад $2.91 \cdot 10^{-4}$ рад $4.85 \cdot 10^{-6}$ рад (π/200) рад
Объем, вместимость	литр	Л	10^{-3} $м^{3}$
Длина	астрономическая единица световой год парсек	а.е. св. год пк	$1.50 \cdot 10^{11}$ м $9.46 \cdot 10^{15}$ м $3.08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	Дптр	1 $м^{-1}$
Площадь	гектар	Га	10^{4} $м^{2}$
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В$\cdot$А	
П р и м е ч а н и е: Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.			

Приложение 5

Плотность некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, г/$см^{3}$	Твердое тело	Плотность, г/$см^{3}$
Алюминий	2.70	Цезий	1.90
Барий	3.50	Каменная соль	2,2
Ванадий	6.02	Латунь	8,55
Висмут	9.80	Марганец	7,40
Железо (чугун, сталь)	7.88	Платина	21,4
Литий	0.53	Золото	19,3
Медь	8.93	Висмут	9,8⊙
Никель	8.90	Уран	18,7
Свинец	11.3	Цинк	7.15
Серебро	10.5	Вольфрам	19,3

Приложение 6

Плотность некоторых жидкостей и газов

Жидкость (при 15° С)	Плотность, $г \cdot /см^3$	Газ (при нормальных условиях	Плотность, $кг/м^3$
Вода (дистиллированная при 4°С)	1.00	Водород	0.09
Глицерин	1.26	Воздух	1.29
Керосин	0.8	Гелий	0.18
Ртуть	13.6	Аргон	1,78
Масло (оливковое, смазочное)	0.9	Азот	1,25
Масло касторовое	0.96	Кислород	1.43
Сероуглерод	1.26		
Эфир	0.7		
Спирт	0.80		

Приложение 7

Удельное сопротивление ρ некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, Ом·м	Материал	Удельное сопротивление, Ом·м
Алюминий	$2{,}53 \cdot 10^{-8}$	Ртуть	$9{,}6 \cdot 10^{-7}$
Алюминий провод	$2{,}87 \cdot 10^{-8}$	Свинец	$2{,}08 \cdot 10^{-7}$
Бумага	10^{15}	Серебро	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$
Вода дистиллированная	10^{4}	Сталь литая	$1{,}3 \cdot 10^{-7}$
Вода морская	0,3	Сталь чистая	$1{,}01 \cdot 10^{-7}$
Вольфрам	$5{,}5 \cdot 10^{-8}$	Стекло	10^{11}
Графит	$3{,}9 \cdot 10^{-6}$	Стекло кварцевое	10^{16}
Железо чистое	$9{,}8 \cdot 10^{-8}$	Угольные щётки	$4 \cdot 10^{-5}$
Железо	$8{,}7 \cdot 10^{-8}$	Цинк	$5{,}9 \cdot 10^{-8}$
Золото	$2{,}2 \cdot 10^{-8}$	Чугун серый	$1 \cdot 10^{-6}$
Константан	$5 \cdot 10^{-7}$	Никель	$8{,}7 \cdot 10^{-8}$
Масло парафиновое	10^{14}	Нихром	$1{,}12 \cdot 10^{-6}$
Магний	$4{,}4 \cdot 10^{-8}$	Олово	$1{,}2 \cdot 10^{-7}$
Манганин	$4{,}3 \cdot 10^{-7}$	Платина	$1{,}07 \cdot 10^{-7}$
Медь	$1{,}72 \cdot 10^{-8}$	Медь провод	$1{,}78 \cdot 10^{-8}$

Приложение 8

Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Ацетон	21,4	Парафин	2,0
Вакуум	1,0	Парафинированная бумага	2,0
Воздух	1,000594	Полиэтилен	2,2
Вода	81	Слюда	7,0
Вода дистиллированная	31	Спирт этиловый	25,1
Воск	7,8	Спирт метиловый	33,5
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	5,0	Фарфор	5,0
Масло трансформаторное	2,2	Эбонит	2,6

Приложение 9

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α, α	Альфа	Ν, ν	ню
Β, β	Бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	Гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	Дэльта	Π, π	пи
Ε, ε	Эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ς	Дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	Эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	Тэта	Υ, υ	ипсилон
J, i	Иота	Φ, φ	фи
Κ, κ	Каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	Ми	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

Н. А. Зайцева

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ

***Учебно-методическое пособие
для выполнения лабораторных и контрольных
работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия»
для студентов всех специальностей***

**Екатеринбург
2020**

З17

Рецензент: Т. И. Красненко, д-р химических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории оксидных систем ИХТТ УрО РАН

Зайцева Н. А.
З17 КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ: учебно-методическое пособие для выполнения лабораторных и контрольных работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия» для студентов всех специальностей / Н. А. Зайцева. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. – 35 с.

В учебно-методическом пособии изложены краткие сведения о качественных реакциях в неорганической химии. Пособие содержит необходимые сведения для выполнения лабораторных работ по качественному анализу катионов и решения задач.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

Качественная реакция – химическая реакция, с помощью которой можно определить наличие в растворе того или иного вещества или его фрагмента (катиона, аниона, функциональной группы). Качественная реакция на ионы позволяет обнаружить («открыть») в растворе присутствие соответствующих ионов. При обнаружении открываемого иона обычно фиксируют появление аналитического сигнала — образование осадка, изменение окраски раствора, появление запаха и т. д.

Требования к качественным реакциям

1. Экспрессность (реакция должна протекать быстро).
2. Высокая чувствительность.
3. Селективность или специфичность.
4. Необратимость.

Чувствительность реакции определяется наименьшим количеством искомого вещества, которое может быть обнаружено данным реактивом в капле раствора.

Существенной характеристикой анализа является селективность (избирательность).

По избирательности реагенты можно разделить на три группы:

1. *Специфические реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить только одно вещество (ион),

например: крахмал для обнаружения I_2 (синяя окраска); щёлочь для обнаружения NH^{4+} (запах аммиака).

Специфические реакции – реакции, которые дают возможность открывать одни ионы в присутствии различных других ионов.

2. *Селективные реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить небольшое число веществ. Например, диметилглиоксим в аммиачном буферном растворе реагирует с Fe (II), Co (II), Ni (II), Zr (IV), Th (IV).

3. *Групповые реагенты* – используются в систематическом анализе смеси катионов и взаимодействуют со всеми катионами одной аналитической группы.

Реакции, позволяющие обнаружить искомые ионы в отдельных порциях сложной смеси при условии устранения влияния других ионов, называют **дробными реакциями**, а метод анализа, основанный на применении дробных реакций, называют **дробным анализом.** При этом порядок обнаружения катионов и анионов не имеет особого значения. При **систематическом анализе**, в отличие от дробного, соблюдается определенный порядок разделения и последующего открытия ионов. К обнаружению ионов приступают лишь после удаления из раствора всех других ионов, мешающих открытию. Систематический (групповой) анализ применяют при невозможности использования дробного анализа. На основе растворимости их солей или других соединений ионы делят на аналитические группы, на основании различных классификаций катионов разработаны разные методы систематического анализа катионов.

Методы систематического анализа

1. Сероводородный – основан на разной растворимости сульфидов и хлоридов в зависимости от *pH*-среды.

2. Аммиачно-фосфатный – основан на разной растворимости фосфатов.

3. Кислотно-основной – основан на разной растворимости в кислотах и основаниях гидроксидов и солей (табл. 1).

Таблица 1

Классификация катионов по кислотно-основному методу

Группа	Катионы	Групповой реактив	Характеристика группы
I	Na^+, K^+, NH_4^+	–	Хлориды, сульфаты и гидроксиды растворимы в воде
II	Ag^+, Pb^{2+}, Hg_2^{2+}	2M HCl	Хлориды нерастворимы в воде и разбавленных кислотах
III	Ca^{2+}, Sr^{2+}, Ba^{2+}	2M H_2SO_4	Сульфаты нерастворимы в воде, кислотах и щелочах
IV	Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}, $^*As^{3+}$, $^*As^{5+}$, Sn^{2+}, Sn^{4+}	4M NaOH (избыток)	Гидроксиды амфотерны, растворимы в избытке щелочи
V	Fe^{2+}, Fe^{3+}, Mn^{2+}, Mg^{2+}, Bi^{3+}, Sb^{3+}, Sb^{5+}	2M NaOH (25 % NH_4OH)	Гидроксиды нерастворимы в избытке щелочи и аммиаке
VI	Cu^{2+}, Co^{2+}, Ni^{2+}, Hg^{2+}, Cd^{2+}	25% NH_4OH (избыток)	Гидроксиды растворимы в избытке аммиака с образованием аммиакатов

$^*As^{3+}$ и As^{5+} гидроксидов не образуют.

Лабораторная работа № 1
КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на катионы железа, определить наиболее подходящие реактивы для открытия Fe^{3+} и Fe^{2+}.

Для получения аналитического сигнала в качественном анализе используют химические реакции разных типов: реакции ионного обмена (осаждение, нейтрализация), окислительно-восстановительные, комплексообразование. Для обнаружения ионов железа возможно использование всех типов реакций.

Реакции ионного обмена в качественном анализе

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов $FeCl_3$ и $FeSO_4$, добавьте по 1 мл раствора щёлочи в каждую пробирку. Сравните полученные осадки $Fe(OH)_3$ и $Fe(OH)_2$, составьте уравнения обеих реакций. Растворимы ли полученные гидроксиды железа в избытке щёлочи?

Опыт 2. Действие раствора аммиака на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл разбавленного раствора гидроксида аммония в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций. Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на оба осадка: образуют ли ионы железа аммиачные комплексы?

Реакции окисления-восстановления

Опыт 3. Действие окислителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

а) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор перманганата калия, в какой из них наблюдается обесцвечивание $KMnO_4$? Запишите уравнение реакции, учитывая, что в кислой среде перманганат-ионы восстанавливаются до ионов Mn^{2+}, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

б) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор бихромата калия, в какой из них наблюдается изменение окраски раствора? Запишите уравнение реакции, учитывая, что бихромат-ионы $Cr_2O_7^{2-}$ восстанавливаются до ионов Cr^{3+}, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

Опыт 4. Действие восстановителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 1 мл раствора йодида калия. Какая из солей железа проявила окислительный свойства? Запишите уравнение реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Реакции с участием комплексных ионов

Опыт 5. Реакция ионов железа с роданидом аммония

В две пробирки налейте по 1 мл раствора $FeCl_3$ и $FeSO_4$, добавьте по 1 мл раствора роданида аммония NH_4SCN в каждую пробирку. В какой из пробирок наблюдается образование роданида железа красного цвета? Составьте уравнение реакции.

Опыт 6. Реакция ионов железа с реактивом Чугаева

В две пробирки налейте по 1 мл раствора соли железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл раствора аммиака и по 1 капле раствора диметилглиоксима ($C_4H_8N_2O_2$). Для какого иона железа наблюдается образование окрашенного внутрикомплексного соединения с реактивом Чугаева? Составьте уравнение реакции образования диметилглиоксимата железа [Fe $(C_4H_7O_2N_2)_2$].

Опыт 7. Берлинская лазурь и турнбуллева синь

На растворы $FeCl_3$ и $FeSO_4$ подействуйте каплей раствора жёлтой кровяной соли (гексацианоферрата (II) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок берлинской лазури имеет состав $Fe_4[Fe(CN)_6]_3$.

На растворы $FeCl_3$ и $FeSO_4$ подействуйте каплей раствора красной кровяной соли (гексацианоферрата (III) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок турнбуллевой сини имеет состав $Fe_3 [Fe (CN)_6]_3$. Сделайте вывод, какой кровяной солью можно открыть ион Fe^{2+}, и с помощью какой обнаруживается ион Fe^{3+}.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что произойдет с зеленоватым осадком $Fe (OH)_2$ при добавлении к нему раствора перекиси водорода H_2O_2? Запишите уравнение реакции, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

2. Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов $FeCl_3$ и NaOH, если ПР ($Fe (OH)_3$) = $3{,}8 \cdot 10^{-38}$, а концентрации растворов 0,001 моль/л? Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов $FeSO_4$ и NaOH, если ПР ($Fe (OH)_2$) = $4{,}8 \cdot 10^{-16}$, а концентрации обоих растворов 0,001 моль/л?

3. Какой объём соляной кислоты с концентрацией 0,01 моль/л требуется для полного растворения осадка $Fe (OH)_3$ массой 0,5 г?

4. Реакция образования окрашенного роданида железа (опыт 3) является обратимой. Запишите выражение для константы равновесия этой реакции. Какими способами, согласно принципу Ле-Шателье, можно сместить равновесие в сторону образования окрашенного продукта?

5. Запишите уравнения реакций первичной и вторичной диссоциации красной и жёлтой кровяных солей. Почему чаще всего именно цианид-ионы используются для маскирования ионов железа в растворах?

6. Подвергаются ли соли железа гидролизу? Запишите уравнения взаимодействия с водой для $FeCl_3$ и $FeSO_4$, определите тип гидролиза и кислотность среды раствора. Какую окраску приобретёт лакмус в этих растворах?

Лабораторная работа № 2
КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы **Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}**, выполняемыми пробирно, капельно, и с использованием экстракции, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Предел обнаружения – минимальная концентрация или минимальное количество вещества, которое может быть обнаружено данным методом допустимой погрешностью. Предел обнаружения в значительной степени зависит от условий протекания реакции. Обычно для обнаружения ионов применяют реакции с пределом обнаружения 10^{-7} г (0,1мкг) в 1 мл раствора.

Приемы для обеспечения низкого предела обнаружения

1. *Капельный анализ* – метод микрохимического анализа, в котором качественную реакцию проводят с использованием капли раствора. Реакции выполняют на стеклянной или фарфоровой пластинке, фильтровавальной бумаге (иногда предварительно пропитанной раствором реагента и высушенной). Пределы обнаружения веществ 0,1–0,001 мкг в капле объемом 50 мм^3. Минимальные пределы обнаружения достигаются при выполнении анализа на фильтровальной бумаге.

2. *Микрокристаллоскопический анализ* – метод анализа, основанный на реакциях образования кристаллических осадков с

характерной формой кристаллов, для рассмотрения которых используется микроскоп.

3. *Экстракция* – процесс переведения вещества из водной фазы в органическую, используется для разделения и концентрирования веществ.

4. *Флотация* – процесс разделения мелких твёрдых частиц в водной суспензии или растворе, основанный на их избирательной адсорбции на границах раздела фаз в соответствии с их смачиваемостью, используется для разделения и концентрирования.

5. *Метод «умножающихся реакций»* – ряд последовательных реакций, в результате которых получается новое вещество в количестве, во много раз превышающем первоначальное количество обнаруживаемого вещества.

6. *Каталитические реакции*.

Реакции в пробирке (в растворе)

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку. Составьте уравнения реакций образования синего $CoOHCl$, голубого $CuOHCl$ и зелёного $NiOHCl$. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком концентрированной щёлочи, составьте уравнения реакций образования гидроксидов кобальта (II), никеля (II) и меди (II).

Опыт 2. Действие раствора аммиака на Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки, запишите уравнения реакций, учитывая, что в аммиачных комплексах кобальта и никеля координационное число комплексообразователя равно шести, а медь удерживает только четыре лиганда.

Разрушаются ли полученные аммиакаты раствором кислоты?

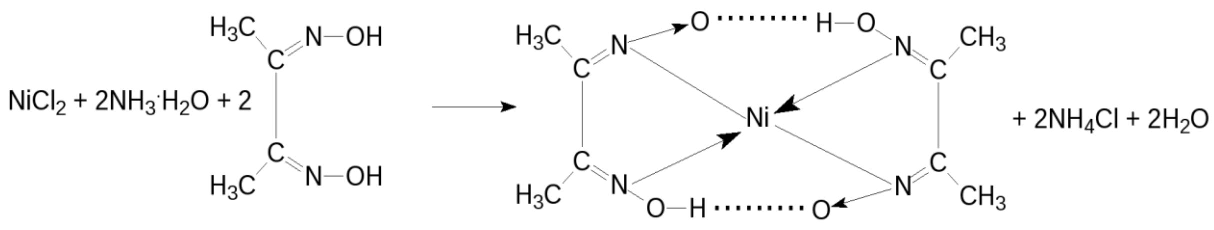
Опыт 3. Реакции с желтой кровяной солью

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора гексацианоферрата (II) калия в каждую пробирку. Что наблюдается? Составьте уравнения реакций, учитывая, что все осадки получены в результате полного ионного обмена.

Капельные реакции на фильтровальной бумаге

Опыт 4. Реакция катионов Ni^{2+} с реактивом Чугаева

На сухую фильтровальную бумагу поместите несколько капель раствора соли никеля (II), добавьте каплю раствора аммиака и каплю раствора диметилглиоксима $C_4H_8N_2O_2$ (реактив Чугаева). Сравните наблюдаемый аналитический сигнал с реакцией образования диметилглиоксимата железа (II), выполненной в предыдущей работе. Запишите уравнение реакции



Проведите аналогичную реакцию с растворами меди (II) и кобальта (II). Какой из этих ионов может мешать определению ионов никеля и почему?

Опыт 5. Капельная реакция ионов Co^{2+}с роданидом аммония

Поместите на сухую фильтровальную бумагу несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли NH_4SCN, при необходимости добавьте ещё одну каплю раствора. Как изменилась окраска кристаллов? Составьте уравнение реакции образования комплексного соединения $(NH_4)_2[Co(SCN)_4]$.

Обнаружение катионов с использованием экстракции

Опыт 6. Реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите в пробирку несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли тиоцианата (роданида) аммония. Как изменилась окраска раствора?

Чувствительность этой реакции можно повысить с помощью экстракции окрашенного комплекса $(NH_4)_2[Co(SCN)_4]$ органическим растворителем. Добавьте к полученному раствору несколько капель изоамилового спирта, взболтайте. Дождитесь разделения в пробирке водной и спиртовой фаз. Что при этом наблюдается?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения реакций первичной и вторичной диссоциаций гексаамминкобальта (II), гексаамминникеля (II), тетраамминмеди (II). Запишите формулы для константы нестойкости.

2. Для открытия ионов Ni^{2+} с помощью диметилглиоксима при реакции на капельной пластинке предел обнаружения Ni^{2+} – 0,16 мкг; в пробирке можно обнаружить 1,4 мкг Ni^{2+} в 1 мл. Предел обнаружения можно уменьшить до 0,015 мкг, если каплю анализируемого раствора нанести на фильтровальную бумагу, пропитанную диметилглиоксимом. Если осадок диметилглиоксимата никеля (II) флотируется на границе раздела фаз «вода – изоамиловый спирт», то предел обнаружения ионов Ni^{2+} понижается до 0,002 мкг. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Ni^{2+}, открываемых каждым из способов.

3. Окисление тиосульфат-ионов ионами железа (III) ускоряется в присутствии ионов меди (каталитическая реакция). Время обесцвечивания тиоцианата железа (III) тиосульфатом натрия в отсутствие меди около двух минут. В присутствии ионов Cu^{2+} раствор тиоцианата железа (III) обесцвечивается мгновенно. Предел обнаружения меди – 0,02мкг в 1 мл. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Cu^{2+}, соответствующую этому пределу обнаружения.

Лабораторная работа № 3
КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы $\mathbf{Al^{3+}}$, $\mathbf{Cr^{3+}}$ и $\mathbf{Zn^{2+}}$, научиться использовать амфотерность их гидроксидов в химическом анализе, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Для проведения каждой качественной реакции необходимо соблюдать определенные условия, основные из которых: *pH*-среды; температура; концентрации реагентов; присутствие определенных веществ; отсутствие мешающих ионов или веществ. Для протекания многих реакций необходима среда с определенным значением *pH* водного раствора. Значение *pH* можно контролировать с помощью индикаторов или прибора *pH*-метра. Для поддержания нужного значения *pH* при необходимости используют соответствующие буферные растворы.

Буферные растворы — это растворы, способные сохранять постоянное значение *pH* при разбавлении водой или добавлении к ним определенного количества сильных кислот или оснований. В состав буферной смеси входят в определенном количественном соотношении слабые кислоты и их соли с сильными основаниями или слабые основания и их соли с сильными кислотами.

Амфотерность гидроксидов алюминия, цинка и хрома (III) позволяет отделять их от остальных катионов действием растворов щелочей различной концентрации.

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по несколько капель очень разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку до образования нерастворимых гидроксидов. Составьте уравнения реакций. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком щёлочи до полного растворения, составьте уравнения реакций образования тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.

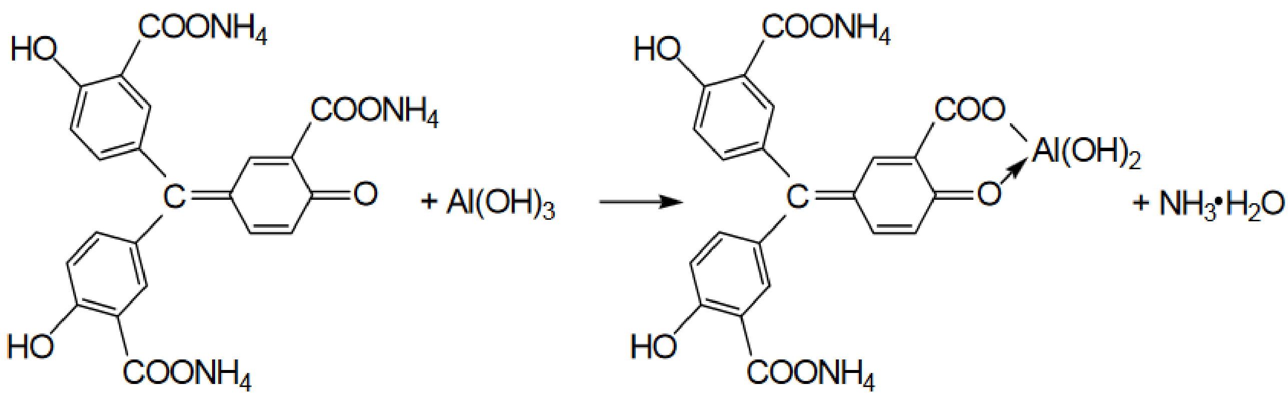
Опыт 2. Действие раствора аммиака на ионы Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций образования соответствующих гидроксидов.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки. Какие гидроксиды растворяются частично или полностью? Составьте реакцию комплексообразования, учитывая, что в образующихся аммиакатных комплексах координационное число каждого комплексообразователя вдвое больше, чем модуль его степени окисления.

Опыт 3. Реакция ионов алюминия с алюминоном

В пробирку поместите 3–4 капли раствора соли алюминия, при необходимости 2–3 капли раствора уксусной кислоты и 3–5 капель 0,01 % раствора алюминона ($C_{21}H_{11}O_9 (NH_4)_3$). Смесь нагрейте на водяной бане, добавьте несколько капель раствора аммиака до щелочной реакции и выпадения красного хлопьевидного осадка алюминиевого лака.



Опыт 4. Реакция ионов цинка с желтой кровяной солью

В пробирке к 1 мл раствора $ZnCl_2$ добавьте 1 мл раствора гексацианоферрата (II) калия. Наблюдайте выпадение белого осадка $K_2Zn_3[Fe(CN)_6]_2$. Составьте уравнение этой реакции ионного обмена.

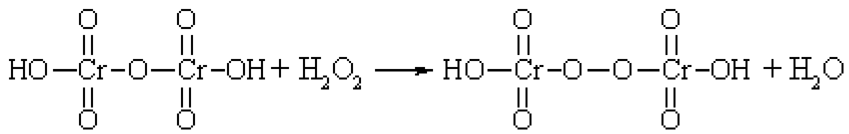
Опыт 5. Восстановительные свойства ионов хрома (III)

В пробирку поместите 2–3 капли раствора соли хрома(III), прибавьте 4–5 капель 2 моль/л раствора щёлочи NaOH до растворения осадка, и 2–3 капли 3 % раствора перекиси водорода H_2O_2. Нагревайте до изменения зеленой окраски раствора на желтую (цвет хромат-ионов CrO_4^{2-}). Составьте уравнение окислительно-восстановительной реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Опыт 6. Образование надхромовой кислоты

К жёлтому раствору хромата натрия, полученному в предыдущем опыте, прибавьте 5 капель пероксида водорода H_2O_2, ~0,5 мл изоамилового спирта, тщательно перемешайте и прибавьте по каплям раствор серной кислоты (1 моль/л). Верхний органический слой окрашивается в интенсивно синий цвет за счёт экстракции образовавшейся надхромовой кислоты H_2CrO_6. Запишите уравнение реакции, протекающее через образование дихромовой кислоты и её последующее окисление перекисью водорода:

$$2Na_2CrO_4+2H_2SO_4 \rightarrow H_2Cr_2O_7+2Na_2SO_4+H_2O$$



$$H_2Cr_2O_8 + 3\ H_2O_2 \leftrightarrow 2\ H_2CrO_6 + 2\ H_2O$$

Составьте электронно-ионный баланс для этой реакции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения первичной и вторичной диссоциации солей, полученных в первом опыте: тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.

2. Напишите выражение константы нестойкости для комплексных ионов тетраамминцинка и гексаамминхрома, полученных во втором опыте.

3. Напишите уравнения диссоциаций хромовой, дихромовой и надхромовой кислот.

Лабораторная работа № 4

РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^{+}, Pb^{2+}, Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ

Цель работы: познакомиться с разделением и идентификацией катионов методом бумажной хроматографии

Хроматография – физико–химический метод разделения веществ, основанный на использовании сорбционных процессов в динамических условиях.

Анализируемые компоненты распределяются между подвижной и неподвижной фазами. Неподвижной фазой служит твердое вещество – сорбент. Подвижной фазой является жидкость или газ, протекающий через неподвижную фазу – элюент. Элюент в процессе хроматографирования перемещается вдоль сорбента, так что частицы анализируемых веществ могут многократно переходить из подвижной фазы в неподвижную и наоборот. Разделение веществ с помощью хроматографии основано на различном сродстве разделяемых компонентов к подвижной и неподвижной фазам.

Бумажная хроматография – вид хроматографии, в котором носителем неподвижного растворителя служит очищенная от примесей фильтровальная бумага. Подвижная фаза продвигается вдоль листа бумаги, главным образом за счет капиллярных сил. Бумажная хроматография отличается простотой, экспрессностью, наглядностью разделения, высокой чувствительностью (можно определить 10–20 мкг вещества с точностью 5–7 %).

Опыт 1. Подготовка фильтровальной бумаги

Два фильтра «синяя лента» диаметром 45 мм смочите 5 %-м раствором йодида калия, опуская фильтры в раствор пинцетом. Высушите фильтры на воздухе в чашке Петри.

Опыт 2. Получение первичной осадочной хроматограммы

В центр каждого высушенного фильтра нанесите пипеткой каплю анализируемой смеси катионов Ag^{+}, Hg^{2+} и Pb^{2+}, после её полного впитывания нанесите еще одну, дайте ей впитаться. Катионы анализируемой смеси вступают в реакцию с KI, которым пропитан фильтр, образуя осадочную хроматограмму, зоны которой имеют цвета осадков AgJ (жёлтый), HgJ_2 (оранжевый), PbJ_2 (ярко-желтый).

Полученные хроматограммы необходимо промыть дистиллированной водой. Для промывания хроматограмм нанесите на фильтры 2–3 капли дистиллированной воды, внося каждую последующую каплю после впитывания предыдущей до увеличения размера зон в два–три раза. Высушите обе осадочные хроматограммы, заполните табл. 1, составьте уравнения реакций образования осадков.

Таблица 1

Первичная хроматограмма смеси катионов Ag^{+}, Hg^{2+}, Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (края фильтра)		

Опыт 3. Получение проявленной осадочной хроматограммы

Анализируя первичную хроматограмму, легко определить катионы Hg^{2+} (оранжевая зона в центре) и Pb^{2+} (ярко-желтая зона по периферии). Бледно-желтая окраска AgJ либо видна плохо (из-за маскировки оранжевым HgJ_2 и ярко-желтым PbJ_2), либо не видна совсем. Для того, чтобы явно видеть зону серебра, первичную хроматограмму на одном из фильтров необходимо проявить.

Для проявления хроматограммы внесите в центр фильтра каплю раствора NaOH. При этом йодид свинца растворится в NaOH с образованием бесцветного плюмбита натрия Na_2PbO_2, йодид ртути останется неизменным, бледно-жёлтое пятно йодида серебра постепенно почернеет вследствие превращения гидроксида серебра (I) в оксид серебра (I), который затем разложится до свободного серебра.

Заполните табл. 2, составьте уравнения всех протекающих при проявке первичной хроматограммы реакций.

Таблица 2

Вторичная хроматограмма смеси катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (край фильтра)		

По результатам работы сделайте вывод об эффективности метода бумажной хроматографии для дробного открытия катионов Ag^{+}, Hg^{2+}, Pb^{2+} при их совместном присутствии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какие процессы лежат в основе хроматографического анализа?

2. Вычислите ПР йодида свинца (II), если известно, что растворимость его равна 0,03 г на 0,1 кг воды.

3. Выпадет ли осадок при взаимодействии равных объемов растворов $AgNO_3$ и KI, если концентрации обоих растворов 0,001 моль/л, а произведение растворимости йодида серебра ПР (AgI) $=8,3\cdot10^{-17}$.

4. В избытке йодида калия осадок йодида ртути (II) растворяется без изменения степеней окисления элементов с образованием комплексного соединения тетрайодомеркурата калия. Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.

5. Оксид серебра (I) неустойчив на воздухе, поэтому он используется не в чистом виде, а в аммиачном растворе (реактив Толленса). При взаимодействии гидроксида аммония и оксида серебра (I) образуется гидроксид диамминсеребра (I). Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.

6. Дайте определения терминам «элюент», «сорбент», «элюат», «подвижная фаза», «неподвижная фаза», «собрция», «десорбция».

Лабораторная работа № 5

ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ

Цель работы: с помощью качественных реакций определить, какая соль находится в каждой пробирке.

Ход работы

В двенадцати пронумерованных пробирках находятся следующие растворы соли:

Раствор бесцветный	**Раствор может быть окрашенным**
Хлорид аммония	Сульфат меди (II)
Хлорид кальция	Хлорид кобальта (II)
Сульфат марганца (II)	Хлорид никеля (II)
Сульфат железа (II)	Хлорид хрома (III)
Хлорид цинка	Хлорид железа (III)
Хлорид алюминия	
Нитрат свинца (II)	

После получения у преподавателя нескольких пробирок (по вариантам 3–6 шт.,) составьте в тетради таблицу для записи результатов анализа:

Качественный анализ растворов, номер (№) (запишите номера пробирок)

Испытуемый раствор	Добавленный реагент	Наблюдение	Предполагаемый состав	Вывод
Опыт № 1 «Открытие окрашенных ионов»				
№ 13	отсуствует	Раствор розовый	Ионы Co^{2+}	
№ 13	NaOH	Выпал синий осадок, при добавлении избытка щёлочи стал розовым	CoOHCl $Co(OH)_2$	В пробирке был $CoCl_2$
Опыт № 2 «Действие щелочей»				
№ 14				

Опыт 1. Открытие окрашенных ионов

Опишите внешний вид растворов, сделайте предположения, какие растворы могут быть в каждой из пробирок, занесите их в таблицу. Наиболее вероятные предположения (для окрашенных растворов) проверьте с помощью соответствующих качественных реакций, взяв для анализа небольшую порцию испытуемого раствора. Составьте уравнения реакций, сделайте выводы.

Опыт 2. Действие щелочей на испытуемые растворы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором щёлочи, добавляя его по каплям. Занесите в таблицу аналитический сигнал: выделился запах аммиака, выпал неизменяющийся осадок, выпал осадок, растворимый в избытке щёлочи или темнеющий на воздухе. Обратите внимание, что гидроксид свинца $Pb(OH)_2$ проявляет амфотерные свойства, растворяясь в избытке щелочи с образованием плюмбита Na_2PbO_2, а светло-бежевый гидроксид марганца $Mn(OH)_2$ постепенно окисляется кислородом воздуха, что выглядит как потемнение раствора на границе с воздухом:

$$2\,Mn(OH)_2 + O_2 \rightarrow 2\,MnO_2\downarrow + 2\,H_2O.$$

Эту реакцию можно сделать более наглядной, ускорив процесс окисления с помощью перекиси водорода:

$$Mn(OH)_2 + H_2O_2 \rightarrow MnO_2\downarrow + 2\,H_2O.$$

Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций, для ионов Mn^{2+} кроме реакции с H_2O_2 можно использовать

ОВР с окислением марганца до розовых перманганат-ионов висмутатом натрия в сильнокислой среде:

$$2MnSO_4+5NaBiO_3+16HNO_3 \rightarrow$$

$$2HMnO_4+5Bi(NO_3)_3+NaNO_3+2Na_2SO_4+7H_2O.$$

Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 3. Действие раствора аммиака на испытуемые пробы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором аммиака. Занесите в таблицу аналитический сигнал. Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 4. Открытие неокрашенных ионов

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), проведите качественный анализ на катионы, которые остались не открытыми. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»

1. Две соли окрашивают пламя в фиолетовый цвет. Одна из них бесцветна, и при лёгком нагревании её с концентрированной серной кислотой отгоняется жидкость, в которой растворяется медь; последнее превращение сопровождается выделением бурого газа. При добавлении к раствору второй соли раствора серной кислоты жёлтая окраска раствора изменяется на оранжевую, а при нейтрализации полученного раствора щёлочью восстанавливается первоначальный цвет. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

2. В двух сосудах находятся растворы неизвестных веществ. При добавлении к раствору первого вещества хлорида бария выпадает осадок белого цвета, нерастворимый в воде и кислотах. Осадок белого цвета выпадает также и при добавлении раствора нитрата серебра к пробе, отобранной из второго сосуда. При нагревании пробы первого раствора с гидроксидом натрия выделяется газ с резким запахом. При взаимодействии второго раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Напишите уравнения описанных реакций.

3. Действием концентрированной серной кислоты на белые кристаллы при нагревании получен газ. При пропускании этого газа через раствор нитрата серебра выпал белый творожистый осадок. Кристаллы окрашивают пламя спиртовки в жёлтый цвет. Какая соль была взята для реакции? Приведите её формулу и название. Запишите уравнения реакций, описанных в тексте.

4. Порошкообразное вещество белого цвета окрашивает пламя горелки в оранжево-красный цвет. При действии соляной кислоты «вскипает» с выделением тяжёлого газа без цвета и запаха. Это вещество способно растворяться в воде при одновременном пропускании избытка углекислого газа. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

5. Некоторое кристаллическое вещество, окрашивающее пламя в жёлтый цвет, хорошо растворяется в воде. При добавлении к этому раствору нитрата серебра выпадает жёлтый осадок, не растворимый в разбавленной азотной кислоте. При действии на исходный раствор бромной воды образуется коричневое окрашивание. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

6. Для определения качественного состава белый, нерастворимый в воде порошок с зеленоватым оттенком подвергли

термическому разложению, в результате которого образовалось два оксида. Один из них — порошок чёрного цвета, при добавлении к которому раствора серной кислоты и последующем нагревании образовался раствор голубого цвета. Про другой известно, что это газ тяжелее воздуха, без цвета и запаха, играющий важную роль в процессе фотосинтеза. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

7. Для проведения исследования бесцветные кристаллы соли, которые при непродолжительном нахождении на воздухе приобрели голубой цвет, нагрели до выделение бурого газа и образование чёрного порошка. При пропускании над нагретым полученным порошком водорода наблюдалось появление красного налёта простого вещества — металла. Известно, что металл, образующий катион, входит в состав многих сплавов, например бронзы. Запишите химическую формулу и название исследованной соли. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования его свойств.

8. Для изучения состава соли был взят раствор, который разделили на две части. К первой части этого раствора добавили хлорид натрия, в результате чего выпал белый осадок. При добавлении ко второй части раствора цинковой стружки образовались серые хлопья металла, катионы которого обладают дезинфицирующим свойством. Известно, что выданная соль

используется для изготовления зеркал и в фотографии, а её анион является составной частью многих минеральных удобрений. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

9. Для изучения состава соли были взяты белые кристаллы хорошо растворимого в воде вещества, которое используется в хлебопечении и кондитерской промышленности в качестве разрыхлителя теста. В результате процесса термического разложения выданной соли образовались три вещества, два из которых при обычных условиях являются газами. При нагревании соли с гидроксидом натрия образуется газ, водный раствор которого используется в медицине под названием нашатырный спирт. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

10. Для установления качественного состава была изучена соль тяжёлого металла, оксид которого используется в производстве хрустального стекла. При термическом разложении соли образуется оксид этого металла и два газообразных вещества: одно из них — газ бурого цвета, а другое — важнейший компонент воздуха. При приливании к раствору выданной соли раствора йодида калия выпадает осадок ярко-жёлтого цвета. Запишите

химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

11. Для определения качественного состава неизвестной соли азотной кислоты исследовали белое кристаллическое вещество. Это вещество при нагревании полностью разлагается без образования сухого остатка. При действии горячего раствора гидроксида натрия выделяется бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

12. В химической лаборатории хранится склянка с кристаллическим веществом белого цвета. При действии на него гидроксида натрия выделяется лёгкий, бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. При действии на него сильной кислоты выделяется бесцветный газ без запаха, вызывающий покраснение раствора лакмуса. При приливании к раствору этого вещества раствора гидроксида кальция выделяется нерастворимый в воде осадок. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

13. Кристаллическое вещество оранжевого цвета при нагревании значительно увеличивается в объёме за счёт выделения бесцветного газа и образует твёрдое вещество тёмно-зелёного

цвета. Выделившийся газ взаимодействует с литием даже при комнатной температуре. Продукт этой реакции гидролизуется водой с образованием газа с резким запахом, способного восстановить медь из её оксида. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

14. Для исследования свойств неизвестного вещества его концентрированный раствор разделили на две части. В пробирку с одной частью раствора поместили медную проволоку. При этом наблюдалось выделение бурого газа и растворение меди. При добавлении к другой части раствора силиката натрия наблюдалось образование бесцветного студенистого осадка. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

15. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали раствор голубого цвета. При добавлении горячего раствора сильной кислоты выделился газ с резким запахом жжёной резины, окрашивающий лакмус в красный цвет. При добавлении раствора аммиака сначала выпал голубой осадок, который затем растворился в избытке аммиака с образованием фиолетового раствора. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

16. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её раствор желтоватого цвета. При добавлении раствора сильной кислоты появился резкий запах уксуса. При добавлении роданида аммония раствор приобрёл кроваво-красную окраску. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

17. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её бесцветный раствор. При добавлении раствора разбавленной серной кислоты выделился газ с запахом тухлых яиц и выпал белый осадок, не растворимый в кислотах. При взаимодействии порции исходного раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

18. Для определения качественного состава было выдано кристаллическое вещество — средняя соль многоосновной кислоты, катион которой не является ионом металла. При взаимодействии данного вещества с гидроксидом натрия выделяется газ с резким раздражающим запахом, а при приливании к раствору выданного вещества раствора нитрата серебра выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

19. Для определения качественного состава студентам было выдано бесцветное кристаллическое вещество — соль. К одной части раствора исследуемой соли прилили раствор нитрата серебра, в результате чего выпал осадок жёлтого цвета. А при добавлении к другой части раствора карбоната натрия выпал белый осадок. Известно, что катион этой соли образован щёлочно-земельным металлом, входящим в состав костной ткани человека. Анион этой соли состоит из атомов химического элемента, образующего простое вещество, спиртовой раствор которого используется в качестве дезинфицирующего средства. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

20. При определении качественного состава неизвестного кристаллического вещества белого цвета было установлено, что его раствор взаимодействует с раствором гидроксида калия с образованием осадка. А при добавлении к раствору исследуемого вещества раствора нитрата бария выпадает осадок белого цвета, не растворимый в кислотах. Известно, что катион металла, входящий в состав данного соединения, входит в состав хлорофилла. Этот металл ранее применялся также в фотографии для получения вспышки. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеев В. Н. Качественный химический полумикроанализ. М.: Химия. 1973. 584 с.

Глинка Н. Л. Общая химия: учебник / под ред. В. А. Попкова, А. В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Гринвуд Н., Эршно А. Химия элементов (в 2 томах): учебник. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний», 2015. 1280 с.

Карапетьянц М. Х., Дракин С. И. Общая и неорганическая химия: учебник. 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Крешков А. П. Основы аналитической химии. Ч. 1. Теоретические основы. Качественный анализ. М.: Химия. 1970. 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ «ХИМИЯ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ЧАСТЬ 1

Составили: Н.Б. Смирнова, доц., канд. хим.наук

В.М. Сахарова, доц., канд. техн. наук

2020

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Горные инженеры, геологи и геофизики сталкиваются с самыми разнообразными явлениями природы, химическими по своей сущности: быстрой выветриваемостью, окисляемостью, различной смачиваемостью горных пород, с особенностями воздушной среды под землей, с обводненностью горных выработок, агрессивностью рудничных вод. Поэтому им требуются более глубокие знания по химии, чем любому другому специалисту. Инженеры горнодобывающей отрасли способны справиться с современными задачами горно-металлургической и горно-химической промышленности только зная весь путь от разведки полезного ископаемого до его переработки. Физико-химическая некомпетентность горных инженеров и геологов является причиной недостатков в развитии горной науки, техники и технологии, бедственного экологического положения горных предприятий.

Роль химии в подготовке инженеров непрерывно возрастает в связи с необходимостью решения задач по снижению уровня потерь полезных компонентов и увеличению комплексности использования руд, рациональному применению вскрышных пород, очистке и использованию шахтных вод и сточных вод обогатительных фабрик, защите от коррозии бурового и горнодобывающего оборудования, заблаговременной дегазации угольных месторождений, применению физико-химических методов упрочнения грунтов, геотехнологическим методам добычи полезных ископаемых.

В горном деле широко применяются химические материалы: химические растворы при бурении и тампонаже скважин, взрывчатые вещества при отбойке угля, руды и породы, химические добавки, препятствующие распыление угля и налипанию льда на конвейерную ленту, материалы для покрытия из пены, предохраняющей от промерзания участка разработки, компоненты для отвердевания закладочных смесей, огнетушащие составы, синтетические смолы для укрепления горных пород, реагенты для флотации и обогащения руд и большой ассортимент таких обычных химикатов как горючие и смазочные материалы, цемент, стекло, керамика, гидро-, термо- и электроизоляционные материалы, лаки, краски, пластмассы, резина.

Еще благодаря усилиям Д.И. Менделеева, химию, как одну из фундаментальных дисциплин, стали преподавать во всех высших школах России. Химия вместе с физикой и математикой составляет основу профессиональной подготовки специалистов высокой квалификации.

Будущие специалисты должны получить такой комплекс знаний по химии, который составит базу для успешного освоения последующих дисциплин и правильного использования материалов, применяемых в технике.

Теоретические разделы химии, такие как строение электронных оболочек атомов, основные виды химических связей, химическая кинетика и равновесие, окислительно-восстановительные потенциалы, водородный показатель, произведение растворимости, свойства комплексных соединений, позволяет правильно ориентироваться в вопросах, связанных непосредственно со свойствами и превращениями минералов и горных пород.

Горные породы и руды состоят из минералов. К минералам относят природные химические соединения. Неорганические минералы подразделяются на минеральные типы, названия которым присваиваются согласно классификации неорганических веществ и их номенклатуре. По химическому составу минералы подразделяют на:

а) простые вещества (металлы, неметаллы),

б) карбиды, нитриды, фосфиды, сульфиды, арсениды, селениды, оксиды, гидроксиды, галогениды и др.,

в) соли кислородержащих кислот (силикаты, фосфаты, арсенаты, ванадаты, бораты, карбонаты, сульфаты, нитраты, вольфраматы, молибдаты, хроматы, иодаты и др.).

Основа химической н о м е н к л а т у р ы - русские названия химических элементов, приведенные в периодической системе Д.И. Менделеева, которые не всегда совпадают с латинскими названиями, например, гидрогениум - водород, оксигениум - кислород.

К неметаллам относят:

He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn, F, Cl, Br, J, At, O, S, Se, Te, N, P, As, C, Si, B, H, остальные элементы - металлы.

Названия простых веществ состоят их одного слова - наименования химического элемента с числовой приставкой, например: O_3 - трикислород, P_4 - тетрафосфор, S_8 - октасера.

Используют также числовые приставки:

1 - моно	7 - гепта
2 - ди	8 - окта
3 - три	9 - нона
4 - тетра	10 - дека
5 - пента	11 - ундека
6 - гекса	12 - додека

В химических формулах сложных вещество на первом месте (слева) всегда записывают формульные обозначения электроположительных составляющих, а за ними указывают формульные обозначения электроотрицательных составляющих. Например, PCl_3.

Названия сложных веществ составляются по их химических формулам справа налево. Они складываются из двух слов - названий электроотрицательных составляющих (условных или реальных катионов) в именительном падеже и электроположительных составляющих (условных или реальных катионов) в родительном падеже, например: PCl_3 - трихлорид фосфора, CO - монооксид углерода.

Названия одноэлементных анионов оканчивается на -ид, а названия многоэлементных анионов - на -ат.

Для построения названий сложных веществ используются корни (иногда усеченные) русских названий элементов, например, бериллий - бериллат, молибден - молибдат, фосфор - фосфид и фосфат. Традиционно применяются корни латинских названий для элементов: серебро, мышьяк, золото, углерод, медь, железо, ртуть, марганец, азот, никель, свинец, сера, сурьма, кремний, олово:

Ag - аргентат	N - нитрид, нитрат
As - арседид, арсенат	Ni - николат
Au – аурат	Pb - плюмбат
C - карбид, карбонат	S - сульфид, сульфат
Cu - купрат	Sb - стибид (антимонид), стибат
Fe - феррат	Si - силицид, силикат
Hg – меркурат	Sn - станнат
Mn - манганат	

В названиях сложных веществ употребляются как числовые приставки, так и степени окисления катиона (обычно металлического) при точно известном заряде аниона, например, P_4O_{10} - декаоксид тетрафосфора, V_2O_5 - оксид ванадия (V), $Bi(OH)_3$ - гидроксид висмута (III).

Названия кислот и кислотных остатков приводятся в учебном пособии [1]. Названия кислотных остатков используют построении названий солей. Соли - продукты реакций нейтрализации. Соли, содержащие кислотные остатки с незамещенными атомами водорода, - к и с л ы е соли. Соли, содержащие гидроксид-ионы, называют о с н о в н ы м и солями.

$Ca(H_2PO_4)_2$ - дигидрофосфат кальция

$KHSO_4$ - гидросульфат калия

$FeOH(NO_3)_2$ - гидроксонитрат железа (III)

$(CaOH)_2SO_4$ - гидроксосульфат кобальта (II)

$Cu_2CO_3(OH)_2$ - дигидроксид-карбонат димеди

Если соли содержат два разных катиона, то их называют д в о й н ы м и.

$KAl(SO_4)_2$ - сульфат алюминия-калия

$CaMg(CO_3)_2$ - карбонат магния-кальция

ОБЩИЕ ПРАВИЛА РАБОТЫ В ХИМИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ

Прежде чем приступить к работе по данной теме, следует изучить ее по описанию, уяснить цель задания и план его выполнения.

Не загромождайте рабочее место портфелями, свертками, сумками, перчатками и т.п. Для них отведены специальные этажерки. На рабочем столе должны находиться только необходимые приборы и лабораторный журнал.

Работайте тщательно, аккуратно, без лишней торопливости, соблюдайте в лаборатории тишину.

Внимательно наблюдайте за ходом опыта, отмечая и записывая каждую его особенность.

Категорически запрещается в лаборатории принимать пищу, пробовать химические вещества на вкус.

Без указания преподавателя не проводите никаких дополнительных опытов.

После окончания работы вымойте использованную посуду, выключите воду, электрические приборы и приведите в порядок рабочее место.

ПРАВИЛА ТЕХНИКИ БЕЗОПАСНОСТИ ПРИ РАБОТЕ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКТИВАМИ

Для выполнения работ в лаборатории имеется определенный набор химических реактивов, часть которых размещается на лабораторных столах (водные растворы солей), а остальные - концентрированные и разбавленные кислоты и щелочи, сухие соли, дурно пахнущие вещества - в вытяжных шкафах.

При использовании реактивов следует соблюдать следующие правила:

1. Не разрешается уносить реактивы из вытяжного шкафа на рабочее

место.

2. Сухие реактивы набирают чистым шпателем или ложечкой.
3. Для проведения опыта в пробирке брать сухое вещество в количестве, закрывающем дно пробирки, а раствора - не более 1/6 ее объема.
4. Избыток реактива нельзя высыпать (выливать) обратно в те склянки, из которых они были взяты.
5. Не следует путать пробирки от разных склянок. Крышки и пробки кладут на стол поверхностью, не соприкасающейся с реактивом.
6. При нагревании растворов в пробирке держать ее таким образом, чтобы отверстие пробирки было направлено в сторону от работающего и его соседей по рабочему месту.
7. При разбавлении концентрированных кислот вливать кислоту в воду, а не наоборот.
8. Остатки растворов, содержащих кусочки металлов, собирают в специальные склянки, находящиеся в вытяжных шкафах.

ОКАЗАНИЕ ПЕРВОЙ МЕДИЦИНСКОЙ ПОМОЩИ

При порезах стеклом удаляют осколки из раны, смазывают края раны раствором йода и перевязывают бинтом.

При ожоге горячей жидкостью или горячим предметом обожженное место обрабатывают раствором перманганата калия, накладывают мазь от ожога.

При ожогах кислотами сразу промывают обожженное место большим количеством воды, а затем 3%-ным раствором гидрокарбоната натрия.

При ожогах едкими щелочами хорошо и обильно промыть обожженное место проточной водой, затем разбавленным раствором уксусной кислоты и опять водой.

При попадании кислоты или щелочи в глаза немедленно промыть глаза в течение трех минут большим количеством воды, а затем раствором гидрокарбоната натрия или борной кислоты.

ОФОРМЛЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОГО ЖУРНАЛА

Каждый студент должен иметь лабораторный журнал - отдельную тетрадь для записей.

В лабораторном журнале студент выполняет отчеты по лабораторным работам, домашние задания, решает задачи, отвечает на контрольные вопросы.

Все наблюдения и выводы по экспериментальной работе студент заносит в лабораторный журнал непосредственно после выполнения опыта.

Отчеты по выполненным лабораторным работам должны содержать:

1) название лабораторной работы,
2) названия всех проделанных опытов,
3) после названия опыта записывается уравнение проделанной реакции, в котором указываются осадки (↓) и их окраска, газы (↑), изменения окраски растворов,
4) задания, указанные в методическом руководстве,
5) выводы по каждому опыту и общий вывод по работе.

1. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ ОКСИДОВ И ГИДРОКСИДОВ

Цель работы - изучение изменения кислотно-основных свойств гидроксидов в периодах и группах периодической системы Д.И. Менделеева.

Периодическая система Д.И. Менделеева - естественная система химических элементов, созданная на основе периодического закона.

Положение элемента в периодической системе определяет физико-химические свойства соответствующих им простых веществ и химических соединений.

Периодичность свойств химических соединений удобно проследить на примере оксидов и гидроксидов. Оксиды и гидроксиды относятся к основным породообразующим минералам, они широко распространены и составляют 17% от массы земной коры.

В табл.1.1. приведены наиболее часто встречающиеся реакции взаимодействия оксидов и гидроксидов с водой.

Кислотно-основные свойства соединений можно объяснить на основе электростатических представлений. Ослабление основных и усиление кислотных свойств гидроксидов связано с изменением поляризующего действия элемента, образующего гидроксид, на группу OH^-. Поляризующее действие катиона сильно зависит от его строения и может быть охарактеризовано следующими закономерностями:

1) Поляризующее действие иона очень быстро возрастает с увеличением его заряда;

Таблица 1.1

Кислотно-основные реакции оксидов и гидроксидов

Тип оксида (гидроксида)	Типичная реакция
Сильно - кислый	$SO_{3}(г) + H_2O = SO_4^{2-}(р) + 2H^{+}(р)$
Слабо - кислый	$CO_2 + H_2O \Leftrightarrow HCO_3^{-}(р) + H^{+}(р)$
Амфотерный	$Zn(OH)_{2}(к) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{H^{+}(р)} Zn^{2+}(р) + H_2O \\ \xrightarrow{OH^{-}(р)} [Zn(OH)_4]^{2-}(р) \end{cases}$
Слабо - основной	$Fe(OH)_{2}(к) \Leftrightarrow FeOH^{+}(р) + OH^{-}(р)$
Сильно - основной	$Li_2O_3 + H_2O = 2Li^{+}(р) + 2OH^{-}(р)$

2) большое значение имеет строение внешней электронной оболочки, по этому признаку катионы разделяются на ионы с незаконченным внешним слоем, переходным от 8-электронного и 18-электронному (Mg^{2+}, Fe^{2+}, Fe^{3+}) и ионы с 18-электронным внешним слоем (Zn^{2+}, Ag^{+});

3) при сходном строении внешней электронной оболочки и равном заряде поляризующее действие иона возрастает по мере уменьшения его радиуса.

Итак, ослабление основных и усиление кислотных свойств гидроокисей связано с увеличением поляризующего действия катиона, т.е. с убыванием его радиуса и возрастанием положительной степени окисления, а также с увеличением числа внешних электронов. Например, если катион имеет малый заряд сравнительно большой радиус, его электростатическое притяжение к группе OH^{-} невелико и OH^{-} выступает в гидроксиде как единое целое. Поэтому типичными основаниями являются гидроксиды элементов, находящихся в главных подгруппах I и II групп периодической системы (KOH, NaOH), а также NH_4OH.

По мере увеличения поляризующего действия катиона возрастает ковалентность связей элемент-кислород и усиливается ионный характер связей O ─ H. Основные свойства гидроксидов ослабляются и появляются кислотные свойства. Из элементов II группы бериллий и цинк дают амфодают атмосферные гидроксиды, в (III) группе амфотерны гидроксиды алюминия, галлия, индия. Амфотерность характерна для большинства элементов четвертой группы периодической системы.

Когда катион имеет большой положительный заряд и малый радиус (что типично для неметаллов), усиление его поляризующего действия приводит к тому, что водород становится подвижным и преобладает диссоциация по кислотному типу. Среди элементов третьей группы гидроксид бора - типичная кислота. В четвертой группе кислотами являются гидроксиды углерода и кремния, однако, эти кислоты еще очень слабые. Гидроксиды многих элементов с максимальной степенью окисления пятой, шестой, седьмой групп - сильные кислоты.

Способность веществ к взаимодействию определяется изменением изобарно-изотермического потенциала (ΔG) химической реакции. Чем меньше алгебраическая величина энергии Гиббса химического процесса, тем больше вероятность ее протекания в данном направлении.

$$2Al(OH)_{3(к)} + Na_2O_{(к)} = 2NaAlO_{2(к)} + 3H_2O; \quad \Delta G^0_{298} = -153 \text{ кДж/моль}$$

$$2H_3BO_{3(к)} + Na_2O_{(к)} = 2NaBO_{2(к)} + 3H_2O; \quad \Delta G^0_{298} = -277 \text{ кДж/моль}$$

Увеличение отрицательного значения ΔG^0_{298} свидетельствует об усилении кислотных свойств гидроксида бора H_3BO_3.

1.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Гидроксиды магния и кальция

Поместите в пробирку небольшое количество оксида магния или кальция и прибавьте 5 мл воды. Взболтайте содержимое пробирки и испытайте реакцию среды 1-2 каплями фенолфталеина. Составьте уравнение реакции взаимодействия оксида с водой. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 2. Получение и свойства гидроксида алюминия

В пробирку налейте 2 мл раствора соли алюминия и прибавьте примерно такой же объем раствора гидроксида аммония. Содержимое пробирки распределите в две пробирки. В одну из пробирок при взбалтывании прилейте по каплям разбавленный раствор серной кислоты до полного растворения осадка. Во вторую пробирку прилейте разбавленный раствор гидроксида натрия также до полного растворения осадка. Составить уравнение реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида алюминия.

ОПЫТ 3. Двуокись углерода

Налейте в пробирку несколько мл воды и прибавьте 1-2 капли индикатора. Пропустите из аппарата Киппа в воду двуокись углерода до изменения окраски индикатора. Составьте уравнение реакции. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 4. Гидроксид кремния

В пробирку поместите раствор силиката натрия и пропустите через него углекислый газ из аппарата Киппа, при этом наблюдайте образование осадка гидроксида кремния. Напишите уравнение реакции. Сделайте вывод о кислотно-основном характере гидроксида кремния.

ОПЫТ 5. Оксид фосфора (V)

В пробирку поместите немного фосфорного ангидрида и добавьте несколько мл воды. Наблюдайте растворение, встряхивая пробирку. Испытайте реакцию среды индикаторами. Составьте уравнение реакции. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 6. Гидроксиды олова (II) и свинца (II)

а) Налейте в пробирку 2 мл раствора хлорида олова. Добавьте по каплям разбавленный раствор щелочи до образования осадка. Содержимое пробирки разделите на две части. Подействовать на одну концентрированным раствором щелочи, а на другую - соляной кислотой. Составьте уравнения реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида олова.

б) Такой же опыт проделать с раствором соли азотнокислого свинца. На полученный гидроксид свинца подействовать азотной кислотой и щелочью. Почему для растворения гидроокиси свинца нельзя воспользоваться соляной или серной кислотами? Составьте уравнения реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида свинца.

1.2. Контрольные вопросы и задания

1. Сравнив результаты опытов, сделайте вывод, как изменяется характер гидроксидов элементов: Mg, Al, Si, P в третьем периоде слева

направо. Чем объясняется это изменение характера гидроксидов? Как оно связано с изменением металлических свойств элементов?

2. По результатам опытов сделайте вывод об изменении кислотно-основных свойств гидроксидов элементов: C, Si, Sn, Pb в главных подгрупппах сверху вниз. Как увязать такое изменение характера гидроксидов с возрастанием порядкового номера элемента и изменением металлических свойств элементов?

3. Запишите кислородные соединения марганца со степенями окисления II, IV, VI, VII и покажите, как с увеличением степени окисления изменяется характер оксидов и соответствующих им гидроксидов.

4. Укажите, какая из сравниваемых двух кислот H_2SO_3 или H_2SO_4 является более сильной и как объяснить такое явление.

5. Какой из галогенов имеет наибольшее сродство к натрию, если энергия Гиббса для галогенидов натрия имеет следующую величину (кДж/моль):

ΔG^0_{298} NaJ = - 237.2,

ΔG^0_{298} NaBr = -347.7,

ΔG^0_{298} NaCl = -384.0,

ΔG^0_{298} NaF = -541.0.

6. $MgO_{(к)} + CO_{2(г)} = MgCO_{3(к)}$; ΔG^0_{298} = -65.1 кДж/моль

$BaO_{(к)} + CO_{2(г)} = BaCO_{3(к)}$; ΔG^0_{298} = -217.4 кДж/моль

$CaO_{(к)} + CO_{2(г)} = CaCO_{3(к)}$; ΔG^0_{298} = -131.9 кДж/моль

$SrO_{(к)} + CO_{2(г)} = SrCO_{3(к)}$; ΔG^0_{298} = -183.6 кДж/моль.

Как изменяются кислотно-основные свойства оксидов (расположите их в ряд) и как это согласуется со значением ΔG^0_{298} образования рассматриваемых карбонатов из оксидов?

7. Как изменяется сила кислот в ряду H_2SO_4 - H_2SeO_4 - H_2TeO_4 ?

8. $6Na_2O(к) + P_4O_{10}(к) = 4Na_3PO_4(к)$ ΔG^0_{298} = - 378 кДж/моль

$Na_2O(к) + Al_2O_3(к) = 2NaAlO_2(к)$ ΔG^0_{298} = - 173.2 кДж/моль

$Na_2O(к) + SO_3(г) = Na_2SO_4(к)$ ΔG^0_{298} = - 522.1 кДж/моль

$Na_2O(к) + SiO_2(к) = Na_2SiO_3(к)$ ΔG^0_{298} = - 194.5 кДж/моль

$Na_2O(к) + Cl_2I_7(г) = 2NaClO_4(к)$ ΔG^0_{298} = -587.0 кДж/моль

Как изменяются кислотно-основные свойства оксидов (расположите их в ряд) и как это согласуется со значениями ΔG^0_{298} образования рассматриваемых солей из оксидов?

9. Укажите, какое из рассматриваемых двух соединений является более сильным основанием: а) гидроксид натрия или гидроксид цезия; б) гидроксид бария или гидроксид кальция? Объясните это изменение характера гидроксидов, исходя из расположения элементов в таблице Д.И. Менделеева.

2. ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

Ц е л ь р а б о т ы - изучение скорости химической реакции и ее зависимости от концентрации и температуры.

Раздел химии, изучающей скорость химических реакций, называется химической кинетикой.

Скорость химической реакции - это изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени. Зависимость скорости химической реакции выражается законом действующих масс: при постоянной температуре скорость химической реакции прямо пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ, взятых в степенях, равных стехиометрическим коэффициентам в уравнении реакции.

Для реакции $a\text{А} + b\text{В} = c\text{С} + d\text{Д}$ скорость выразится уравнением:

$$v = k\cdot[\text{А}]^a \cdot [\text{В}]^b \qquad \text{(для гомогенной системы)},$$

где v - скорость реакции;

[А], [В] - молярные концентрации реагирующих веществ;

k - константа скорости реакции

(при [А] = [В] = 1 моль/л, k численно равна v).

Для реакции $2NO_{(г)} + O_{2(г)} = 2NO_{2(г)}$ выражение скорости имеет следующий вид:

$$v = k\cdot[NO]^2\cdot[O_2].$$

Гомогенная система состоит из одной фазы - между реагентами нет поверхности раздела. Гетерогенная система состоит из двух и более фаз. Реакция в гетерогенной системе осуществляется на поверхности раздела фаз. Скорость гетерогенной реакции не зависит от площади поверхности раздела фаз, так же как скорость гомогенной реакции не зависит от объема системы.

Концентрация твердого вещества принимается за единицу.

Зависимость скорости химической реакции от температуры описывается экспериментально найденным уравнением Вант-Гоффа:

$$v_{t_2} = v_{t_1} \cdot \gamma^{\frac{t_2 - t_1}{10}},$$

где v_{t_1}, v_{t_2} - скорость реакции при температурах соответственно t_1 и t_2;

γ - температурный коэффициент скорости реакции, равный обычно 2-4.

Эта зависимость может быть выражена в виде следующего правила: при увеличении температуры на каждые 10° скорость химической реакции увеличивается в 2-4 раза.

Зависимость скорости реакции от температуры более точно может быть выражена уравнением Аррениуса:

$$k = c \cdot e^{-\frac{E_{акт}}{RT}},$$

где k - константа скорости реакции;

c - постоянная;

$E_{акт}$ - энергия активации;

R - универсальная газовая постоянная (8.31 Дж/моль ·К);

T - абсолютная температура.

Из уравнения Аррениуса следует, что скорость реакции с повышением температуры увеличивается по закону экспоненты, однако интенсивность теплоотвода в конкретных условиях реакции может возрастать только линейно. В этом случае возможен скачкообразный переход от стационарного режима к нестационарному, быстрое ускорение - самовоспламенение, или цепной взрыв. По такому механизму происходят взрывы метана и угольной пыли в шахтах. Например, при повышении концентрации метана на несколько процентов достигается нижний предел взрываемости метана в воздухе, в тысячи раз ускоряется реакция окисления метана кислородом воздуха $CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O + Q$. Концентрационные пределы взрываемости метана в воздухе от 5 до 15% по объему.

Одним из направлений в решении проблемы предупреждения взрывов метана и угольной пыли в шахтах, опасных по газу и пыли, является применение способов взрывозащиты, основанных на использовании распыленной воды или специальных химических соединений, которые играют роль отрицательных катализаторов (ингибиторов), теплопоглотителей в реакциях окисления углеводородов. Такие вещества носят общее название флегматизаторов горения. Этим свойством обладают гидрокарбонаты натрия и калия, гидрофосфаты аммония, бура и др.

2.1. Экспериментальная часть.

ОПЫТ 1. Зависимость скорости химической реакции от концентрации реагирующих веществ.

Соли тиосерной кислоты устойчивы в твердом состоянии и в растворе. Тиосерная кислота неустойчива и при получении распадается самопроизвольно по реакции

$$Na_2S_2O_3 + H_2SO_4 = H_2SO_3 + S + Na_2SO_4$$

с образованием сернистой кислоты и свободной серы.

Постановка опыта основывается на следующем: в результате реакции между серной кислотой и тиосульфатом натрия образуется сера, выделяющаяся в виде белой мути. Время от начала реакции до момента появления мути зависит от скорости этой реакции.

В три пробирки налить по 6 мл раствора серной кислоты.

В первую пробирку влить 6 мл раствора $Na_2S_2O_3$, быстро перемешать ее содержимое и одновременно включить секундомер. Отсчитать время (τ) до начала появления белой мути - коллоидной серы.

Во вторую пробирку влить смесь 4 мл раствора тиосульфата натрия и 2 мл воды. Наблюдать, через сколько секунд растворы сделаются мутными.

Результаты наблюдений записать по следующей форме, выразив значения скоростей реакций в условных единицах (десятичных дробях!) в виде $v = 1/\tau$, где τ - время в секундах.

Относительная концентрация раствора тиосульфата натрия записана в условных единицах $C_{Na_2S_2O_3} = v_{Na_2S_2O_3} / V_{\text{раствора}}$, где $V_{\text{раствора}}$ - общий объем раствора 12 мл. Тогда для первого случая $C_{Na_2S_2O_3}$ 50%, для второго - 33% и третьего - 17%, что соответствует значениям 3а, 2в, а.

№ опыта	Объем в мл			Относит. концентр. $C_{Na_2S_2O_3}$	Время до появления мути, τ	$v=\frac{1}{\tau}$
	раствора H_2SO_4	раствора $Na_2S_2O_3$	H_2O			
1	6	6	0	3a		
2	6	4	2	2a		
3	6	2	4	a		

Результаты измерений необходимо представить в виде графика. На ось абсцисс наносят значения относительных концентраций в виде трех точек, отстоящих от начала координат на а, 2а, 3а, где а - произвольно выбранный отрезок. Из каждой точки восстанавливается перпендикуляр, длина которого соответствует значениям скоростей реакции в условных единицах. Далее следует обдумать, каким образом, пользуясь верхними концами этих перпендикуляров, провести линию, характеризующую зависимость скорости реакции от концентрации. Подсказкой будет служить математическое выражение для скорости изучаемой реакции, которое нужно записать согласно закону действия масс.

Сделать вывод о зависимости скорости реакции от концентрации реагирующих веществ.

ОПЫТ 2. Зависимость скорости реакции от температуры опыта

Налить в одну пробирку 5 мл раствора $Na_2S_2O_3$, а другую - 5 мл раствора H_2SO_4. Обе пробирки поместить в стакан с водопроводной водой. Спустя 5-7 минут измерить температуру воды и слить вместе содержимое обеих пробирок. Измерить время появится помутнение.

В две другие пробирки налить по 5 мл тех же растворов. Поместить пробирки в стакан с водой, нагретой на 10° выше, чем в предыдущем опыте. Через 5-7 минут слить содержимое пробирок. Измерить время до появления мути.

Повторить опыт, повысив температуру еще на 10°.

Результаты наблюдений выразить в виде графика, откладывая по оси абсцисс температуру опыта, по оси ординат - относительную скорость реакции.

Сделать вывод о зависимости скорости реакции от температуры.

2.2. Контрольные вопросы и задания.

1. Реакция в водном растворе выражается уравнением:

$$2KI + K_2S_2O_8 = 2K_2SO_4 + I_2.$$

Как изменится скорость этой реакции при разбавлении реагирующей смеси в 2 раза?

2. Записать математические выражения для скорости следующих газовых реакций

а) $CH_3CHO = CH_4 + CO$, в) $H_2 + Cl_2 = 2HCl$,
б) $2N_2O = 2N_2 + O_2$, г) $SO_2 + 2H_2 = S + 2H_2O$.

Предсказать изменение скорости этих реакций при увеличении концентрации каждого из реагирующих веществ в 2 раза.

3. Записать выражения для скорости реакций
а) $MgCO_3 = MgO + CO_2$, в) $CaCO_3 + 2HCl = CaCl_2 + H_2CO_3$,
б) $2N_2O = 2N_2 + O_2$, г) $2Zn + O_2 = 2ZnO$.

Как изменится скорость вышеуказанных реакций, если:
а) увеличить концентрацию исходных веществ в 2 раза;
б) увеличить давление в 2 раза.

4. Срок хранения флотационного реагента, поступившего на обогатительную фабрику, согласно техническим условиям составляет при температуре 20°С 2 месяца. Воспользовавшись правилом Вант-Гоффа, рассчитать срок годности этого флотореагента, если на складе фабрики поддерживается 0°С, а температурный коэффициент скорости разложения равен 2.

5. Во сколько раз изменится скорость реакции

$$2NO + O_2 = 2NO_2,$$

если концентрация оксида азота уменьшится в 2 раза, а концентрация кислорода увеличивается в 2 раза?

6. Реакция протекает по уравнению

$$CH_3COOH + C_2H_5OH = CH_3COOC_2H_5 + H_2O,$$

концентрацию CH_3COOH увеличили от 0.3 до 0.45 моль/л, а концентрацию C_2H_5OH увеличили от 0.4 до 0.8 моль/л. Во сколько раз возросла скорость прямой реакции?

7. Кальцинированная сода (безводная Na_2CO_3) используется в виде раствора в качестве регулятора щелочности флотационного процесса. При температуре 55°C сода растворяется в 6 раз быстрее, чем при 15°. Рассчитать температурный коэффициент скорости растворения соды.

8. Для приготовления раствора силиката натрия требуемой плотности, использующегося в качестве подавителя пустой породы, твердые прозрачные куски силикат-глыбы Na_2SiO_3 загружают в воду: нагревают до 95° и ведут перемешивание в течение четырех часов. Какой срок потребуется для получения раствора необходимой концентрации, если поддерживать температуру 90° ($\gamma = 2$)?

3. ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Ц е л ь   р а б о т ы - Изучение влияния концентрации на сдвиг химического равновесия.

Многие реакции идут не до исчезновения исходных веществ, а до состояния, не изменяющегося во временя, когда в реакционной смеси можно обнаружить как исходные вещества, так и продукты реакции. Такое состояние системы называется химическим равновесием.

С термодинамической точки зрения состояние равновесия характеризуются тем, что система достигает минимального значения энергии Гиббса (при заданных температуре, давлении и общем составе).

С кинетической точки зрения при равновесии скорости процессов образования продуктов реакции из исходных веществ и исходных веществ из продуктов выравниваются. Скорость достижения равновесия в зависимости от природы процесса, условий, а также наличия подходящих катализаторов может варьировать от малых долей секунды до веков и тысячелетий.

Если равновесие достигнуто, то для реакции

$$a\text{А} + b\text{В} \Leftrightarrow c\text{С} + d\text{Д} \qquad \text{величина} \quad K_p = \frac{[\text{С}]^c \cdot [\text{Д}]^d}{[\text{А}]^a \cdot [\text{В}]^b},$$

называемая константой равновесия, принимает определенное значение. Константа равновесия зависит от температуры, но не зависит от конкретных количеств реагентов и порядка их взаимодействия.

Изменение равновесных концентраций при внешнем воздействии называется с м е щ е н и е м   х и м и ч е с к о г о   р а в н о в е с и я .

Основным законом, управляющим смещением равновесия, служит принцип Ле-Шателье: «Если на систему, находящуюся в равновесии, оказывается внешнее воздействие, то равновесие смещается в сторону, указываемую воздействием, до тех пор, пока нарастающее в системе противодействие не станет равно оказанному воздействию».

Внешним воздействием, смещающим равновесие, может быть изменение температуры, давления, концентрации одного или нескольких веществ, участвующих в реакции. «Смещение равновесия в сторону, указанную воздействием» означает, что при повышении давления преимущество получает процесс, ведущий к уменьшению объема, т.е. к тому же результату, что и само воздействие. Нагревание ведет к увеличению роли эндотермического прочеса, т.е. процесса, увеличивающего запас энергии в системе (эндотермические реакции идут с поглощением тепла, а экзотермические - с его выделением).

Увеличение концентрации одного из веществ приводит к смещению равновесия в сторону расходования этого вещества.

3.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Влияние концентрации веществ на смещение химического равновесия.

Реакция между хлоридом железа и тиоцианатом аммония протекает по уравнению:

$$FeCl_3 + 3NH_4NCS \leftrightarrow Fe(NCS)_3 + 3NH_4Cl$$

Красная окраска образовавшегося раствора обусловлена содержанием в нем тиоционата (роданида) железа. По изменению интенсивности этой окраски можно судить о направлении смещения равновесия при изменении концентрации какого-либо реагирующего вещества.

В одной пробирке приготовить смесь (по 4 мл) разбавленных растворов $FeCl_3$ и NH_4NCS . Полученный окрашенный раствор разлить поровну в 4 пробирки.

В первую пробирку добавить 2 капли насыщенного раствора $FeCl_3$. Во вторую пробирку добавить несколько кристалликов NH_4NCS (или KNCS). В третью пробирку всыпать немного твердой соли NH_4Cl (или KCl). Четвертую пробирку оставить для сравнения.

Записать уравнение химической реакции и выражение для константы равновесия. Сделать выводы о влиянии концентрации веществ на смещение химического равновесия с использованием принципа Ле-Шателье.

Форма записи

Что добавлено	Изменение интенсивности окраски	Смещение равновесия
1. $FeCl_3$ 2. NH_4NCS 3. NH_4Cl	более интенсивная …………………... ……………………	вправо ……… ……….

3.2. Контрольные вопросы и задания

1. К гомогенных химических системах при постоянных давлении и температуре установилось состояние равновесия:

$2H_2S + 3O_2 \leftrightarrow 2SO_2 + 2H_2O$, $\quad K = 3\cdot10^5$;

$2CH_4 + 3O_2 + 2NH_3 \leftrightarrow 2HCN + 6H_2O$, $\quad K = 1$;

$4NH_3 + 5O_2 \leftrightarrow 4NO + 6H_2O$, $\quad K = 0.008$;

$H_2 + Cl_2 \leftrightarrow 2HCl$, $\quad K = 24.3$.

По данным значениям констант равновесия укажите, реагенты или продукты будут преобладать в равновесной смеси веществ. На основании закона действующих масс составьте выражения для констант равновесия.

2. В гетерогенных химических системах установилось состояние равновесия:

$Si_{(к)} + 2H2O_{(г)} \leftrightarrow SiO_{2(к)} + 2H_{2(г)}$;

$Mg_3N_{2(к)} + 6H_2O_{(г)} \leftrightarrow 3Mg(OH)_{2(к)} + 2NH_{3(г)}$;

$CS_{2(г)} + 2Cl_{2(г)} \leftrightarrow CCl_{4(г)} + 2S_{(к)}$;

$2NO_{2(г)} + 2S_{(к)} \leftrightarrow N_{2(г)} + 2SO_{2(г)}$;

$10NO_{(г)} + P_{4(г)} \leftrightarrow 5N_{2(г)} + P_4O_{10(к)}$;

$TiO_{2(к)} + 2C_{(к)} + 2Cl_{2(г)} \leftrightarrow TiCl_{4(г)} + 2CO_{(г)}$.

На основании закона действующих масс составьте выражения для констант равновесия.

3. За последние 100 лет количество углекислого газа, поступающее за счет сжигания ископаемого топлива, возросло в 50 раз, а парциальное давление CO_2 в атмосфере за это же время увеличилось в 1.2 раза. Объясните это соотношение, допустив, что CO_2 поглощается океаном:
$CO_2(г) + H_2O(ж) \leftrightarrow H_2CO_3(р)$.

4. Рассчитать равновесный выход диоксида серы в реакциях окислительного обжига сульфидных минералов - пирита, молебденита, пирротина, если в состоянии равновесия количество SO_2 равно 0.4 моль, а начальный объем O_2 составлял 33.6 л (н.у.):

$4FeS_2(к) + 11O_2(г) \leftrightarrow 2Fe_2O_3(к) + 8SO_2(г)$;
пирит

$2MoS_2(к) + 7O_2(г) \leftrightarrow 2MoO_3(к) + 4SO_2(г)$;
молибденит

$4FeS(к) + 7O_2(г) \leftrightarrow 2Fe_2O_3(к) + 4SO_2(г)$.
пирротин

5. Равновесный процесс, протекающий в подземных пещерах при образовании сталактитов и сталагмитов, можно описать уравнением

$$Ca^{2+}(р) + 2HCO_3^-(р) \leftrightarrow CaCO_3(к) + H_2O(ж) + CO_2(г).$$

Напишите выражение для константы равновесия этого процесса. Укажите, в какую сторону сдвигается равновесие а) при улетучивании CO_2, б) испарении воды, в) увлажнении атмосферы в пещерах.

6. Состояние равновесия реакции окисления сфалерита

$$2ZnS(к) + 3O_2(г) \leftrightarrow 2ZnO(к) + 2SO_2(г)$$

установилось при равновесной концентрации диоксида серы, равной 0.25 моль/л. Рассчитать исходную концентрацию кислорода.

7. В герметически закрытом сосуде объемом 0.25 л проводят реакцию восстановления антимонита

$$Sb_2S_3(к) + 3CO(г) \leftrightarrow 2Sb(к) + 3COS(г).$$

Равновесная концентрация каждого газообразного вещества равна 0.3 моль/л. Для смещения равновесия добавляют 0.1 моль CO. Определить новые равновесные концентрации CO и COS.

8. Определить, влево или вправо сместится положение равновесия

реакций

$$Fe_2O_{3(к)} + 3CO_{(г)} \leftrightarrow 2Fe_{(к)} + 3CO_{2(г)}, \qquad \Delta H° > 0;$$
гематит

$$3CaCO_{3(к)} + 3SiO_{2(к)} \leftrightarrow 3CO_{2(г)} + Ca_3Si_3O_{9(к)}, \quad \Delta H° < 0,$$
волластонит

$$Cu_2CO_3(OH)_{2(к)} \leftrightarrow 2CuO_{(к)} + CO_{2(г)} = H_2O_{(г)}, \quad \Delta H° > 0;$$
малахит

$$2Mg_2SiO_{4(к)} + 2H_2O_{(ж)} + CO_2(г) \leftrightarrow Mg_3(OH)_4Si_2O_{5(к)} + MgCO_{3(к)}, \Delta H° < 0$$
форстерит серпентин магнезит

при следующих воздействиях: а) введение избытка диоксида углерода, б) нагревание, в) увеличение давления.

9. На некоторых предприятиях систематически из труб в атмосферу выбрасываются оксиды азота, что можно наблюдать как газ красно-желтого цвета (лисий хвост). Объяснить причину различной интенсивности окраски этого газа в зависимости от времени года (лето, зима), если известно, что NO_2 - бурый газ при -11°C превращается в димер N_2O_4 - бесцветные кристаллы, а при обычных условиях существует смесь NO_2 и N_2O_4

$$2\,NO_2 \leftrightarrow N_2O_4.$$

Укажите знак при ΔH в этом уравнении.

4. ИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ В РАСТВОРАХ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Цель работы - Изучение смещения ионного равновесия в водных растворах.

Электролитами называют вещества, диссоциирующие в растворах (или расплавах) на ионы и способные проводить электрический ток. Распад вещества на ионы называется электролитической диссоциацией. Перенос тока в растворах (и расплавах) электролитов осуществляется положительными и отрицательными ионами, которые называются катионами и анионами. К электролитам относятся соли, кислоты и основания.

Для количественной характеристики электролитической диссоциации используется степень диссоциации α - доля моля электролита, существующая в растворе в виде ионов:

$$\alpha = C/C_0,$$

где C - концентрация молекул, распавшихся на ионы, моль/л;

C_0 - исходная концентрация раствора, моль/л.

По величине степени диссоциации все электролиты делятся на сильные и слабые. К сильным относятся те электролиты, α - степень диссоциации которых равна единица, т.е. $C = C_0$. Распад на ионы сильных электролитов протекает необратимо. В растворе сильного электролита не может быть недиссоциированных молекул.

$$HNO_3 = H^+ + NO_3^-; \quad NaCl = Na^+ + Cl^-.$$

К сильным электролитам относятся практически все соли, гидроксиды щелочных и щелочно-земельных металлов и некоторые кислоты (например, HCl, HNO_3, H_2SO_4, HBr, HI, $HClO_4$)

Степень диссоциации слабых электролитов меньше единицы ($C < C_0$). Их ионизация протекает обратимо:

$$CH_3COOH \Leftrightarrow CH_3COO^- + H^+; \qquad H_2CO_3 \Leftrightarrow H^+ + HCO_3^-.$$

Константу равновесия электролитической диссоциации слабого электролита называют константой диссоциации. Например, при 298 K

$$K_{CH_3COOH} = \frac{C_{CH_3COO^-} \cdot C_{H^+}}{C_{CH_3COOH}} = 1.8 \cdot 10^{-5}.$$

$$K_{H_2CO_3} = \frac{C_{H^+} \cdot C_{HCO_3^-}}{C_{H_2CO_3}} = 4.4 \cdot 10^{-7}.$$

Из величин констант видно, что угольная кислота по первой ступени электролит более слабый, чем уксусная кислота.

Степень и константа ионизации слабого электролита связаны зависимостью (закон Оствальда):

$$K = \frac{\alpha^2 \cdot C_0}{1 - \alpha}.$$

Если степень ионизации электролита значительно меньше единицы, то уравнение можно записать $K = \alpha^2 \cdot C_0$, откуда следует, что α возрастает с разведением раствора.

В чистой воде кроме молекул H_2O содержатся протоны и гидроксид-ионы, при этом

$$[H^+] = [OH^-] = 1 \cdot 10^{-7} \text{ моль/л } (25° C).$$

Содержание протонов и гидрокид-ионов выражают также через водородный показатель pH = 1g [H^+]. При pH = 7 среду водного раствора называют нейтральной, при pH < 7 - кислотной и при pH > 7 - щелочной.

Каковы пределы значений pH в природе? Рудничные воды выветривающихся колчеданных месторождений, содержащие свободную серную кислоту, имеют pH около 2, а воды окисляющихся месторождений самородной серы в песчаниках - еще ниже. Воды кратерных озер имеют pH 1-3, торфяных болот около 4, буроугольных месторождений около 5, pH дождевой воды примерно 5.5. Обычные грунтовые воды имеют pH 6.5 - 8.5, морская вода (в зависимости от времени года, ее температуры, количества растворенной в ней углекислоты, органических кислот, привнесенных реками) колеблется от 8.2 до 8.5. В содовых озерах pH достигает 9-10.

4.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Сравнение относительной силы кислот

В одну пробирку наливают 1-2 мл 2М раствора уксусной кислоты, в другую - столько же раствора соляной кислоты той же концентрации. В обе пробирки добавляют небольшое количество мелко измельченного известняка. Взбалтывая пробирки с содержимым, наблюдать, одинаково ли быстро растворяется $CaCO_3$ во взятых кислотах.

$$CaCO_3\downarrow + 2H^+ = Ca^{2+} + H_2O + CO_2\uparrow.$$

Интенсивность выделения CO_2 при этой реакции служит относительным индикатором концентрации водородных ионов. Рассчитайте, во сколько раз концентрация протонов в растворе HCl больше, чем в растворе CH_3COOH, если $K_{CH_3COOH} = 1.8\cdot10^{-5}$.

Напишите уравнения диссоциации обеих кислот.

ОПЫТ 2. Влияние концентрации одноименных ионов на ионизацию слабой кислоты.

К 1-2 мл 2М раствора уксусной кислоты в двух пробирках прибавьте 2 капли метилоранжа. Отметьте окраску индикатора. Добавьте при перемешивании в одну пробирку несколько кристалликов ацетата аммония до изменения цвета раствора. Как изменился pH раствора? Объясните изменение pH, применяя правило Ле Шателье и используя выражение константы диссоциации CH_3COOH

ОПЫТ 3. Влияние концентрации одноименных ионов на ионизацию слабого основания.

В две пробирки наливают по 1-2 мл 2М раствора гидроксида аммония и по 2 капли фенолфталеина. В одну из пробирок добавляют при перемешивании несколько кристалликов ацетата аммония до изменения цвета раствора. Объясните причину наблюдаемого изменения окраски на основании уравнения диссоциации NH_4OH, принципа Ле Шателье и константы диссоциации NH_4OH.

ОПЫТ 4. Определение характера диссоциации гидроксидов

В три пробирки наливают по 2-3 мл растворов: в 1-ю - силиката натрия, во 2-ю - сульфата никеля, в 3-ю - сульфата цинка. До начала выпадения осадков гидроксидов добавляют по каплям в 1-ю - раствор серной кислоты, а во 2-ю - раствор гидроксида натрия.

Содержимое каждой пробирки взбалтывают и разливают каждый осадок гидроксидов на две пробирки. В одну пробирку добавляют разбавленной кислоты, а в другую концентрированной щелочи. На основании наблюдений за растворением осадков кремниевой кислоты, гидроксида никеля и гидроксида цинка в кислоте и щелочи сделайте вывод о кислотно-основном характере электролитической диссоциации этих гидроксидов.

Напишите уравнения диссоциации гидроксидов.

4.2. Контрольные вопросы и задания

1. Присутствие каких ионов можно ожидать в водном растворе сернистой кислоты H_2SO_3? Запишите выражения для констант диссоциаций этой кислоты.
2. Почему константа электролитической диссоциации служит более удобной характеристикой, чем степень диссоциации?
3. Объясните, почему соли являются сильными электролитами. На примере $NaHCO_3$ укажите характер химических связей, по которым электролитическая диссоциация протекает в водном растворе: а) практически полностью; б) частично; в) отсутствует.
4. Укажите, корректно ли сопоставлять такие свойства, как растворимость вещества и способность его к электролитической диссоциации.
5. В практике флотации используются процессы с низкими и высо-

кими значениями pH флотационной пульпы. Можно ли приготовить растворы с pH 0, -1, -2, 14, 15, 16?

6. Вычислите концентрацию ионов водорода в 1M (9.45 %-ном) растворе серной кислоты, pH которого - 0.005. Объясните полученный результат.

7. В Первоуральске выпал кислотный дождь, водородный показатель которого равен 2.5. Во сколько раз превышена концентрация иона водорода, если обычная дождевая вода имеет pH = 5.5?

8. Шахтные воды Кизеловского бассейна содержат 0.01 г/л ионов водорода. Рассчитайте водородный показатель этих вод, концентрацию OH^- ионов. Укажите, кислотный или щелочной характер имеют эти воды.

9. Во сколько раз уменьшится концентрация ионов водорода, если к 1 литру раствора уксусной кислоты с концентрацией 0.005 моль/л прибавить 0.05 моль ацетата натрия, считая, что концентрация недиссоциированных молекул уксусной кислоты, как и объем раствора остаются практически постоянными? K_{CH_3COOH} $1.8 \cdot 10^{-5}$.

10. Для оценки pH раствора сероводорода студент записал следующие уравнения:

$$H_2S = 2H^+ + S^{2-}; \quad S^{2-} + H_2O \leftrightarrow HS^- + OH^-.$$

Таким образом, студент сделал вывод, что среда щелочная. Найдите ошибки в его рассуждениях.

5. РЕАКЦИИ ИОННОГО ОБМЕНА

Ц е л ь р а б о т ы - выявление закономерностей протекания реакций ионного обмена в растворах электролитов.

Минералы и горные породы в условиях земной поверхности стремятся перейти в более устойчивые соединения. Известняки медленно растворяются в водах, содержащих углекислоту, образую гидрокарбонат кальция. Грунтовые воды, содержащие $Ca(HCO_3)_2$, реагируют с сульфатно-хлоридно-магниевыми (морскими) водами. При этом осаждаются гипс и диломит:

$$2Ca(HCO_3)_2 + MgCl_2 + Na_2SO_4 = \underset{\text{гипс}}{CaSO_4} + \underset{\text{доломит}}{CaMg(CO_3)_2} + 2NaCl + 2H_2CO_3.$$

Так озера морского типа превращаются в озера континентального типа.
Сульфатно-натриевые воды - результат выщелачивания горных по-

род, могут образовывать содовые озера.

$$Ca(HCO_3)_2 + NaSO_4 = CaSO_4\downarrow + NaHCO_3.$$

Изверженные горные породы выветриваются, в полевых шпатах содержание алюминия увеличивается от ранних пород к поздним. При этом из них выносятся катионы щелочноземельных металлов. Например, из анорита образуется каолинит

$$CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 + 2H_2O + CO_2 = Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O + CaCO_3.$$

В результате воздействия растворов, содержащих в повышенных концентрациях ионы Mg^{2+} и SO_4^{2-}, происходит доломитизация известняков

$$2CaCO_3 + MgSO_4 = CaMg(CO_3)_2 + CaSO_4.$$

Если химическая реакция протекает, то она отличается следующими признаками:

происходит образование осадка, или растворение осадка, или изменяется цвет осадка или раствора, или появляются пузырьки газа.

Сущность ионных реакций обмена сводится к соединению ионов в молекулы новых веществ. Равновесия ионных реакций в растворах смещаются в сторону образования слабых электролитов (слабых кислот, слабых оснований, воды) и сильных электролитов (осадков, летучих веществ).

Все кислые соли в воде растворяются, основные соли, как правило, нерастворимы.

В ионных уравнениях сильные, хорошо растворимые электролиты записываются в форме ионов, а слабые электролиты, газы и осадки - в виде молекул.

Рассмотрим следующие примеры реакций. Запишем их сначала в молекулярной форме, а затем в виде кратких ионных уравнений.

$$Fe(HCO_3)_2 + 2NaOH = FeCO_3\downarrow + Na_2CO_3 + 2H_2O;$$

$$Fe^{2+} + 2HCO_3^- + 2OH^- = FeCO_3\downarrow + CO_3^{2-} + 2H_2O;$$

$$ZnSO_4 + 4NaOH = Na_2ZnO_2 + Na_2SO_4 + 2H_2O;$$

$$Zn^{2+} + 4OH^- = ZnO_2^{2-} + 2H_2O;$$

$NaSiO_3 + 2CO_2 + 2H_2O = H_2SiO_3\downarrow + 2\ NaHCO_3$;

$SiO_2^{2-} + 2CO_2 + 2H_2O = H_2SiO_3\downarrow + 2HCO_3^-$;

$NH_4OH + HCl = NH_4Cl + H_2O$;

$NH_4OH + H^+ = NH_4Cl + H_2O$.

5.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Образование осадков

а) В две пробирки наливают по 2 мл раствора хлорида бария и добавляют в одну пробирку сульфата натрия, а в другую - нитрата калия. Написать молекулярное и ионное уравнения и сделать вывод, в каком случае соль реагирует с другой солью;

б) В две пробирки наливают по 2 мл раствора сульфата меди. В одну пробирку добавляют 1 мл очень разбавленный (1%-ный) раствор гидроксида натрия, а в другую - столько же разбавленного раствора той же щелочи. Написать молекулярные и ионные уравнения, указав окраску образующихся осадков и учитывая, что в первом случае образуется основной сульфат меди $(CuOH)_2SO_4$. Сделайте вывод об условиях образования основной соли и гидроксида. Осадки сохранить для выполнения опыта 2б;

в) В две пробирки наливают по 2 мл раствора хлорида кобальта. В одну пробирку добавляют разбавленного раствора щелочи до образования синего осадка основной соли. Во вторую пробирку приливают еще столько же щелочи и нагревают с целью получения гидроксида кобальта розового цвета. Содержимое пробирок оставляют для проведения опыта 2в. Написать молекулярное и ионные уравнения, указав цвет осадков.

ОПЫТ 2. Растворение осадков.

а) Наливают в пробирку известковую воду $Ca(OH)_2$, через этот раствор пропускают углекислый газ из аппарата Киппа. Наблюдают образование белого осадка средней соли, продолжают пропускать пузырьки CO_2 до растворения белого осадка и получения бесцветного прозрачного раствора кислой соли $Ca(HCO_3)_2$. Написать молекулярные и ионные уравнения образования карбоната кальция и растворения его. Сделать вывод об условии получения кислой соли.

б) В обе пробирки опыта 1б добавляют серной кислоты до растворения осадков. Написать молекулярные и ионные уравнения реакции растворения. Объяснить причину сдвига ионного равновесия;

в) Берут пробирки с осадками опыта 1в. В пробирку с синим осадком добавляют хлороводородной кислоты, в пробирку с розовым осадком - разбавленной щелочи. Напишите молекулярные и ионные уравнения. Наблюдать растворение одного из осадков. Дать объяснения наблюдениям.

О П Ы Т 3. Образование газообразного вещества

Все сульфиты, растворимые и нерастворимые в воде, разлагаются минеральными кислотами с выделением диоксида серы, который определяют как запах горящей серы.

К раствору сульфита натрия приливают разбавленной серной кислоты. Обнаруживают запах SO_2 , стараясь запомнить его. Это позволит впредь распознавать диоксид серы органолептически.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции.

О П Ы Т 4. Образование слабых электролитов

а) Наливают в пробирку 1-2 мл раствора ацетата натрия и добавляют разбавленной серной кислоты. Определяют по запаху образующуюся уксусную кислоту;

б) Наливают в пробирку 1-2 мл раствора хлорида аммония и добавляют разбавленной щелочи. Определяют по запаху выделяющийся аммиак;

в) Наливают в пробирку 3 мл раствора сульфата хрома (III) и приливают к нему по каплям раствор разбавленной щелочи до появления серозеленого осадка гидроксида хрома.

Содержимое пробирки разделяют на две части. К одной части приливают раствор серной кислоты, к другой - раствор щелочи. Сравнить цвет полученных растворов. Сделать вывод о характере гидроксида хрома.

Для опытов а), б), в) написать молекулярные и ионные уравнения реакций, объяснить причины сдвига ионных равновесий.

Сделать вывод, в каком направлении протекают реакции ионного обмена в растворах электролитов.

5.2. Контрольные вопросы и задания

1. Составить в молекулярном виде уравнения реакций растворения следующих малорастворимых минералов:

а) стронцианит $SrCO_3$ переводят в водный раствор насыщением CO_2 суспензии минерала в воде;

б) сассолин $B(OH)_3$ обрабатывают избытком раствора едкого натра;

в) гиббсит $Al(OH)_3$ хорошо растворяется известковом молоке;

г) азурит $Cu(OH)_2 \cdot 2CuCO_3$ обрабатывают хлороводородной кислотой;

д) гетит Fe_2O_3 хорошо растворяется в серной кислоте;

е) гемиморфит $Zn(OH)_2 \cdot Zn_3Si_2O_7$ нагревают в растворе гидроксида натрия;

ж) брусит $Mg(OH)_2$ разлагается раствором серной кислоты;

з) борнит $FeS \cdot CuS \cdot 2Cu_2S$ обрабатывают соляной кислотой.

2. При смещении водных растворов одного из следующих веществ: NaOH, KOH, CsOH концентрацией 1 моль/л с одинаковыми объемами 1М раствором HCl, HBr, HNO_3, $HClO_4$ выделяется примерно одно и то же количество теплоты, составляющее 55-59 кДж/моль. О чем это свидетельствует? Напишите уравнения реакции в ионном виде.

3. При смешении 1М водных растворов одной из следующих кислот: азотной, уксусной, бензойной с одинаковыми объема 1М растворов KOH обнаруживаются различные тепловые эффекты. Объясните, приведя уравнения реакций в молекулярно-ионном виде.

4. Укажите причины, по которым реакция

$$Na_2CO_{3(р)} + Ca(OH)_{2(к)} \leftrightarrow CaCO_{3(к)} + 2NaOH_{(р)}$$

обратима, составьте выражение для константы равновесия. Почему в этом процессе образуется только разбавленный раствор гидроксида натрия, а получение концентрированного раствора невозможно?

5. Для переработки карбонатных марганцевых руд предложен способ, основанный на выщелачивании их раствором хлорида кальция:

$$MnCO_{3(к)} + CaCl_{2(р)} \leftrightarrow CaCO_{3(к)} + MnCl_{2(р)}.$$

Можно ли регенерировать раствор хлорида кальция и вывести одновременно марганец в осадок добавлением к продуктам выщелачивания суспензии $Ca(OH)_2$? Напишите уравнение реакции.

6. Растворение соли слабой кислоты в растворах кислот должно проходить тем быстрее, чем больше концентрация ионов водорода. Однако кальцит $CaCO_3$ растворяется в растворе уксусной кислоты быстрее, чем в растворе серной. Почему?

7. В 250 мл раствора содержится 1 г NaOH. Вычислите молярную концентрацию и pH этого раствора.

8. Кислые растворы имеют кислый вкус, щелочные - вкус мыла. Сливаются равные объемы растворов хлороводородной кислоты и гидроксида натрия одинаковой концентрации. Какой вкус полученного раствора?

9. Гашеную известь $Ca(OH)_2$ используют при флотации для создания щелочной среды (pH 12 и более), отделения пирита от сфалерита и сульфидов меди. Как изменяется pH растворов извести при хранении их в открытых емкостях? Напишите уравнение реакции.

6. ГИДРОЛИЗ СОЛЕЙ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение свойств водных растворов, связанных с реакцией гидролиза солей.

Природные воды часто не бывают нейтральными, а имеют либо кислую, либо щелочную среду вследствие гидролиза. При химическом выветривании известняков образуются щелочные растворы, а пиритсодержащих - кислые. Изменение нейтральной реакции среды водного раствора - признак гидролиза соли, обменной химической реакции, протекающей с участием воды .Однако не все соли вступают в реакцию гидролиза. Если растворить в воде хлорид калия KCl, нейтральная реакция среды (pH = 7), характерная для чистой воды, не изменится. Соли, образованные сильным основанием и сильной кислотой (NaCl, $LiNO_3$, CsBr и т.п.), в реакцию гидролиза не вступают.

С водой взаимодействуют: 1) соли, образованные слабыми основаниями и сильными кислотами (NH_4Cl, $CuSO_4$, $Zn(NO_3)_2$ и т.п.); 2) соли, образованные слабыми кислотами и сильными основаниями (Na_2S, KCN, $BaCO_3$ и т.п.); 3) соли, образованные слабыми основаниями и слабыми кислотами (NH_4CH_3COO и т.п.).

Из рассмотренных примеров следует, что в реакцию с водой вступают катионы слабых оснований и анионы слабых кислот. Если эти ионы многозарядны (Fe^{3+}, Cu^{2+}, CO_3^{2-}, SiO_3^{2-} и т.п.), их взаимодействие с водой обычно идет до образования основного или кислого иона (первая ступень гидролиза). Например, соль $FeCl_3$, образованная слабым основанием с сильной кислотой, подвергается гидролизу по катиону:

$$Fe^{3+} + HOH \leftrightarrow FeOH^{2+} + H^+$$

Или в молекулярной форме:

$$FeCl_3 + HOH \leftrightarrow FeOHCl_2 + HCl.$$

В результате гидролиза соли $FeCl_3$ появляется избыток катионов H^+ и раствор приобретает кислую реакцию, pH < 7.

Гидролизу по аниону подвергаются соли, образованные сильным основанием и слабой кислотой. В качестве примера запишем уравнение гидролиза соли Na_2CO_3 в ионном виде:

$$CO_3^{2-} + HOH \leftrightarrow HCO_3^- + OH^-$$

И в молекулярной форме:

$$Na_2CO_3 + HOH \leftrightarrow NaHCO_3 + NaOH.\uparrow$$

Избыток анионов OH^- придает раствору щелочную реакцию, pH > 7.

Если же соль образована слабым малорастворимым основанием и слабой летучей кислотой, то происходит полный необратимый гидролиз. В таблице растворимости такие соли обозначены прочерком, означающим, что эти соли в водных растворах не существуют. Например, гидролиз карбоната железа (III):

$$Fe_2(CO_3)_3 + 6H_2O = 2Fe(OH)_3\downarrow + 3H_2CO_3;$$

$$2Fe^{3+} + 3CO_3^{2-} + 6H_2O = 2Fe(OH)_3\downarrow + 3H_2CO_3 \begin{array}{l} \nearrow 3CO_2\uparrow \\ \searrow 3H_2O \end{array}$$

т.е. карбонат железа (III) может существовать только в виде сухой соли, а в растворе он подвергается полному гидролизу, образуя труднорастворимый гидроксид железа (III) и слабую летучую угольную кислоту. В подобных случаях в осадок выпадает наименее растворимый из возможных продуктов гидролиза. Так, растворимость $(CuOH)_2CO_3$ меньше, чем $Cu(OH)_2$, поэтому в зоне окисления минералов меди в известняках встречается малахит

$$2CuSO_4 + 2CaCO_3 + H_2O \leftrightarrow (CuOH)_2CO_3 + CaSO_4 + CO_2,$$

В водном растворе положительные ионы металлов гидратированы. Многие из них связывают воду так прочно, что их можно рассматривать как комплексные ионы. Гидролиз солей, образованных слабыми основаниями и сильными кислотами, происходит за счет молекул воды, входящих в комплексный ион. При этом катион металла выталкивает за пределы внутренней сферы одноименно заряженный ион водорода из молекулы воды, среда становится кислой. Например, при гидролизе хлорида магния координационное число Mg^{2+} равно шести

$$Mg^{2+} + 6H_2O = [Mg(H_2O)_6]^{2+} \Leftrightarrow [Mg(H_2O)_5OH]^{+} + H^{+};$$

$$MgCl_2 + 6H_2O \Leftrightarrow [Mg(H_2O)_5OH]Cl + HCl\ .$$

Ионы Bi^{3+}, Sb^{3+}, Ti^{4+}, V^{4+} обладают настолько сильным поляризующим действием, что выталкивает из молекулы воды оба иона водорода, вследствие чего образуются ионы BiO^{+} висмутил, SbO^{+} антимонид, TiO^{2+} титанил, VO^{2+} ванадил.

$$SbCl_3 + HOH \Leftrightarrow SbOCl + 2HCl.$$

6.1. Экспериментальная часть

О П Ы Т 1. Образование основной соли при гидролизе

В три пробирки наливают по 3-4 капли нейтрального раствора лакмуса и добавляют по 2 мл растворов: в одну пробирку - дистиллированной воды, в другую - сульфата натрия, в третью - сульфата алюминия. Сравнивают окраску индикатора в воде и растворах солей. Сделать вывод о возможности гидролиза.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза: отразить отсутствие гидролиза в пробирке с раствором Na_2SO_4.

О П Ы Т 2. Образование кислой соли при гидролизе

В две пробирки наливают по 3-4 капли нейтрального раствора фенолфталеина и добавляют по 2 мл растворов: хлорида натрия и карбоната натрия. Сравнивают окраску индикатора в воде и растворах солей.

Сделать вывод о возможности гидролиза.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза: отразить отсутствие гидролиза а пробирке с раствором $NaCl$.

О П Ы Т 3. Смещение равновесия гидролиза

Налить в пробирку 1-2 мл раствора нитрата висмута $Bi(NO_3)_3$ и разбавить его водой в 3-5 раз. Наблюдать образование осадка, т.е. помутнение раствора. Составить молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза, зная, что труднорастворимым продуктом является соль $BiONO_3$.

В пробирку с осадком $BiONO_3$ прибавить несколько капель концентрированной азотной кислоты. Наблюдать растворение осадка. Объяснить наблюдаемое, исходя из уравнения гидролиза.

О П Ы Т 4. Влияние нагревания на гидролиз ацетата натрия

К 3-4 мл раствора уксуснокислого натрия CH_3COONa прибавить 1-2 капли фенолфталеина и нагреть до кипения. Обратить внимание на появление розовой окраски, исчезающей при охлаждении раствора.

Написать ионное и молекулярное уравнение реакции гидролиза уксуснокислого натрия. Объясните различие окраски при нагревании и охлаждении раствора.

О П Ы Т 5. Полный гидролиз (совместный гидролиз)

К 1-2 мл раствора сернокислого алюминия $Al_2(SO_4)_3$ прилить такой же объем раствора карбоната натрия Na_2CO_3. Наблюдать выделение углекислого газа и образование осадка гидроксида алюминия. Написать молекулярное и ионное уравнение совместного гидролиза взятых солей.

6.2. Контрольные вопросы и задания

1. На некоторых обогатительных фабриках иногда барабаны (емкости) из-под цианида натрия обезвреживают 10%-ным раствором железного купороса $FeSO_4$. Напишите уравнения реакции, ведущих к образованию в этих условиях циановодородной кислоты, и покажите тем самым, что такой способ растворения цианидов абсолютно недопустим. При подкислении до $pH \leq 9$ работать с растворами цианида натрия опасно; безопасно при $pH > 10$.

2. Раствор основания и раствор кислоты смешивают в эквивалент-

ных соотношениях. Для каких из перечисленных пар раствор будет иметь нейтральную реакцию:

а) $NH_4OH + HCl$, б) $NH_4OH + CH_3COOH$, в) $NaOH + HCl$,

г) $NaOH + CH_3COOH$?

3. Сточные воды обогатительных фабрик, содержащие гидрокарбонат кальция, очищают от коллоидных примесей (удалить которые отстаиванием и фильтрованием невозможно) добавлением к ним сульфата алюминия. Образующийся хлопьевидный $Al(OH)_3$ обволакивает коллоидные частицы примесей и вызывает их осаждение. Объясните образование $Al(OH)_3$ и напишите уравнение реакции.

4. Определить, возможна ли реакция окисления сфалерита кислородом воздуха в стандартных условиях, если

	$ZnS_{(к)}$ +	$2O_{2(г)}$ +	$7H_2O_{(ж)}$ =	$ZnSO_4 \cdot 7H_2O_{(р)}$.
ΔG^0_{298}, кДж/моль	-201		-237	-2564

Сделайте вывод о кислотности рудничных вод, содержащих в качестве продукта выветривания сульфат цинка, записав уравнение реакции гидролиза в молекулярном и ионном виде.

5. При окислении пирита, преобладающего в колчеданных рудах, кислородом, растворенным в воде, выделяется сульфат железа (III). Поступая с нисходящим током растворов в нижние горизонты, он реагирует с породой. Сделайте вывод о составе породы, если наблюдается совместное образование гипса $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ и лимонита $Fe(OH)_3$. Напишите уравнение реакции взаимодействия сульфата железа (III) и породы.

6. Объясните, приведя молекулярно-ионное уравнение, почему при нагревании раствора $NaHCO_3$ реакция среды из слабощелочной переходит в сильнощелочную.

7. В водном растворе хлорида цинка при нагревании происходит растворение кусочка металлического цинка. Напишите уравнения реакции, объясняя причину выделения водорода.

8. В жесткой воде ионы железа обычно присутствуют в виде гидрокарбоната железа (II). При хранении такой воды в открытых сосудах, железо окисляется кислородом воздуха, вода мутнеет из-за выпадения в осадок $Fe(OH)_3$. Напишите уравнение реакции, в результате которой образуется гидроксид железа (III).

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный университет»

И. А. Низова, Н. А. Зайцева

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ» ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие для студентов о факультета Геологии и геофизики

Екатеринбург

2020

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

И. А. Низова, Н. А. Зайцева

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие для студентов

ФАКУЛЬТЕТА ФГИГ

Издание УГГУ Екатеринбург, 2020

Рецензент: Г. Л. Левит, кандидат химических наук, старший научный сотрудник Института органического синтеза УрО РАН

Низова И.А., Зайцева Н.А.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ», часть II. Окислительно-восстановительные процессы: учебное пособие / И.А. Низова, Н.А. Зайцева – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. – 30 с.

В учебном пособии изложены краткие сведения об окислительно восстановительных процессах и основных приемах составления уравнений окислительно-восстановительных реакций. Пособие содержит 20 вариантов заданий для внеаудиторной самостоятельной работы по каждой теме.

Для студентов горно-технологического факультета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Окислительно-восстановительными реакциями (ОВР) называют реакции, протекающие с изменением степени окисления элементов.

1. Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.

Степень окисления – условный заряд атома, рассчитанный из предположения, что все связи в соединении ионные.

Правила вычисления степени окисления:

1. Сумма степеней окисления всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов, составляющих сложный ион – заряду иона.

2. Степень окисления атома в простом веществе равна нулю.

3. Некоторые элементы имеют в соединениях постоянную степень окисления:

Фтор – только –1

Щелочные металлы (Na, К, Li, Rb, Cs) – только +1

Щелочноземельные металлы (Ca, Sr, Ba), Zn, Mg, Be - только +2

Алюминий – только +3.

4. Водород почти во всех соединениях имеет степень окисления +1. Исключение составляют гидриды металлов (NaH, CaH_2 и др.), где степень окисления водорода отрицательна (–1). Кислород почти во всех соединениях имеет степень окисления –2. Исключение составляют фторид кислорода OF_2, (степень окисления кислорода +1) и пероксиды H_2O_2, Na_2O_2 и т.д. (степень окисления кислорода –1).

5. Максимальная положительная степень окисления элемента обычно совпадает с номером его группы в периодической системе. Максимальная отрицательная степень окисления элемента равна максимальной положительной степени окисления минус восемь. Исключение составляют фтор, кислород, железо: их высшая степень окисления выражается числом, значение которого ниже, чем номер группы, к которой они относятся. У элементов подгруппы меди, наоборот, высшая степень окисления больше единицы, хотя они и относятся к I группе.

Во время ОВР происходит обмен электронами: окислитель присоединяет электроны (сам при этом восстанавливается), восстановитель отдает электроны (сам при этом окисляется). Окисление всегда сопровождается восстановлением и наоборот. Число электронов, отдаваемых восстановителем, всегда равно числу электронов, принимаемых окислителем.

Важнейшими окислителями и восстановителями могут быть как простые, так и сложные вещества. Так как окислитель содержит в своем составе элемент, понижающий степень окисления, а восстановитель содержит элемент, степень окисления которого повышается в ходе реакции, окислителями могут быть прежде всего соединения высших ступеней окисления, а восстановителями - низших степеней окисления, присущих данному элементу.

Из простых веществ сильными окислителями являются неметаллы верхней части VI и VII групп периодической системы, за счёт высокой электроотрицательности их атомов. Сильнее всего окислительные свойства выражены у фтора F_2, но в практике чаще пользуются в качестве окислителей кислородом O_2, озоном O_3, хлором Cl_2 и бромом Br_2. К простым веществам – восстановителям относятся водород H_2, углерод С и металлы, из которых на практике чаще применяют алюминий, магний, натрий и цинк.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие окислители: перманганат калия $KMnO_4$; дихромат калия $K_2Cr_2O_7$; растворы азотной кислоты HNO_3 различных концентраций; концентрированная серная кислота H_2SO_4; пероксид (перекись) водорода; оксиды марганца (IV) MnO_2, и свинца (IV) PbO_2; смесь концентрированных азотной и соляной кислот (1:3, «царская водка), хлорная кислота $HClO_4$.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие восстановители: иодид калия KI; сульфит натрия Na_2SO_3; сульфид натрия Na_2S и сероводород H_2S; хлорид олова $SnCl_2$, монооксид углерода (угарный газ) аммиак NH_3.

Некоторые из этих веществ проявляют как окислительные, так и восстановительные свойства в зависимости от ОВР: CO, H_2O_2, MnO_2, так как содержат элемент в промежуточной степени окисления.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Определите степени окисления всех элементов, входящих в состав следующих веществ:

Номер варианта	Вещества	Номер варианта	Вещества
1	MnO_2, CH_4 , Cl_2, $KMnO_4$	11	HF, Zn, H_3PO_4, NH_4Cl
2	H_2O_2, H_2SO_4, I_2, $K_2Cr_2O_7$	12	H_2SO_3, NaH_2SbO_3, Au, $ZnCl_2$
3	NaH, F_2, K_2HPO_4, N_2H_4	13	NH_4HS, P, C_6H_6, $Ba(ClO_4)_2$
4	OF_2, C_2H_6, O_2, K_2MnO_4	14	$NaNO_2$, $Ca(HS)_2$, Ag, PH_3
5	CaH_2, C_2H_4, Br_2, $Fe_2(SO_4)_3$	15	$BaCO_3$, AsH_3, Ca, Na_3SbO_4
6	PbO_2, C_2H_2, O_3, $MnOHNO_3$	16	HNO_3, Xe, $KClO_4$, NH_4OH
7	Na_2O_2, N_2, H_2O, K_2SiO_3	17	$Sn(OH)_2$, $CuCl_2$, K_2S, Mn
8	H_2S, Mg, Na_3SbO_3, $Cr(OH)_3$	18	Al_2S_3, Na_2SO_3, $NaClO$, Se
9	Na_2S, NH_3, H_2, $KHCO_3$	19	$NaClO_2$, Al_4C_3, He, $Bi(NO_3)_3$,
10	AlP, CO, HCl, NH_4NO_3	20	$NaHSO_3$, Si, Na_3AsO_3, $Cr(OH)_3$

2. В каких из перечисленных соединений хлор может проявлять только окислительные свойства: $NaCl$, $NaClO$, HCl, $KClO_3$, $NaClO_4$, Cl_2O_7, $HClO_2$?

3. В каких из перечисленных соединений азот может проявлять только восстановительные свойства: $NaNO_2$, NO, N_2O_3, N_2H_4, N_2O, HNO_3, N_2O_5, NH_4NO_3, NH_3, NH_4Cl?

4. В каких из перечисленных соединений сера может быть как окислителем, так и восстановителем: H_2SO_4, $Ca(HS)_2$, H_2S, Na_2SO_3, Na_2S, SO_2, $Na_2S_2O_3$, SO_3, SO?

2. Классификация окислительно–восстановительных реакций

Окислительно-восстановительные реакции обычно разделяют на три типа: межмолекулярные, внутримолекулярные и реакции диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления). Иногда в эту классификацию добавляют четрветрый тип – реакции конпропорционирования.

1) Межмолекулярные реакции протекают с изменением степени окисления атомов, которые находятся в различных молекулах. Например:

$$2\ Al + Fe_2O_3 \xrightarrow{t^o} Al_2O_3 + 2\ Fe,$$

$$C + 4\ HNO_{3(конц)} = CO_2 \uparrow + 4\ NO_2\uparrow + 2\ H_2O.$$

2) К внутримолекулярным реакциям относятся такие реакции, в которых окислитель и восстановитель входят в состав одной и той же молекулы, например:

$$2Cu(NO_3)_2 \xrightarrow{t^o} 2CuO+4NO_2+O_2\uparrow$$

$$2\ KNO_3 \xrightarrow{t^o} 2\ KNO_2 + O_2\uparrow.$$

3) В реакциях диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления) один и тот же элемент является и окислителем, и восстановителем:

$$Cl_2 + 2\ KOH \xrightarrow{на\ холоду} KCl + KClO + H_2O,$$

$$2\ NO_2 + 2\ NaOH \rightarrow NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O.$$

4) В реакциях конпропорционирования один и тот же химический элемент, имеющий разные степени окисления, в результате приводится к единой степени окисления:

$$NH_4NO_3 \rightarrow N_2O + 2H_2O$$

$$NH_4NO_2 \rightarrow N_2 + 2H_2O$$

Вопросы для самостоятельной работы

1. Какие из перечисленных веществ могут вступать в реакции диспропорционирования: HNO_3, HNO_2, H_2SO_4, NH_4NO_3, Br_2, H_2O_2, CaH_2?

2. Приведите пример реакции межмолекулярного конпропорционирования.

3. Является ли реакция разложения перманганата калия реакцией диспропорционирования? Реакцией конпропорционирования?

$$2\ KMnO_4 \xrightarrow{t^o} K_2MnO_4+MnO_2+2O_2\uparrow$$

3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса

Для составления уравнений ОВР используются два метода: метод электронного баланса и метод полуреакций (электронно-ионного баланса). При использовании любого из этих методов прежде всего необходимо определить окислитель и восстановитель, рассчитав степени окисления всех элементов в левой и правой частях уравнения. Затем записать отдельно процесс окисления и процесс восстановления, соблюдая принцип электронного баланса: число электронов, отданных восстановителем, должно быть равно числу электронов, принятых окислителем.

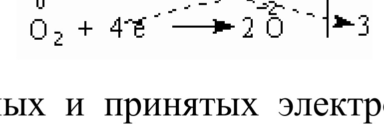
Метод электронного баланса универсален, он позволяет определить коэффициенты реакциях, протекающих как в растворах, так и без растворителя, в веществах в любых агрегатных состояниях. Он удобен для написания реакций термического разложения, взаимодействия двух простых веществ

Пример 1. $Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3$

Определим степени окисления:

$$\overset{0}{Al} + \overset{0}{O_2} = \overset{+3\ -2}{Al_2O_3}$$

Алюминий отдает электроны (приобретает положительную степень окисления), а кислород – принимает электроны (приобретает отрицательную степень окисления). Чтобы получить степень окисления +3, атом алюминия должен отдать 3 электрона. Молекула кислорода, чтобы превратиться в кислородные атомы со степенью окисления –2, должна принять 4 электрона:



Чтобы количество отданных и принятых электронов выровнялось, первое уравнение надо умножить на 4, а второе – на 3. Для этого достаточно переместить числа отданных и принятых электронов против верхней и нижней строчки так, как показано на схеме вверху.

Если теперь в уравнении перед восстановителем (Al) мы поставим найденный нами коэффициент 4, а перед окислителем (O_2) – найденный нами коэффициент 3, то количество отданных и принятых электронов выравнивается и становится равным 12. Электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции Al_2O_3 необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$4Al + 3O_2 = 2Al_2O_3$$

Пример 2. $(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t^o} N_2 + Cr_2O_3 + H_2O$

Определим степени окисления:

$$(\overset{-3}{N}\overset{+1}{H_4})_2\ \overset{+6}{Cr_2}\ \overset{-2}{O_7} = \overset{0}{N_2} + \overset{+3}{Cr_2}\overset{-2}{O_3} + \overset{+1}{H_2}\overset{-2}{O}$$

Азот отдаёт электроны, хром получает.

$$2N^{-3} - 6\bar{e} = N_2^0$$
$$2Cr^{+6} + 6\bar{e} = 2\ Cr^{+3}$$

Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции H_2O необходим коэффициент 4. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t^o} N_2\uparrow + Cr_2O_3 + 4\ H_2O$$

Пример 3. $Hg(NO_3)_2 \rightarrow Hg + NO_2 + O_2$

Определим степени окисления:

$$\overset{+2}{Hg}\ (\overset{+5}{N}\ \overset{-2}{O_3})_2 = \overset{0}{Hg} + \overset{+4}{N}\overset{-2}{O_2} + \overset{0}{O_2}$$

Кислород отдаёт электроны, ртуть и азот получают, здесь вместо привычных двух участников обмена электронами их сразу три:

$$2O^{-2} - 4\bar{e} = O_2^0$$
$$2N^{+5} + 1\ \bar{e} = 2\ N^{+4}$$
$$Hg^{+2} + 2\ \bar{e} = Hg^0$$

Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции NO_2 необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$Hg(NO_3)_2 \rightarrow Hg + 2NO_2 + O_2$$

Задания для самостоятельной работы

1. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций разложения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$Mn(NO_3)_2 \rightarrow MnO_2 + NO_2$	11	$BaO_2 \rightarrow BaO + O_2$
2	$K_2MnO_4 \rightarrow K_3MnO_4$ $MnO_2 + O_2$	12	$AgNO_3 \rightarrow Ag + NO_2 + O_2$
3	$Zn(NO_3)_2 \rightarrow ZnO + NO_2 + O_2$	13	$FeSO_4 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2 + SO_3$
4	$K_2Cr_2O_7 \rightarrow O_2 + Cr_2O_3 + K_2CrO_4$	14	$KClO_4 \rightarrow KCl + O_2$
5	$Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe_2O_3 + NO_2 + O_2$	15	$CdSO_3 \rightarrow CdSO_4 + CdS$
6	$KMnO_4 \rightarrow K_2MnO_4 + MnO_2 + O_2$	16	$HNO_3 \rightarrow H_2O + NO_2 + O_2$
7	$Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe_2O_3 + NO_2 + O_2$	17	$NaClO_2 \rightarrow NaClO_3 + NaCl$
8	$HNO_2 \rightarrow NO + NO_2 + H_2O$	18	$KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$
9	$Co(NO_3)_2 \rightarrow CoO + NO_2 + O_2$	19	$SnSO_4 \rightarrow SnO_2 + SO_2$
10	$LiNO_3 \rightarrow Li_2O + NO_2 + O_2$	20	$Ni(NO_3)_2 \rightarrow Ni(NO_2)_2 + O_2$

2. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций замещения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$Fe_2O_3 + C \rightarrow CO_2 + Fe$	11	$Zn + AgNO_3 \rightarrow Zn(NO_3)_2 + Ag$
2	$KBr + Cl_2 \rightarrow KCl + Br_2$	12	$Al_2O_3 + Mg \rightarrow MgO + Al$
3	$Fe_2O_3 + H_2 \rightarrow H_2O + Fe$	13	$MnO_2 + Al \rightarrow Al_2O_3 + Mn$
4	$Al + H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2$	14	$H_2S + Br_2 \rightarrow S + HBr$
5	$O_2 + HI \rightarrow H_2O + I_2$	15	$CuCl_2 + Cr \rightarrow Cu + CrCl_3$
6	$Al + CuSO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + Cu$	16	$Mg + SiO_2 \rightarrow MgO + Si$
7	$Ca + H_2O \rightarrow H_2 + Ca(OH)$	17	$NaI + Cl_2 \rightarrow NaCl + I_2$
8	$TiO_2 + Mg \rightarrow MgO + Ti$	18	$Na + H_2O \rightarrow H_2 + NaOH$
9	$Al + FeO \rightarrow Al_2O_3 + Fe$	19	$KClO_3 + I_2 \rightarrow KIO_3 + Cl_2$
10	$KI + Br_2 \rightarrow KBr + I_2$	20	$Al + H_2O \rightarrow Al(OH)_3 + H_2$

4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).

Метод полуреакций применим преимущественно для реакций в растворах, зато он позволяет определить коэффициенты не только у окислителя и восстановителя, но и вещества, определяющего среду раствора (кислота, щёлочь, вода), и более удобен для тех реакций, где участвуют органические молекулы. От метода электронного баланса он отличается тем, что окисление и восстановление записывают не для отдельных атомов, а для частиц, реально присуствующих в растворе: катионов, анионов, молекул. Сильные электролиты записываются в виде ионов, слабые электролиты, газы, нерастворимые вещества – в виде молекул. Для материального баланса по кислороду и водороду используются ионы H^+ или OH^- и молекулы воды. При использовании этого метода, кроме алгоритма составления полуреакций, необходимо придерживаться нескольких правил:

1. В кислой среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов OH^- . Уравнивание осуществляется за счет ионов H^+ и молекул воды.
2. В щелочной среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов H^+. Уравнивание осуществляется за счет ионов OH^- и молекул воды.
3. В нейтральной среде ни ионов H^+, ни OH^-в левой части быть не должно. Однако в правой части среди продуктов реакции они могут появиться.

Алгоритм подбора коэффициентов в уравнениях ОВР методом ионно-электронного баланса:

1. Составить молекулярную схему реакции с указанием исходных веществ и продуктов реакции.

2. Составить полную ионно-молекулярную схему реакции, записывая слабые электролиты, малорастворимые, нерастворимые и газообразные вещества в молекулярном виде, а сильные электролиты – в ионном.

3. Исключив из ионно-молекулярной схемы ионы, не изменяющиеся в результате реакции (без учета их количества), переписать схему в кратком ионно-молекулярном виде.

4. Отметить элементы, изменяющие в результате реакции степень окисления; найти окислитель, восстановитель, продукты восстановления, окисления.

5. Составить схемы полуреакций окисления и восстановления, для этого:

а) указать восстановитель и продукт окисления, окислитель и продукт восстановления;

б) уравнять число атомов каждого элемента в левой и правой частях полуреакций (выполнить баланс по элементам) в последовательности: элемент, изменяющий степень окисления, кислород, другие элементы; при этом следует помнить, что в водных растворах в реакциях могут участвовать молекулы H_2O, ионы H^+ или OH^- в зависимости от характера среды:

Процесс	Кислая среда	Нейтральная среда	Щелочная среда
Связывание избытка кислорода	$O^{-2}+2H^+ =H_2O$	$O^{-2}+H_2O=2OH^-$	$O^{-2}+H_2O=2OH^-$
Восполнение недостатка кислорода	$H_2O= O^{-2}+2H^+$	$H_2O = O^{-2}+2H^+$	$2OH^-=O^{-2}+H_2O$

в) уравнять суммарное число зарядов в обеих частях полуреакций; для этого прибавить или отнять в левой части полуреакций необходимое число электронов (баланс по зарядам).

6. Найти наименьшее общее кратное (НОК) для числа отданных и полученных электронов.

7. Найти основные коэффициенты при каждой полуреакции. Для этого полученное в п.6 число (НОК) разделить на число электронов, фигурирующих в данной полуреакции.

8. Умножить полуреакции на полученные основные коэффициенты, сложить их между собой: левую часть с левой, правую – с правой (получить ионно-молекулярное уравнение реакции). При необходимости “привести подобные” ионы с учетом взаимодействия между ионами водорода и гидроксид-ионами: $H^++OH^-= H_2O$.

9. Расставить коэффициенты в молекулярном уравнении реакции.

10. Провести проверку по частицам, не участвующим в ОВР, исключенным из полной ионно-молекулярной схемы (п.3). При необходимости коэффициенты для них находят подбором.

11. Провести окончательную проверку по кислороду.

Пример 3. В кислой среде:

$K_2Cr_2O_7 + KJ + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + J_2 + H_2O + K_2SO_4$

3 $2J^- - 2\bar{e} = J_2$

1 $Cr_2O_7^{2-} + 6\bar{e} + 14H^+ = 2Cr^{+3} + 7H_2O$

Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$K_2Cr_2O_7 + 6KJ + 7H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + 3J_2 + 7H_2O + 4K_2SO_4$

Пример 4. В щелочной среде:

$KCrO_2 + KClO_4 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KCl + H_2O$

8 $CrO_2^- - 3\bar{e} + 4OH^- \rightarrow CrO_4^{2-} + 2H_2O$

3 $ClO_4^- + 8\bar{e} + 4H_2O \rightarrow Cl^- + 8OH^-$

Суммарное молекулярное уравнение реакции

$8KCrO_2 + 3KClO_4 + 8KOH \rightarrow 8K_2CrO_4 + 3KCl + 4H_2O$

Пример 5. В нейтральной среде:

$KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$

3 $Mn - 2\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4H^+$

2 $MnO_4 + 3\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4OH^-$

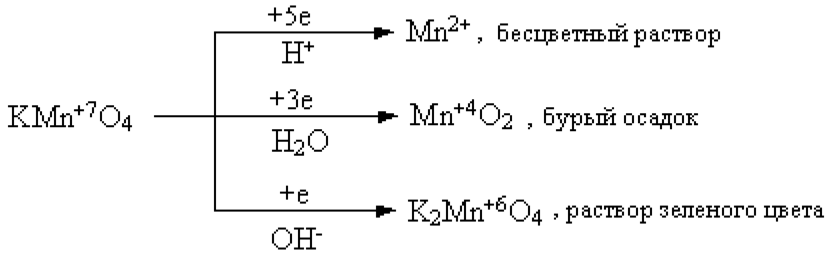
Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$2KMnO_4 + 3MnSO_4 + 2H_2O = 5MnO_2 + K_2SO_4 + 2H_2SO_4$

Примеры некоторых часто используемых ОВР:

1) Окислительно-восстановительные реакции с участием перманганата калия

В зависимости от среды (кислая, нейтральная, щелочная) перманганат калия, выступая в качестве окислителя, дает различные продукты восстановления:



Ниже приведены реакции $KMnO_4$ с сульфидом калия в качестве восстановителя в различных средах В этих реакциях продуктом окисления сульфид-иона является свободная сера. В щелочной среде молекулы КОН не принимают участие в реакции, а лишь определяют продукт восстановления перманганата калия.

$$5\ K_2S + 2\ KMnO_4 + 8\ H_2SO_4 = 5\ S\downarrow + 2\ MnSO_4 + 6\ K_2SO_4 + 8\ H_2O,$$

$$3\ K_2S + 2\ KMnO_4 + 4\ H_2O \rightarrow 2\ MnO_2\downarrow + 3\ S\downarrow + 8\ KOH,$$

$$K_2S + 2\ KMnO_4 \text{–(KOH)}\rightarrow 2\ K_2MnO_4 + S\downarrow.$$

2) Окислительно-восстановительные реакции с участием дихромата калия

В кислой среде дихромат калия является сильным окислителем. Смесь $K_2Cr_2O_7$ и концентрированной H_2SO_4 (хромпик, хромовая смесь) широко используется в лабораторной практике в качестве окислителя. Взаимодействуя с восстановителем одна молекула дихромата калия принимает шесть электронов, образуя соединения трехвалентного хрома:

$$6\ FeSO_4 + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 = 3\ Fe_2(SO_4)_3 + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 7\ H_2O;$$

$$6\ KI + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 = 3\ I_2\downarrow + Cr_2(SO_4)_3 + 4\ K_2SO_4 + 7\ H_2O.$$

3) Окислительно-восстановительные реакции с участием пероксида водорода

Пероксид водорода и нитрит калия проявляют преимущественно окислительные свойства:

$$H_2S + H_2O_2 = S\downarrow + 2\ H_2O,$$

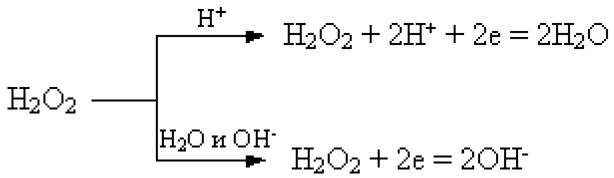
$$2\ KI + 2\ KNO_2 + 2\ H_2SO_4 = I_2\downarrow + 2\ K_2SO_4 + H_2O,$$

Однако, при взаимодействии с сильными окислителями (такими как, например, $KMnO_4$), пероксид водорода и нитрит калия выступают в качестве восстановитеей:

$$5\ H_2O_2 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 = 5\ O_2 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 8\ H_2O,$$

$$5\ KNO_2 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 = 5\ KNO_3 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 3\ H_2O.$$

Пероксид водорода в зависимости от среды восстанавливается по-разному:



При этом в результате реакций образуется вода или гидроксид-ионы:

$$2\ FeSO_4 + H_2O_2 + H_2SO_4 = Fe_2(SO_4)_3 + 2\ H_2O,$$

$$2\ KI + H_2O_2 = I_2\downarrow + 2\ KOH.$$

Задания для самостоятельной работы

Расставьте коэффициенты уравнениях методом полуреакций. Укажите окислитель и восстановитель.

Вариант 1.

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $Br_2 + KOH \rightarrow KBr + KBrO_3 + H_2O$

3) $K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 + H_2O_2 \rightarrow O_2\uparrow + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$

4) $C_3H_6 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + C_2H_6(OH)_2 + KOH$

Вариант 2

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + S\downarrow + H_2O$

2) $S + KOH \rightarrow K_2S + K_2SO_3 + H_2O$.

3) $BaS + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + S\downarrow + NO_2\uparrow + H_2O$

4) $CH_2{=}C(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3(CO)CH_3 + H_2O + CO_2\uparrow$

Вариант 3

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + H_2S\uparrow + H_2O$

2) $NO_2 + NaOH \rightarrow NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O$

3) $CrCl_3 + Cl_2 + H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + HCl$

4) $CH_3C{=}C(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3(CO)CH_3 + H_2O + CH_3COOH$

Вариант 4

1) $Al + H_2SO_{4(конц., гор.)} \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2S\uparrow + H_2O$

2) $AuCl_3 + H_2O_2 + KOH \rightarrow Au + H_2O + O_2\uparrow + KCl$

3) $KMnO_4 + Fe(OH)_2 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + Fe(OH)_3\downarrow + KOH$

4) $C_5H_{10} + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O + C_2H_5COOH + CH_3COOH$

Вариант 5

1) $Ag + H_2SO_{4(конц., гор.)} \rightarrow Ag_2SO_4\downarrow + SO_2\uparrow + 2H_2O$

2) $NH_4HS + HNO_{3(конц.)} \rightarrow S\downarrow + 2NO_2\uparrow + NH_4NO_3 + 2H_2O$

3) $MnSO_4 + H_2O_2 + KOH \rightarrow MnO_2\downarrow + K_2SO_4 + H_2O$

4) $C_6H_{12} + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O + C_2H_5COOH$

Вариант 6

1) $Bi + H_2SO_4 \rightarrow Bi_2(SO_4)_3 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $CuS + HNO_3 \rightarrow NO_2\uparrow + CuSO_4 + H_2O$

3) $C + H_2SO_{4(конц.)} + K_2Cr_2O_{7(конц.)} \rightarrow CO_2\uparrow + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$

4) $HCOH + NaOH + I_2 \rightarrow HCOONa + NaI + H_2O$

Вариант 7

1) $Ag + HNO_{3(разб.)} \rightarrow AgNO_3 + NO\uparrow + H_2O$

2) $Cr_2(SO_4)_3 + Br_2 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KBr + K_2SO_4 + H_2O$

3) $Br_2 + S + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + HBr$

4) $CH_3C\equiv CCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3COOH + H_2O$

Вариант 8

1) $Ba + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + N_2O\uparrow + H_2O$

2) $MnO_2 + HCl \rightarrow MnCl_2 + H_2O + Cl_2\uparrow$

3) $As_2O_3 + NaOH + NaNO_3 \rightarrow Na_3AsO_4 + NaNO_2 + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + KMnO_4 \rightarrow C_6H_5COOK + KOH + MnO_2\downarrow + H_2O$

Вариант -9

1) $Be + HNO_{3(разб., гор.)} \rightarrow Be(NO_3)_2 + NO\uparrow + H_2O$

2) $P + H_2SO_4 \rightarrow H_3PO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $Bi(NO_3)_3 + NaClO + NaOH_{(конц.)} \rightarrow NaBiO_3\downarrow + NaNO_3 + NaCl + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}C_2H_5 + KMnO_4 \rightarrow C_6H_5COOK + K_2CO_3 + MnO_2 + H_2O$

Вариант 10

1) $Cd + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Cd(NO_3)_2 + NO_2\uparrow + 2H_2O$

2) $AlBr_{3(тверд.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + Br_2 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $AsH_3 + NaOH_{(разб.)} + NaClO \rightarrow Na_3AsO_4 + NaCl + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O$

Вариант 11

1) $Ca + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Ca(NO_3)_2 + N_2O\uparrow + H_2O$

2) $NH_4I_{(тверд.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow I_2\downarrow + H_2S\uparrow + H_2O + NH_4HSO_4$

3) $Bi(OH)_3 + KOH_{(конц.)} + KMnO_4 \rightarrow KBiO_3\downarrow + K_2MnO_4 + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O + CO_2\uparrow$

Вариант 12

1) $Ba + HNO_{3(оч.\ разб.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + NH_4NO_3 + H_2O$

2) $Au_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Au\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $HBrO_3 + H_2O + S \rightarrow HBr + H_2SO_4$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + K_2Cr_2O_4 + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O$

Вариант 13

1) $Bi + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Bi(NO_3)_3 + NO\uparrow + H_2O$

2) $PbO_2 + HCl \rightarrow PbCl_2 + Cl_2 + H_2O$

3) $AsH_3 + H_2O + AgNO_3 \rightarrow As_2O_3\downarrow + Ag\downarrow + HNO_3$

4) $CH_3{\equiv}CCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3COOH + H_2O + CO_2$

Вариант 14

1) $Cd + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Cd(NO_3)_2 + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $C_2N_2 + KOH \rightarrow KCN + KCNO + H_2O$

3) $H_2SO_3 + I_2 + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + HI$

4) $C_4H_8 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O + C_2H_5COOH$

Вариант 15

1) $Cu + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $AlP + HNO_{3(конц.,\ гор.)} \rightarrow Al(NO_3)_3 + H_3PO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $Br_2 + SO_2 + H_2O \rightarrow HBr + H_2SO_4$

4) $C_2H_4 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O$

Вариант 16

1) $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + NO + H_2O$

2) $H_2Cr_2O_7 + H_2O_2 \rightarrow H_2CrO_6 + H_2O$.

3) $Si + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2\uparrow$

4) $C_2H_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O$

Вариант 17

1) $As + H_2SO_{4(конц.,\ гор.)} \rightarrow As_2O_3\downarrow + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $B_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow H_3BO_3\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $SiH_4 + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2\uparrow$

4) $C_6H_5\text{-}CH(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + C_6H_5COOK + K_2CO_3 + KOH$

Вариант 18

1) $Fe + H_2SO_{4(\text{конц.})} \xrightarrow{\circ} Fe_2(SO_4)_3 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $I_2 + H_2O_2 \rightarrow HIO_3 + H_2O$

3) $B + KOH + H_2O \rightarrow KBO_2 + H_2\uparrow$

4) $C_3H_4 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_2(COOH)_2 + H_2O$

Вариант 19

1) $As + HNO_{3(\text{конц.})} \rightarrow H_3AsO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $K_2C_2O_4 + H_2SO_4 \rightarrow KHSO_4 + CO\uparrow + CO_2\uparrow + H_2O$

3) $Pb(CH_3COOH)_2 + CaOCl_2 + H_2O \rightarrow PbO_2\downarrow + CaCl_2 + CH_3COOH$

4) $CH_3COCH_3 + I_2 + NaOH \rightarrow CHI_3 + CH_3COONa + NaI + H_2O$

Вариант 20

1) $C + HNO_{3(\text{конц., гор.})} \rightarrow CO_2\uparrow + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $HBr_{(\text{конц.})} + H_2SO_{4(\text{конц.})} \rightarrow Br_2 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $AgNO_3 + NaOH + H_2O_2 \rightarrow Ag\downarrow + NaNO_3 + H_2O + O_2\uparrow$

4) $KMnO_4 + (COOH)_2 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + CO_2\uparrow + K_2SO_4 + H_2O$

Дополнительные уравнения

1. $Au_2S_3 + HNO_{3(\text{конц.})} \rightarrow Au\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$
2. $As_2S_3 + H_2SO_{4(\text{конц.})} \rightarrow As_2O_3\downarrow + SO_2\uparrow + H_2O$
3. $HNO_3 + Cu_2S \rightarrow NO_2\uparrow + H_2O + CuSO_4 + Cu(NO_3)_2$
4. $SiC + NaOH + O_2 \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2O + Na_2CO_3$
5. $Bi(NO_3)_3 + Na_2O_2 + NaOH \rightarrow NaBiO_3 + NaNO_2 + H_2O + O_2$
6. $AgCN + HNO_{3(\text{конц., гор.})} \rightarrow AgNO_3 + NO_2\uparrow + NH_4NO_3 + CO_2\uparrow$
7. $Al + NaOH + 6H_2O \rightarrow Na[Al(OH)_4] + H_2$
8. $Au + HCl + HNO_3 \rightarrow H[AuCl_4] + NO + H_2O$
9. $[Co(H_2O)_6]^{2+} + NH_3 + O_2 + H^+ \rightarrow [Co(NH_3)_6]^{3+} + H_2O$.
10. $Au + NaCN + H_2O + O_2 \rightarrow Na[Au(CN)_2] + NaOH$
11. $Pt + HNO_3 + HCl \rightarrow H_2[PtCl_6] + NO + H_2O$
12. $Na[Au(CN)_2] + Zn \rightarrow Na_2[Zn(CN)_4] + Au$
13. $Fe + C_6H_5COONa + H_2O + O_2 \rightarrow [Fe(C_6H_5COOH)_6](OH)_3 + NaOH$

Направление протекания окислительно-восстановительных реакций

Направление протекания ОВР в водном растворе устанавливается в стандартных условиях по значениям **стандартных потенциалов** φ° полуреакций восстановления:

Окисленная форма + ne^- → Восстановленная форма

Окислительно-восстановительные реакции протекают самопроизвольно, если разность стандартных электродных потенциалов окислителя и восстановителя, или э.д.с. окислительно-восстановительной реакции ΔE > 0.

Стандартные условия протекания реакции: температура 298,15 К, давление в системе при отсутствии газообразных реагентов или продуктов 1 атмосфера (101325 Па), парциальное давление каждого газообразного реагента или продукта при их наличии 1 атмосфера. Стандартная концентрация каждой окисленной и восстановленной формы в растворе 1 моль/л. Стандартные потенциалы измеряют по отношению к стандартному водородному электроду, потенциал которого условно принят равным нулю.

Если значение φ° для окислительно-восстановительной пары, отрицательное, например

$Zn^{2+} + 2\,e^- \rightarrow Zn$; $\varphi° = -\,0{,}763$ В

то реакция, в которой Zn^{2+} – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется отрицательным значением разности стандартных потенциалов соответствующих пар.

$Zn^{2+} + H_{2(г)} \rightarrow Zn + 2\,H^+_{(р)}$ $\varphi°_{Ок} - \varphi°_{Вс} = -\,0{,}763 - (0) = -\,0{,}763$ В.

Направление ОВР определяет окислитель, у которого значение электродного потенциала больше. На практике самопроизвольно осуществляется обратный процесс: $Zn + 2\,H^+_{(р)} \rightarrow Zn^{2+} + H_{2(г)}$ $\varphi°_{Ок} - \varphi°_{Вс} = 0 - (-\,0{,}763) = +\,0{,}763$ В

Для положительных значений φ°, например пары Cu^{2+} / Cu

$Cu^{2+} + 2\,e^- = Cu$; $\varphi° = +\,0{,}338$ В

реакция

$Cu^{2+} + H_{2(г)} = Cu + 2\,H^+_{(р)}$ $\varphi°_{Ок} - \varphi°_{Вс} = +\,0{,}338 - (0) = +\,0{,}338$ В где 2 $H^+_{(р)}$ – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется положительным значением разности потенциалов, и может протекать самопроизвольно.

Пример 1. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции

$2NaCl + Fe_2(SO_4)_3 \leftrightarrow 2FeSO_4 + Cl_2 + Na_2SO_4$

Запишем уравнения электронного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции :

$Cl_2 + 2e^- = 2Cl^-$, $\varphi_1^o = 1{,}36$ В;

$Fe^{3+} + e^- = Fe^{2+}$, $\varphi_2^o = 0{,}77$ В .

Поскольку $\varphi_1^o > \varphi_2^o$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем - ион Fe^{2+}; рассматриваемая реакция будет протекать так:

$2FeSO_4 + Cl_2 + Na_2SO_4 \rightarrow 2NaCl + Fe_2(SO_4)_3$

Пример 2. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции

$K_2Cr_2O_7 + 14HCl \leftrightarrow 2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O$

Запишем уравнения электронно-ионного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции:

$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$ $\varphi^o_1 = +1{,}33$ В

$Cl_2 + 2e = 2Cl^–$ $\varphi^o_2 = +1{,}36$ В

Поскольку $\varphi_2^o > \varphi_1^o$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – бихромат-ион; рассматриваемая реакция будет протекать так::

$2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + 14HCl$

В примере 1 стандартные электродные потенциалы взаимодействующих электрохимических систем существенно различались, так что направление протекания процесса однозначно определялось значениями φ^o при любых концентрациях реагирующих веществ. В тех случаях, когда сравниваемые значения φ^o близки (разность не более 0,3 В), направление протекания процесса может изменяться в зависимости от концентраций участников реакции (пример 2).

Величина окислительно-восстановительного потенциала в условиях, отличающихся от стандартных, определяется уравнением Нернста:

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{RT}{nF} \cdot \ln \frac{[Ox]}{[\mathrm{Re}\,d]},$$

где φ – окислительно-восстановительный потенциал в данных условиях, В;

φ^0 – стандартный окислительно-восстановительный потенциал, В;

R – универсальная газовая постоянная (8.314 Дж/(моль·К));

T – абсолютная температура, K;

n – число электронов, принимающих участие в потенциалопределяющей полуреакции;

F – постоянная Фарадея (F = 96484.56 Кл/моль);

[Ox]– концентрация окисленной формы ионов;

[Red]– концентрация восстановленной формы ионов.

Концентрация твердой фазы принимается за единицу.

Для стандартной температуры 298 К и с переходом от натурального логарифма к десятичному уравнение Нернста будет иметь вид

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0{,}059}{n} \cdot \lg \frac{[Ox]}{[\mathrm{Re}\,d]},$$

Пример 3. Определить направление возможного самопроизвольного протекания реакции

$$2Hg + 2Ag^+ \leftrightarrow 2Ag + Hg_2^{2+}$$

при стандартной температуре и следующих концентрациях ионов:

а) $[Ag^+] = 10^{-4}$ моль/л , $[Hg_2^{2+}] = 10^{-1}$моль/л;

б) $[Ag^+] = 10^{-1}$моль/л , $[Hg_2^{2+}] = 10^{-4}$моль/л.

Выпишем значения стандартных электродных потенциалов взаимодействующих электрохимических систем:

$Hg_2^{2+} + 2e^- = 2Hg$, $\varphi_1^o = 0{,}79$ В;

$Ag^+ + e^- = Ag$, $\varphi_2^o = 0{,}80$ В.

По уравнению Нернста вычислим значения электродных потенциалов при указанных в условиях задачи концентрациях.

а) $\varphi_1 = \varphi_1^o + 0{,}059/2 \cdot lg\ [Hg_2^{2+}] = 0{,}79 + 0{,}030\ lg\ 10^{-1} = 0{,}79 - 0{,}03 = 0{,}76$ В;

$\varphi_2 = \varphi_2^o + 0{,}059 \cdot lg\ [Ag^+] = 0{,}80 + 0{,}059\ lg10^{-4} = 0{,}80 - 0{,}24 = 0{,}56$ В.

В данном случае $\varphi_1 > \varphi_2$, реакция будет протекать справа налево.

б) $\varphi_1 = 0{,}79 + 0{,}030 \cdot lg10^{-4} = 0{,}79 - 0{,}12 = 0{,}67$ В;

$\varphi_2 = 0{,}80 + 0{,}059 \cdot lg10^{-1} = 0{,}80 - 0{,}06 = 0{,}74$ В.

Теперь $\varphi_1 < \varphi_2$, и реакция протекает слева направо.

Зависимость окислительной способности некоторых веществ от кислотности среды так же определяется уравнением Нернста. Например, для полуреакции

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e \rightarrow Mn^{2+} + 4\ H_2O$$

окислительно-восстановительный потенциал можно вычислить по формуле

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0{,}059}{5} \cdot \lg \frac{[MnO_4^-] \cdot [H^+]^8}{\left[Mn^{2+}\right]}, \text{ или}$$

$$\varphi = 1{,}507 + 0{,}012 \cdot \lg \frac{[MnO_4^-]}{\left[Mn^{2+}\right]} - 0{,}095pH$$

Потенциалы процесса зависит от pH среды и будет тем больше, чем кислее раствор. Зависимость окислительного потенциала $KMnO_4$ от концентрации ионов водорода пользуются для фракционного окисления анионов галогенидов до свободных галогенов. При pH от 5 до 6 перманганат окисляет только йодиды до йода (не действуя на бромиды и хлориды), при pH = 3 окисляются бромиды, и только при значительно более высокой кислотности окисляются хлориды.

Задания для самостоятельной работы

Обоснуйте возможность самопроизвольного протекания реакций №1 вашего варианта на стр. 16-19, используя Приложение.

Приложение

Таблица 1

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E^0	Элемент	Реакция	E^0
Ag	α -$Ag_2S + 2\bar{e} = 2Ag + S^{2-}$	-0,70	B	$BF_4^- + 3e = B + 4F^-$	-1,04
	$Ag(CN)_2^- + \bar{e} = Ag + 2CN^-$	-0,29		$H_3BO_3 + 3H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,869
	$AgI + \bar{e} = Ag + I^-$	-0,152		$BO_3^{3-} + 6H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,165
	$AgCN + \bar{e} = Ag + CN^-$	-0,04	Ba	$Ba^{2+} + 2e = Ba$	-2,905
	$Ag(S_2O_3)_2^{3-} + \bar{e} = Ag + 2S_2O_3^{2-}$	0,01	Be	$Be^{2+} + 2e = Be$	-1,847
	$AgBr + \bar{e} = Ag + Br^-$	0,071		$Be(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-1,820
	$AgCl + \bar{e} = Ag + Cl^-$	0,222		$BeO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-0,909
	$Ag_2O + H_2O + 2\bar{e} = 2Ag + 2OH^-$	0,344	Bi	$Bi_2O_3 + 3H_2O + 6e = 2Bi + 6OH^-$	-0,46
	$Ag(NH_3)_2^+ + \bar{e} = Ag + 2NH_3$	0,373		$BiOCl + 2H^+ + 3e = Bi + Cl^- + H_2O$	0,16
	$Ag_2CrO_4 + 2\bar{e} = 2Ag + CrO_4^{2-}$	0,446		$Bi^{3+} + 3e = Bi$	0,215
	$Ag_2C_2O_4 + 2\bar{e} = 2Ag + C_2O_4^{2-}$	0,472		$BiO^+ + 2H^+ + 3e = Bi + H_2O$	0,32
	$AgBrO_3 + \bar{e} = Ag + BrO_3^-$	0,55		$Bi_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Bi + 3H_2O$	0,371
	$2AgO + H_2O + 2\bar{e} = Ag_2O + 2OH^-$	0,60		$NaBiO_3$(т) $+ 6H^+ + 2e = Bi^{3+} + Na^+ + 3H_2O$	1,6 - 1,808
	$Ag^+ + \bar{e} = Ag$	0,799	Br	$2BrO^- + 2H_2O + 2e = Br_2 + 4OH^-$	0,45
	$Ag_2O + 2H^+ + 2\bar{e} = 2Ag + H_2O$	1,173		$2BrO_3^- + 6H_2O + 10e = Br_2 + 12OH^-$	0,50
	$2AgO + 2H^+ + 2\bar{e} = Ag_2O + H_2O$	1,398		$BrO_3^- + 2H_2O + 4e = BrO^- + 4OH^-$	0,54
Al	$AlO_2^- + 2H_2O + 3\bar{e} = Al + 4OH^-$	-2,35		$BrO_3^- + 3H_2O + 6e = Br^- + 6OH^-$	0,61
	$Al(OH)_3 + 3\bar{e} = Al + 3OH^-$	-2,31		$BrO^- + H_2O + 2e = Br^- + 2OH^-$	0,76
	$AlF_6^{3-} + 3\bar{e} = Al + 6F^-$	-2,07		$Br_3^- + 2e = 3Br^-$	1,05
	$Al^{3+} + 3e = Al$	-1,663		Br_2(ж) $+ 2e = 2Br^-$	1,065
	$Al(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Al + 3H_2O$	-1,471		$BrO_3^- + 6H^+ + 6e = Br^- + 3H_2O$	1,44
	$AlO_2^- + 4H^+ + 3e = Al + 2H_2O$	-1,262		$2BrO_3^- + 12H^+ + 10e = Br_2 + 6H_2O$	1,52
As	$As + 3H^+ + 3e = AsH_3$	-0,60		$2HBrO + 2H^+ + 2e = Br_2 + 2H_2O$	1,59
	$HAsO_2 + 3H^+ + 3e = As + 2H_2O$	0,248	C	$HCOO^- + 2H_2O + 2e = HCHO + 3OH^-$	-1,07
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = HAsO_2 + 2H_2O$	0,559		$2CO_2 + 2H^+ + 2e = H_2C_2O_4$	-0,49
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = H_3AsO_3 + H_2O$	0,58		$CO_2 + 2H^+ + 2e = HCOOH$	-0,20
Au	$Au(CN)_2 + e = Au + 2CN^-$	-0,61		C(графит) $+ 4H^+ + 4e = CH_4$	-0,132
	$AuBr_4^- + 2e = AuBr_2^- + 2Br^-$	0,802		$CO_2 + 2H^+ + 2e = CO + H_2O$	-0,12
	$AuCl_4^- + 2e = AuCl_2^- + 2Cl^-$	0,926		$HCOOH + 2H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	-0,01
	$AuBr_2^- + e = Au + 2Br^-$	0,959		$HCOOH + 4H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,145
	$AuCl_2^- + 2e = Au + 2Cl^-$	1,15		$HCOO^- + 3H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	0,167
	$Au^{3+} + 2e = Au^+$	1,401		$CH_3CHO + 2H^+ + 2e = C_2H_5OH$	0,19
	$Au^{3+} + 3e = Au$	1,498		$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = HCHO + 2H_2O$	0,197
	$Au^+ + 3e = Au$	1,692		$HCOO^- + 5H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,199
Элемент	Реакция	E^0	Элемент	Реакция	E^0

C	$CO_3^{2-} + 8H^+ + 6e = CH_3OH + 2H_2O$	0,209	Co	$Co(OH)_2 + 2e = Co + 2OH^-$	-0,73
	$CO_3^{2-} + 3H^+ + 2e = HCOO^- + H_2O$	0,227		$CoCO_3 + 2e = Co + CO_3^{2-}$	-0,64
	$HCHO + 2H^+ + 2e = CH_3OH$	0,232		$Co(NH_3)_6^{2+} + 2e = Co + 6NH_3$	-0,42
	$2CO_3^{2-} + 4H^+ + 2e = C_2O_4^{2-} + 2H_2O$	0,441		$Co^{2+} + 2e = Co$	-0,277
	$C_2H_5OH + 2H^+ + 2e = C_2H_6 + H_2O$	0,46		$Co(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Co + 2H_2O$	0,095
	$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = C$(графит) $+ 3H_2O$	0,475		$Co(NH_3)_6^{3+} + e = Co(NH_3)_6^{2+}$	0,1
	$CO + 6H^+ + 6e = CH_4 + H_2O$	0,497		$CoO + 2H^+ + 2e = Co + H_2O$	0,166
	$CH_3OH + 2H^+ + 2e = CH_4 + H_2O$	0,59		$Co(OH)_3 + e = Co(OH)_2 + OH^-$	0,17
Ca	$Ca^{2+} + 2e = Ca$	-2,866		$Co^{3+} + 3e = Co$	0,33
Cd	$CdS + 2e = Cd + S^{2-}$	-1,175		$Co^{3+} + e = Co^{2+}$	1,38 - 1,842
	$Cd(CN)_4^{2-} + 2e = Cd + 4CN^-$	-1,09	Cr	$Cr(OH)_2 + 2e = Cr + 2OH^-$	-1,4
	$Cd(OH)_2 + 2e = Cd + 2OH^-$	-0,81		$Cr(OH)_3 + 3e = Cr + 3OH^-$	-1,3
	$Cd(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cd + 4NH_3$	-0,61		$CrO_2^- + 2H_2O + 3e = Cr + 4OH^-$	-1,2
	$Cd^{2+} + 2e = Cd$	-0,403		$Cr^{2+} + 2e = Cr$	-0,913
	$Cd(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cd + 2H_2O$	0,005		$Cr^{3+} + 3e = Cr$	-0,744
	$CdO + 2H^+ + 2e = Cd + H_2O$	0,063		$Cr(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Cr + 3H_2O$	-0,654
Ce	$Ce^{3+} + 3e = Ce$	-2,48		$Cr^{3+} + e = Cr^{2+}$	-0,407
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M H_2SO_4)	1,44		$CrO_4^{2-} + 4H_2O + 3e = Cr(OH)_3 + 5OH^-$	-0,13
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M HNO_3)	1,61		$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 12e = 2Cr + 7H_2O$	0,294
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M $HClO_4$)	1,70		$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Cr + 4H_2O$	0,366
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$	1,77		$CrO_4^{2-} + 4H^+ + 3e = CrO_2^- + 2H_2O$	0,945
Cl	$ClO_4^- + H_2O + 2e = ClO_3^- + 2OH^-$	0,36		$CrO_2^- + 4H^+ + e = Cr^{2+} + 2H_2O$	1,188
	$2ClO^- + 2H_2O + 2e = Cl_2 + 4OH^-$	0,40		$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$	1,333
	$ClO_4^- + H_2O + 8e = Cl^- + 8OH^-$	0,56		$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 3e = Cr^{3+} + 4H_2O$	1,477
	$ClO_3^- + 3H_2O + 6e = Cl^- + 6OH^-$	0,63	Cs	$Cs^+ + e = Cs$	-2,923
	$ClO_2 + 2H_2O + 5e = Cl^- + 4OH^-$	0,85	Cu	$Cu_2S + 2e = 2Cu + S^{2-}$	-0,89
	$ClO^- + H_2O + 2e = Cl^- + 2OH^-$	0,88		$CuS + 2e = Cu + S^{2-}$	-0,71
	$ClO_3^- + 2H^+ + e = ClO_2 + H_2O$	1,15		$Cu(CN)_2^- + e = Cu + 2CN^-$	-0,43
	$ClO_4^- + 2H^+ + 2e = ClO_3^- + H_2O$	1,189		$Cu_2O + H_2O + 2e = 2Cu + 2OH^-$	-0,36
	$ClO_2 + 4H^+ + 4e = 2HCl + H_2O$	1,351		$Cu(OH)_2 + 2e = Cu + 2OH^-$	-0,22
	$Cl_2 + 2e = 2Cl^-$	1,3595		$CuI + e = Cu + I^-$	-0,185
	$ClO_4^- + 8H^+ + 8e = Cl^- + 4H_2O$	1,38		$Cu(NH_3)_2^+ + e = Cu + 2NH_3$	-0,12
	$2ClO_4^- + 16H^+ + 14e = Cl_2 + 8H_2O$	1,39		$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu + 4NH_3$	-0,07
	$ClO_2 + 5H^+ + 5e = HCl + 2H_2O$	1,436		$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu(NH_3)_2^+ + 2NH_3$	-0,01
	$ClO_3^- + 6H^+ + 6e = Cl^- + 3H_2O$	1,451		$CuI_2^- + e = Cu + 2I^-$	0,00
	$2ClO_3^- + 12H^+ + 10e = Cl_2 + 6H_2O$	1,47		$CuBr + e = Cu + Br^-$	0,03
	$HClO + H^+ + 2e = Cl^- + H_2O$	1,494		$CuCl + e = Cu + Cl^-$	0,137
	$ClO_2 + 4H^+ + 5e = Cl^- + 2H_2O$	1,51		$Cu^{2+} + e = Cu^+$	0,153
	$2ClO_2 + 8H^+ + 8e = Cl_2 + 4H_2O$	1,549		$CuCl_2^- + e = Cu + 2Cl^-$	0,177
	$HClO_2 + 3H^+ + 4e = Cl^- + 2H_2O$	1,57		$2Cu^{2+} + H_2O + 2e = Cu_2O + 2H^+$	0,203
	$2HClO + 2H^+ + 2e = Cl_2 + 2H_2O$	1,63		$Cu^{2+} + 2e = Cu$	0,345
	$2HClO_2 + 6H^+ + 6e = Cl_2 + 4H_2O$	1,64		$Cu^{2+} + 2Cl^- + e = CuCl_2^-$	0,463
Co	β -CoS $+ 2e = Co + S^{2-}$	-1,07		$Cu^+ + e = Cu$	0,520
	α -CoS $+ 2e = Co + S^{2-}$	-0,90		$Cu^{2+} + Cl^- + e = CuCl$	0,538
Cu	$CuO + 2H^+ + 2e = Cu + H_2O$	0,570	Hg	$HgBr_4^{2-} + 2e = Hg + 4Br^-$	0,21

	$Cu(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cu + 2H_2O$	0,609		$Hg_2Cl_2 + 2K^+ + 2e = 2Hg + 2KCl$ (тв)	0,2415
	$Cu^{2+} + Br^- + e = CuBr$	0,640		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$	0,268
	$2CuO + 2H^+ + 2e = Cu_2O + H_2O$	0,669		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$ (1M KCl)	0,28
	$Cu^{2+} + I^- + e = CuI$	0,86		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$ (0,1M KCl)	0,334
	$Cu^{2+} + 2CN^- + e = Cu(CN)_2$	1,12		$HgCl_4^{2-} + 2e = Hg + 4Cl^-$	0,48
Dy	$Dy^{3+} + 3e = Dy$	-2,353		$Hg_2SO_4 + 2e = 2Hg + SO_4^{2-}$	0,6151
Eu	$Eu^{2+} + 2e = Eu$	-3,395		$Hg_2^{2+} + 2e = 2Hg$	0,788
	$Eu^{3+} + e = Eu^{2+}$	-0,429		$Hg^{2+} + 2e = Hg$	0,850
F	$F_2O + 2H^+ + 4e = 2F^- + H_2O$	2,1		$2Hg^{2+} + 2e = Hg_2^{2+}$	0,920
	$F_2 + 2e = 2F^-$	2,87		$HgO + 2H^+ + 2e = Hg + H_2O$	0,926
Fe	$FeS + 2e = Fe + S^{2-}$	-0,95	Ho	$Ho^{3+} + 3e = Ho$	-2,319
	$Fe(OH)_2 + 2e = Fe + 2OH^-$	-0,877	I	$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,14
	$FeCO_3 + 2e = Fe + CO_3^{2-}$	-0,756		$2IO_3^- + 6H_2O + 10e = I_2 + 12OH^-$	0,21
	$Fe(OH)_3 + e = Fe(OH)_2 + OH^-$	-0,56		$IO_3^- + 3H_2O + 6e = I^- + 6OH^-$	0,25
	$Fe^{2+} + 2e = Fe$	-0,440		$2IO^- + H_2O + 2e = I_2 + 4OH^-$	0,45
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 8e = 3Fe + 4H_2O$	-0,085		$IO^- + H_2O + 2e = I^- + 2OH^-$	0,49
	$Fe_2O_3 + H_2O + 2H^+ + 2e = 2Fe(OH)_2$	-0,057		$I_2 + 2e = 2I^-$	0,536
	$Fe_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Fe + 3H_2O$	-0,051		$I_3^- + 2e = 3I^-$	0,545
	$Fe(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Fe + 2H_2O$	-0,047		$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,56
	$Fe^{3+} + 3e = Fe$	-0,037		$HIO + H^+ + 2e = I^- + H_2O$	0,99
	$Fe(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Fe + 3H_2O$	0,059		$2ICl_2^- + 2e = I_2 + 4Cl^-$	1,06
	$Fe(OH)_3 + H^+ + e = Fe(OH)_2 + H_2O$	0,271		$IO_3^- + 6H^+ + 6e = I^- + 3H_2O$	1,085
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$	0,356		$IO_3^- + 5H^+ + 4e = HIO + 2H_2O$	1,14
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M H_2SO_4)	0,68		$2IO_3^- + 12H^+ + 10e = I_2 + 6H_2O$	1,19
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M HCl)	0,70		$2HIO + 2H^+ + 2e = I_2 + 2H_2O$	1,45
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$ (1M HCl)	0,71		$H_5IO_6 + H^+ + 2e = IO_3^- + 3H_2O$	1,60
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$	0,771	Ir	$IrO_2 + 4H^+ + 4e = Ir + H_2O$	0,93
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 2e = 3Fe^{2+} + 4H_2O$	0,980		$Ir^{3+} + 3e = Ir$	1,15
Ga	$Ga^{3+} + 3e = Ga$	-0,53	K	$K^+ + e = K$	-2,924
Gd	$Gd^{3+} + 3e = Gd$	-2,397	La	$La^{3+} + 3e = La$	-2,522
Ge	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 2e = Ge^{2+} + 3H_2O$	-0,363	Li	$Li^+ + e = Li$	-3,045
	$GeO_2 + 4H^+ + 4e = Ge + 2H_2O$	-0,15	Mg	$Mg(OH)_2 + 2e = Mg + 2OH^-$	-2,69
	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 4e = Ge + 3H_2O$	-0,13		$Mg^{2+} + 2e = Mg$	-2,363
	$Ge^{2+} + 2e = Ge$	0,000		$Mg(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mg + 2H_2O$	-1,862
H	$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$	-0,828	Mn	$MnCO_3 + 2e = Mn + CO_3^{2-}$	-1,48
	$2H^+ + 2e = H_2$	0,0000		$Mn^{2+} + 2e = Mn$	-1,18
	$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776		$Mn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mn + 2H_2O$	-0,727
Hf	$Hf^{4+} + 4e = Hf$	-1,70		$MnO_4^- + e = MnO_4^{2-}$	0,564
	$HfO_2 + 4H^+ + 4e = Hf + 2H_2O$	-1,57		$MnO_4^- + 2H_2O + 3e = MnO_2 + 4OH^-$	0,60
Hg	$HgS + 2e = Hg + S^{2-}$	-0,69		$MnO_2 + 4H^+ + 2e = Mn^{2+} + 2H_2O$	1,228
	$Hg(CN)_4^{2-} + 2e = Hg + 4CN^-$	-0,37		$Mn_2O_3 + 6H^+ + 2e = 2Mn^{2+} + 3H_2O$	1,443
	$Hg_2I_2 + 2e = 2Hg + 2I^-$	-0,041		$MnO_4^- + 8H^+ + 5e = Mn^{2+} + 4H_2O$	1,507
	$HgI_4^{2-} + 2e = Hg + 4I^-$	-0,04		$Mn^{3+} + e = Mn^{2+}$ (8M H_2SO_4)	1,509
	HgO(красная) $+ H_2O + 2e = Hg + 2OH^-$	0,098		$MnO_4^- + 4H^+ + 3e = MnO_2 + 2H_2O$	1,692
	$Hg_2Br_2 + 2e = 2Hg + 2Br^-$	0,140		$MnO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MnO_2 + 2H_2O$	2,257
Mo	$H_2MoO_4 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	-1,091	Nd	$Nd^{3+} + 3e = Nd$	-2,431

	$MoO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = Mo + 8OH^-$	-1,05	Ni	$\gamma\text{-}NiS + 2e = Ni + S^{2-}$	-1,04
	$Mo^{3+} + 3e = Mo$	-0,200		$\alpha\text{-}NiS + 2e = Ni + S^{2-}$	-0,83
	$MoO_2 + 4H^+ + 4e = Mo + 2H_2O$	-0,072		$Ni(OH)_2 + 2e = Ni + 2OH^-$	-0,72
	$MoO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Mo + 4H_2O$	0,154		$Ni(NH_3)_6^{2+} + 2e = Ni + 6NH_3$	-0,49
	$MoO_3 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + H_2O$	0,320		$NiCO_3 + 2e = Ni + CO_3^{2-}$	-0,45
	$MoO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	0,606		$Ni^{2+} + 2e = Ni$	-0,25
N	$3N_2 + 2\bar{e} = 2N_3^-$	-3,4		$Ni(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Ni + 2H_2O$	0,110
	$3N_2 + 2H^+ + 2\bar{e} = 2HN_3$	-3,1		$NiO + 2H^+ + 2e = Ni + H_2O$	0,116
	$N_2 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_2OH + 2OH^-$	-3,04		$NiO_2 + 4H^+ + 2e = Ni^{2+} + 2H_2O$	1,68
	$N_2 + 4H_2O + 4\bar{e} = N_2H_4 + 4OH^-$	-1,16	O	$O_2 + 2H_2O + 4e = 4OH^-$	0,401
	$N_2 + 8H_2O + 6\bar{e} = 2NH_4OH + 6OH^-$	-0,74		$O_2 + 2H^+ + 2e = H_2O_2$	0,682
	$NO_2^- + H_2O + \bar{e} = NO + 2OH^-$	-0,46		$H_2O_2 + 2e = 3OH^-$	0,88
	$NO_2^- + 6H_2O + 6\bar{e} = NH_4OH + 7OH^-$	-0,15		$O_2 + 4H^+ + 4e = 2H_2O$	1,229
	$NO_3^- + 2H_2O + 3\bar{e} = NO + 4OH^-$	-0,14		$O_3 + H_2O + 3e = O_2 + 2OH^-$	1,24
	$NO_3^- + 7H_2O + 8\bar{e} = NH_4OH + 9OH^-$	-0,12		$O_3 + 6H^+ + 6e = 3H_2O$	1,511
	$NO_3^- + H_2O + 2\bar{e} = NO_2^- + 2OH^-$	0,01		$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776
	$N_2 + 6H^+ + 6\bar{e} = 2NH_3$	0,057		$O_3 + 2H^+ + 2e = O_2 + H_2O$	2,07
	$N_2H_4 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_4OH + 2OH^-$	0,1	Os	$OsO_2 + 2H_2O + 4e = Os + 4OH^-$	-0,15
	$N_2 + 8H^+ + 6\bar{e} = 2NH_4^+$	0,275		$OsCl_6^{3-} + e = Os^{2+} + 6Cl^-$	0,4
	$2NO_2^- + 4H_2O + 6\bar{e} = N_2 + 8OH^-$	0,41		$OsO_4 + 8H^+ + 8e = Os + 4H_2O$	0,85
	$NH_2OH + 2H_2O + 2\bar{e} = NH_4OH^- + 2OH^-$	0,42		$OsCl_6^{2-} + e = OsCl_6^{3-}$	0,85
	$2NO_2 + 4H_2O + 8e = N_2 + 8OH^-$	0,53		$Os^{2+} + 2e = Os$	0,85
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,78		$OsO_4 + 4H^+ + 4e = OsO_2 + 2H_2O$	0,96
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,80	P	$H_2PO_2^- + e = P + 2OH^-$	-2,05
	$2NO + 2H_2O + 4e = N_2 + 4OH^-$	0,85		$HPO_3^{2-} + 2H_2O + 2e = H_2PO_2^- + 3OH^-$	-1,57
	$HNO_2 + 7H^+ + 6e = NH_4^+ + 2H_2O$	0,864		$PO_4^{3-} + 2H_2O + 2e = HPO_3^{2-} + 3OH^-$	-1,12
	$NO_3^- + 10H^+ + 8e = NH_4^+ + 3H_2O$	0,87		$2H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_4P_2O_6 + 2H_2O$	-0,94
	$2NO_2 + 2e = 2NO_2^-$	0,88		$P + 3H_2O + 3e = PH_3 + 3OH^-$	-0,89
	$N_2O + H_2O + 2e = N_2 + 2OH^-$	0,94		$H_3PO_2 + H^+ + e = P + 2H_2O$	-0,51
	$NO_3^- + 3H^+ + 2e = HNO_2 + 2H_2O$	0,94		$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(бел) + 3H_2O$	-0,502
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,957		$H_3PO_3 + 3H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,96		$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(кр) + 3H_2O$	-0,454
	$HNO_2 + H^+ + e = NO + H_2O$	1,00		$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(бел) + 4H_2O$	-0,411
	$NO_2 + 2H^+ + 2e = NO + H_2O$	1,03		$H_3PO_4 + 4H^+ + 4e = H_3PO_2 + 2H_2O$	-0,39
	$NO_2 + H^+ + e = HNO_2$	1,09		$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(кр) + 4H_2O$	-0,383
	$2NO_3^- + 10H^+ + 8e = N_2O + 5H_2O$	1,116		$H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_3PO_3 + H_2O$	-0,276
	$2NO_3^- + 12H^+ + 10e = N_2 + 6H_2O$	1,246		$H_3PO_3 + 2H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$2HNO_2 + 4H^+ + 4e = N_2O + 3H_2O$	1,297		$P + 3H^+ + 3e = PH_3$	0,06
	$2NO_2 + 8H^+ + 8e = N_2 + 4H_2O$	1,36		$H_4P_2O_6 + 2H^+ + 2e = 2H_3PO_3$	0,38
	$2HNO_2 + 6H^+ + 6e = N_2 + 4H_2O$	1,45	Pb	$PbS + 2e = Pb + S^{2-}$	-0,93
	$2NO + 4H^+ + 4e = N_2 + 2H_2O$	1,678		$PbO + H_2O + 2e = Pb + 2OH^-$	-0,58
	$N_2O + 2H^+ + 2e = N_2 + H_2O$	1,766		$PbCO_3 + 2e = Pb + CO_3^{2-}$	-0,506
Na	$Na^+ + e = Na$	-2,714		$PbI_2 + 2e = Pb + 2I^-$	0,365
Pb	$PbSO_4 + 2e = Pb + SO_4^{2-}$	-0,3563	S	$S + 2H^+ + 2e = H_2S$	0,141

	$PbF_2 + 2e = Pb + 2F^-$	-0,350		$SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SO_3 + H_2O$	0,17
	$PbBr_2 + 2e = Pb + 2Br^-$	-0,280		$SO_3^{2-} + 6H^+ + 6e = S^{2-} + 3H_2O$	0,231
	$PbCl_2 + 2e = Pb + 2Cl^-$	-0,268		$2SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = S_2O_3^{2-} + 5H_2O$	0,29
	$Pb^{2+} + 2e = Pb$	-0,126		$SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = H_2S + 4H_2O$	0,311
	$PbO_3^{2-} + H_2O + 2e = PbO_2^{2-} + 2OH^-$	0,2		$SO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = S + 4H_2O$	0,357
	$PbO + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,248		$2H_2SO_3 + 2H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,40
	$Pb(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,277		$H_2SO_3 + 4H^+ + 4e = S + 3H_2O$	0,449
	$PbO_2 + H_2O + 2e = PbO + 2OH^-$	0,28		$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 4e = 2S + 3H_2O$	0,5
	$Pb_3O_4 + 2H^+ + 2e = 3PbO + H_2O$	0,972		$2SO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,705
	$PbO_2 + 4H^+ + 2e = Pb^{2+} + 2H_2O$	1,449-1,455		$S_2O_8^{2-} + 2e = 2SO_4^{2-}$	2,01
	$PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = PbSO_4 + 2H_2O$	1,685	Sb	$SbO_2^- + 2H_2O + 3e = Sb + 4OH^-$	-0,675
	$Pb^{4+} + 2e = Pb^{2+}$	1,694		$Sb + 3H^+ + 3e = SbH_3$	-0,51
Pd	$Pd(OH)_2 + 2e = Pd + 2OH^-$	0,07		$SbO_3^- + H_2O + 2e = SbO_2^- + 2OH^-$	-0,43
	$PdI_6^{2-} + 2e = PdI_4^{2-} + 2I^-$	0,623		$Sb_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Sb + 3H_2O$	0,152
	$PdCl_4^{2-} + 2e = Pd + 4Cl^-$	0,623		$SbO^+ + 2H^+ + 3e = Sb + H_2O$	0,212
	$PdO + 2H^+ + 2e = Pd + H_2O$	0,896		$SbO_3^- + 2H^+ + 3e = SbO_2^- + H_2O$	0,353
	$PdCl_6^{2-} + 4e = Pd + 6Cl^-$	0,96		$SbO_2^- + 4H^+ + 3e = Sb + 2H_2O$	0,446
	$Pd^{2+} + 2e = Pd$	0,987		$Sb_2O_5 + 6H^+ + 4e = 2SbO^+ + 3H_2O$	0,581
	$PdBr_6^{2-} + 2e = PdBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,993		$Sb_2O_5 + 4H^+ + 4e = Sb_2O_3 + 2H_2O$	0,671
	$PdO_2 + 2H^+ + 2e = PdO + H_2O$	1,283	Sc	$Sc^{3+} + 3e = Sc$	-2,077
	$PdCl_6^{2-} + 2e = PdCl_4^{2-} + 2Cl^-$	1,288	Se	$Se + 2e = Se^{2-}$	-0,92
Pt	$PtS + 2e = Pt + S^{2-}$	-0,95		$Se + 2H^+ + 2e = H_2Se$	-0,40
	$PtS_2 + 2e = PtS + S^{2-}$	-0,64		$SeO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Se + 6OH^-$	-0,366
	$Pt(OH)_2 + 2e = Pt + 2OH^-$	0,15		$SeO_4^{2-} + H_2O + 2e = SeO_3^{2-} + 2OH^-$	0,05
	$PtI_6^{2-} + 2e = PtI_4^{2-} + 2I^-$	0,393		$H_2SeO_3 + 4H^+ + 4e = Se + 3H_2O$	0,741
	$PtBr_4^{2-} + 2e = Pt + 4Br^-$	0,58		$SeO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SeO_3 + H_2O$	1,15
	$PtBr_6^{2-} + 2e = PtBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,59	Si	$SiO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Si + 6OH^-$	-1,7
	$PtCl_6^{2-} + 2e = PtCl_4^{2-} + 2Cl^-$	0,720		$SiF_6^{2-} + 4e = Si + 6F^-$	-1,2
	$PtCl_4^{2-} + 2e = Pt + 4Cl^-$	0,73		$SiO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = Si + 3H_2O$	-0,455
	$Pt(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pt + 2H_2O$	0,980		$Si + 4H^+ + 4e = SiH_4$	0,102
	$PtO_2 + 2H^+ + 2e = Pt(OH)_2$	1,045	Sn	$SnS + 2e = Sn + S^{2-}$	-0,94
	$Pt^{2+} + 2e = Pt$	1,188		$Sn(OH)_6^{2-} + 2e = HSnO_2^- + H_2O + 3OH^-$	-0,93
Ra	$Ra^{2+} + 2e = Ra$	-2,925		$HSnO_2^- + H_2O + 2e = Sn + 3OH^-$	-0,91
Rb	$Rb^+ + e = Rb$	-2,925		$SnF_6^{2-} + 4e = Sn + 6F^-$	-0,25
	$SO_4^{2-} + H_2O + 2e = SO_3^{2-} + 2OH^-$	-0,93		$Sn^{2+} + 2e = Sn$	-0,136
	$2SO_4^{2-} + 5H_2O + 8e = S_2O_3^{2-} + 10OH^-$	-0,76		$SnO_2 + 2H^+ + 2e = SnO + H_2O$	-0,108
	$SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S + 6OH^-$	-0,66		$SnO_2 + 4H^+ + 4e = Sn + 2H_2O$	-0,106
	$2SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S_2O_3^{2-} + 6OH^-$	-0,58		$SnO + 2H^+ + 2e = Sn + H_2O$	-0,104
	$S_2^{2-} + 2e = 2S^{2-}$	-0,524		$Sn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Sn + 2H_2O$	-0,091
S	$S + 2e = S^{2-}$	-0,48		$SnCl_6^{2-} + 2e = SnCl_4^{2+} + 2Cl^-$	0,14
	$2S + 2e = S_2^{2-}$	-0,476		$Sn^{4+} + 2e = Sn^{2+}$	0,151
	$S + H^+ + 2e = HS^-$	-0,065	Sr	$Sr^{2+} + 2e = Sr$	-2,888
	$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 8e = 2S^{2-} + 3H_2O$	-0,006	Te	$Te + 2e = Te^{2-}$	-1,14
	$S_4O_6^{2-} + 2e = 2S_2O_3^{2-}$	0,08		$Te + 2H^+ + 2e = H_2Te$	-0,72
	$SO_4^{2-} + 8H^+ + 8e = S^{2-} + 4H_2O$	0,149		$TeO_3^{2-} + 2H_2O + 4e = Te + 6OH^-$	-0,57
	$TeO_2 + 4H^+ + 4e = Te + 2H_2O$	0,529		$V^{2+} + 2e = V$	-1,175

	$TeO_4^{2-} + 2H^+ + 2e = TeO_3^{2-} + H_2O$	0,892		$V^{3+} + e = V^{2+}$	-0,255
	$H_6TeO_6 + 2H^+ + 2e = TeO_2 + 4H_2O$	1,02		$VO_2^+ + 4H^+ + 5e = V + 2H_2O$	-0,25
	$Ti^{2+} + 2e = Ti$	-1,63		$VO_2^{2+} + e = VO^+$	-0,044
	$TiO + 2H^+ + 2e = Ti + H_2O$	-1,306		$VO_2^+ + 4H^+ + 3e = V^{2+} + 2H_2O$	0,360
	$TiF_6^{2-} + 4e = Ti + 6F^-$	-1,19	V	$V_2O_5 + 6H^+ + 2e = 2VO^{2+} + 3H_2O$	0,958
	$TiO_2 + 4H^+ + 4e = Ti + 2H_2O$	-0,86		$VO_2^+ + 2H^+ + e = VO^{2+} + H_2O$	1,004
Ti	TiO_2(рутил) $+ H^+ + 4e = Ti^{3+} + 2H_2O$	-0,666		$VO_4^{3-} + 6H^+ + 2e = VO^+ + 3H_2O$	1,256
	TiO_2(рутил) $+ 2H^+ + 4e = Ti^{2+} + 2H_2O$	-0,502		$H_2VO_4^- + 4H^+ + e = VO^{2+} + 3H_2O$	1,314
	$Ti^{3+} + e = Ti^{2+}$	-0,368		$WO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = W + 8OH^-$	-1,05
	$Ti^{4+} + e = Ti^{3+}$ (5M H_3PO_4)	-0,15	W	$WO_2 + 4H^+ + 4e = W + 2H_2O$	-0,119
	$TiO^{2+} + 2H^+ + 2e = Ti^{2+} + H_2O$	-0,135		$WO_3 + 6H^+ + 6e = W + 3H_2O$	-0,09
	$TiO^{2+} + 2H^+ + e = Ti^{3+} + H_2O$	0,10		$W_2O_5 + 2H^+ + 2e = 2WO_2 + H_2O$	-0,031
	$Tl_2S + 2e = 2Tl + S^{2-}$	-0,93		$2WO_3 + 2H^+ + 2e = W_2O_5 + H_2O$	-0,029
	$TlI + e = Tl + I^-$	-0,753		$WO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = W + 4H_2O$	0,049
	$TlBr + e = Tl + Br^-$	-0,658		$2WO_4^{2-} + 6H^+ + 2e = W_2O_5 + 3H_2O$	0,801
	$TlCl + e = Tl + Cl^-$	-0,557		$ZnS + 2e = Zn + S^{2-}$	-1,405
Tl	$TlOH + e = Tl + OH^-$	-0,344	Zn	$Zn(CN)_4^{2-} + 2e = Zn + 4CN^-$	-1,26
	$Tl^+ + e = Tl$	-0,3363		$Zn(OH)_2 + 2e = Zn + 2OH^-$	-1,245
	$Tl(OH)_3 + 2e = TlOH + 2OH^-$	-0,05		$Zn(OH)_4^{2-} + 2e = Zn + 4OH^-$	-1,22
	$Tl_2O_3 + 3H_2O + 4e = 2Tl^+ + 6OH^-$	0,02		$ZnO_2^{2-} + 2H_2O + 2e = Zn + 4OH^-$	-1,216
	$TlOH + H^+ + e = Tl + H_2O$	0,778		$ZnCO_3 + 2e = Zn + CO_3^{2-}$	-1,06
	$Tl^{3+} + 2e = Tl^+$	1,252		$Zn(NH_3)_4^{2+} + 2e = Zn + 4NH_3$	-1,04
	$UO_2 + 2H_2O + 4e = U + 4OH^-$	-2,39		$Zn^{2+} + 2e = Zn$	-0,763
	$U^{3+} + 3e = U$	-1,798		$ZnO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Zn + 2H_2O$	0,441
U	$U^{4+} + e = U^{3+}$	-0,607		$ZrO^{2+} + 2H^+ + 4e = Zr + H_2O$	-1,570
	$UO_2^{2+} = UO_2^+$	0,05	Zr	$ZrO_2 + 4H^+ + 4e = Zr + 2H_2O$	-1,553
	$UO_2^{2+} + 4H^+ + 2e = U^{4+} + 2H_2O$	0,334		$Zr^{4+} + 4e = Zr$	-1,539
	$UO_2^+ + 4H^+ + e = U^{4+} + 2H_2O$	0,62			

Список литературы

Карапетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия.: учебник 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Глинка Н.Л. Общая химия.: учебник / под ред. В.А. Попкова, А.В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Глинка Н.Л. Общая химия. Задачи и упражнения: учебно-практическое пособие. Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2014. 240 с.

Хомченко И.Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. Изд-во «Новая волна», 2011. 256 с.

Учебное издание

Наталья Анатольевна Зайцева, Ирина Альбертовна Низова

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие

Редактор изд-ва

Компьютерная верстка Н.*А.Зайцевой*

Подписано в печать .Бумага писчая. Формат 60×84 1/16.
Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.
Печ. л. Уч.-изд. л. 1,0 .Тираж 100 .Заказ

Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому
комплексу ________________ С.А. Упоров
14.10.2020

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление подготовки
21.05.03 Технология геологической разведки

квалификация выпускника: **специалист**

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Екатеринбург
2020

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов при организации самостоятельной работы по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» в рамках подготовки и защиты контрольной работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки контрольной работы в виде реферата, требования к его оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Общая характеристика реферата

Написание реферата практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов и т. п. С помощью реферата студент может глубже постигать наиболее сложные проблемы дисциплины, учится лаконично излагать свои мысли, правильно оформлять работу, докладывать результаты своего труда.

В «Толковом словаре русского языка» дается следующее определение: «**реферат** – краткое изложение содержания книги, статьи, исследования, а также доклад с таким изложением».

Различают два вида реферата:

- *репродуктивный* – воспроизводит содержание первичного текста в форме реферата-конспекта или реферата-резюме. В реферате-конспекте содержится фактическая информация в обобщённом виде, иллюстрированный материал, различные сведения о методах исследования, результатах исследования и возможностях их применения. В реферате-резюме содержатся только основные положения данной темы;
- *продуктивный* – содержит творческое или критическое осмысление реферируемого источника и оформляются в форме реферата-доклада или реферата-обзора. В реферате-докладе, наряду с анализом информации первоисточника, дается объективная оценка проблемы, и он имеет развёрнутый характер. Реферат-обзор составляется на основе нескольких источников и в нем сопоставляются различные точки зрения по исследуемой проблеме.

Студент для изложения материала должен выбрать продуктивный вид реферата.

Выбор темы реферата

Студенту предоставляется право выбора темы реферата из рекомендованного преподавателем дисциплины списка. Выбор темы должен быть осознанным и обоснованным с точки зрения познавательных интересов автора, а также полноты освещения темы в имеющейся научной литературе.

Если интересующая тема отсутствует в рекомендованном списке, то по согласованию с преподавателем студенту предоставляется право самостоятельно предложить тему реферата, раскрывающую содержание изучаемой дисциплины. Тема не должна быть слишком общей и глобальной, так как небольшой объем работы (до 20-25 страниц без учёта приложений) не позволит раскрыть ее.

Начинать знакомство с избранной темой лучше всего с чтения обобщающих работ по данной проблеме, постепенно переходя к узкоспециальной литературе. При этом следует сразу же составлять библиографические выходные данные используемых источников (автор, название, место и год издания, издательство, страницы).

На основе анализа прочитанного и просмотренного материала по данной теме следует составить тезисы по основным смысловым блокам, с пометками, собственными суждениями и оценками. Предварительно подобранный в литературных источниках материал может превышать необходимый объем реферата.

Формулирование цели и составление плана реферата

Выбрав тему реферата и изучив литературу, необходимо сформулировать цель работы и составить план реферата.

Цель – это осознаваемый образ предвосхищаемого результата. Возможно, формулировка цели в ходе работы будет меняться, но изначально следует ее обозначить, чтобы ориентироваться на нее в ходе исследования. Формулирование цели реферата рекомендуется осуществлять при помощи глаголов: исследовать, изучить, проанализировать, систематизировать, осветить, изложить (представления, сведения), создать, рассмотреть, обобщить и т. д.

Определяясь с целью дальнейшей работы, параллельно необходимо думать над составлением плана, при этом четко соотносить цель и план работы. Правильно построенный план помогает систематизировать материал и обеспечить последовательность его изложения.

Наиболее традиционной является следующая **структура реферата**:

Титульный лист.

Оглавление (план, содержание).

Введение.

1. (полное наименование главы).
   1.1. (полное название параграфа, пункта);
   1.2. (полное название параграфа, пункта).
2. (полное наименование главы).
   2.1. (полное название параграфа, пункта);
   2.2. (полное название параграфа, пункта).

Основная часть

Заключение (выводы).

Библиография (список использованной литературы).

Приложения (по усмотрению автора).

Титульный лист оформляется в соответствии с Приложением.

Оглавление (план, содержание) включает названия всех глав и параграфов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие их начало в тексте реферата.

Введение. В этой части реферата обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи работы, указываются используемые материалы и дается их краткая характеристика с точки зрения полноты освещения избранной темы. Объем введения не должен превышать 1-1,5 страницы.

Основная часть реферата может быть представлена двумя или тремя главами, которые могут включать 2-3 параграфа (пункта).

Здесь достаточно полно и логично излагаются главные положения в используемых источниках, раскрываются все пункты плана с сохранением связи между ними и последовательности перехода от одного к другому.

Автор должен следить за тем, чтобы изложение материала точно соответствовало цели и названию главы (параграфа). Материал в реферате рекомендуется излагать своими словами, не допуская дословного переписывания из литературных источников. В тексте обязательны ссылки на первоисточники, т. е. на тех авторов, у которых взят данный материал в виде мысли, идеи, вывода, числовых данных, таблиц, графиков, иллюстраций и пр.

Работа должна быть написана грамотным литературным языком. Сокращение слов в тексте не допускается, кроме общеизвестных сокращений и аббревиатуры. Каждый раздел рекомендуется заканчивать кратким выводом.

Заключение (выводы). В этой части обобщается изложенный в основной части материал, формулируются общие выводы, указывается, что нового лично для себя вынес автор реферата из работы над ним. Выводы делаются с учетом опубликованных в литературе различных точек зрения по проблеме, рассматриваемой в реферате, сопоставления их и личного мнения автора реферата. Заключение по объему не должно превышать 1,5-2 страниц.

Библиография (список использованной литературы) – здесь указывается реально использованная для написания реферата литература, периодические издания и электронные источники информации. Список составляется согласно правилам библиографического описания.

Приложения могут включать графики, таблицы, расчеты.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РЕФЕРАТА

Общие требования к оформлению реферата

Рефераты, как правило, требуют изучения и анализа значительного объема статистического материала, формул, графиков и т. п. В силу этого особое значение приобретает правильное оформление результатов проделанной работы.

Текст реферата должен быть подготовлен в печатном виде. Исправления и помарки не допускаются. Текст работы оформляется на листах формата А4, на одной стороне листа, с полями: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 15 мм и нижнее – 25 мм. При компьютерном наборе шрифт должен быть таким: тип шрифта Times New Roman, кегль 14, междустрочный интервал 1,5.

Рекомендуемый объем реферата – не менее 20 страниц. Титульный лист реферата оформляется студентом по образцу, данному в приложении 1.

Текст реферата должен быть разбит на разделы: главы, параграфы и т. д. Очередной раздел нужно начинать с нового листа.

Все страницы реферата должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится.

Таблицы

Таблицы по содержанию делятся на аналитические и неаналитические. Аналитические таблицы являются результатом обработки и анализа цифровых показателей. Как правило, после таких таблиц делается обобщение, которое вводится в текст словами: «таблица позволяет сделать вывод о том, что…», «таблица позволяет заключить, что…» и т. п.

В неаналитических таблицах обычно помещаются необработанные статистические данные, необходимые лишь для информации и констатации фактов.

Таблицы размещают после первого упоминания о них в тексте таким образом, чтобы их можно было читать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке.

Каждая таблица должна иметь нумерационный и тематический заголовок. Тематический заголовок располагается по центру таблицы, после нумерационного, размещённого в правой стороне листа и включающего надпись «Таблица» с указанием арабскими цифрами номера таблицы. Нумерация таблиц сквозная в пределах каждой главы. Номер таблицы состоит из двух цифр: первая указывает на номер главы, вторая – на номер таблицы в главе по порядку (например, «Таблица 2.2» – это значит, что представленная таблица вторая во второй главе).

Цифры в графах таблиц должны проставляться так, чтобы разряды чисел во всей графе были расположены один под другим. В одной графе количество десятичных знаков должно быть одинаковым. Если данные отсутствуют, то в графах ставят знак тире. Округление числовых значений величин до первого, второго и т. д. десятичного знака для различных значений одного и того же наименования показателя должно быть одинаковым.

Таблицу с большим количеством строк допускается переносить на другую страницу, при этом заголовок таблицы помещают только над ее первой частью, а над переносимой частью пишут «Продолжение таблицы» или «Окончание таблицы». Если в работе несколько таблиц, то после слов «Продолжение» или «Окончание» указывают номер таблицы, а само слово «таблица» пишут сокращенно, например, «Продолжение табл. 1.1», «Окончание табл. 1.1».

На все таблицы в тексте реферата должны быть даны ссылки с указанием их порядкового номера, например, «…в табл. 2.2».

Формулы

Формулы – это комбинации математических знаков, выражающие какие-либо предложения.

Формулы, приводимые в реферате, должны быть наглядными, а обозначения, применяемые в них, соответствовать стандартам.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой, в той последовательности, в какой они даны в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента дается с новой строки. Первую строку объяснения начинают со слова «где» без двоеточия после него.

Формулы и уравнения следует выделять из текста свободными строками. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после знака равенства (=) или после знака (+), минус (–), умножения (х) и деления (:).

Формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах всей реферата или главы. В пределах реферата используют нумерацию формул одинарную, в пределах главы – двойную. Номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках.

В тексте ссылки на формулы приводятся с указанием их порядковых номеров, например: «…в формуле (2.2)» (второй формуле второй главы).

Иллюстрации

Иллюстрации позволяют наглядно представить явление или предмет такими, какими мы их зрительно воспринимаем, но без лишних деталей и подробностей.

Основными видами иллюстраций являются схемы, диаграммы и графики.

Схема – это изображение, передающее обычно с помощью условных обозначений и без соблюдения масштаба основную идею какого-либо устройства, предмета, сооружения или процесса и показывающее взаимосвязь их главных элементов.

Диаграмма – один из способов изображения зависимости между величинами. Наибольшее распространение получили линейные, столбиковые и секторные диаграммы.

Для построения линейных диаграмм используется координатное поле. По горизонтальной оси в изображенном масштабе откладывается время или факториальные признаки, на вертикальной – показатели на определенный момент (период) времени или размеры результативного независимого признака. Вершины ординат соединяются отрезками – в результате получается ломаная линия.

На столбиковых диаграммах данные изображаются в виде прямоугольников (столбиков) одинаковой ширины, расположенных вертикально или горизонтально. Длина (высота) прямоугольников пропорциональна изображенным ими величинам.

Секторная диаграмма представляет собой круг, разделенный на секторы, величины которых пропорциональны величинам частей изображаемого явления.

График – это результат обработки числовых данных. Он представляет собой условные изображения величин и их соотношений через геометрические фигуры, точки и линии.

Количество иллюстраций в работе должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста.

Иллюстрации обозначаются словом «Рис.» и располагаются после первой ссылки на них в тексте так, чтобы их было удобно рассматривать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке. Иллюстрации должны иметь номер и наименование, расположенные по центру, под ней. Иллюстрации нумеруются в пределах главы арабскими цифрами, например: «Рис. 1.1» (первый рисунок первой главы). Ссылки на иллюстрации в тексте реферата приводят с указанием их порядкового номера, например: «…на рис. 1.1».

При необходимости иллюстрации снабжаются поясняющими данными (подрисуночный текст).

Приложения

Приложение – это часть основного текста, которая имеет дополнительное (обычно справочное) значение, но, тем не менее, необходима для более полного освещения темы. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, карты. В приложении помещают вспомогательные материалы по рассматриваемой теме: инструкции, методики, положения, результаты промежуточных расчетов, типовые проекты, имеющие значительный объем, затрудняющий чтение и целостное восприятие текста. В этом случае в тексте приводятся основные выводы (результаты) и делается ссылка на приложение, содержащее соответствующую информацию. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы. В правом верхнем углу листа пишут слово «Приложение» и указывают номер приложения. Если в реферате больше одного приложения, их нумеруют последовательно арабскими цифрами, например: «Приложение 1», «Приложение 2» и т. д.

Каждое приложение должно иметь заголовок, который помещают ниже слова «Приложение» над текстом приложения, по центру.

При ссылке на приложение в тексте реферата пишут сокращенно строчными буквами «прил.» и указывают номер приложения, например: «…в прил. 1».

Приложения оформляются как продолжение текстовой части реферата со сквозной нумерацией листов. Число страниц в приложении не лимитируется и не включается в общий объем страниц реферата.

Библиографический список

Библиографический список должен содержать перечень и описание только тех источников, которые были использованы при написании реферата.

В библиографическом списке должны быть представлены монографические издания отечественных и зарубежных авторов, материалы профессиональной периодической печати (экономических журналов, газет и еженедельников), законодательные и др. нормативно-правовые акты. При составлении списка необходимо обратить внимание на достижение оптимального соотношения между монографическими изданиями, характеризующими глубину теоретической подготовки автора, и периодикой, демонстрирующей владение современными экономическими данными.

Наиболее распространенным способом расположения наименований литературных источников является алфавитный. Работы одного автора перечисляются в алфавитном порядке их названий. Исследования на иностранных языках помещаются в порядке латинского алфавита после исследований на русском языке.

Ниже приводятся примеры библиографических описаний использованных источников.

Статья одного, двух или трех авторов из журнала

Зотова Л. А., Еременко О. В. Инновации как объект государственного регулирования // Экономист. 2010. № 7. С. 17–19.

Статья из журнала, написанная более чем тремя авторами

Валютный курс и экономический рост / С. Ф. Алексашенко, А. А. Клепач, О. Ю. Осипова [и др.] // Вопросы экономики. 2010. № 8. С. 18–22.

Книга, написанная одним, двумя или тремя авторами

Олейник А. Н. Институциональная Горное дело: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2011. 416 с.

Книга, написанная более чем тремя авторами

Экономическая теория: учебник / В. Д. Камаев [и др.]. М.: ВЛАДОС, 2011. 143 с.

Сборники

Актуальные проблемы экономики и управления: сборник научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. 146 с.

Статья из сборника

Данилов А. Г. Система ценообразования промышленного предприятия // Актуальные проблемы экономики и управления: сб. научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. С. 107–113.

Статья из газеты

Крашаков А. С. Будет ли обвал рубля // Аргументы и факты. 2011. № 9. С. 3.

Библиографические ссылки

Библиографические ссылки требуется приводить при цитировании, заимствовании материалов из других источников, упоминании или анализе работ того или иного автора, а также при необходимости адресовать читателя к трудам, в которых рассматривался данный вопрос.

Ссылки должны быть затекстовыми, с указанием номера соответствующего источника (на который автор ссылается в работе) в соответствии с библиографическим списком и соответствующей страницы.

Пример оформления затекстовой ссылки

Ссылка в тексте: «Под трансакцией понимается обмен какими-либо благами, услугами или информацией между двумя агентами» [10, С. 176].

В списке использованных источников:

10. *Сухарев О. С.* Институциональная Горное дело: учебник и практикум для специалистиата и магистратуры /О.С. Сухарев. М.: Издательство Юрайт, 2016. 501 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИТЫ РЕФЕРАТА

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект).

Порядок защиты реферата.

1.Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.

2.Ответы студента на вопросы преподавателя.

3.Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы студенту:

- Готовясь к защите реферата, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе вы сможете проговорить все 15-20 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.

- Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).
- Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.
- Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этого раздела, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.
- Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.
- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.
- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.
- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!
- Не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь вам или сэкономить время. Если вас прервали, а при оценке ставят в вину пропуск важной части материала, не возмущайтесь, а покажите план своего ответа, где эта часть стоит несколько позже того, на чем вы были прерваны.
- Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что вы можете сказать.
- Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

1. 1. Хост-компьютеры.
2. Локальные сети и персональные компьютеры.
3. Каналы связи.
4. Хранение и предоставление доступа к информации.
5. Управление передачей сообщений.
6. Каналы связи, обеспечивающие взаимодействие между хост-компьютерами.
7. Обмен информацией между абонентами сети.
8. Использование баз данных сети.
9. Классификация прикладного программного обеспечения.
10. Пакеты прикладных программ.
11. Методо-ориентированные пакеты.
12. Системы реального времени.
13. Офисные приложения.
14. Инструменты электронных таблиц для решения экономических задач.
15. Классификация баз данных (БД).
16. Системы управления базами данных (СУБД). Классификация СУБД.
17. Локальные и глобальные сети. Intranet и Internet. Сетевые службы.
18. Поисковые системы: Яndex, Rambler, Google, ПОИСК@mail.ru.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Критерии оценивания:

достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

использование профессиональной терминологии;

использование литературных источников.

Правила оценивания:

Каждый показатель оценивается в 1 балл

Критерии оценки:

9-10 баллов (90-100%) - оценка «отлично»;

7-8 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»;

5-6 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;

0-4 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Приложение

Образец оформления титульного листа контрольной работы (реферата)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра информатики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (РЕФЕРАТ)

по дисциплине
«Прикладное программное обеспечение»

на тему:

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАЧЕЙ СООБЩЕНИЙ

Руководитель:
Дружинин А.В.
Студент гр. Х-20
Артёмова Елена Юрьевна

Екатеринбург – 2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому
комплексу ____________С.А. Упоров
14.10.2020

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Специальность
21.05.03 Технология геологической разведки
квалификация выпускника: **специалист**

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Екатеринбург
2020

ВВЕДЕНИЕ

Система управления базами данных

СУБД (система управления базами данных) является универсальным программным инструментом создания и обслуживания баз данных и приложений пользователя в самых разных предметных областях. СУБД обеспечивает создание, многоаспектный доступ к данным и использование одних и тех же данных различными задачами и приложениями пользователей.

СУБД поддерживаются различные модели данных. *Модель данных* – это метод (принцип) логической организации данных, используемый СУБД. Наиболее известными являются иерархическая, сетевая и реляционная модели.

В СУБД для персональных компьютеров (настольных СУБД) поддерживается преимущественно *реляционная модель*, которую отличает простота и единообразие представления данных простейшими *двумерными таблицами.*

Основной логической структурной единицей манипулирования данными является *строка* таблицы – *запись*. *Структура записи* определяется составом входящих в неё *полей*. Совокупность полей записи соответствует логически связанным реквизитам, характеризующим некоторую сущность предметной области.

Типовыми функциями СУБД по манипулированию данными являются выборка, добавление, удаление, изменение данных.

- *Выборка данных* – выборка записей из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц в соответствии с заданными условиями.
- *Добавление* и *удаление* данных – добавление новых записей в таблицы и удаление существующих.
- *Изменение данных* – изменение значений данных в полях существующих записей.

Данные из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц могут подвергаться обработке. К операциям *обработки* относятся, например, расчеты в пределах каждой записи, группировка записей в соответствии с *заданным* критерием группировки и обработка записей выделенных групп с помощью статистических функций, таких как суммирование, определение максимального, подсчет числа записей в группе и т. п.

СУБД Access включает разнообразные и многочисленные относительно автономные инструментальные средства, ориентированные на создание объектов базы данных и приложений пользователя.

- *Разнообразие мастера* в режиме ведения диалога с пользователем позволяют создавать объекты и выполнять разнообразные функции по реорганизации объектов базы данных и приложений пользователя.
- *Средства программирования* СУБД включают язык запросов *SQL*, язык макрокоманд и язык объектно-ориентированного программирования для приложений *Microsoft Visual Basic for Applications (VBA).*
- *Средства графического конструирования* позволяют создавать объекты базы данных и объекты приложения с помощью многочисленных графических элементов, не прибегая непосредственно к программированию. Среди многочисленных средств графического конструирования и диалоговых средств Access следует выделить средства для создания:
- таблиц и схем баз данных, отображающих их связи;
- запросов выборки, отбирающих и объединяющих данные нескольких таблиц в виртуальную таблицу, которая может использоваться во многих задачах приложения;
- запросов на изменение данных базы;
- экранных форм, предназначенных для ввода, просмотра и обработки данных в диалоговом режиме;
- отчетов, предназначенных для ввода, просмотра и вывода на печать данных из базы и результатов их обработки в удобном для пользователя виде.

Реляционная база данных

База данных является организованной на машинном носителе совокупностью взаимосвязанных данных и содержит сведения о различных сущностях одной предметной области: реальных объектах, процессах, событиях или явлениях.

Реляционная база данных представляет собой множество взаимосвязанных двумерных таблиц – *реляционных таблиц*, называемых также *отношениями*, в каждой из которых содержаться сведения об одной сущности автоматизируемой предметной области.

Логическую структуру реляционной базы данных образует совокупность реляционных таблиц, между которыми установлены логические связи.

В таблицах базы должны сохраняться все данные, необходимые для решения задач предметной области, причем каждый элемент данных должен храниться в базе только в одном экземпляре. Для создания таблиц, соответствующих реляционной модели данных, используется процесс, называемый нормализацией данных. *Нормализация* – это удаление из таблиц повторяющихся данных путем их переноса в новые таблицы, записи которых не содержат повторяющихся значений.

Структура реляционной таблицы определяется составом полей. Каждое *поле* отражает определенную характеристику сущности. Для поля указывается *тип* и *размер* элементарного данного, размещаемого в нем, и ряд др. свойств. Содержимое поля отображается в столбце таблицы. Столбец таблицы содержит данные одного типа.

Содержание таблицы заключено в её строках, однотипных по структуре, каждая строка таблицы содержит данные о конкретном экземпляре сущности и называется *записью*.

Для однозначного определения (*идентификации)* каждой записи таблица должна иметь *уникальный (первичный) ключ.* По значению ключа таблицы отыскивается единственная запись в таблице. Ключ может состоять из одного или нескольких полей таблицы. Значение уникального ключа не может повторяться в нескольких записях.

Логические связи между таблицами дают возможность объединять данные из разных таблиц. Связь каждой пары таблиц задается одинаковыми полями в них – *ключом связи*. Таким образом, обеспечивается рациональное хранение недублированных данных и их объединение в соответствии с требованиями решаемых задач.

В нормализованной реляционной базе данных связь двух таблиц характеризуется отношениями записей типа «один-к-одному» (1:1) или «один-ко-многим» (1:М). Отношение 1:1 предполагает, что каждой записи одной таблицы соответствует одна запись другой таблицы. Отношение типа 1:М предполагает, что каждой записи первой таблицы соответствует много записей во второй, но каждой записи второй таблицы соответствует только одна запись в первой.

Для двух таблиц, находящихся в отношении типа 1:М, связь устанавливается по уникальному ключу таблицы, представляющей в отношении сторону «один», – *главной таблицы* в связи. Во второй таблице, представляющей в отношении сторону «многие» и называемой *подчиненной*, этот ключ связи может быть либо частью уникального ключа, либо не входить в состав ключа. В подчиненной таблице ключ связи называется ещё *внешним ключом*.

Схема данных

В СУБД Access процесс создания реляционной базы данных включает создание *схемы данных*. Схема данных наглядно отображает логическую структуру базы данных: таблицы и связи между ними, а также обеспечивает использование установленных в ней связей при обработке данных.

Для нормализованной базы данных, основанной на одно-многозначных и однозначных отношениях между таблицами, в схеме данных для связей таких таблиц по первичному ключу или уникальному индексу главной таблицы могут устанавливаться параметры *связной целостности*.

При поддержании целостности взаимосвязанных данных не допускается наличия записи в подчиненной таблице, если в главной таблице отсутствует связанная с ней запись. Соответственно при первоначальной загрузке базы данных, а также корректировке, добавлении и удалении записей система допускает выполнение операции только в том случае, если она не приводит к нарушению целостности. Связи, определенные в схеме данных, автоматически используются для объединения таблиц при разработке многотабличных форм, запросов, отчетов, существенно упрощая процесс их конструирования. В схеме связи могут устанавливаться для любой пары таблиц, имеющих одинаковое поле, позволяющее объединять эти таблицы. **Объекты Access**

База данных Access включает следующие сохраняемые в одном accdbфайле объекты:

- *таблицы, запросы, схемы данных,* непосредственно имеющие отношение к базе данных;
- *формы, отчеты, макросы* и *модули*, называемые *объектами приложения.*

Формы и отчеты предназначены для типовых процессов обработки данных: просмотра, обновления, поиска по заданным критериям, получения отчетов. Эти объекты приложений конструируются из графических элементов, называемых *элементами управления*. Основные элементы управления служат для отображения полей таблиц, являющихся источниками данных объекта.

Для автоматизации доступа к объектам и их взаимодействия используется программный код. Только с помощью программного кода получается полноценное приложение пользователя, функции которого доступны через меню, панели инструментов и формы. Для создания программного кода служат модули на языке *VBA* и макросы.

Каждый объект и элемент управления имеет свои свойства, определяя которые можно настраивать их. С каждым объектом и элементом управления связывается набор событий, которые могут обрабатываться макросами или процедурами обработки событий на VBA, входящими в состав модулей форм, отчетов.

Объекты представлены в области навигации окна базы данных Access. Все операции по работе с объектами и приложениями начинаются в этом окне.

- *Таблицы* создаются пользователем для хранения данных об одной сущности – одном информационном объекте модели данных предметной области. Таблица состоит из полей (столбцов) и записей (строк). Каждое поле содержит одну характеристику информационного объекта предметной области. В записи собраны сведения об одном экземпляре информационного объекта. База данных Access может включать до 32768 объектов (в том числе формы, отчеты и т. д.). Одновременно может открываться до 2048 таблиц.
- *Запросы*. Запросы на выборку служат для выборки нужных данных из одной или нескольких связанных таблиц. Результатом выполнения запроса является виртуальная таблица. В запросе можно указать, какие поля исходных таблиц следует включить в запись таблицы запроса и как отобрать нужные записи. Таблица запроса может быть использована с другими таблицами базы при обработке данных. Запросы на изменение позволяют обновлять, удалять или добавлять данные в таблицы, а также создавать новые таблицы на основе уже существующих.
- *Схема данных* определяет, с помощью каких полей таблицы связываются между собой, как будет выполняться объединение данных этих таблиц, нужно ли проверять связную целостность при добавлении и удалении записей, изменение ключей таблиц. Схемы данных в области навигации в окне базы данных отображаются только в проектах Access, работающих с базами данных сервера. Для отображения схемы данных в базах данных Access используется команда **Схема данных**, размещенная на вкладке ленты **Работа с базами данных** в группе **Отношения**.
- *Формы* являются основным средством создания диалогового интерфейса приложения пользователя. Форма может создаваться для работы с электронными документами, сохраняемыми в таблицах базы данных. Вид таких документов может соответствовать привычному для пользователя бумажному документу. Форма используется для разработки интерфейса по управлению приложением. Включаемые в форму процедуры обработки событий позволяют управлять процессом обработки данных в приложении. Такие процедуры хранятся в модуле формы. В формы могут вставляться рисунки, диаграммы, звуковые фрагменты, видео. Возможна разработка форм с набором вкладок, с

каждой из которых связано выполнение той или иной функции приложения.

- *Отчеты* предназначены для формирования на основе данных базы выходных документов любых форматов, содержащих результаты решения задач пользователя, и вывода их на печать. Как и формы, отчеты могут включать процедуры обработки событий. Использование графических объектов позволяет дополнять данные отчета иллюстрациями. Отчеты обеспечивают возможность анализа данных при использовании фильтрации, агрегирования и представления данных источника в различных разрезах. *Макросы* являются программами, состоящими из последовательностей макрокоманд, которые выполняются по вызову или при наступлении некоторого события в объекте приложения или его элементе управления. Макросы данных выполняются при наступлении некоторого события в исходных таблицах. Макросы позволяют автоматизировать некоторые действия в приложении пользователя. Создание макросов осуществляется в диалоговом режиме путем выбора нужных макрокоманд и задания параметров, используемых ими при выполнении.
- *Модули* содержат процедуры на языке *Visual Basic for Applications*. Могут создаваться процедуры-программы, процедуры-функции, которые разрабатываются пользователем, и процедуры для обработки событий.

Интерфейс пользователя Access

Для Access 2013 разработан интерфейс пользователя, упрощающий доступ к многочисленным функциональным возможностям в процессе создания и работы с объектами базы данных и приложений пользователя.

Основу этого интерфейса составляют *ленты* и *область навигации.* Собранные на одной ленте команды четко соответствуют задачам, выполняемым в Access, что позволяет легко находить нужную команду.

Основные элементы интерфейса пользователя в Access 2013:

- *страницы*, предназначенные для управления файлами баз данных. Стартовая страница отображается при запуске Access и позволяет открыть существующие файлы баз данных или создать новые. В процессе работы доступны страницы, открываемые при щелчке на цветном значке **Файл**.

Они содержат команды для сохранения, сжатия и восстановления базы данных, определения параметров и ряд др.;

- *лента* – широкая полоса, расположенная в верхней части окна Access. Она содержит стандартные вкладки с группами наиболее часто используемых команд, контекстные вкладки, которые появляются только тогда, когда их использование допустимо, и *панель быстрого доступа* – небольшую панель инструментов, на которую можно добавить нужные команды. Лента является основой интерфейса пользователя и обеспечивает быстрый доступ к набору команд, применимых к выполняемым в базе данных в текущий момент работам;
- *коллекция (галерея)* – элемент интерфейса, который не просто отображает команды, а показывает набор результатов выполнения этих команд с отображением внешнего вида вариантов выбора;
- *диалоговые окна* могут выводиться при выполнении команд для уточнения операции и передачи параметров. В некоторых группах вкладок ленты имеются кнопки вызова диалоговых окон;
- *контекстное меню* вызывается щелчком правой кнопкой мыши на элементе объекта. Содержит команды, зависящие от контекста – элемента объекта, с которым работает пользователь, или выполняемой задачи; *панель быстрого доступа* – единственная панель инструментов, предусмотренная в интерфейсе. Она обеспечивает доступ одним нажатием кнопки к наиболее часто используемым командам. Это панель настраивается в соответствии с предпочтениями пользователя;
- *область навигации* расположена в левой части окна. В ней отображаются объединенные в группы объекты базы данных;
- *вкладки документов* – таблицы, запросы, формы, отчеты и макросы отображаются на вкладках в рабочем пространстве окна Access – окне документов;
- *строка состояния* – полоса в нижней части окна программы, в которой отображаются сведения о состоянии объекта и располагаются кнопки, позволяющие изменить режим его представления;
- *мини-панель инструментов* – прозрачный элемент, подключенный к объекту, который появляется над выбранным текстом и позволяет легко отформатировать его;
- *панель сообщений* – это единственное средство вывода всех предупреждений системы безопасности. Отображается, когда в открываемой базе данных имеется любое потенциально опасное выполняемое содержимое.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1
Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»

Создать базу данных для учета реализации товаров со складов. Организовать хранение информации в создаваемой базе данных с помощью четырех таблиц: «Товары», «Фирмы», «Склады» и «Продажи».

Этапы проектирования базы данных:

1. Исследование предметной области и формулировка основных допущений (накладываемых условий). На этом этапе составляется список всех форм и отчетов, которые могут быть затребованы пользователями вашей БД.
2. Анализ данных. Составить перечень всех элементов данных, входящих в формы и отчеты, и сгруппировать их в таблицы БД.
3. Установить, какие взаимосвязи существуют между элементами данных. Определить первичные и вторичные (внешние) ключи отношений. Организовать поля данных в таблицах.

Создать базу данных «Реализация товаров», при условии, что на одном складе может храниться только один вид товара.

Создание файла базы данных Access

Для создания файла новой локальной базы данных щелкните в области создания базы данных стартового окна Access на элементе **Пустая база данных** (рис. 1.1). В открывшемся окне введите имя файла в поле **Имя файла** – например, ***Реализация товаров***.

Щелчком по кнопке **Создать,** завершите процесс создания пустого файла новой базы данных. В результате по умолчанию откроется окно созданной базы данных с пустой таблицей с именем **Таблица1** в режиме таблицы (рис. 1.2).

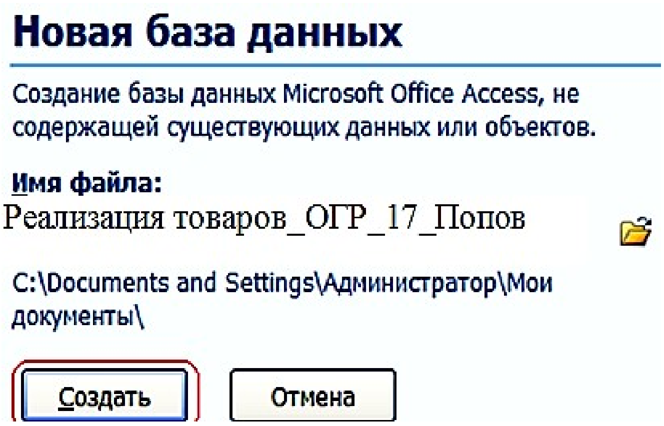


Рис. 1.1. Определение имени и местоположения файла новой базы данных

Так как создание таблиц будет происходить при помощи конструктора таблиц, поэтому закройте таблицу при помощи щелчка по значку «**Закрыть**».

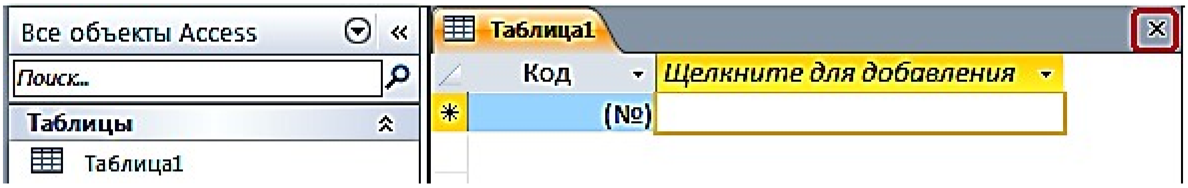


Рис. 1.2. **Таблица1** в режиме таблицы

Задание 1. Создание таблицы базы данных «Реализация товаров»

Рассмотрим последовательность действий при создании таблиц. Для этого начнем создание таблицы «Товар» с определения её структуры в режиме конструктора таблиц. На вкладке ленты **Создание** в группе **Таблицы** выполним команду **Конструктор таблиц** (рис. 1.3).

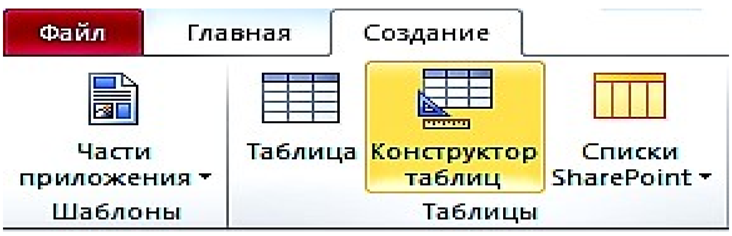


Рис. 1.3. Лента с открытой вкладкой **Создание**

В окне конструктора **Таблица1** определим все поля таблицы «Товар». Для каждого поля таблицы «Товар» определим **Имя поля**, **Тип данных.**

Рис. 1.4. Таблица «Товары» в режиме «**Конструктор**»

Теперь определим первичный ключ таблицы. Выделим поле «**Код товара»**, щелкнув кнопкой мыши на области маркировки, слева от имени поля, и нажмем кнопку **Ключевое поле** на вкладке ленты **Конструктор** в группе **Сервис**. Признаком установки ключа является изображение ключа слева от имени поля  .

Сохраним созданную структуру таблицы и присвоим имя новой таблице – «Товар». Для этого выполним команду **Сохранить** на Панели быстрого доступа или на вкладке **ФАЙЛ**. В окне **Сохранение** введем имя таблицы.

При сохранении таблицы происходит обновление файла базы данных, в которую помещается созданная таблица. Таблица «Товар» появиться в списке объектов **Таблицы** в области навигации открытой базы данных «Реализация товаров».

После сохранения структуры таблицы переходите ко второму этапу создания таблицы – созданию записей. Для этого переключитесь в режим таблицы нажатием кнопки **Режим** на ленте конструктора или выбором нужного режима при открытии списка данной кнопки (рис. 1.5).

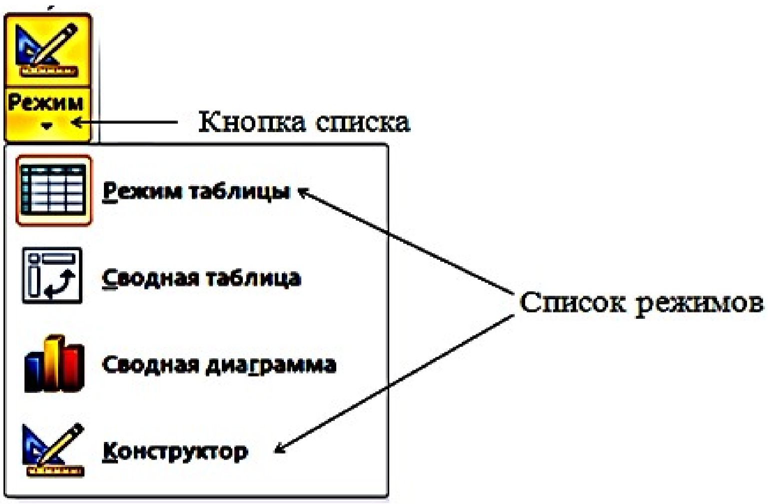


Рис. 1.5. Выбор режима представления таблицы

Как и в режиме конструктора, в режиме таблицы можно удалить столбец. При этом следует помнить, что удаляются все данные столбца, и отменить удаление невозможно. Удаление поля первичного ключа в режиме таблицы невозможно. Для этого необходимо использовать режим конструктора.

Открыть таблицу для ввода исходных данных. Установить курсор в первую строку таблицы и ввести исходные данные. Ввод данных в каждое поле таблицы завершать нажатием клавиши **Enter.** По окончании ввода данных при необходимости увеличить ширину полей. Записать таблицу «Товар» на диск.

Товары

Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 ₽
2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 ₽
3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽
4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	240 000,00 ₽
5	Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 ₽
6	Теодолит	4Т15П	3	5	58 764,00 ₽
7	Теодолит	4Т30П	3	8	50 625,00 ₽
8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽
9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽
10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 ₽
(№)					

Рис. 1.6. Таблица «Товары» в режиме таблицы

Задание 2. Создание таблицы «Фирмы»

Для поля Телефон следует задать маску ввода: **(# # #) # # # - # # - # #**

Рис. 1.7. Таблица «Фирмы» в режиме «**Конструктор**»

Рис. 1.8. Таблица «Фирмы» в режиме таблицы

Задание 3. Создание таблицы «Склады»

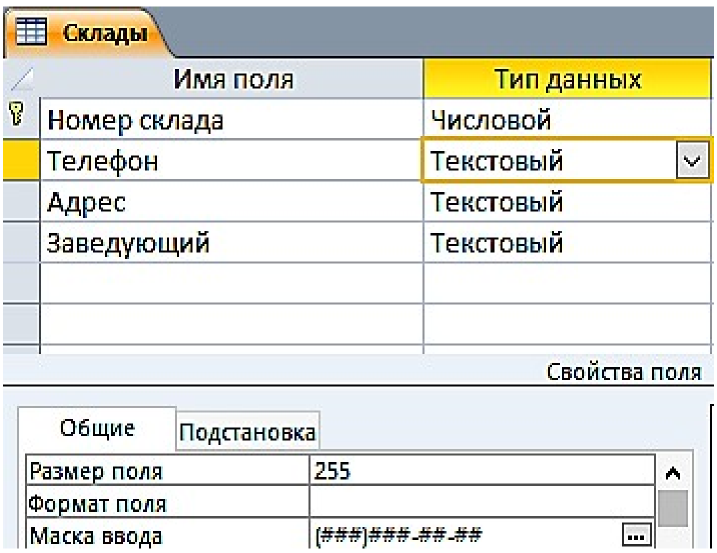


Рис. 1.9. Таблица «**Склады**» в режиме «**Конструктор**»

Склады

Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
2	(343)379-51-62	В-Пышма, пер. Индустриальный, 1	Мясников Д.О.
3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.

Рис. 1.10. Таблица «**Склады**» в режиме «**Таблицы**»

Задание 4. Создание таблицы «Продажи»

1. Ввести в первой строке имя поля: **Дата продажи** и выбрать для него тип Дата/время.
2. Сформировать поле **Код фирмы** и выбрать для него числовой тип.
3. Указать в качестве источника данных для поля **Код фирмы** список кодов фирмы, внесенных в поле с таким же названием в таблицу «Фирмы», рис. 1.11.
4. Не переводя курсор со строки **Код фирмы**, щелкнуть мышью по закладке **Подстановка.**
5. Щелкнуть мышью по слову **Поле** в строке **Тип элемента управления**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
6. Выбрать щелчком мыши из раскрывшегося списка строку **Поле со списком**.
7. Щелкнуть мышью по незаполненному полю в строке **Источник строк**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
8. Щелчком мыши выбрать строку с названием таблицы «Фирмы».

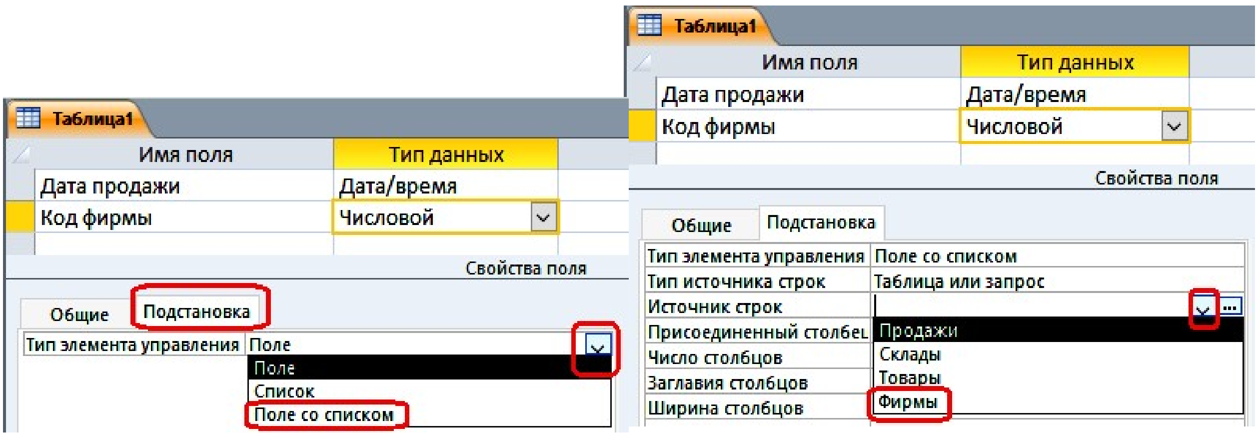


Рис. 1.11. Окно таблицы с подстановкой в режиме «**Конструктора**»

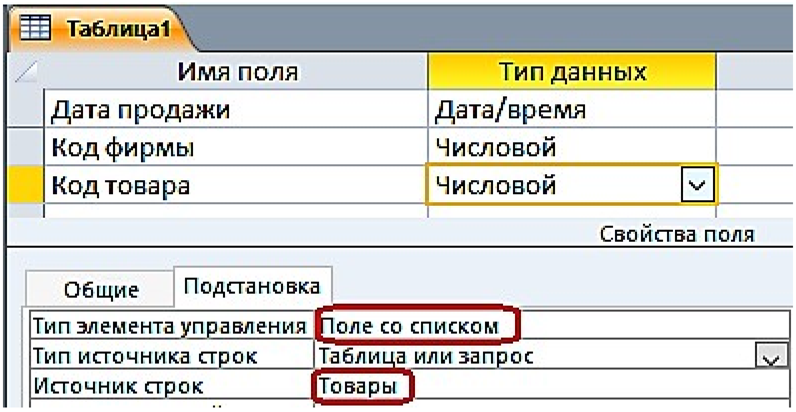


Таблица1

Имя поля	Тип данных
Дата продажи	Дата/время
Код фирмы	Числовой
Код товара	Числовой

Свойства поля

Общие | Подстановка

Тип элемента управления	Поле со списком
Тип источника строк	Таблица или запрос
Источник строк	Товары

Рис. 1.12. Окно таблицы с выбором источника строк

Продажи

Имя поля	Тип данных
Дата продажи	Дата/время
Код фирмы	Числовой
Код товара	Числовой
Количество	Числовой
Скидки	Числовой

Рис. 1.13. Окно таблицы «**Продажи**» в режиме «**Конструктора»**

Продажи

Дата прода	Код фирмы	Код товара	Количество	Скидки
15.01.2018	4	10	10	5
19.01.2018	1	2	6	10
20.01.2018	3	5	8	5
25.01.2018	2	4	4	10
27.01.2018	1	1	4	15
30.01.2018	3	7	4	10
02.02.2018	2	3	5	5
05.02.2018	4	9	10	10
10.02.2018	3	8	9	10
15.02.2018	3	5	8	10

Рис. 1.14. Таблица «**Продажи**» в режиме «**Таблицы**»

Задание 5. Создание схемы данных

Создание схемы данных начинается с выполнения команды **Схема данных** в группе **Отношения** на вкладке ленты **Работа с базами данных**. В результате выполнения этой команды открывается окно схемы данных и диалоговое окно **Добавление таблицы**, в котором осуществляется выбор таблиц, включаемых в схему (рис. 1.15).

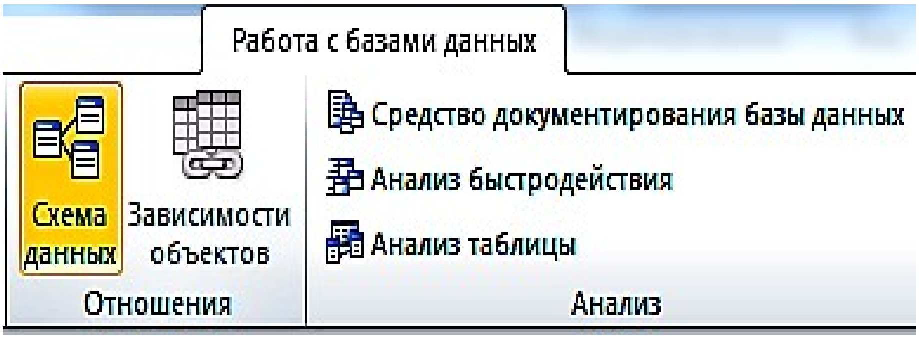


Рис. 1.15. Вкладка ленты **Работа с базами данных**

В окне **Добавление таблицы** отображаются все таблицы и запросы, содержащиеся в базе данных. Выберем вкладку **Таблицы** и с помощью кнопки **Добавить** разместим в окне **Схема данных** все ранее созданные таблицы базы данных «Реализация товаров». При создании связей в схеме данных используется проект структуры реляционной базы данных, в котором показаны все одно-многозначные связи таблиц. Реализуются связи с помощью добавления в связанные таблицы общих полей, называемых *ключом связи.*

На рис. 1.16 в созданной схеме данных БД «Реализация товаров» все связи отмечены символами **1** или ∞. Это свидетельствует о том, что одно-многозначные связи установлены правильно (по простому и составному ключу).

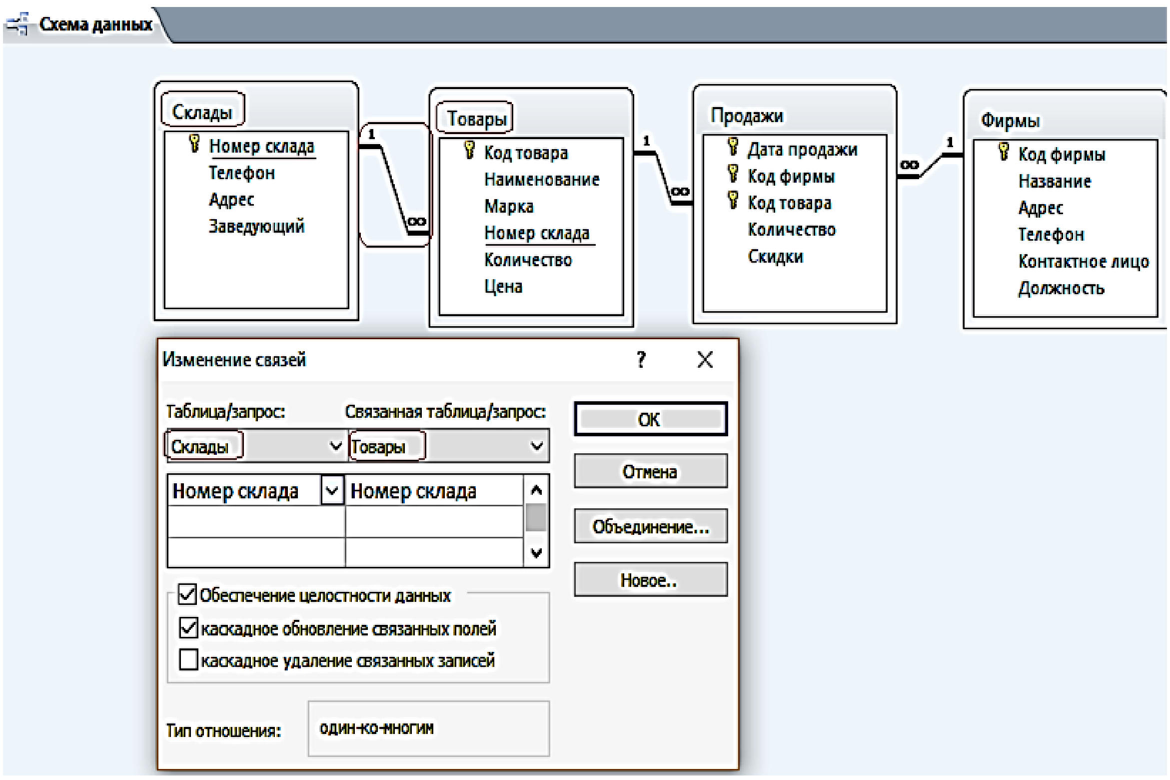


Рис. 1.16. Схема данных БД «**Реализация товаров**»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Работа с простыми запросами

Конструирование запросов на выборку с условием отбора

Задание 1. Выбрать товар по его наименованию

1. Для создания запроса в окне базы данных выберите вкладку ленты – **Создание** и в группе **Запросы** нажмите кнопку **Конструктор запросов**.

2. В окне **Добавление таблицы** выберите таблицу «Товар» и нажмите кнопку добавить. Выбранная таблица будет отображена в области схемы данных запроса. Закройте окно **Добавление таблицы**, нажав кнопку **Закрыть.** На ленте появляется и автоматически активизируется новая вкладка **Работа с запросами / Конструктор**, на которой цветом выделен тип создаваемого запроса – **Выборка.**

3. В окне конструктора (рис. 2.1) последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» поля **Наименование, Марка и Цена** в столбцы бланка запроса в строку **Поле**. Для этого необходимо щелкнуть двойным щелчком на имени поля таблицы в схеме данных запроса.

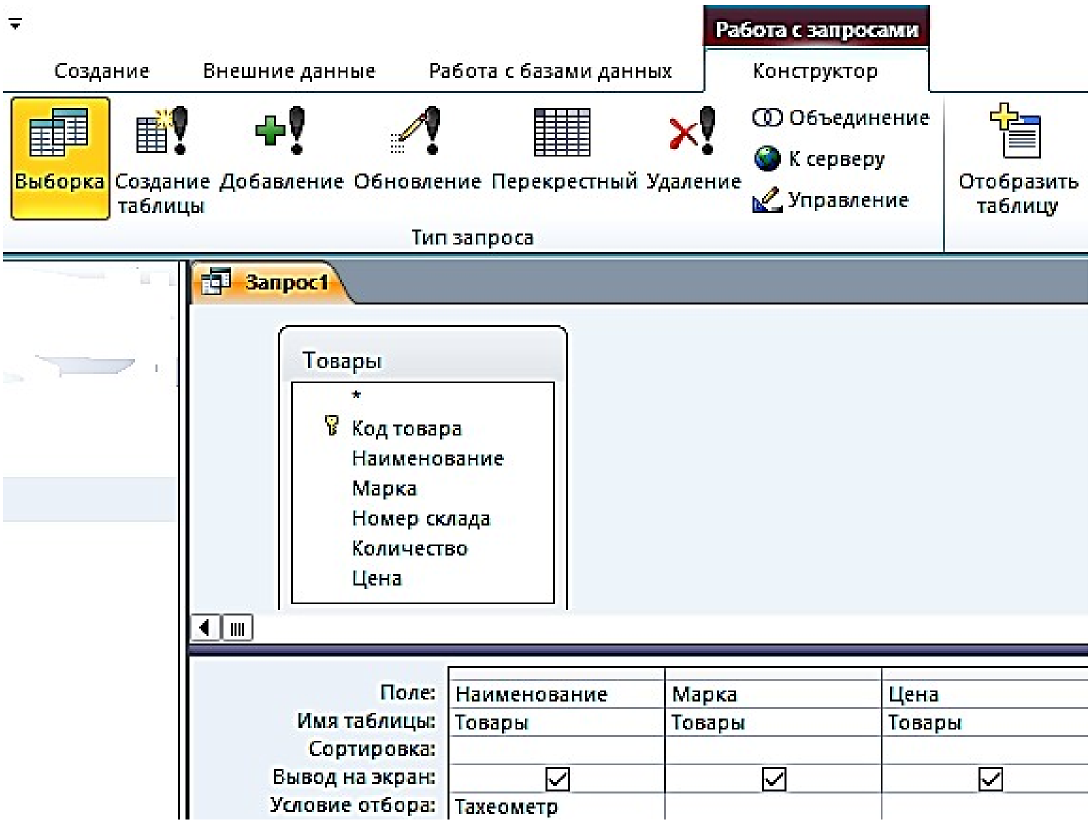


Рис. 2.1. Окно конструктора запроса на выборку

4. Запишите в строке **Условия отбора** наименование товара – Тахеометр. Используемое в выражении текстовое значение вводится в двойных кавычках, которые добавляются автоматически.

5. Выполните запрос, щелкнув по кнопке **Выполнить !** или на кнопке **Режим**  в группе **Результаты**. На экране откроется окно запроса в режиме таблицы с записью из таблицы «Товар», отвечающий заданным условиям (рис. 2.2). Дайте ему имя **2_По наименованию Тахеометр**.


1_По наименованию Тахеометр

Наименование	Марка	Цена
Тахеометр	SP FOKUS 6	319 463,00 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	357 487,00 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	225 000,00 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	240 000,00 ₽

Рис. 2.2. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы»**

Задание 2. Выбрать товары, цена которых менее 100 000 руб. и более 20 000 руб., и количество больше или равно 9

1. Создайте новый запрос в режиме конструктора, добавьте таблицу «Товар». В окне конструктора последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» в бланк запроса поля (рис. 2.3).

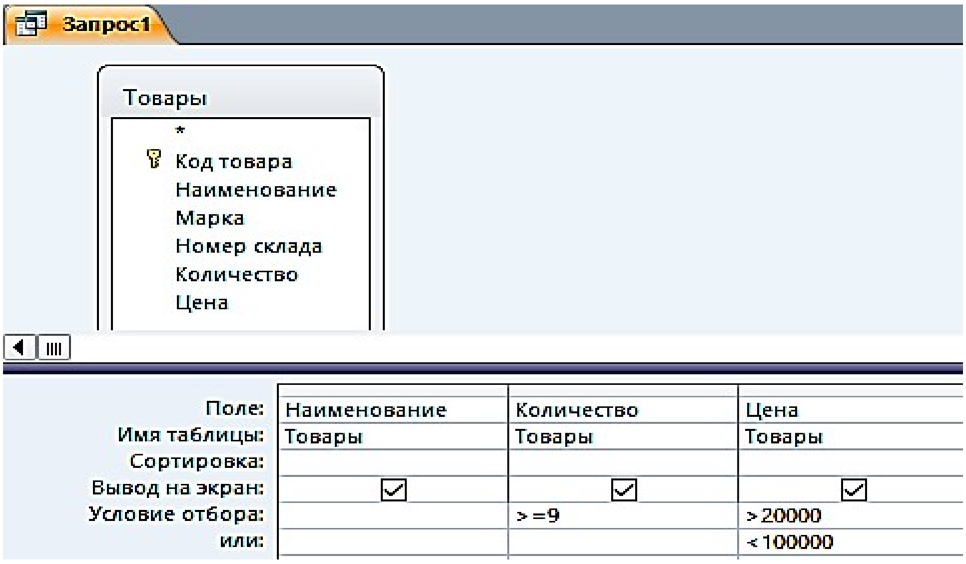


Рис. 2.3. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора

2. Запишите **Условия отбора**, как показано в бланке запроса. Между условиями, записанными в одной строке, выполняется логическая операция

AND. Между условиями, записанными в разных строках, выполняется логическая операция OR.

3. Выполните запрос. Дайте ему имя **2_Цена_количество** (рис. 2.4).

2_Цена_количество

Наименование	Количество	Цена
Теодолит	9	84 193,00 ₽
Теодолит	5	58 764,00 ₽
Теодолит	8	50 625,00 ₽
Теодолит	10	30 000,00 ₽
Нивелир	15	16 680,00 ₽
Нивелир	18	12 500,00 ₽

Рис. 2.4. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы**»

Задание 3. Выбрать скидки, равные 10, за заданный период (после 25 января 2018 г.) (рис. 2.5, 2.6)

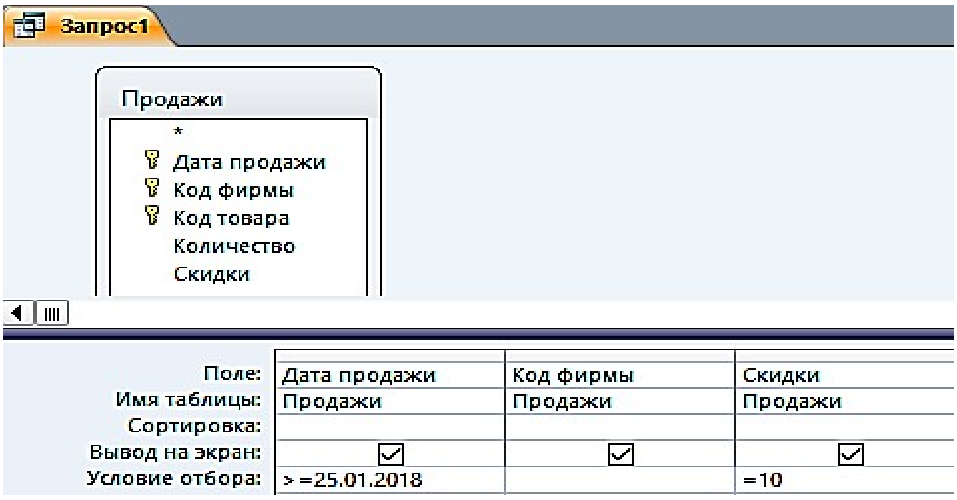


Рис. 2.5. Окно конструктора запроса на выборку
с логическими операциями в условии отбора

3_Дата_скидка

Дата прода	Код фирмы	Скидки
25.01.2018	2	10
30.01.2018	3	10
05.02.2018	4	10
10.02.2018	3	10
15.02.2018	3	10

Рис. 2.6. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы**»

Вычисляемые поля в запросах

В запросе, как и в таблице, для каждой записи могут производиться вычисления с числовыми, строковыми значениями или со значениями дат с использованием данных из одного или нескольких полей. Результат вычисления образует в таблице запроса новое вычисляемое поле (рис. 2.7).

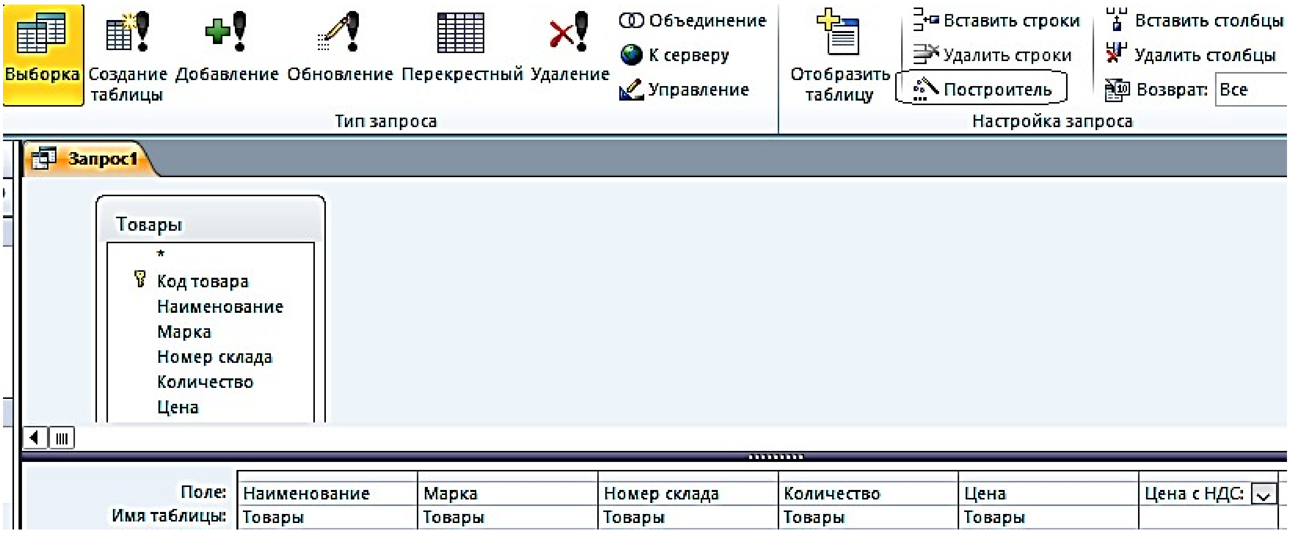


Рис. 2.7. Запрос с вычисляемым полем

Задание 4. В таблице «Товар» вычислить Цену с НДС, при ставке НДС 35 %

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товары». Перетащите в бланк запроса поля **Наименование, Марка, Номер склада, Количество, Цена** (рис. 2.8).

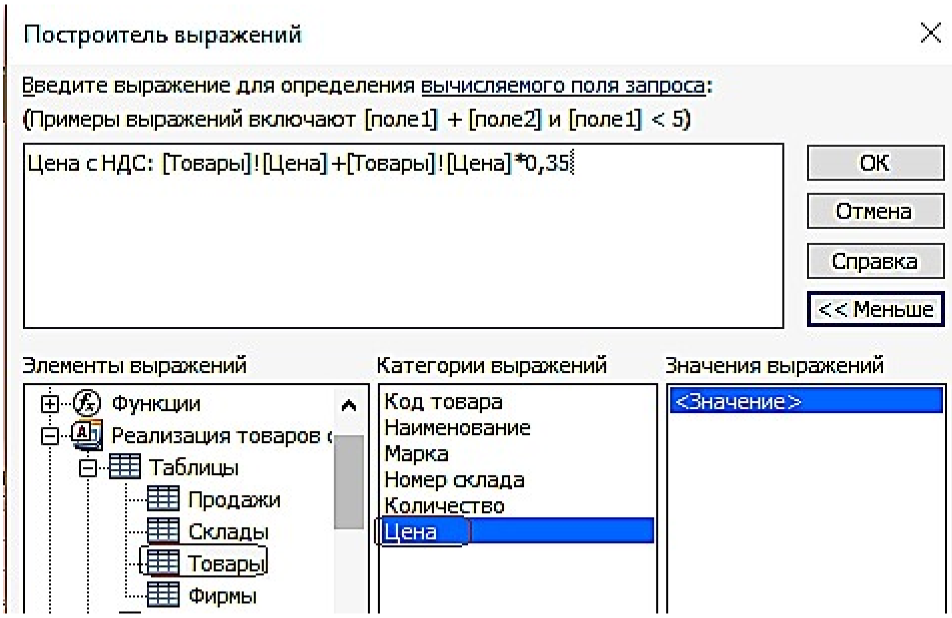


Рис. 2.8. Построитель выражений

Для подсчета цены с учетом НДС создайте после поля Цена вычисляемое поле **Цена с НДС** (с правой стороны) при помощи построителя.

2. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель** в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения.

3. В левой верхней части окна **Построитель выражений** (см. рис. 2.8) выберите свою базу данных «Реализация товаров со складов», далее выберите таблицу «**Товары**», на которой построен запрос. Справа отобразится список её полей. Последовательно выбирайте нужные поля и операторы, двойным щелчком вставляя в выражение. Выражение сформируется в верхней части окна. Обратите внимание – построитель перед именем поля указал имя таблицы, которой оно принадлежит, и отделил его от имени поля восклицательным знаком.

4. Слово «Выражение» удаляйте, иначе оно выдает, синтаксическую ошибку.

Полученный запрос «**4_Цена с НДС**» в режиме «**Таблицы»** изображен на рис. 2.9.

4_Цена с НДС

Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Цена с НДС
Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽
Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽
Теодолит	4Т15П	3	5	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽
Теодолит	4Т30П	3	8	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽
Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽
Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽
Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽

Рис. 2.9. Просмотр запроса «**4_Цена с НДС**» в режиме «**Таблицы»**

Задание 5. В вычисляемых полях и условиях отбора можно использовать встроенные функции. Необходимо выбрать количество продаж, в заданном месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку по таблице «Продажи».

2. Создайте вычисляемое поле **Заданный месяц** (в правой) пустой ячейке строки, записав туда одно из выражений: a Format([Продажи]![Дата продажи];"mmmm") – эта функция возвратит полное название месяца;

b или Format([Продажи]![Дата продажи];"mm") – эта функция возвратит номер месяца;

3. Для отбора продаж в заданном месяце, в вычисляемом поле в строку **Условие отбора** введите название месяца, например, – Январь, или номер месяца, например, 1, в соответствии с параметром в функции Format (рис. 2.10, 2.11).

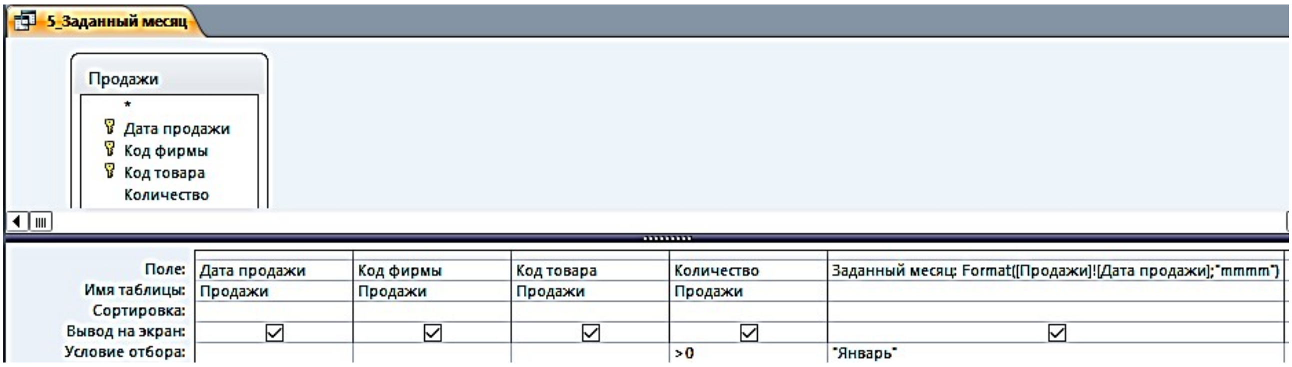


Рис. 2.10. Запрос с функцией выделения из даты полного названия месяца в вычисляемом поле

5_Заданный месяц

Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Количество	Заданный месяц
15.01.2018	4	10	10	Январь
19.01.2018	1	2	6	Январь
20.01.2018	3	5	8	Январь
25.01.2018	2	4	4	Январь
27.01.2018	1	1	4	Январь
30.01.2018	3	7	4	Январь

Рис. 2.11. Просмотр запроса «**5_Заданный месяц**» в режиме «**Таблицы**»

Параметры в запросах

При решении практических задач удобнее вводить выражение в условие отбора в процессе выполнения запроса в диалоге с пользователем, не переходя в режим конструктора. Обеспечить такой диалог можно с помощью *параметра запроса.* Имя параметра запроса задается в строке **Условие отбора** в квадратных скобках. При выполнении запроса это имя появиться в диалоговом окне **Введите значение параметра.**

Задание 6. Скопируйте запрос «5_Заданный месяц» и переименуйте его в «6_Параметрический запрос»

1. Замените в условии отбора рассмотренного запроса название месяца Январь на имя параметра – [Название месяца].

2. Выполните запрос. Открывшееся диалоговое окно (рис. 2.12) позволит ввести значение параметра запроса – **Название месяца**.

3. Введите Январь и получите результат.

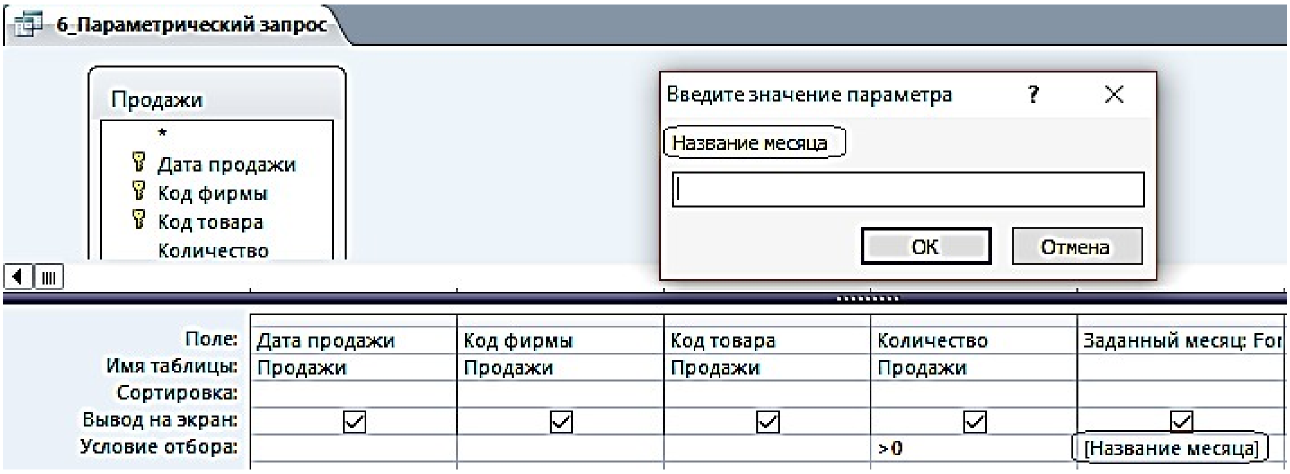


Рис. 2.12. Диалоговое окно ввода значения параметра

Параметры запроса могут быть использованы не только в выражениях условий отбора, но и для ввода значений операндов в вычисляемых полях.

Задание 7. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товар»

Перетащите в бланк запроса поля Наименование и Цена. Для увеличения цены на заданный процент в вычисляемое поле запишите выражение с параметром запроса [На сколько процентов увеличить?]/100 (рис. 2.13).

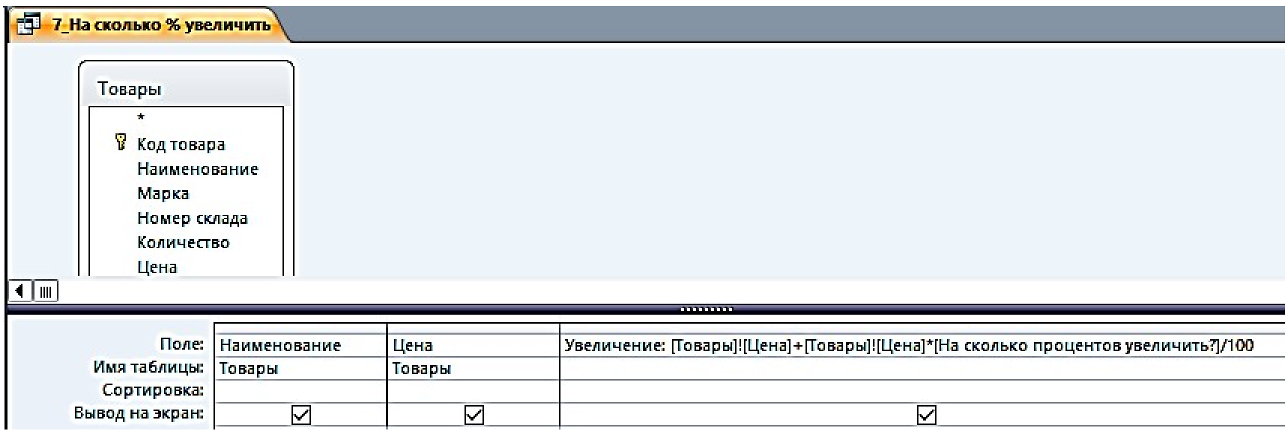


Рис. 2.13. Использование параметра в выражении вычисляемого поля

Задание 8. Скопируйте запрос «**7_На сколько % увеличить**» и переименуйте его в «**8_Проценты**» (рис. 2.14)

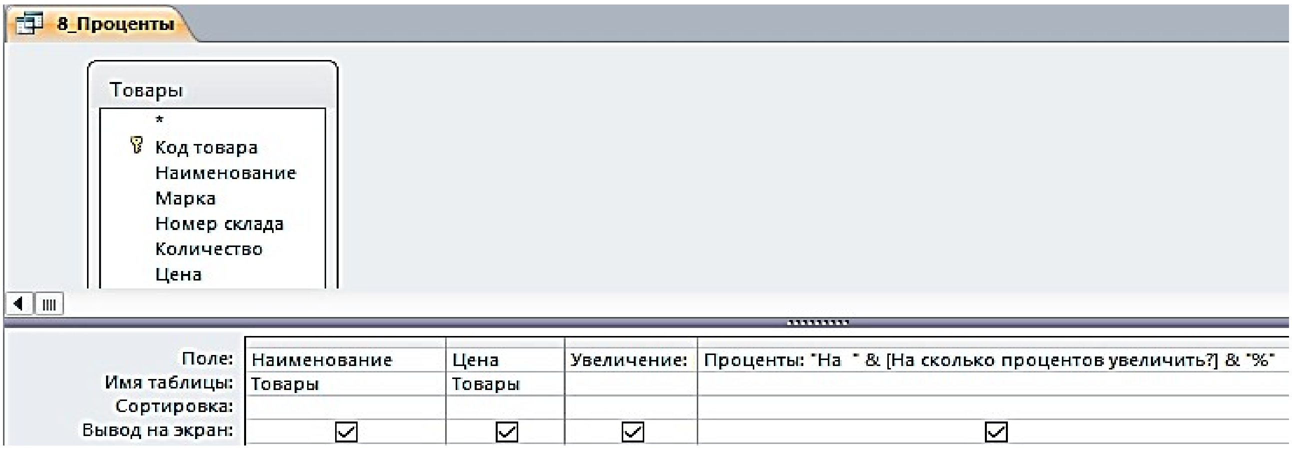
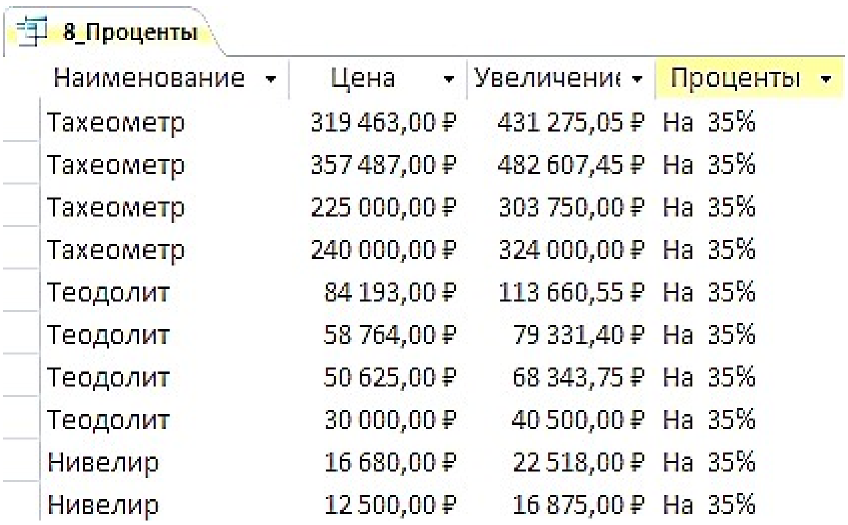


Рис. 2.14. Использование параметра в выражении вычисляемого поля «**Проценты**»

После выполнения предыдущего запроса в таблице отображается результат вычисления с использованием введенного значения параметра. Однако значение параметра при этом не выводится. Для отображения в таблице запроса введенного значения параметра дополните запрос ещё одним вычисляемым полем, в котором запишите выражение:

Проценты: "На " & [На сколько процентов увеличить?] & "%".

Теперь в таблице запроса появится поле «**Проценты»**, в котором будет записано, например, при вводе 35 – **На 35 %** (рис. 2.15).



8_Проценты

Наименование	Цена	Увеличение	Проценты
Тахеометр	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽	На 35%
Тахеометр	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽	На 35%
Тахеометр	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽	На 35%
Тахеометр	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽	На 35%
Теодолит	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽	На 35%
Теодолит	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽	На 35%
Теодолит	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽	На 35%
Теодолит	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽	На 35%
Нивелир	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽	На 35%
Нивелир	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽	На 35%

Рис. 2.15. Просмотр запроса «**8_Проценты**» в режиме «**Таблицы**»

Групповые операции в запросах

Групповые операции позволяют выделить группы записей с одинаковыми значениями в указанных полях и вычислить итоговые данные для каждой из групп по др. полям, используя одну из статистических функций. Статистические функции применимы к полям с типом данных **Числовой, Денежный, Дата и время**.

Задание 9. Запрос с функцией **Sum**

Определите суммарное количество и цену каждого из товаров.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «**Товары**».

2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Наименование»**. По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.

3. Перетащите в бланк запроса поля «**Количество**» и «**Цена**», по которым будет подсчитываться суммарное количество каждого из товаров.

4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.

5. В столбцах «**Количество**» и «**Цена**» замените слово **Группировка** на функцию **Sum**. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.16).

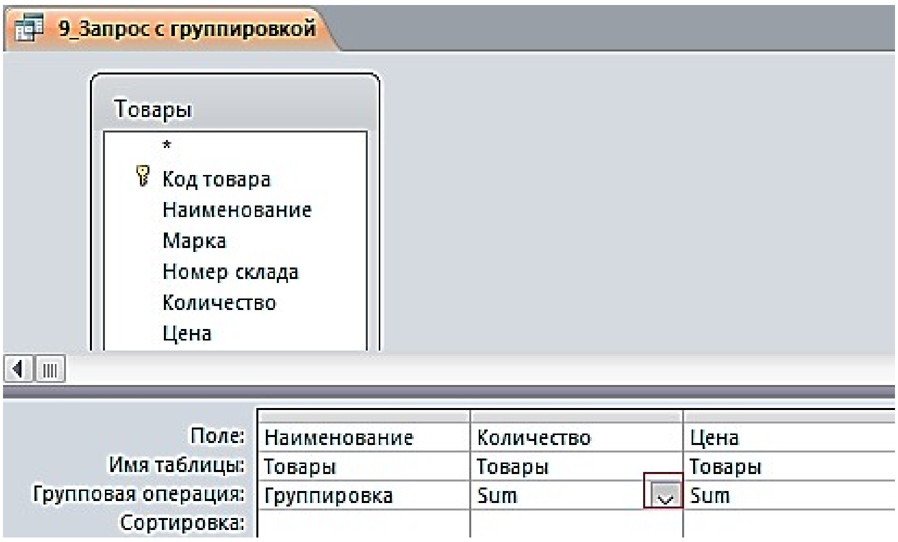
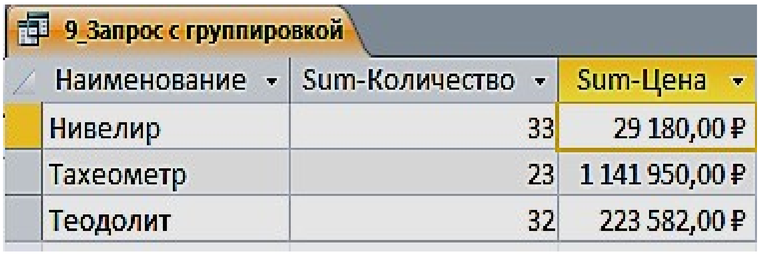


Рис. 2.16. Запрос с группировкой по коду товара и суммированием количества и цены в группе

Для отображения результата запроса (рис. 2.17) щелкните по кнопке **Выполнить** в группе **Результаты**.



9_Запрос с группировкой

Наименование	Sum-Количество	Sum-Цена
Нивелир	33	29 180,00 ₽
Тахеометр	23	1 141 950,00 ₽
Теодолит	32	223 582,00 ₽

Рис. 2.17. Результат подсчета суммарного количества и цены

Задание 10. Запрос с функцией **Count**

Определите, сколько раз продавался товар по коду фирмы.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «Продажи».

2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Код фирмы**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.

3. Перетащите в бланк запроса поле «**Количество**», по которому будет происходить подсчет числа товаров с одинаковыми номерами фирм.

4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.

5. В столбце «**Количество**» замените слово **Группировка** на функцию Count. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию
(рис. 2.18).

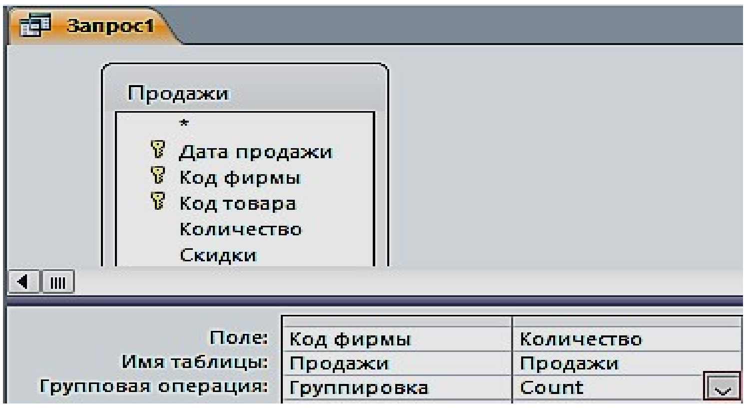


Рис. 2.18. Запрос для подсчета количества товара по коду фирмы

6. Сохраните запрос под именем «**10_Число продаж по коду фирмы**». Результат запроса показан на рис. 2.19.

10_Число продаж по коду фирмы

Код фирмы	Count-Количество
1	2
2	2
3	4
4	2

Рис. 2.19. Результат подсчета количества товара по коду фирмы

Задание 11. Запрос с отображением строки итогов по столбцу

Строка итогов используется для быстрого расчета и отображения в столбце таблицы или запроса в режиме таблицы таких значений, как итоговая сумма, среднее, минимальное и максимальное, количество значений.

1. Для добавления строки итогов в таблицу запроса откройте запрос «**1_По наименованию тахеометр»** в режиме таблицы. На вкладке ленты **Главная** в группе **Записи** выполните команду **Итоги**. В таблице отобразится строка **Итог**.

2. В строке **Итог** нажмите кнопку раскрывающегося списка в столбце «**Цена**», для которого требуется выполнить расчет, и выберите в списке **Сумма** (рис. 2.20).

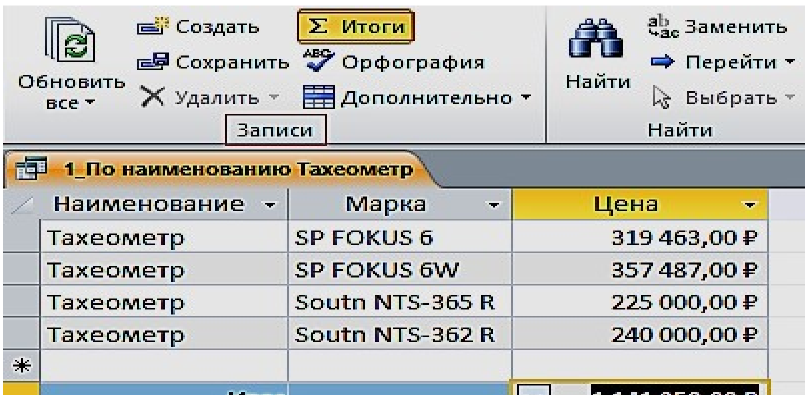


Рис. 2.20. Результат отображения строки итогов с расчетом суммы по столбцу

3. Для того, чтобы скрыть строку итогов, повторно выполните команду **Итоги**.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3
Работа с многотабличными запросами

Многотабличный запрос позволяет сформировать записи результата путем объединения взаимосвязанных записей из таблиц базы данных и выбора из них нужных полей и записей. Многотабличный запрос часто осуществляет объединение данных, которые на этапе проектирования были разделены на множество таблиц, отвечающих требованиям нормализации.

При конструировании многотабличного запроса важнейшим условием является правильное представление о том, как идет объединение записей таблиц при формировании результата.

Рассмотрим технологию конструирования многотабличного запроса на выборку для расчета разности количества товаров и количества проданных товаров.

Задание 1. Запрос с вычисляемым полем «**Остаток**»

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «**Товары**» и «**Продажи**». Перетащите в бланк запроса из таблицы «**Товары**» поля «**Наименование**», «**Марка**», «**Количество»**, и из таблицы «**Продажи**» поле «**Количество**».
2. Для подсчета разности количества товаров создайте после поля «**Количество**», вычисляемое поле «**Остаток**» (с правой стороны), при помощи построителя (рис. 3.1).

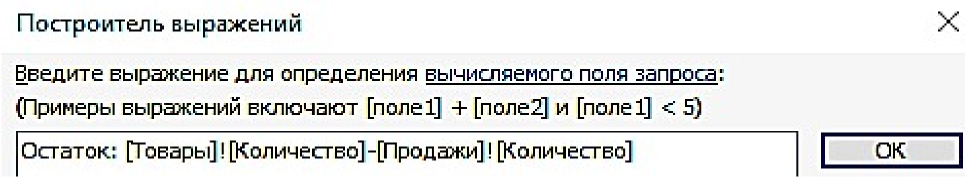


Рис. 3.1. Построитель выражений

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель** в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения (рис. 3.2).

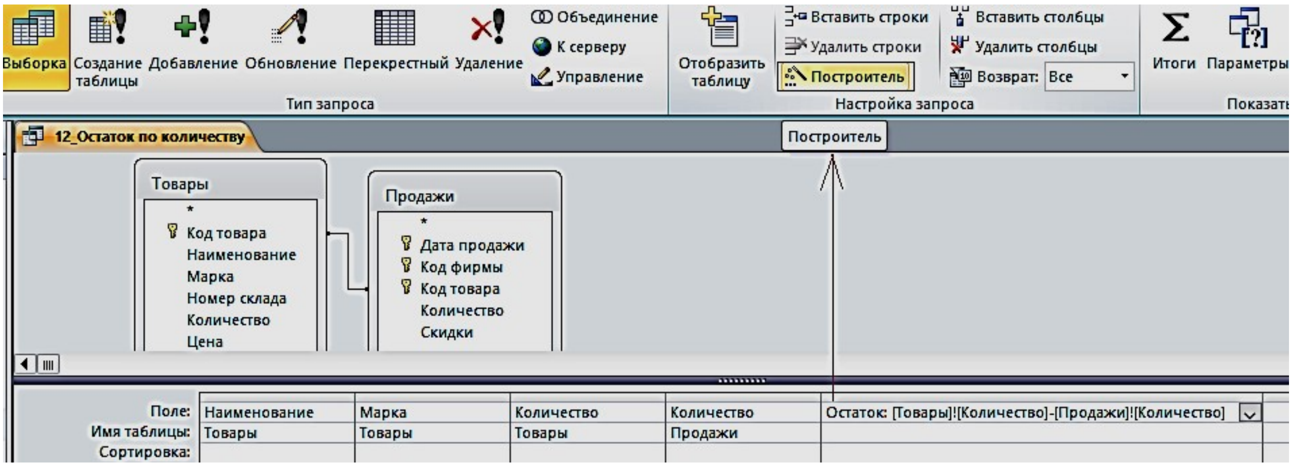


Рис. 3.2. Запрос с вычисляемым полем

4. В левой части окна **Построитель выражений** выберите свою базу данных «**Реализация товаров со складов**», далее выберите таблицу «**Товары**». Справа отобразится список её полей. Выберите поле «**Количество**» и знак минус, двойным щелчком вставляя в выражение. Снова выберите таблицу «**Продажи**» и поле «**Количество**» (рис. 3.3).

12_Остаток по количеству

Наименование	Марка	Товары.Количество	Продажи.Количество	Остаток
Тахеометр	SP FOKUS 6	5	4	1
Тахеометр	SP FOKUS 6W	7	6	1
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	6	5	1
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	5	4	1
Теодолит	3Т2КП	9	8	1
Теодолит	3Т2КП	9	8	1
Теодолит	4Т30П	8	4	4
Теодолит	VEGA TEO 5	10	9	1
Нивелир	4Н -2КЛ	15	10	5
Нивелир	4Н-3КЛ	18	10	8

Рис. 3.3 Результат запроса «**Остаток по количеству**»

5. Слово «Выражение» удаляйте, оно выдает, синтаксическую ошибку.

Задание 2. Формирование запроса об увеличении цены на 15 % в феврале месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «**Товары**» и «**Продажи**». Перетащите в бланк запроса из таблицы «**Продажи**» поле «**Дата продажи**», а из таблицы «**Товары**» поля «**Наименование**», «**Марка**», «**Номер склада**», «**Количество**», «**Цена**».

2. Создайте новое поле «**Новая цена**». Для этого создайте после поля Цена, вычисляемое поле «**Новая Цена**» (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель** в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения. В окне «**Построитель выражений**» выбрать «**Элементы выражений**», в нем найти название своей базы данных, затем Таблицы «**Товары**» и в поле «**Категории выражений**» выбрать «**Цена**», а с клавиатуры набрать «*1,05».

4. В поле «**Дата продажи**» введите условие отбора >=01.02.2018 (рис. 3.4).

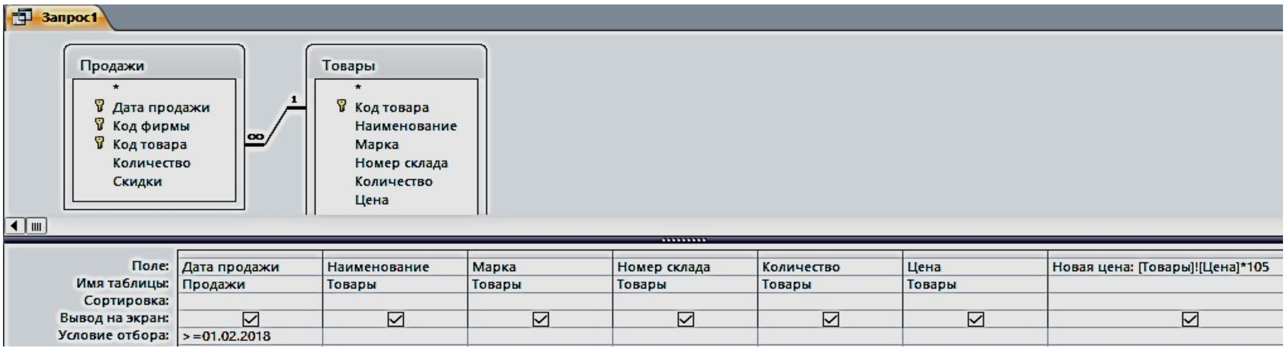


Рис. 3.4. Запрос «**Новая цена**» в режиме конструктора

5. Сохранить запрос с именем «**Новая цена**» (рис. 3.5).

13_Цена в феврале

Дата прода	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Новая цена
02.02.2018	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽	23 625 000,00 ₽
15.02.2018	Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 ₽	8 840 265,00 ₽
10.02.2018	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽	3 150 000,00 ₽
05.02.2018	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽	1 751 400,00 ₽

Рис. 3.5. Результат запроса «**Новая цена**»

Задание 3. Создание запроса о товарах на складе в г. Екатеринбурге (рис. 3.6, 3.7)

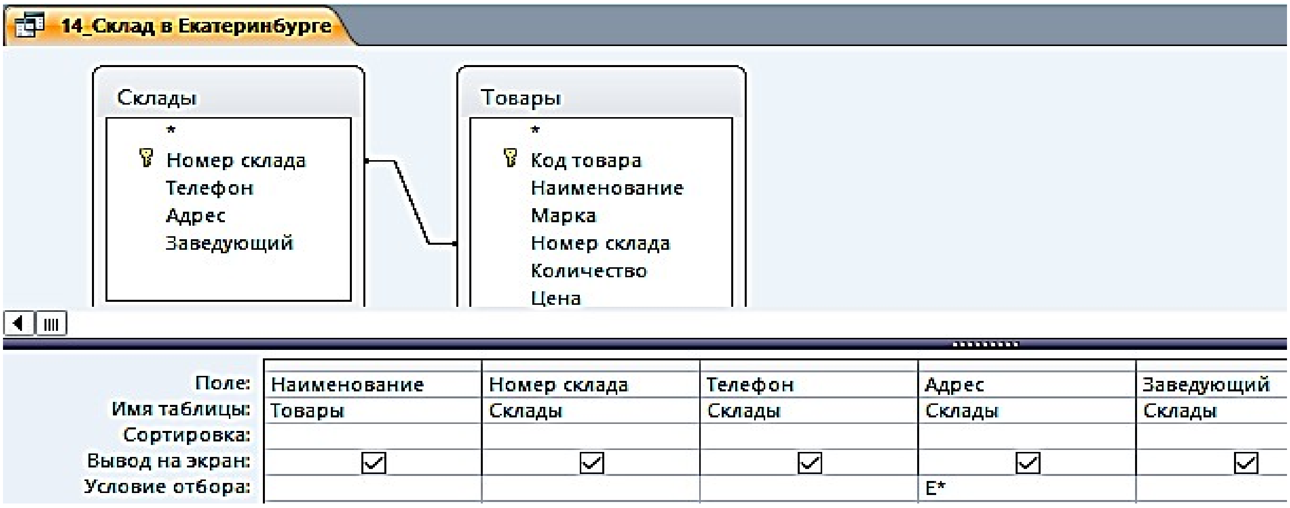


Рис. 3.6. Запрос «**Склад в Екатеринбурге**» в режиме Конструктора

14_Склад в Екатеринбурге

Наименование	Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.

Рис. 3.7. Результат запроса «**Склад в Екатеринбурге**»

Задание 4. Создание запроса о товарах в феврале, с вычисляемым полем «**Сумма**» и отображения строки итогов с расчетом суммы по этому столбцу (рис. 3.8, 3.9)

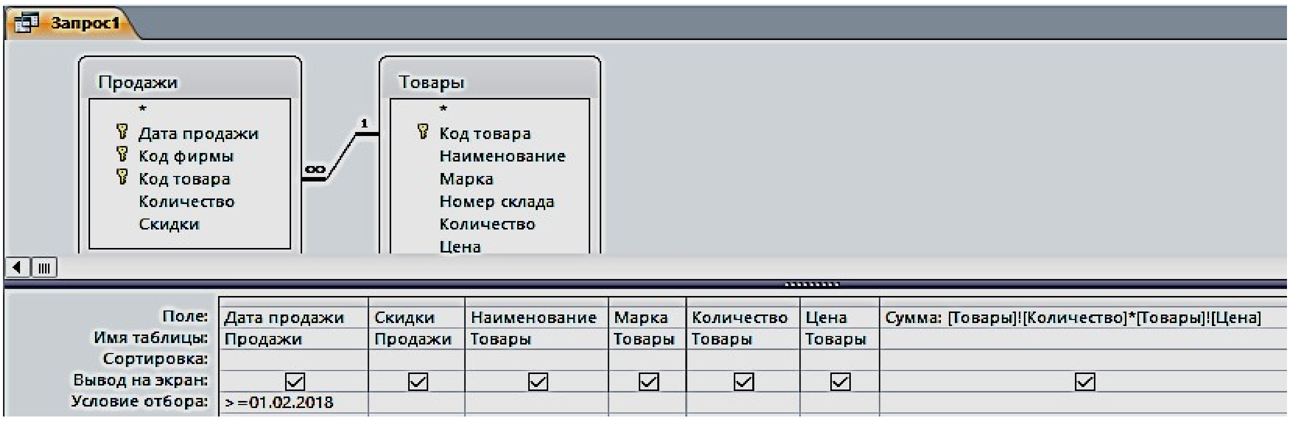


Рис. 3.8. Запрос «**Стоимость**» в режиме Конструктора

15_Стоимость

Дата прода	Скидки	Наименование	Марка	Количество	Цена	Сумма
02.02.2018	5	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	6	225 000,00 ₽	1 350 000,00 ₽
15.02.2018	10	Теодолит	3Т2КП	9	84 193,00 ₽	757 737,00 ₽
10.02.2018	10	Теодолит	VEGA TEO 5	10	30 000,00 ₽	300 000,00 ₽
05.02.2018	10	Нивелир	4Н -2КЛ	15	16 680,00 ₽	250 200,00 ₽
Итог						2 657 937,00 ₽

Нет
Сумма

Рис. 3.9. Результат запроса «**Стоимость**» и итог с расчетом суммы по столбцу

Задание 5. Создание запроса из четырех таблиц (рис. 3.10, рис. 3.11)

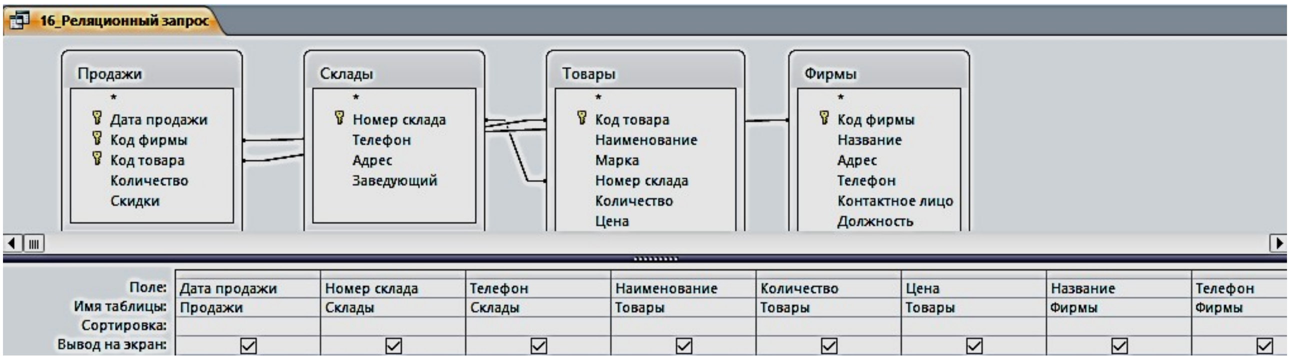


Рис. 3.10. Реляционный запрос в режиме Конструктора

16_Реляционный запрос

Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	18	12 500,00 ₽	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
19.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	7	357 487,00 ₽	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
20.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
25.01.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	5	240 000,00 ₽	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
27.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	5	319 463,00 ₽	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
30.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	8	50 625,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
02.02.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	6	225 000,00 ₽	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
05.02.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	15	16 680,00 ₽	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
10.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	10	30 000,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
15.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45

Рис. 3.11. Результат сложного запроса

Запросы на изменение

К запросам на изменение относятся запросы на обновление данных в записях таблицы базы, на добавление и удаление записей из таблицы, а также запросы на создание таблицы из записей, сформированных в нем.

Задание 6. Создать запрос на обновление таблицы «Товары». Увеличьте цену товара на 20 %:

1. Создайте запрос на выборку, путем отбора соответствующих полей. Присвойте ему имя «**17_Обновление**».

2. Откройте этот запрос в режиме Конструктора. Выполните команду **Запрос – Обновление** – Введите в строке «**Обновление**» выражение для новых значений [Цена]*1,2 (рис. 3.12). Закройте запрос. У запроса изменится вид значка. Проверьте правильность его выполнения (рис. 3.13).

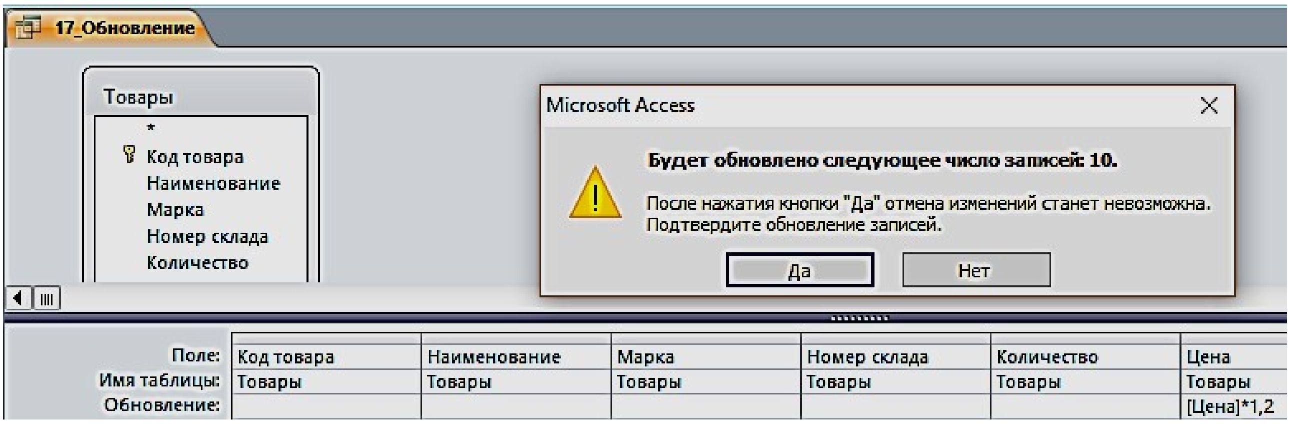


Рис. 3.12. Запрос на обновление в режиме Конструктора

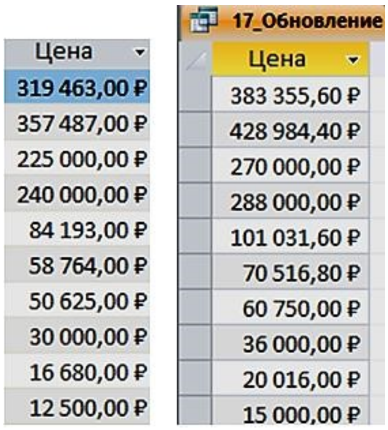


Рис. 3.13. С правой стороны результат обновления таблицы

Задание 6. Создать запрос на создание новой таблицы «18_Создание таблицы»:

1. Создайте запрос на выборку по всем таблицам путем отбора нужных полей. Присвойте ему имя и проверьте правильность его выполнения.

2. В области навигации выделите названный запрос и с помощью команды контекстного меню откройте его в режиме Конструктора.

3. Преобразуйте этот запрос на выборку в запрос на создание таблицы, выполнив команду **Создание таблицы** в группе **Тип запроса** на вкладке Конструктора, или выбрав команду контекстного меню запроса **Тип запроса – Создание таблицы.**

4. В окне **Создание таблицы** введите имя создаваемой таблицы «Объединенная» (рис. 3.14).

5. Для того чтобы просмотреть, какие записи будут помещены в новую таблицу, щелкните по кнопке **Режим** на ленте Конструктора запросов в группе **Результаты**.

6. Выполните запрос. Откроется окно сообщений с запрашиваемым разрешением (рис. 3.15). Подтвердите согласие на создание новой таблицы. После этого таблицу можно увидеть в списке таблиц области навигации (рис. 3.16).

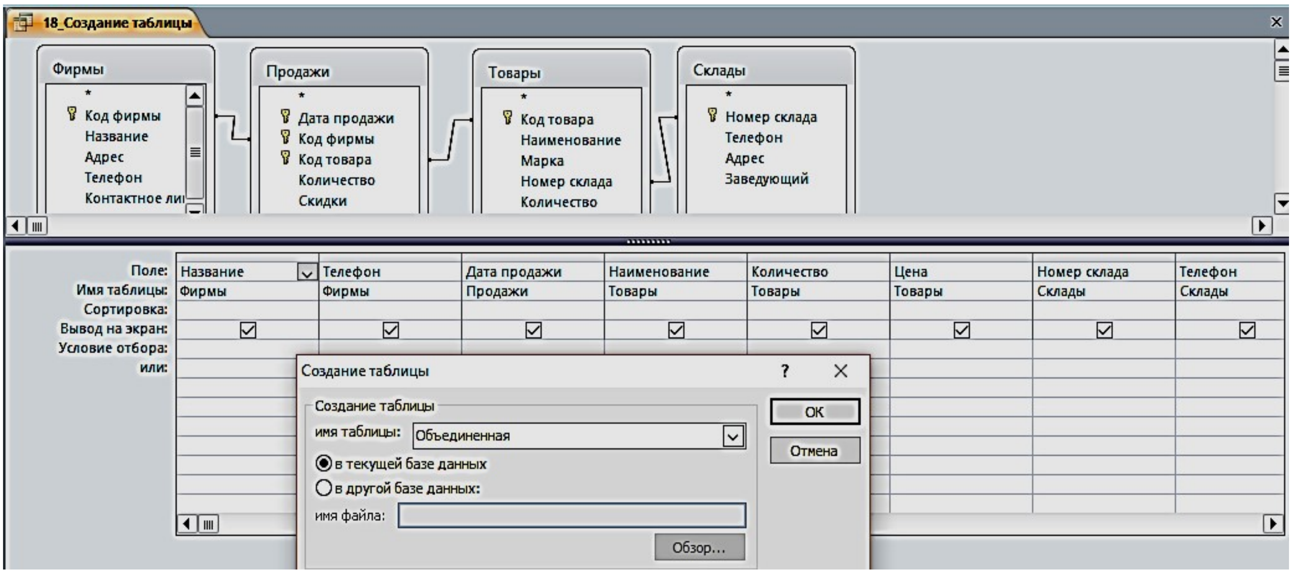


Рис. 3.14. Определение имени таблицы, создаваемой в запросе

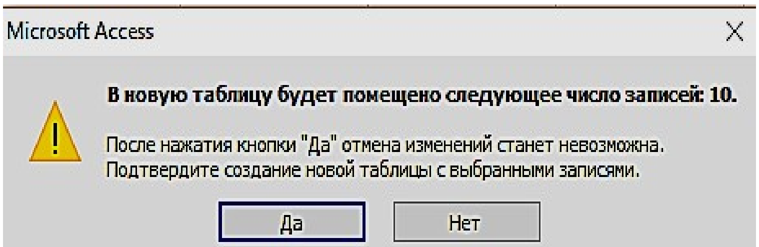
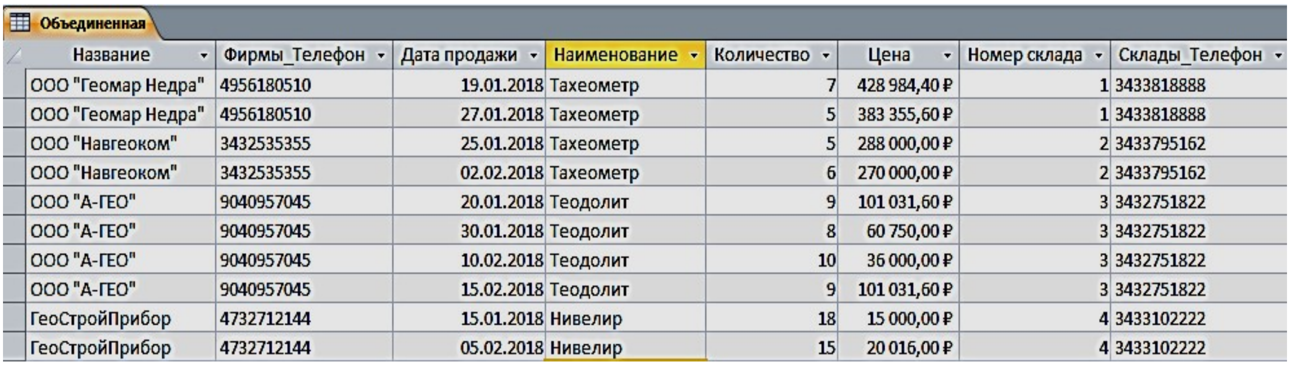


Рис. 3.15. Окно сообщений



Объединенная

Название	Фирмы_Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады_Телефон
ООО "Геомар Недра"	4956180510	19.01.2018	Тахеометр	7	428 984,40 ₽	1	3433818888
ООО "Геомар Недра"	4956180510	27.01.2018	Тахеометр	5	383 355,60 ₽	1	3433818888
ООО "Навгеоком"	3432535355	25.01.2018	Тахеометр	5	288 000,00 ₽	2	3433795162
ООО "Навгеоком"	3432535355	02.02.2018	Тахеометр	6	270 000,00 ₽	2	3433795162
ООО "А-ГЕО"	9040957045	20.01.2018	Теодолит	9	101 031,60 ₽	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	30.01.2018	Теодолит	8	60 750,00 ₽	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	10.02.2018	Теодолит	10	36 000,00 ₽	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	15.02.2018	Теодолит	9	101 031,60 ₽	3	3432751822
ГеоСтройПрибор	4732712144	15.01.2018	Нивелир	18	15 000,00 ₽	4	3433102222
ГеоСтройПрибор	4732712144	05.02.2018	Нивелир	15	20 016,00 ₽	4	3433102222

Рис. 3.16. Результат запроса на создание новой таблицы

Задание для самостоятельной работы

1. По таблице «Товары» сформировать запрос по наименованию товаров на букву Т.
2. По таблице «Товары» сформировать запрос на выборку товаров, цена которых более 100 000 рублей и количество больше или равно 5.
3. По таблице «Продажи» сформировать запрос на выборку товаров, скидки которых равны 5, за период меньше или равный 02 февраля 2018 г.
4. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить цену с НДС, при ставке 18 %.
5. Создать параметрический запрос, в котором выдавалось бы сообщение «**Введите наименование товара**».
6. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, об увеличении цены на 10 % в январе месяце.
7. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить сумму за январь.
8. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, найти увеличение количества нивелиров в 2 раза.
9. Создать новую таблицу, состоящую из таблиц «**Продажи**» и «**Фирмы**», с полями на ваш выбор (поле – количество обязательно).
10. По новой созданной таблице создать запрос на обновление количества товара в 3 раза.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4
Работа с формами

Формы являются основой разработки диалоговых приложений пользователя с базой данных. Работая с формой, пользователь может добавлять, удалять и изменять записи таблиц, получать расчетные данные. Форма состоит из элементов управления, которые отображают поля таблиц и графические элементы, не связанные с полями таблиц. Элементы управления предназначены для разработки макета формы: размещение полей таблиц и запросов, надписей, внедряемых объектов (рисунков, диаграмм), вычисляемых полей, кнопок, выполняющих печать и открывающих др. объекты или задачи.

Однотабличная форма предназначена для загрузки, просмотра и корректировки данных одной таблицы. Источником данных такой формы служит единственная таблица. Она может быть создана одним щелчком мыши с помощью команд автоматического создания формы: **Форма, Разделенная форма** или **Несколько элементов**, размещенных на вкладке **Создание** в группе **Формы** (рис. 4.1).

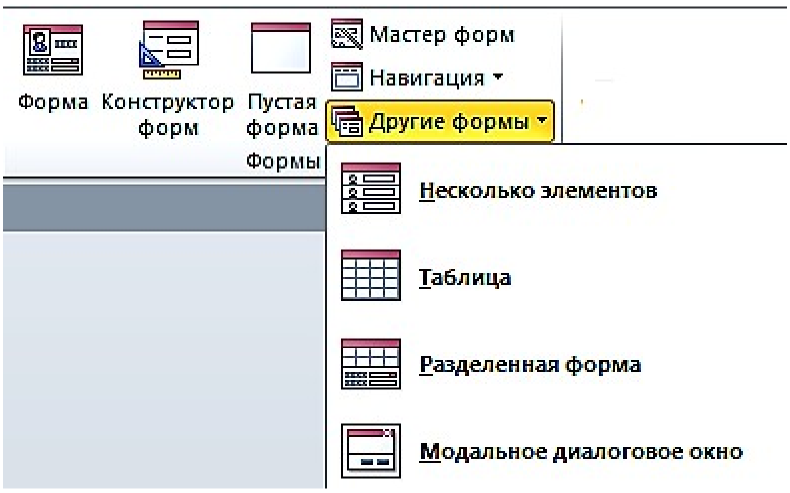


Рис. 4.1. Команды группы формы на вкладке ленты **Создание**

Задание 1. Создать однотабличную форму «**Товары для ввода, просмотра и корректировки данных»** таблицы «**Товары**». Чтобы источником записей формы стала таблица «**Товары»**, выберите её в области навигации и выполните команду форма на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только выбранной таблицы (рис. 4.2).

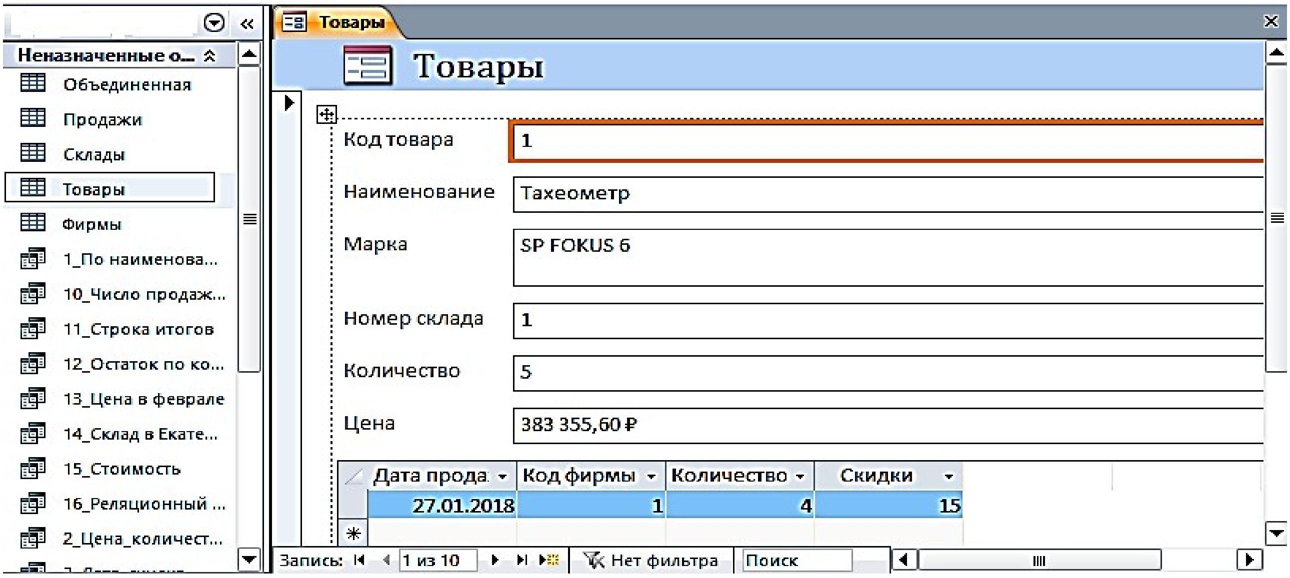


Рис. 4.2. Форма, полученная по команде **Форма**, для работы с таблицей «**Товары**»

Условное форматирование элементов управления

Для изменения внешнего вида элемента управления в форме**,** в зависимости от одного или нескольких условий используйте условное форматирование.

Задание 2. Изменить в форме «**Товары**» цвет денежных значений в поле «**Цена**» на красный, заливку на желтый, шрифт жирный, когда они оказываются выше заданной величины, например, 100 000 руб.

1. Выберите поле Цена, в котором нужно произвести изменения. На вкладке ленты **Формат** в группе **Форматирование элементов управления** выберите команду **Условное форматирование**. Откроется диалоговое окно **Диспетчер правил условного форматирования** (рис. 4.3).

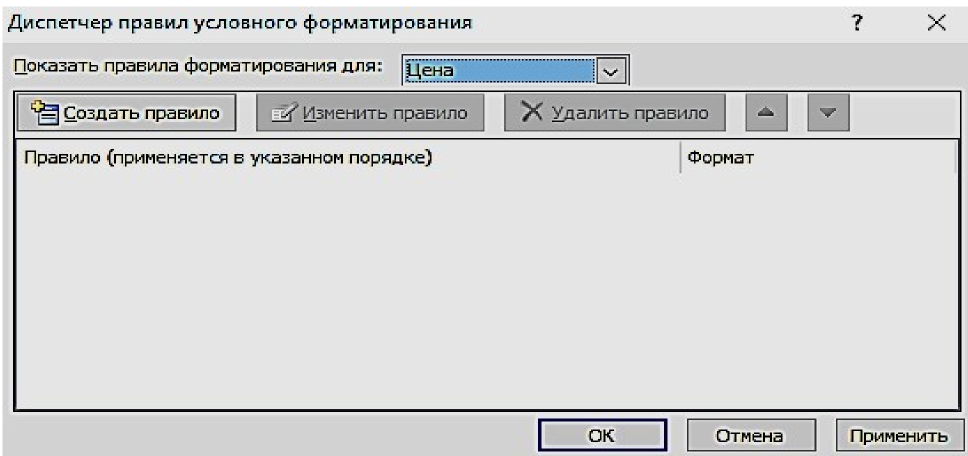


Рис. 4.3. Окно с пустым списком правил форматирования

2. Чтобы создать первое правило условного форматирования щелкните по кнопке **Создать правило**.

3. В окне **Новое правило форматирования** выберите тип правила и сформируйте описание правил, согласно которым будет производиться заданное форматирование поля.

4. В первом поле со списком выберите пункт **Значения поля**, во втором выберите тип сравнения – **больше** и введите постоянное значение в третье поле – 100000, не используя знака денежных единиц.

5. Выберите начертание шрифта, цвет и другие параметры форматирования. Нажмите кнопку ОК (рис. 4.4).

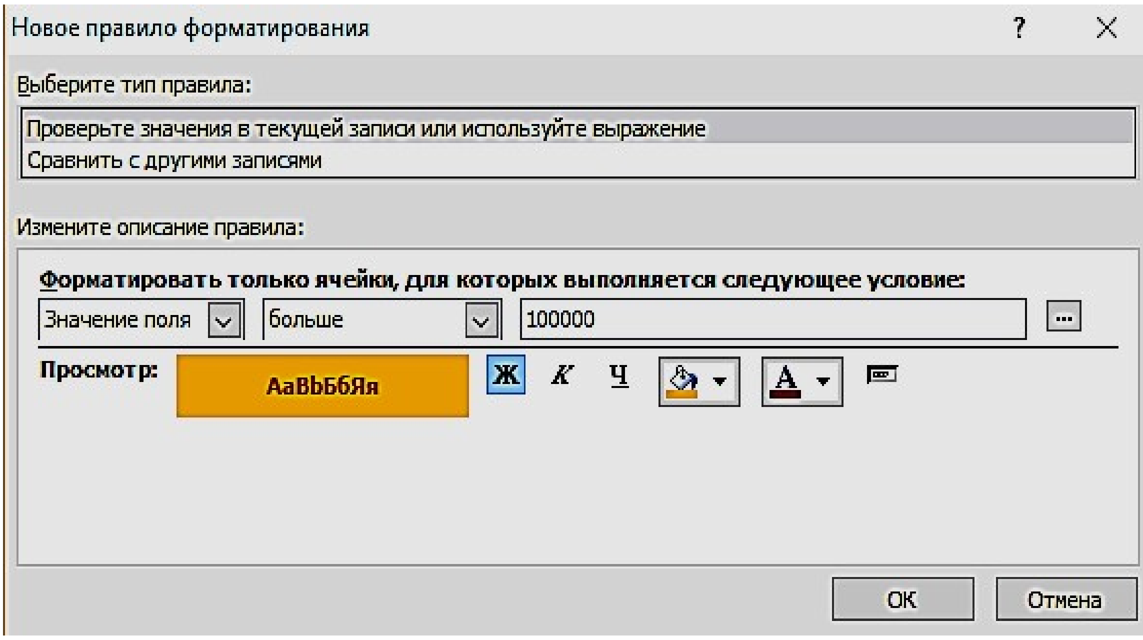


Рис. 4.4. Окно определения условий форматирования

Задание 3. Создать однотабличную форму «**Склады**». Для создания выбрать таблицу «**Склады**», использовать команду **Форма**, автоматически будет создана форма, содержащая встроенную подчиненную таблицу «**Товары**». Источником записей главной формы будет таблица «**Склады**». Такое поведение команды **Форма** вызвано тем, что таблица «**Склады**» имеет подчиненную таблицу «**Товары**», с которой она находиться в отношении 1:∞, и эта связь определена в схеме данных (рис. 4.5).

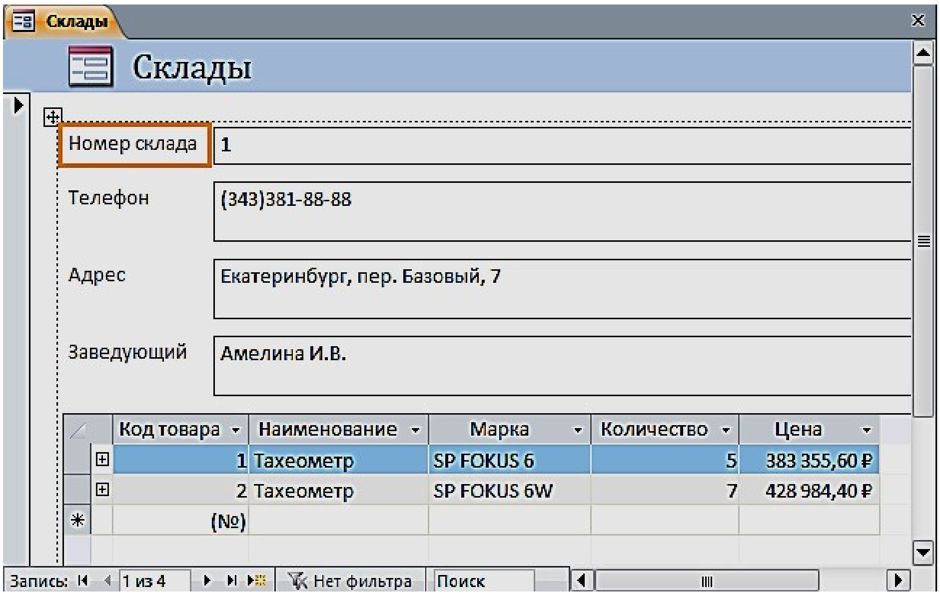


Рис. 4.5. Форма по таблице «**Склады**» с встроенной подчиненной «**Товары**»

Создание разделенной формы

Разделенная форма позволяет синхронно отображать данные одного источника в двух представлениях: в режиме формы и в режиме таблицы.

Задание 4. Создать однотабличную разделенную форму для работы с данными таблицы «**Продажи**». Выберите таблицу «**Продажи**» в области навигации и выполните команду **Разделенная форма** на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только одной выбранной таблицы. Созданная форма отобразится в режиме макета (рис. 4.6).

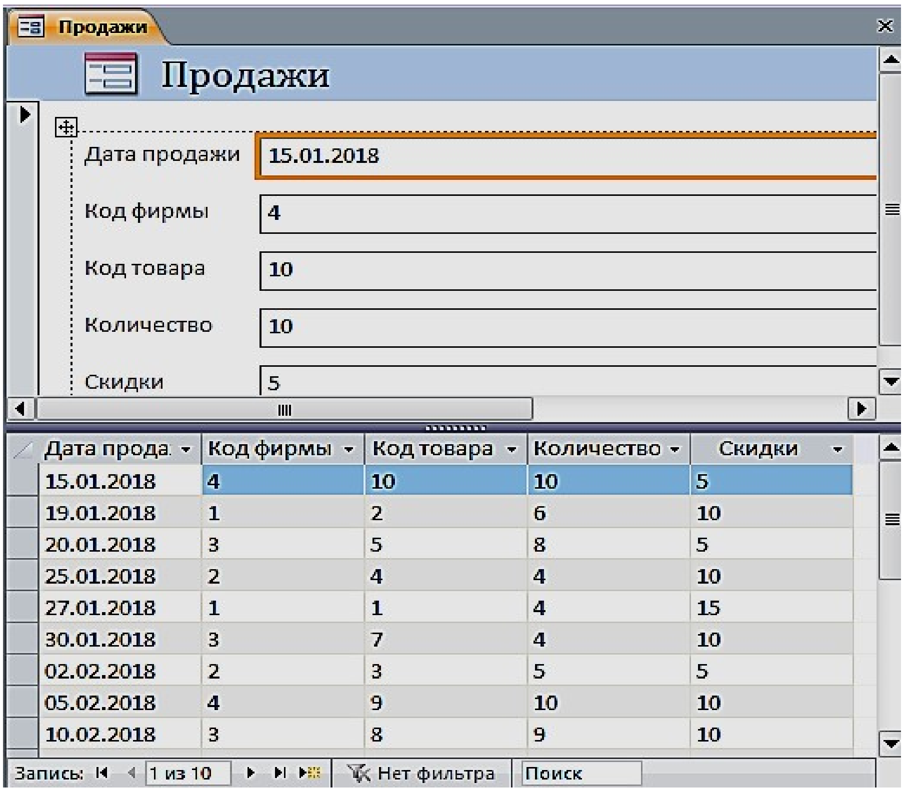


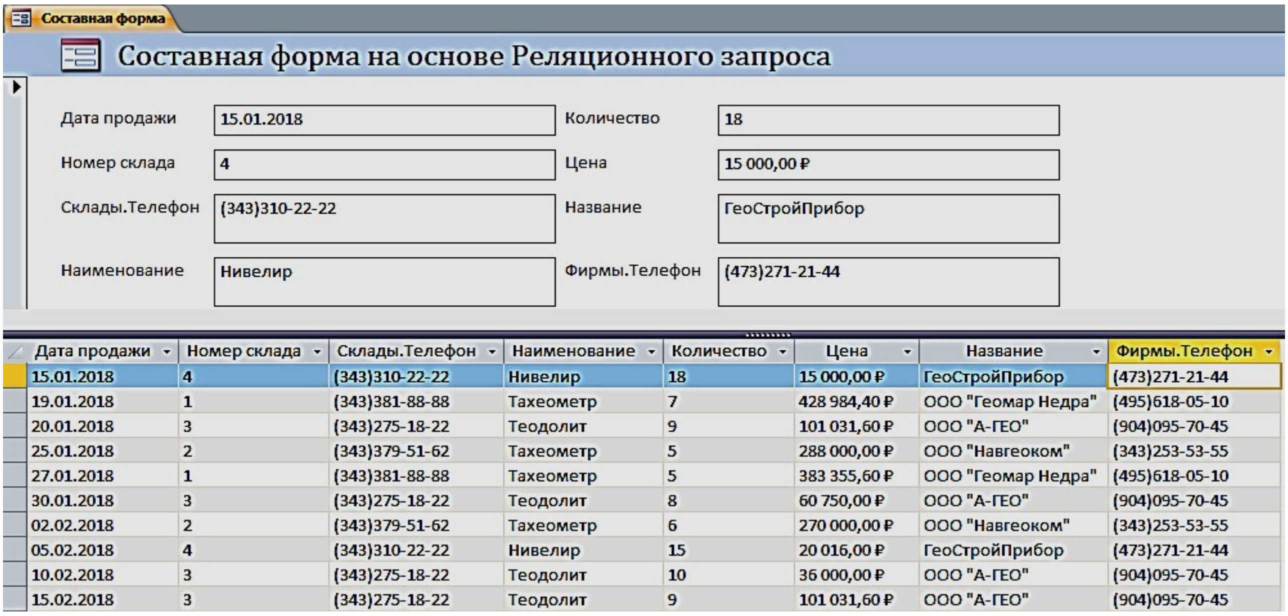
Рис. 4.6. Разделенная форма «**Продажи**»

Многотабличные формы

Многотабличная форма создается для работы с данными нескольких взаимосвязанных таблиц. Источником данных такой формы является многотабличный запрос. При этом форма может быть простой, отображающей одну запись в столбик, или ленточной, отображающей все записи в табличном виде с надписями в заголовке формы. Для такой формы могут быть использованы команды **Форма** или **Несколько элементов**.

Многотабличная форма может быть составной: состоять из главной формы и одной или нескольких подчиненных включаемых форм.

Задание 5. Создать составную форму воспользовавшись реляционным запросом. Выберите запрос «**16_реляционный запрос**» в области навигации и выполните команду **Форма** на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе выбранного запроса (рис. 4.7). В режиме Конструктора можно изменить заголовок.



Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	18	15 000,00 ₽	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
19.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	7	428 984,40 ₽	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
20.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
25.01.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	5	288 000,00 ₽	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
27.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	5	383 355,60 ₽	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
30.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	8	60 750,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
02.02.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	6	270 000,00 ₽	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
05.02.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	15	20 016,00 ₽	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
10.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	10	36 000,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
15.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45

Рис. 4.7. Составная форма

Создание многотабличной формы с помощью мастера

Основным средством создания многотабличной формы можно считать мастер форм, который, запросив у пользователя сведения о включаемых в форму полях из нескольких взаимосвязанных таблиц и запросов, создает составную или одиночную форму.

Задание 6. С помощью мастера создайте форму для работы с данными о продажах товаров

Для вызова мастера форм выполните на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы** команду **Мастер форм**. Отобразится окно мастера **Создания форм**, представленное на рис. 4.8.

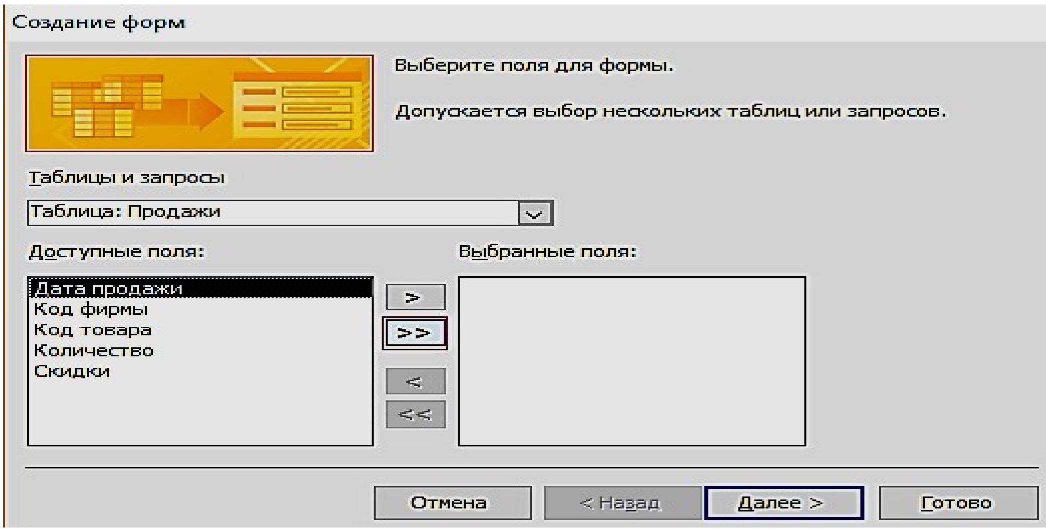


Рис. 4.8. Выбор таблиц и полей для создаваемой формы

Если предварительно в области навигации не была выбрана таблица «**Продажи**», выберите её в раскрывающемся списке **Таблицы и запросы** диалогового окна мастера. Затем отберите из списка **Доступные поля,** в нашем случае все, кроме поля «**Скидки**» (рис. 4.9).

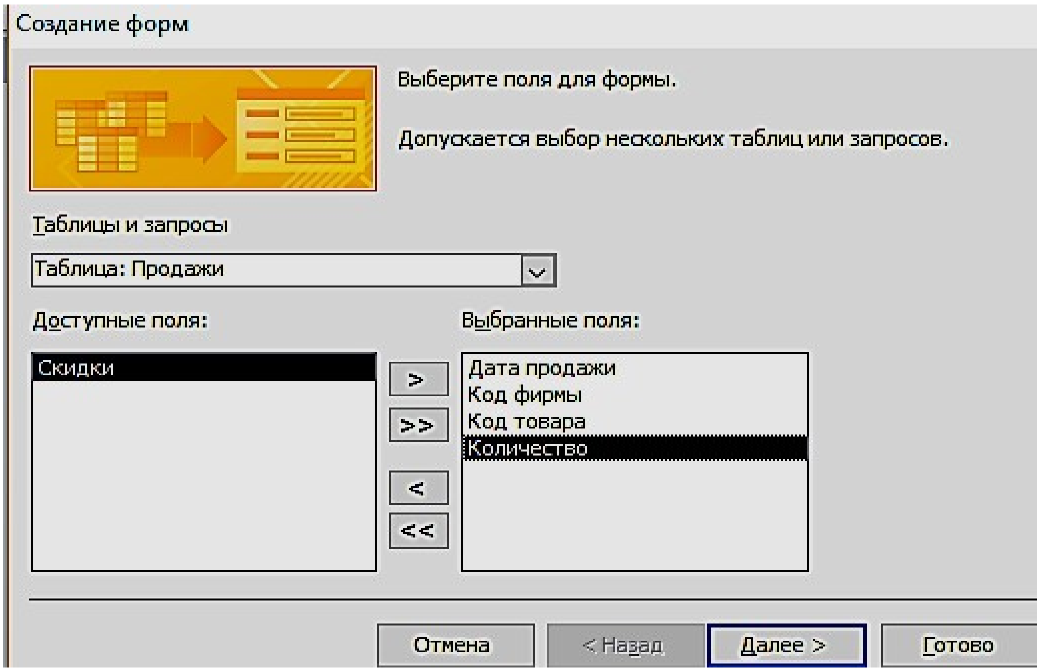


Рис. 4.9. Выбранные поля таблицы «**Продажи**» для создаваемой формы

Переходим к выбору полей из таблицы «**Товары**». Перетаскиваем все поля, кроме поля Код товара. После выбора полей для обеих таблиц и нажатия кнопки Далее в окне создание форм в списке **Выберите тип представления данных** надо выделить имя таблицы Продажи и щелкнуть по кнопке «**Далее»** (рис.
4.10).

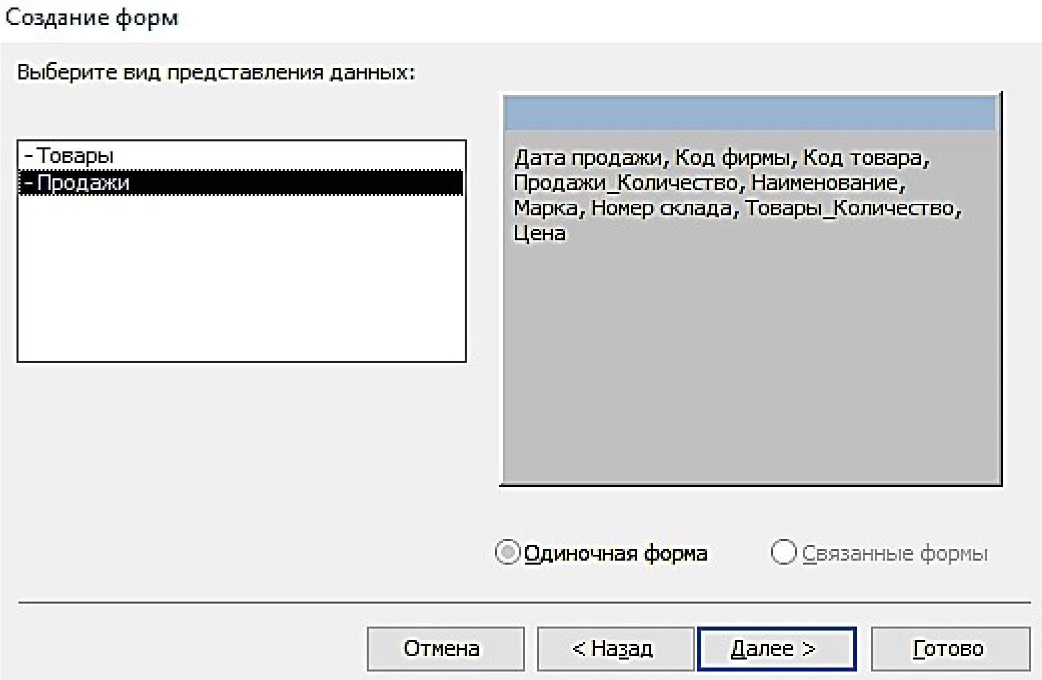


Рис. 4.10. Выбор вида представления данных

В следующем диалоговом окне предоставляется возможность выбрать внешний вид формы и нажать кнопку «**Готово**» (рис. 4.11).

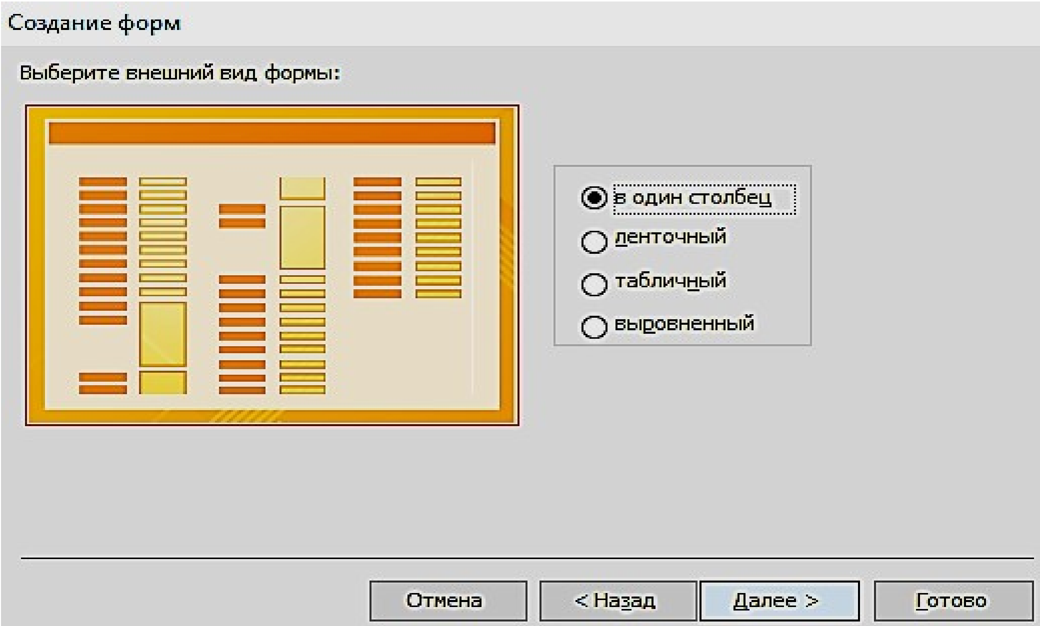


Рис. 4.11. Выбор вида формы в один столбец

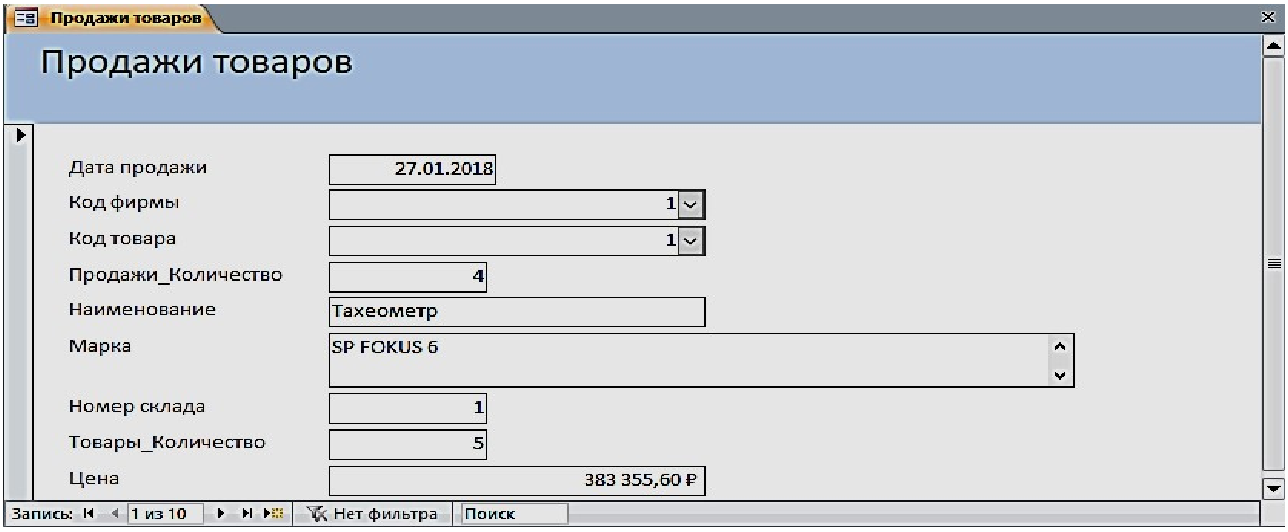


Рис. 4.12. Форма, открытая для просмотра, корректировки и ввода данных

Одиночная многотабличная форма

Одиночную форму, включающую поля из нескольких связанных таблиц, позволяет быстро построить инструмент **Пустая форма.** Выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. Откроется пустая форма в режиме макета и отобразится область **Список полей**. В списке перечислены все таблицы базы данных, и предоставляется возможность открыть список полей каждой из них (рис. 4.13). Чтобы добавить поле в форму, щелкните на нем двойным щелчком или перетащите его в форму. Для отображения каждого поля Access создает в форме соответствующий элемент управления и привязывает его к полю. Кроме того, для элемента управления создается присоединенная надпись.

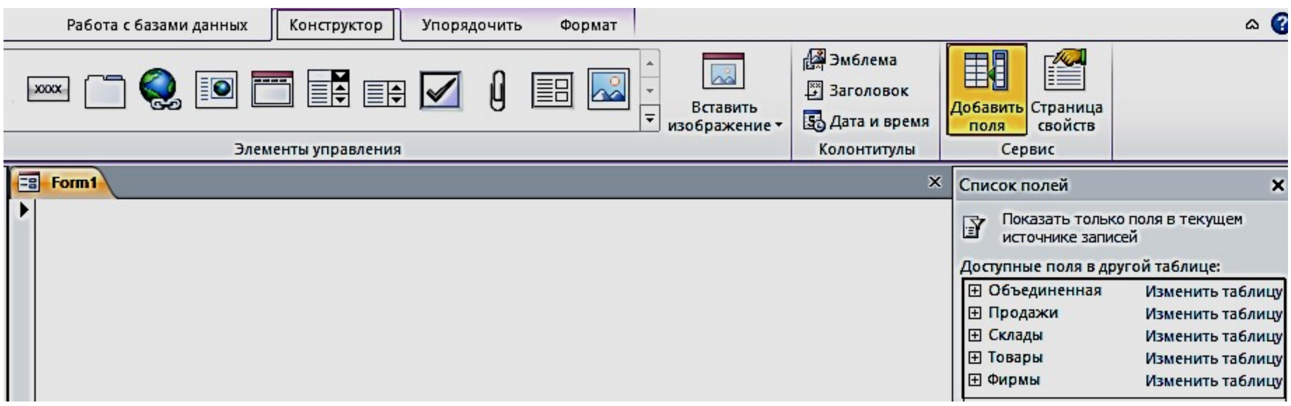


Рис. 4.13. Область **Список полей** при создании одиночной формы

Задание 7. Создать одиночную многотабличную форму для просмотра всех данных базы. Выполните команду **Пустая форма.** В области **Список полей** откройте список полей таблицы «**Продажи**», щелкнув знак «Плюс» рядом с её именем. Добавьте в форму необходимые поля (Дата продажи, Код фирмы, Код товара, Количество, Скидки). Далее последовательно добавляйте поля из таблицы «**Товары**» (Наименование, Марка, Цена), затем из таблицы «**Склады**» (Номер склада, Телефон, Адрес, Заведующий) и из таблицы «**Фирмы поля**» – (Название, Адрес, Телефон, Контактное лицо, Должность). Сохранить форму под именем «Общие данные».

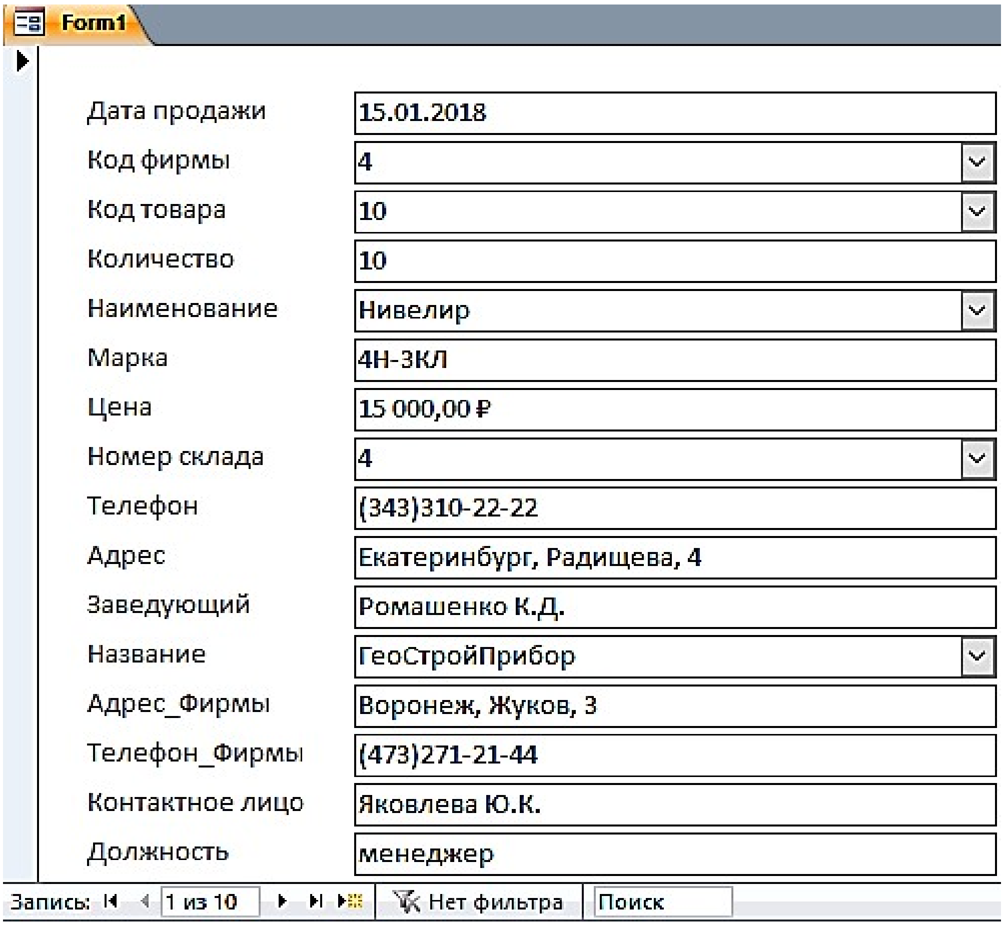
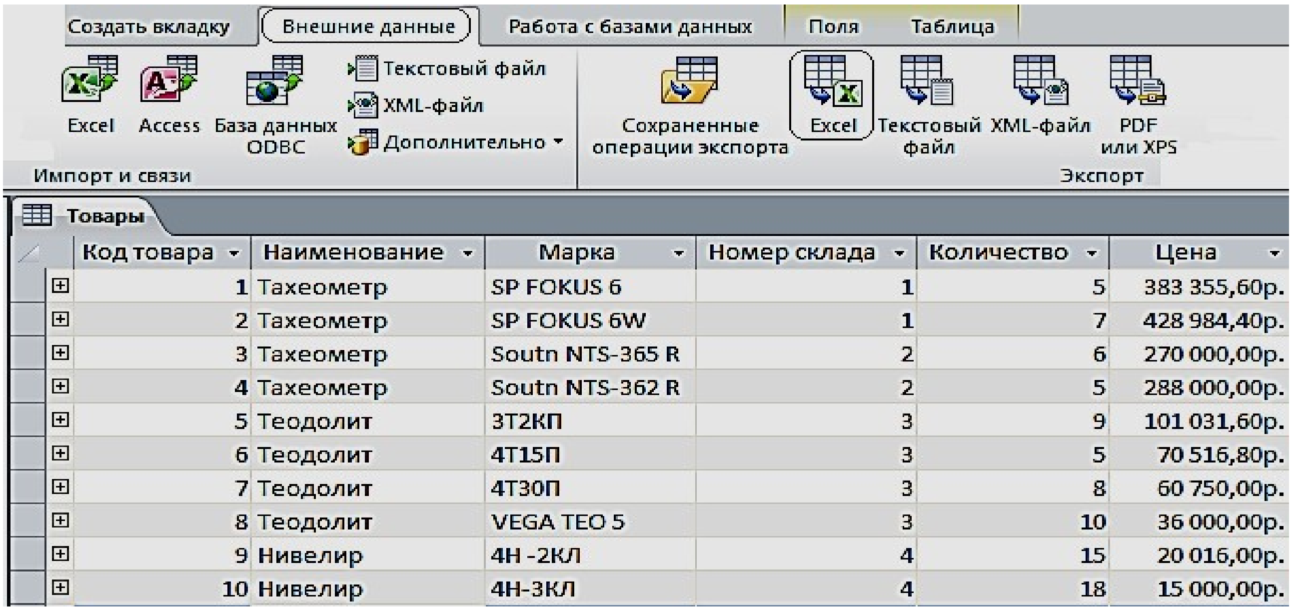


Рис. 4.14. Форма «**Общие данные**», созданная с помощью инструмента **Пустая форма**

Задание 8. Создать одиночную форму с помещенной в неё гистограммой

Для этого откройте таблицу «**Товары**». В группе **Импорт и связи** на вкладке **Внешние данные** выберите на ленте **Экспорт в таблицу Excel** (рис. 4.15).



Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60р.
2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40р.
3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	270 000,00р.
4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	288 000,00р.
5	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60р.
6	Теодолит	4Т15П	3	5	70 516,80р.
7	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00р.
8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00р.
9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	20 016,00р.
10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00р.

Рис. 4.15. Окно экспорта таблицы «**Товары**» на лист Excel

Выберите место назначения для экспорта таблицы «**Товары**», для этого нажмите на кнопку **Обзор**, выберите соответствующую папку (рис. 4.16, 4.17).

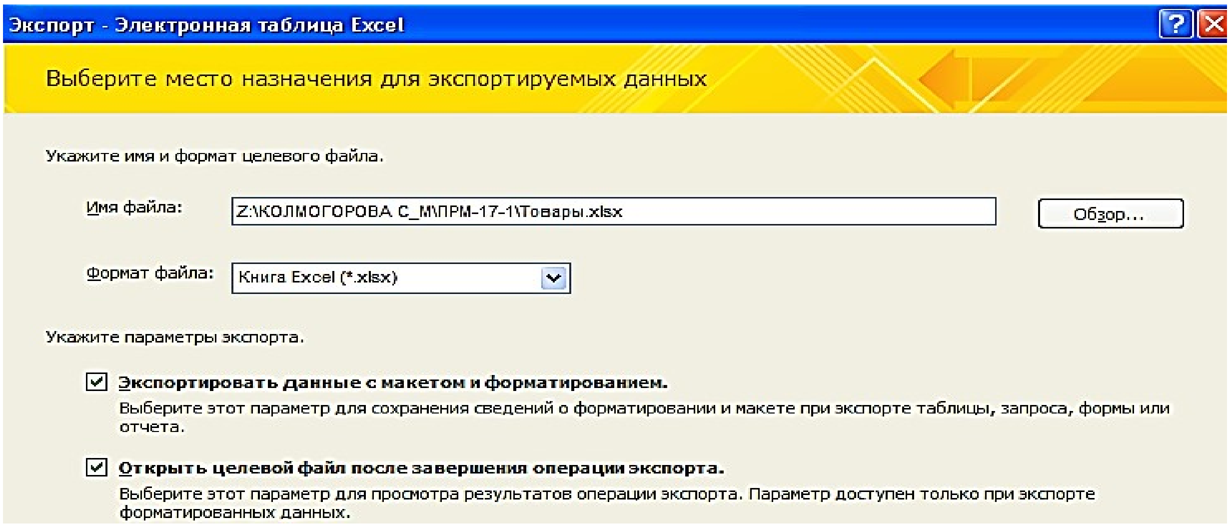
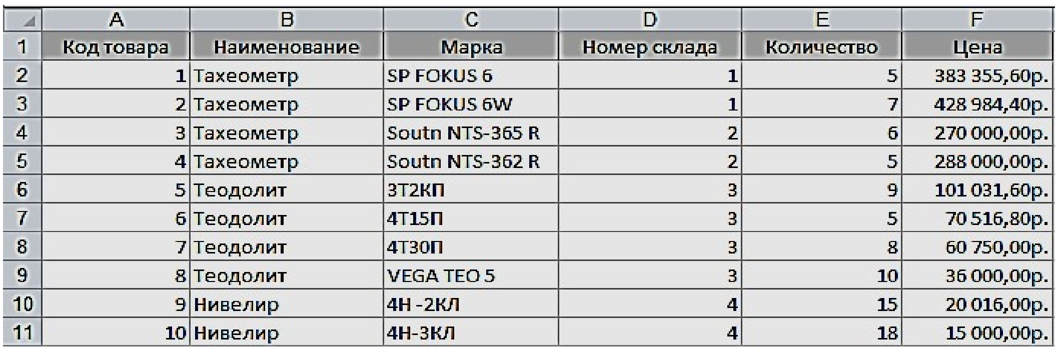


Рис. 4.16. Окно выбора места назначения для экспорта таблицы «**Товары**»



	A	B	C	D	E	F
1	Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
2	1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60р.
3	2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40р.
4	3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	270 000,00р.
5	4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	288 000,00р.
6	5	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60р.
7	6	Теодолит	4Т15П	3	5	70 516,80р.
8	7	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00р.
9	8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00р.
10	9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	20 016,00р.
11	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00р.

Рис. 4.17. Таблица «**Товары**» в Excel, экспортируемая из Access

Построение гистограммы по колонкам «**Наименование**» и «**Цена**» (рис. 4.18).

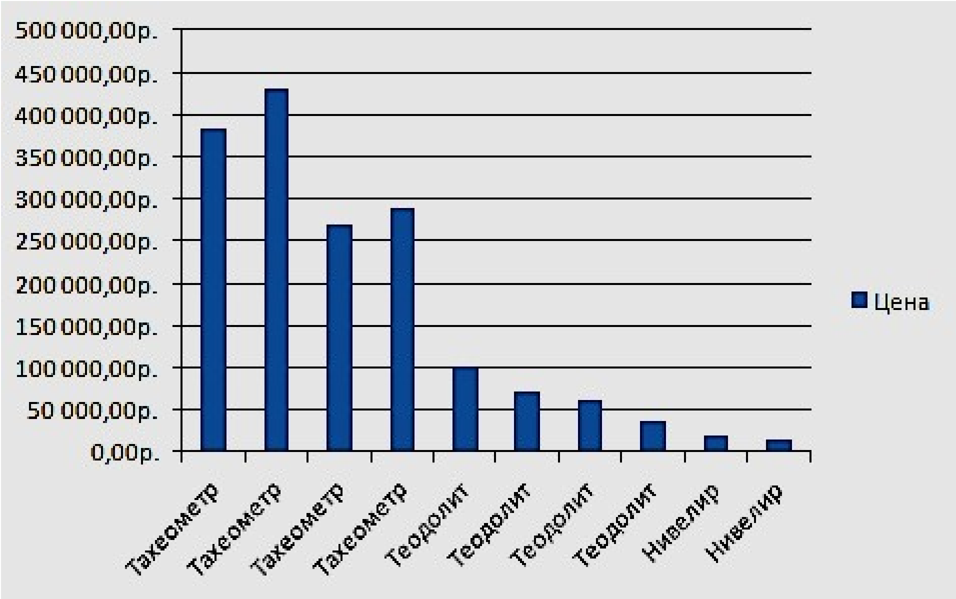


Рис. 4.18. Гистограмма, соответствующая таблице «**Товары**»

Скопируйте гистограмму в Excel. В Access выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. В режиме «**Конструктор**» произвести вставку гистограммы. Сохранить форму под названием **Гистограмма** (рис. 4.19).

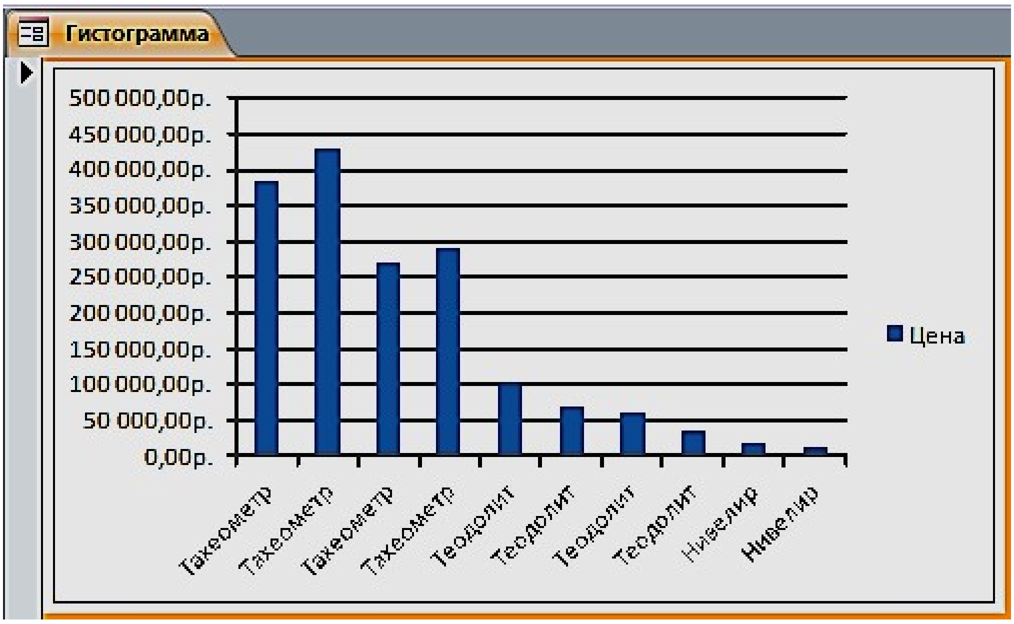


Рис. 4.19. Форма «Гистограмма»

Задание для самостоятельной работы

1. Изменить в форме «**Товары**» цвет денежных значений в поле «**Цена**» на зеленый, заливку на светло-зеленый, начертание шрифта – жирный курсив, когда они оказываются меньше или равны 80000 руб.
2. Создать форму «**Фирмы**» с подчиненной «**Продажи**».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5
Работа с отчетами

Средства Access по разработке отчетов предназначены для конструирования макета отчета, в соответствии с которым осуществляется вывод данных из определенного источника записей в виде выходного печатного документа.

Отчет может создаваться с помощью Мастера или в режиме Конструктора отчетов.

Задание 1. Выберем в области навигации таблицу «**Фирмы**», данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**.

Access создаст отчет и отобразит его в режиме макета (рис. 5.1). В отчете будут представлены все записи таблицы «**Фирмы**». Размещение полей таблицы – источника записей отчета – в разделах отчета представлено на рис. 5.2.

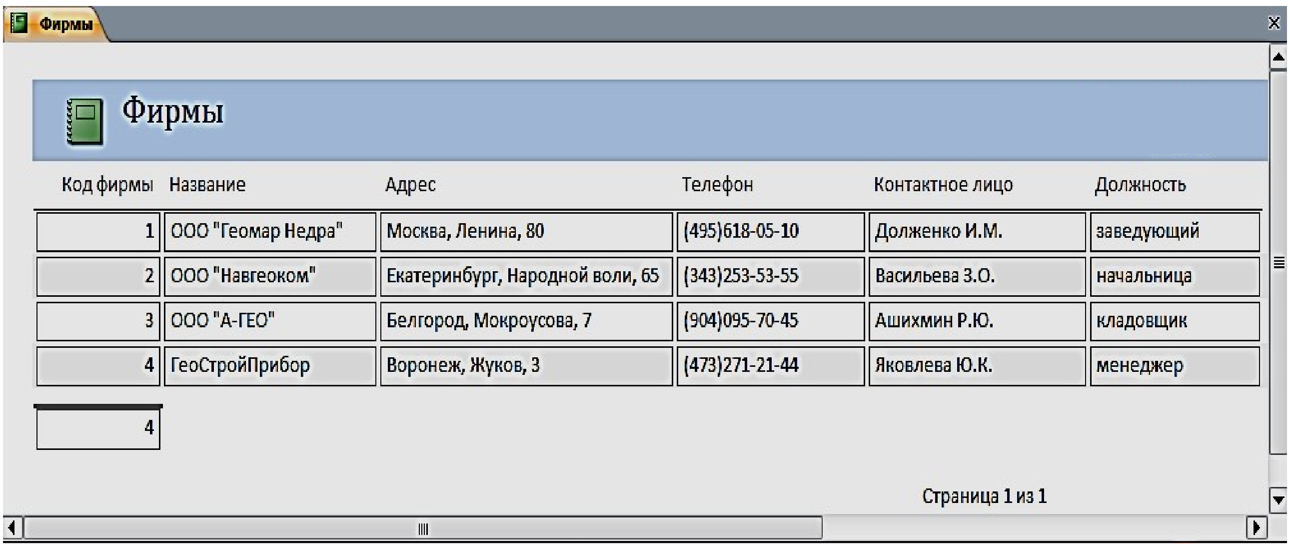


Рис. 5.1. Отчет в режиме «**Макета**»

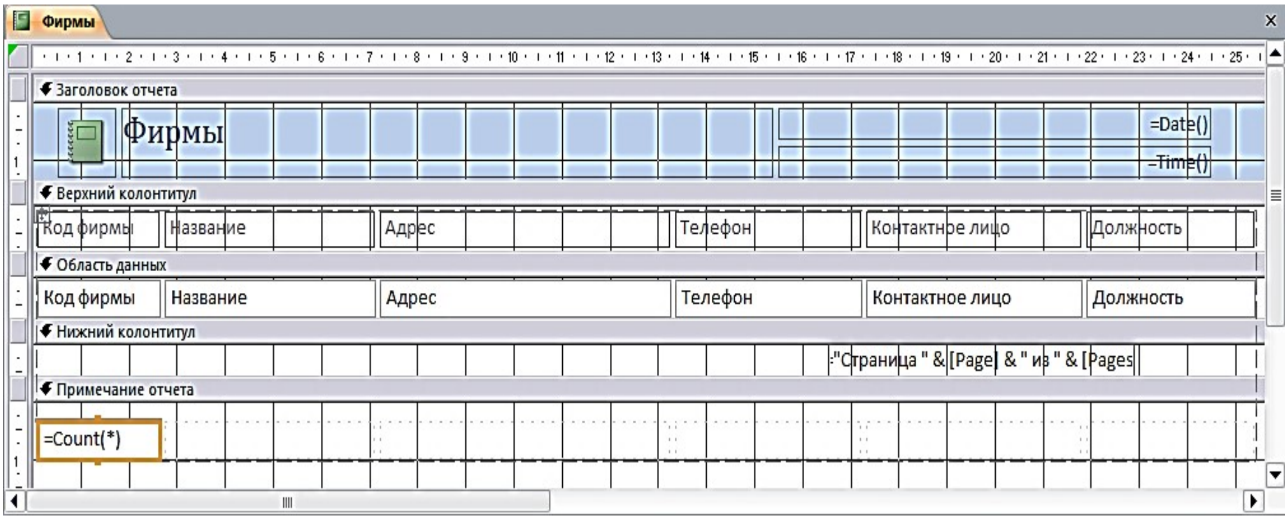


Рис. 5.2. Разделы однотабличного отчета в режиме Конструктора

В режиме макета легко привести созданный отчет в соответствие с заданными требованиями. Измените название отчета на «Контакты». Для этого выполните двойной щелчок на нем и введите новое название. Выделите макет отчета и измените заливку, размер шрифта, выбрав его на вкладке **Главная** в группе **Форматирование текста** или на вкладке **Формат** в группе **Шрифт.** Для изменения параметров страницы выполняйте команды соответствующей вкладки ленты. Пунктирной линией в отчете отмечена граница полей страницы. Отображение этой линии регулируется кнопкой **Показать поля** на вкладке ленты **Параметры страницы.** Для выбора размеров полей страницы может быть использована коллекция, отображаемая при нажатии кнопки **Поля.** На этой же вкладке можно выбрать размер бумаги, ориентацию страницы и ряд др. параметров (рис. 5.3).

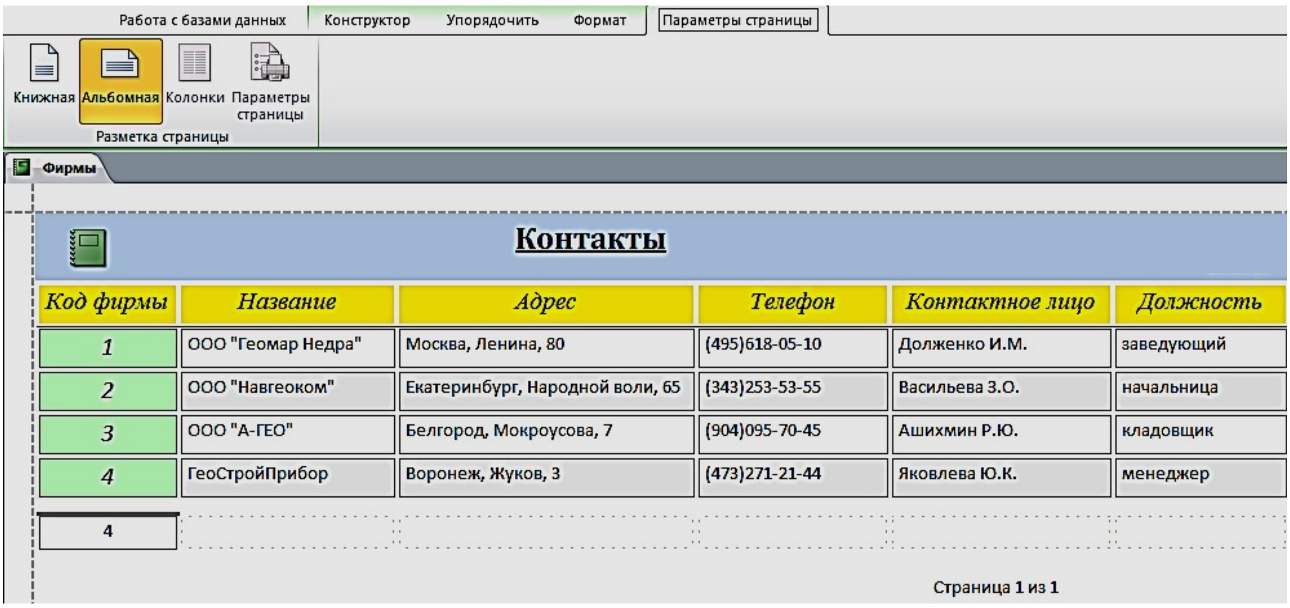


Рис 5.3. Отформатированный отчет в режиме Макета

Задание 2. Выберем в области навигации форму **Продажи товаров**, данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**. Для группировки данных по дате продажи выполним команду **Группировка, сортировка и итоги.** Выберем для предлагаемого уровня группировки поле «**Дата продажи**». Откроем список, щелкнув на параметре **по кварталам**, и выберем **по месяцам.** Для закрытия списка щелкните на любом месте за его пределами (рис. 5.4, 5.5).

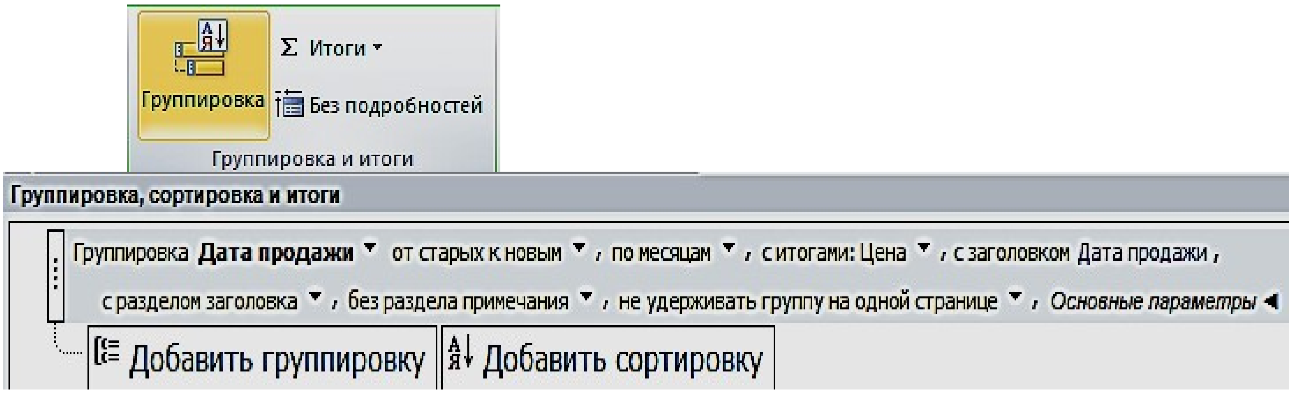
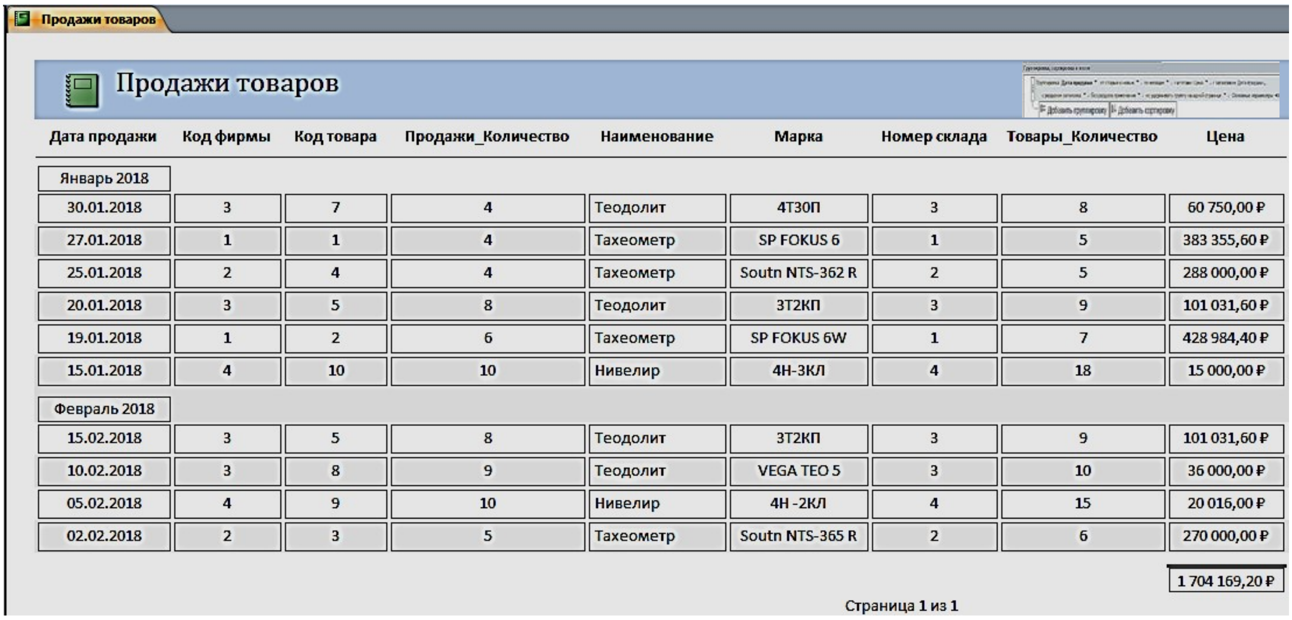


Рис. 5.4. Выбор для поля с датой группировки по месяцам



Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Продажи_Количество	Наименование	Марка	Номер склада	Товары_Количество	Цена
Январь 2018								
30.01.2018	3	7	4	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00 ₽
27.01.2018	1	1	4	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60 ₽
25.01.2018	2	4	4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	288 000,00 ₽
20.01.2018	3	5	8	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60 ₽
19.01.2018	1	2	6	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40 ₽
15.01.2018	4	10	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00 ₽
Февраль 2018								
15.02.2018	3	5	8	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60 ₽
10.02.2018	3	8	9	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00 ₽
05.02.2018	4	9	10	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	20 016,00 ₽
02.02.2018	2	3	5	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	270 000,00 ₽
								1 704 169,20 ₽

Страница 1 из 1

Рис 5.5. Форма с датой группировки по месяцам

Задание для самостоятельной работы

Создать отчет по таблице «**Объединенная**», изображенного на рис. 5.6.

ОТЧЕТ ПРОДАЖИ								
Дата продажи - по месяцам	Название	Фирмы_Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады_Телефон
Январь 2018								
	ГеоСтройПрибор	4732712144	*15.01.2018*	Нивелир	18	15 000,00 ₽	4	3433102222
	ООО "Геомар Недра"	4956180510	*19.01.2018*	Тахеометр	7	428 984,40 ₽	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	*20.01.2018*	Теодолит	9	101 031,60 ₽	3	3432751822
	ООО "Навгеоком"	3432535355	*25.01.2018*	Тахеометр	5	288 000,00 ₽	2	3433795162
	ООО "Геомар Недра"	4956180510	*27.01.2018*	Тахеометр	5	383 355,60 ₽	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	*30.01.2018*	Теодолит	8	60 750,00 ₽	3	3432751822
Итоги для 'Дата продажи' = 30.01.2018 (6 записей)								
Сумма					52	1 277 121,60 ₽		
Февраль 2018								
	ООО "Навгеоком"	3432535355	*02.02.2018*	Тахеометр	6	270 000,00 ₽	2	3433795162
	ГеоСтройПрибор	4732712144	*05.02.2018*	Нивелир	15	20 016,00 ₽	4	3433102222
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	*10.02.2018*	Теодолит	10	36 000,00 ₽	3	3432751822
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	*15.02.2018*	Теодолит	9	101 031,60 ₽	3	3432751822
Итоги для 'Дата продажи' = 15.02.2018 (4 записей)								
Сумма					40	427 047,60 ₽		
ИТОГО					92	1 704 169,20 ₽		

Рис. 5.6. Результат отчета

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Создание главной кнопочной формы с использованием макросов

Использования макросов для автоматизации управления реакцией приложения на действия пользователя в формах или отчетах позволяет создавать полноценные интерактивные приложения без написания кода *VBA*.

Макрос (от слова «макрокоманда») – программа, состоящая из последовательности макрокоманд. *Макрокоманда* – это инструкция, ориентированная на выполнение определенного действия над объектами Access и их элементами.

Например, макрокомандой можно открыть форму, отчет, напечатать отчет, запустить на выполнение запрос, применить фильтр, присвоить значение и т. д.

Задание 1. Создать главную форму управления приложением, в которой будут представлены:

- элементы для кнопочных форм запросов и гистограмма;
- макросы для таблиц и отчетов;
- макрос, с помощью которого будет закрыта база данных.

1. Выполним команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**, режим «**Конструктор**» (рис. 6.1).

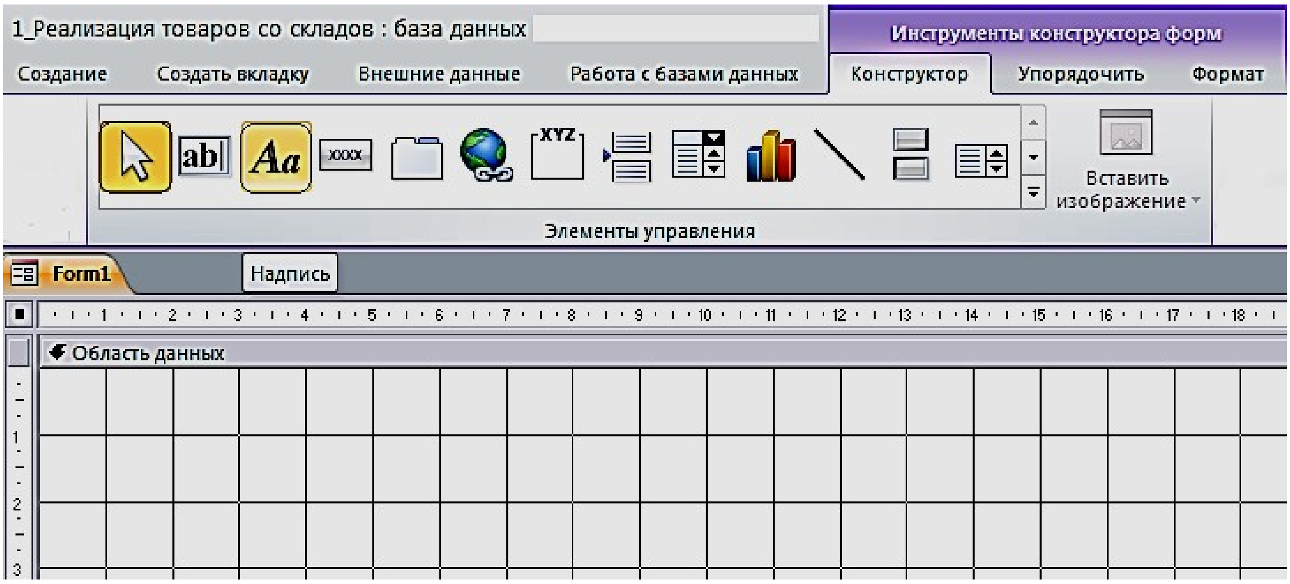


Рис. 6.1. Пустая форма в режиме «**Конструктор**» с элементами управления

2. Расположим в области **Формы** элемент **Надпись**, поместим в него название **Реализация товаров со складов** (рис. 6.2). Форматирование шрифта в надписях и кнопках осуществляется для выделенного объекта, при помощи **Инструмента конструктора форм**, в объекте **Формат**. Сохраним форму под именем «**Главная форма**».

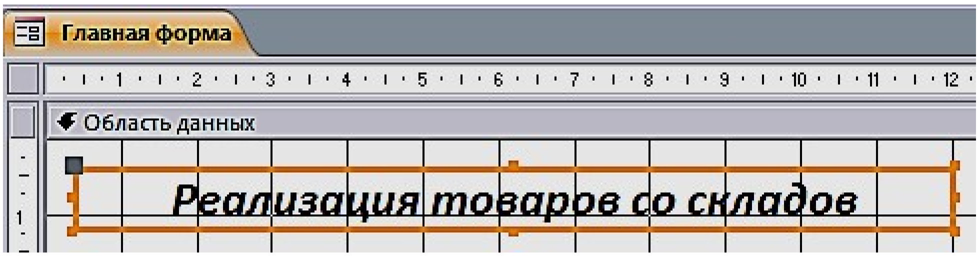


Рис. 6.2. Использование элемента управления **Надпись**

Создание макроса осуществляется в диалоговом режиме и сводится к записи в окне конструктора макроса последовательности макрокоманд, для которых задаются аргументы. Каждому макросу присваивается имя. При выполнении макроса макрокоманды выполняются последовательно в порядке их расположения. При этом используются объекты или данные, указанные в аргументах макрокоманд.

Создание макроса начинается с выполнением команды **Макрос** на вкладке ленты **Создание** в группе **Макросы и код**. В результате выполнения команды открывается окно макроса и каталог макрокоманд (рис. 6.3).

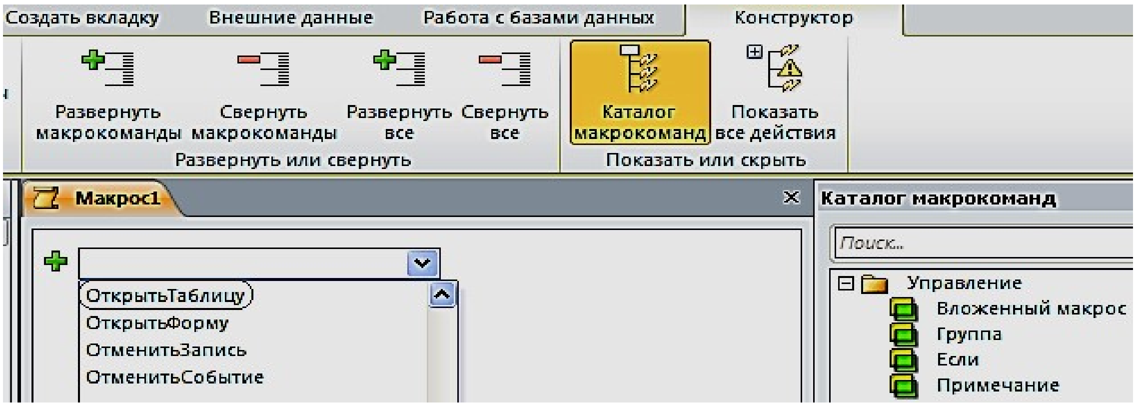


Рис. 6.3. Окно конструирования макроса с Каталогом макрокоманд

3. Создадим первый макрос **Таблицы**, при выполнении которого откроются четыре таблицы: «Продажи», «Склады», «Товары» и «Фирмы». Сохраним его под именем **Таблицы** (рис. 6.4).

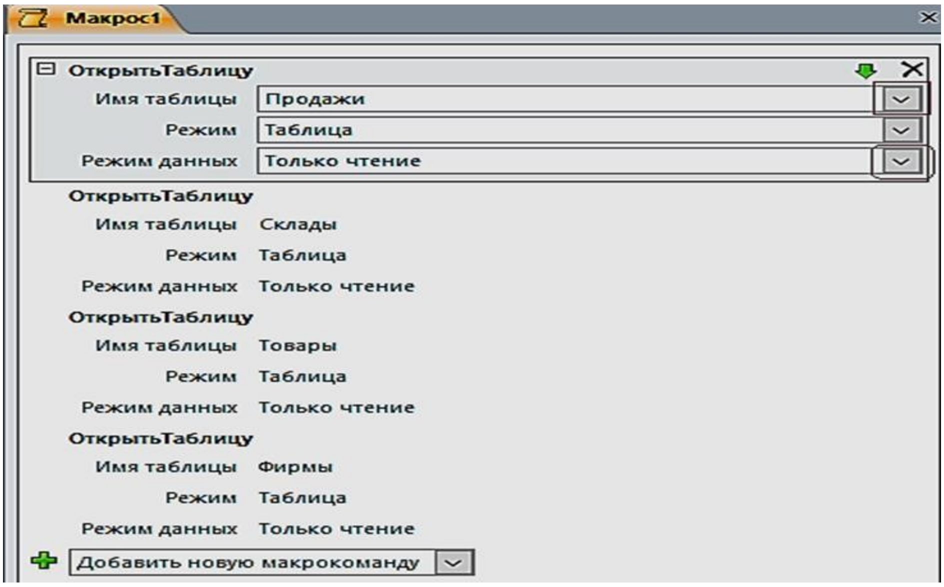


Рис. 6.4. Блок конструирования Макроса «**Таблицы**»

4. Создадим второй макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.5). Сохраним его под именем **Отчет**.

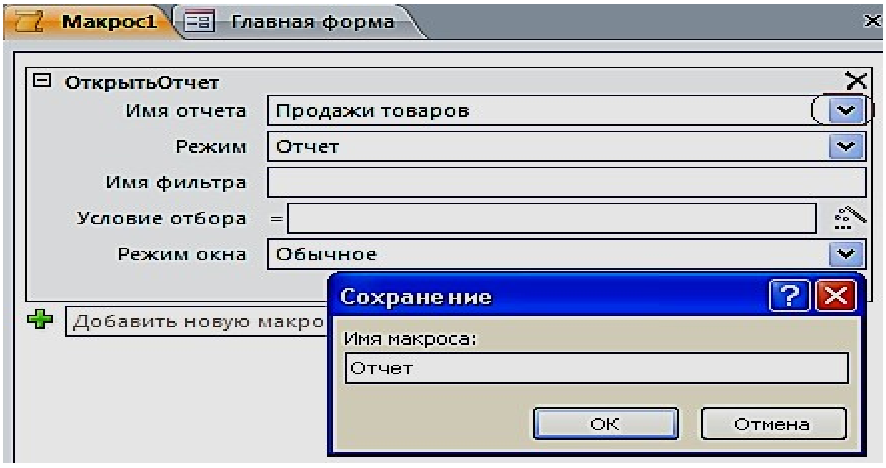


Рис. 6.5. Создание макроса **ОткрытьОтчет**

5. Создадим третий макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.6). Сохраним под именем **Выход**.

Рис. 6.6. Создание макроса **ЗакрытьБазуДанных**

Создание управляющих кнопок на экране

1. Создадим кнопки: **Таблицы**, **Отчет** и **Выход из БД.** Расположим в области **Главной формы** три кнопки с ранее созданными макросами. Для размещения кнопок предусмотрим, чтобы все действия осуществлялись при нажатой кнопке **«Использовать мастера»**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Разное**, затем – действия: **Выполнить макрос,** нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.7).

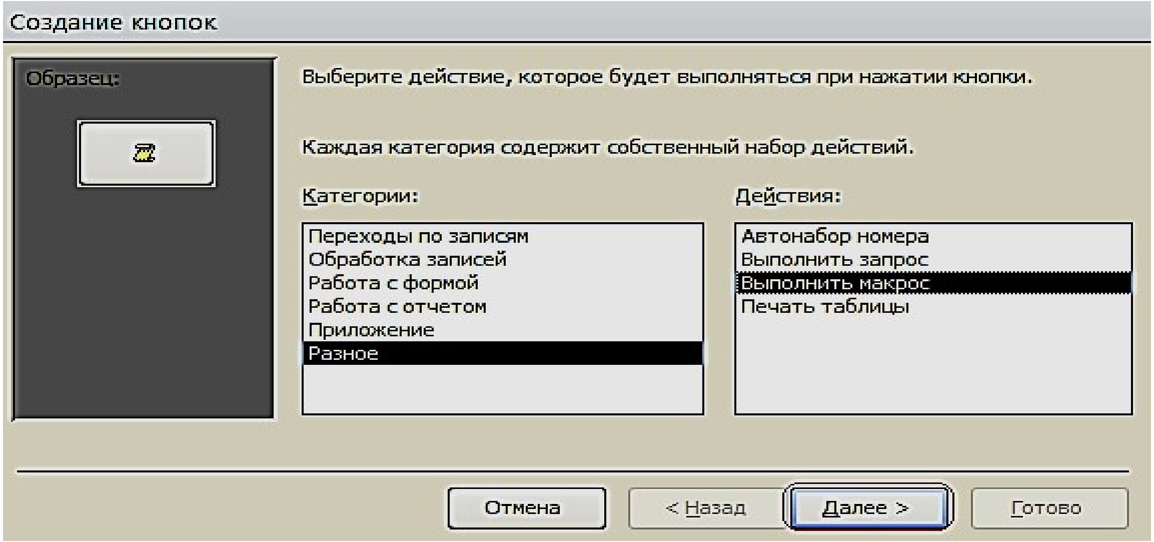


Рис. 6.7. Окно создания кнопок при работе с **Макросами**

2. Выберем соответствующий макрос (рис. 6.8). Разместим текст на кнопке.

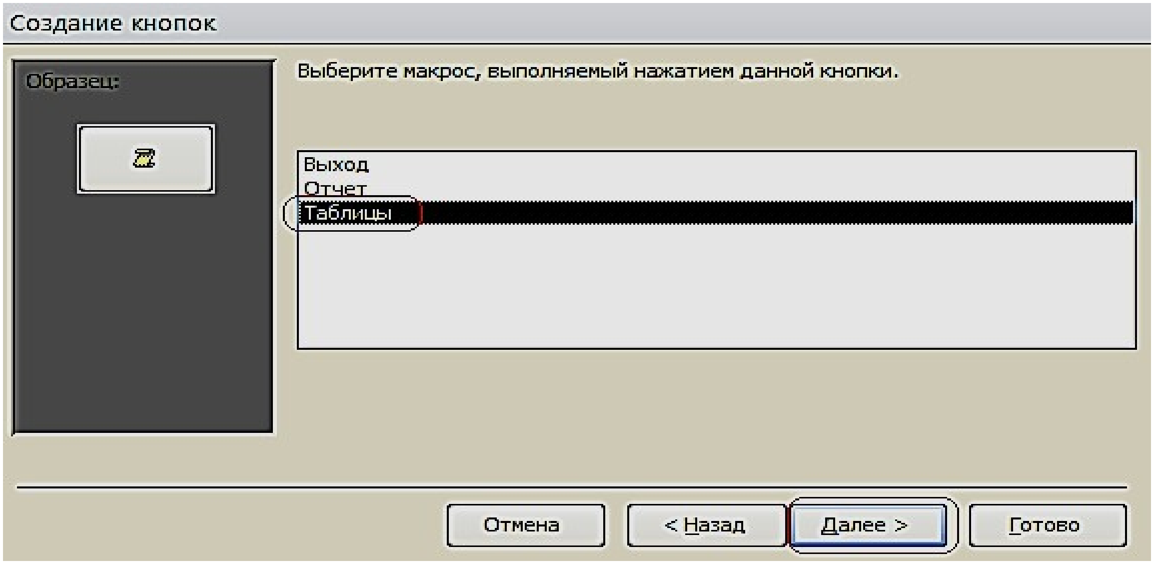


Рис. 6.8. Окно выбора макроса

3. В тексте напишем название **Таблицы** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее** (рис. 6.9).

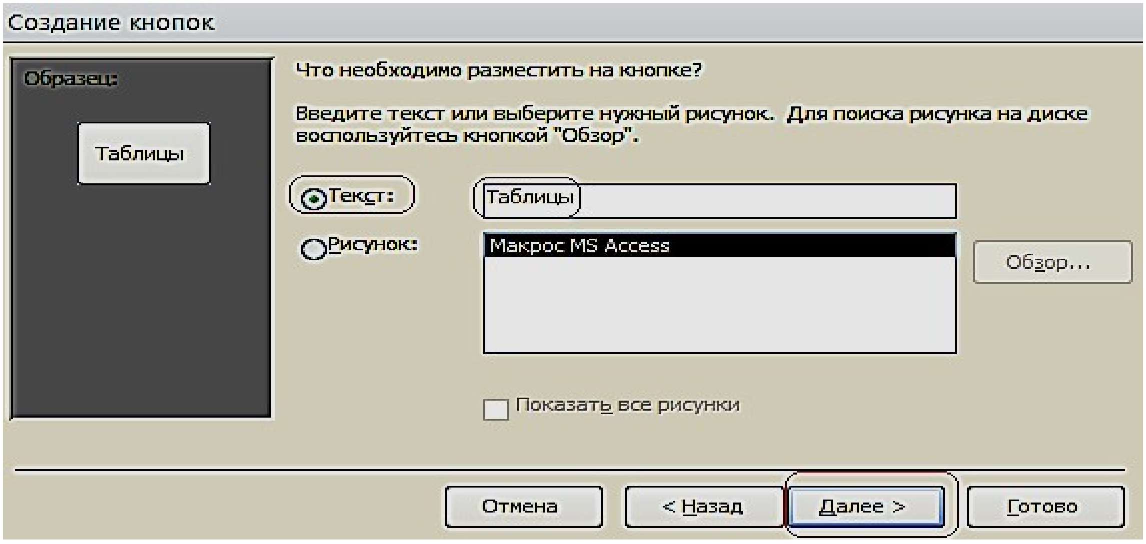


Рис. 6.9. Размещение текста на кнопке

4. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью макросов (рис. 6.10).

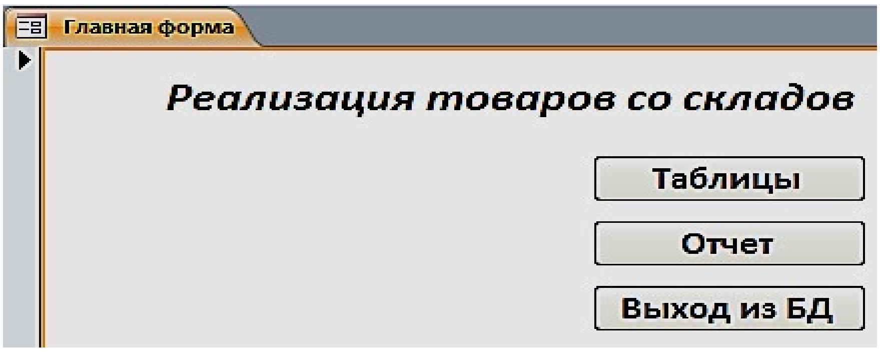


Рис. 6.10. Главная форма в режиме Макета

5. Расположим в области **Главной формы** три кнопки: **Составная форма**, **Общие данные** и **Гистограмма**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Работа с формой**, действия: **Открыть форму,** нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.11).

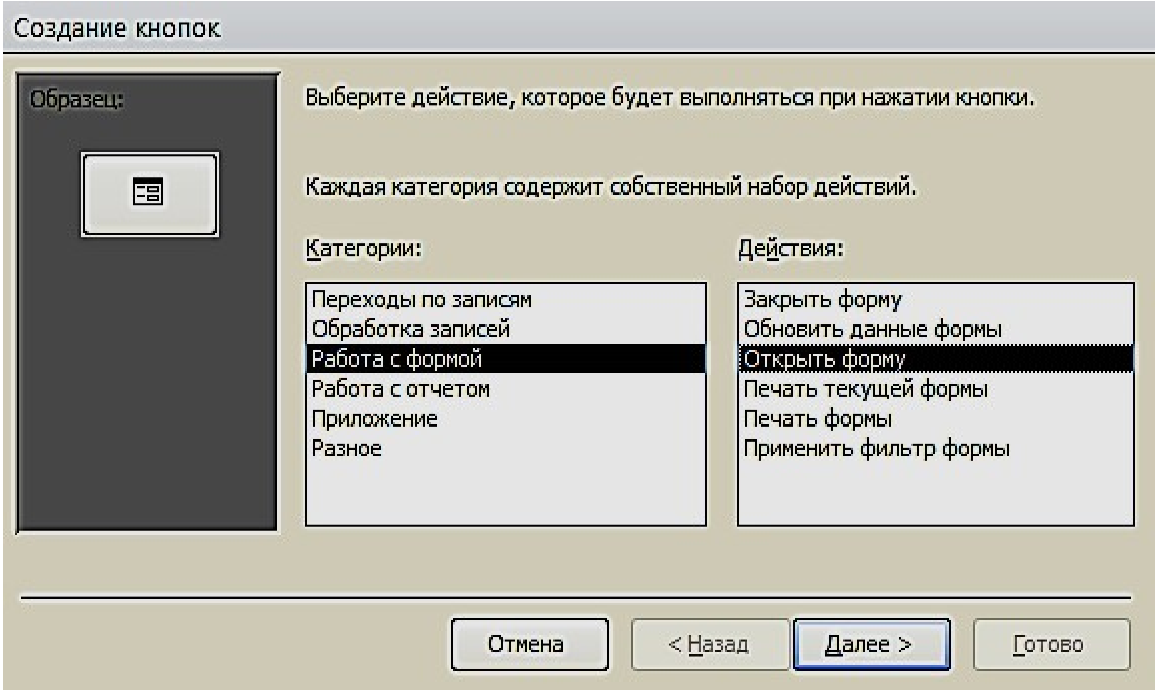


Рис. 6.11. Окно создания кнопок при работе с формами

6. Выберем соответствующую форму (рис. 6.12).

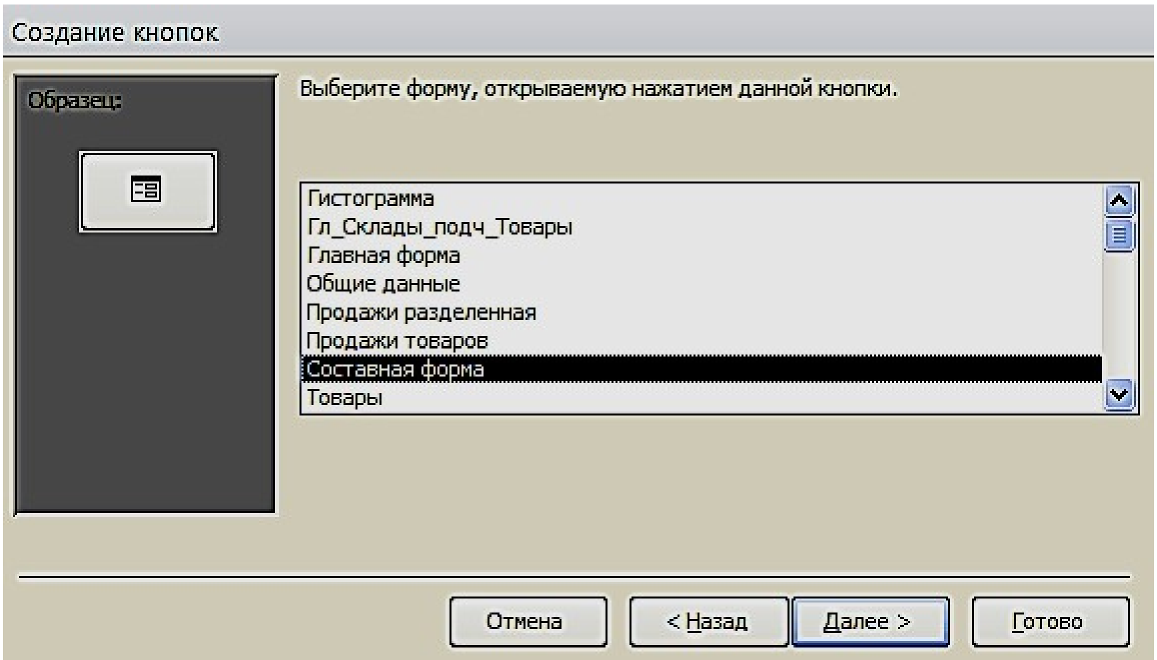


Рис. 6.12. Окно выбора формы

Поместим текст на кнопке (рис. 6.13). В тексте напишем название **Гистограмма** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее**. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью Форм.

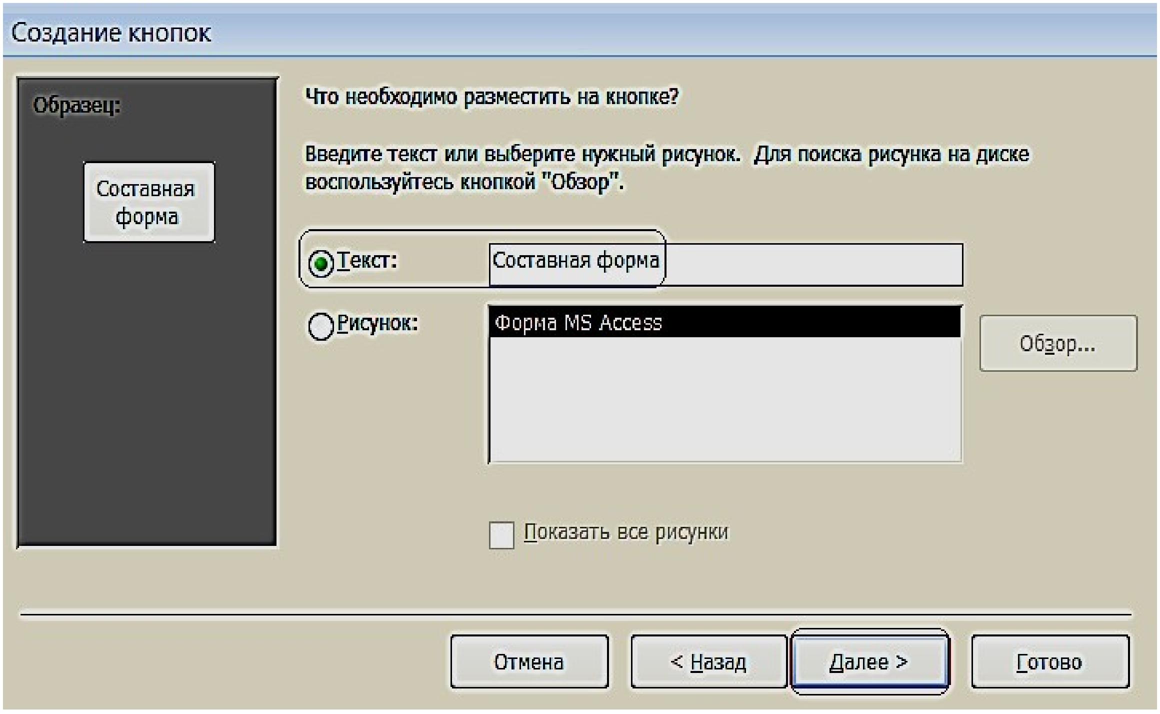


Рис. 6.13. Размещение текста на кнопке

7. Для создания картинки воспользуемся элементом управления **«Рисунок»**.

8. По завершению разработки приложения, сохраним и закроем форму. Затем откроем и проверим работоспособность всех её элементов (рис. 6.14).

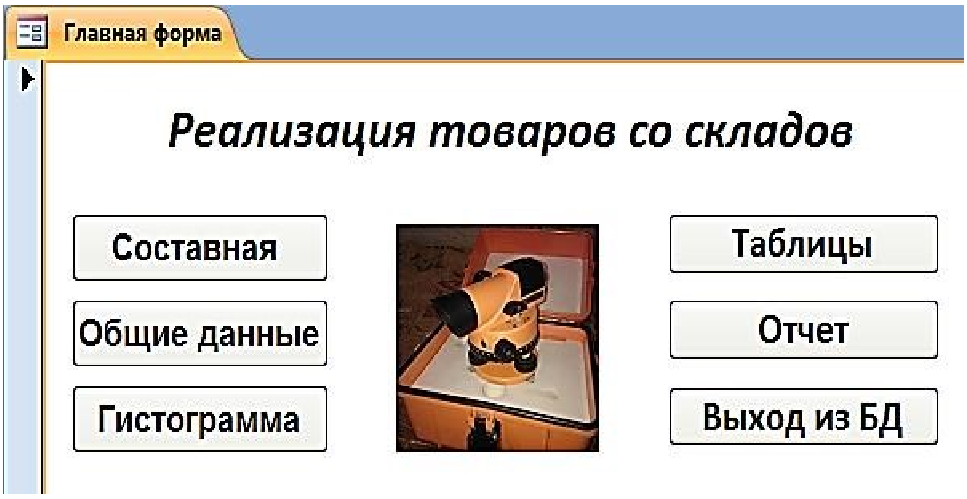


Рис. 6.14. Управляющая форма в режиме «**Формы**»

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Указания к выполнению работы

- Создать логическую модель базы данных: для заданной предметной области, представленной в виде перечня реквизитов, сформировать таблицы, определить в них ключевые поля, описать имена, типы и свойства полей и создать связи между таблицами.
- Создать формы для ввода данных в таблицы (простая и сложная формы). Заполнить таблицы. Каждая таблица должна содержать не менее 7 строк.
- Создать запросы по пунктам вариантов задания.
- Создать кнопочную форму для вызова созданных объектов.

Варианты заданий

Вариант № 1

Исходные данные:

- ***Рабочие***: табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- ***Цеха:*** наименование цеха, категория производства (основное, управление, вспомогательное).
- ***Движение по службе***: должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик).
- o *Вычислить* общую сумму выплат за месяц по выбранному цеху, а также среднемесячный заработок этого цеха.

o *Создать* ведомость для начисления заработной платы рабочих этого цеха.

Вариант № 2

Исходные данные:

- ***Сотрудники:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу
- ***Оплата труда:*** должность, оклад
- ***Отделы:*** номер отдела, фамилия сотрудника *Определить:*

o возраст сотрудников (количество полных лет) при поступлении на работу и на текущее время;

- количество сотрудников заданного отдела младше 30 лет;

- o минимальный размер оклада.

• ***Создать таблицу,*** которая содержит сведения о 5-и самых высокооплачиваемых сотрудниках фирмы**.**

Вариант № 3

Исходные данные:

Работники: фамилия, имя, отчество, цех.

• ***Изделия:*** наименование изделия, категория изделия (А, В, С), стоимость изготовления.

• ***Итоги:*** шифр сборщика, количество изготовленных изделий по категориям.

Рассчитать: o общее количество изделий каждой категории;

o общее количество изделий, собранных всеми рабочими заданного цеха;

• *Создать ведомость* для начисления заработной платы рабочих заданного цеха. Определить средний размер заработной платы работников этого цеха.

Вариант № 4

Исходные данные:

• ***Абоненты:*** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.

• ***Расценки:*** тип заказа (по городу, область, Украина, Европа, …), цена 1 мин. разговора.

• ***Заказ:*** телефон вызова, вызываемый пункт, время в минутах.

o *Рассчитать* общее количество телефонов, установленных начиная с заданного года по сегодняшний день. Выдавать по вводимой фамилии абонента номер его телефона. o *Создать таблицу*, которая содержит фамилии задолжников и их телефоны.

Вариант № 5

Исходные данные:

• ***Поставка:*** поставщик, дата поставки, объем поставки.

• ***Игрушки:*** артикул, наименование, цена, нижняя и верхняя возрастные границы.

• ***Чеки: номер чека, дата продажи, сумма.***

o *Определить* стоимость наиболее дорогой игрушки и ее наименование. По введенному значению *А, В* и *Х*, выводить названия игрушек, которые по стоимости не превышают *Х* и подходят ребенку от *А* до *В* лет.

o *Создать таблицу*, которая содержит следующую информацию:

наименование игрушек, которые подходят детям от *1* до *3* лет и их цены.

Вариант № 6

Исходные данные:

- ***Студенты:*** фамилия, имя отчество студента; код группы, дата рождения.
- ***Предметы:*** наименование предмета, категория предмета (фундаментальный, профессионально-ориентированный, на выбор), тип аттестации (зачет, экзамен).

Журнал: оценки по 5 экзаменам, признак участия в общественной работе. o *Определить* общее число активистов в списке.

o *Создать таблицу*, которая содержит сведения о начислении стипендии студентам заданной группы. Рассчитать размер стипендии по следующему алгоритму: студенту, который получил все оценки «*5*» и активно принимает участие в общественной работе, назначается повышенная стипендия – доплата 50 %; студенту, который получил «*4*» и «*5*», назначается обычная стипендия – ее необходимо задать; студенту, который получил одну оценку «*3*», но активно занимается общественной работой, также назначается обычная стипендия; другим студентам стипендия не назначается.

Вариант № 7

Исходные данные:

- ***Авторы:*** фамилия, имя отчество, название книги.
- ***Книги:*** год издания, количество экземпляров.
- ***Местоположение:*** шифр книги, номер стеллажа, номер шкафа, номер полки. o *Определить* общее количество книг в коллекции, а также число книг заданного года издания. По заданному автору и названию книги выдать информацию о местонахождении книги. o *Создать таблицу*, которая содержит информацию о книгах заданного автора, которые находятся в коллекции.

Вариант № 8

Исходные данные:

- ***Группа:*** факультет, шифр группы, фамилия куратора, должность.
- *Студент*. Фамилия студента, шифр группы, номер зачетной книжки, дата рождения, дата поступления.
- ***Результаты сессии:*** оценки по *5*-и экзаменам и результаты сдачи 5 зачетов («З» – зачет, «Н» – незачет). o *Вычислить* средний балл, полученный

каждым студентом заданной группы, и средний балл этой группы по каждому предмету. Определить общее количество задолженностей (по экзаменам и зачетам в сумме) каждого студента заданной группы и общее число студентов-должников той же группы.

o *Создать таблицу*, которая содержит сведения о неуспевающих студентах: группу, фамилия и количество задолженностей.

Вариант № 9

Исходные данные:

- ***Рейсы:*** номер рейса, пункт назначения, время вылета, время прибытия, стоимость билета.

Самолеты: шифр самолета, марка, количество посадочных мест, срок службы.

- ***Билеты:*** дата вылета, количество свободных мест в самолете.

Определить: o номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город; o по заданному городу и времени отправления наличие свободных мест на рейс; o общее количество рейсов через сутки в заданный город. *Создать таблицу,* которая содержит номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город.

Вариант № 10

Исходные данные:

- ***Поставка:*** артикул обуви (артикул начинается с буквы *Ж* – для женской обуви, *М* – для мужской, *Д* – для детской обуви, например: *Д0321*), наименование, объем поставки.
- ***Обувь:*** цвет, стоимость.
- *Наличие*: размер, количество**.**

Определить:

o стоимость обуви заданного артикула, и какие размеры есть в наличии; o общее количество пар детской обуви, имеющейся в магазине, и ее суммарную стоимость.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию обо всех моделях женской обуви.

Вариант № 11

Исходные данные:

- ***Игроки:*** фамилия, имя, отчество, год рождения, название футбольного клуба.

- ***Футбольный клуб:*** название клуба, фамилия директора, фамилия главного тренера.
- ***Результаты:*** шифр игрока, число заброшенных им шайб, число сделанных им голевых передач, заработанное штрафное время. o *Вычислить* общее число шайб, забитых хоккеистами каждой команды, и суммарное штрафное время. o *Создать таблицу*, которая содержит фамилии шести лучших игроков, и сумму очков каждого игрока (голы + передачи).

Вариант № 12

Исходные данные:

- ***Студенты:*** фамилия, имя, дата рождения дата поступления.

Выбор дисциплины: код студента, наименование пяти дисциплин (выбираемая дисциплина отмечается символом «*1*», иначе – *пробел*).

- ***Успеваемость:*** средний балл, наличие задолженности.

o *Вычислить* количество слушателей каждой дисциплины. Определить число слушателей заданной дисциплины, у которых средний балл превышает заданный. o *Создать таблицу*, которая содержит фамилию, группу и средний балл всех слушателей заданной дисциплины. Если число их превысит заданное, то отобрать студентов, которые имеют более высокий средний балл успеваемости.

Вариант № 13

Исходные данные:

- ***Рейсы:*** номер поезда, станция назначения, время отправления, время прибытия, стоимость билета в вагоны каждого вида отдельно.
- ***Поезда:*** количество посадочных мест в купейных вагонах, плацкартных, количество мест в вагоны повышенной комфортности.
- ***Билеты:*** дата отправления, номер поезда, наличие билетов в вагоны каждого вида отдельно.

Определить:

o количество свободных мест в купейные вагоны поезда с заданным номером; o количество поездов, которые отправляются к заданной станции назначения.

- *Создать таблицу,* содержащую информацию о поездах, которые отправляются к заданной станции в заданном интервале времени (временной интервал задать двумя значениями, например, *13:00* и *18:30*).

Вариант № 14

Исходные данные:

- ***Сотрудники:*** табельный номер фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу.
- ***Отделы:*** номер отдела, количество сотрудников, фамилия начальника.
- ***Движение по службе***: должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик). o *Рассчитать* стаж работы всех сотрудников; средний стаж работы сотрудников заданного отдела; количество сотрудников с окладом ниже заданного. o *Создать таблицу*, которая содержит список сотрудников пенсионного возраста (на сегодняшний день) с указанием стажа работы. o *Определить разницу* в стаже работы женщин и мужнин пенсионного возраста.

Вариант № 15

Исходные данные:

- ***Пациенты:*** фамилия, имя, отчество, пол, дата рождения, местожительство (город).
- ***Палата:*** количество мест в палате.
- ***Учет:*** дата поступления, диагноз поступления, уточненный диагноз, дата выписки, если выписался).

Определить: o количество иногородних граждан, прибывших в клинику; o количество пациентов с заданным диагнозом; o количество пациентов пенсионного возраста.

- *Создать таблицу*, которая содержит список пациентов старше заданного возраста с заданным диагнозом.

Вариант № 16

Исходные данные:

- ***Пассажир:*** фамилия, шифр багажа.
- ***Багаж:*** количество вещей, вес.
- ***Учет:*** дата сдачи, время сдачи, номер секции, номер стойки.

Определить: o общий средний вес одной вещи;

o багаж, у которого средний вес одной вещи отличается не больше чем на 0,3 кг от общего среднего веса одной вещи; o количество пассажиров, которые имеют больше 2 вещей. □ *Создать таблицу*, содержащую информацию о багаже, вес которого превышает заданный.

Вариант № 17

Исходные данные:

- ***Компания:*** наименование компании, дата создания компании, фамилия директора, номинал акции.
- ***Курс:*** дата, продажа, покупка.
- ***Учет:*** количество проданных акций, количество купленных акций.

Определить: o среднее количество проданных и купленных акций; o максимальное различие между курсом продажи и покупки акций; o суммарное количество акций, проданных всеми фирмами, и общую сумму, на которую они проданы.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование фирмы и стоимость проданных акций.

Вариант № 18

Исходные данные:

- ***Заказчик:*** фамилия, адрес, телефон.
- ***Ремонт:*** номер заказа, наименование оборудования, вид ремонта, стоимость.
- ***Учет:*** фамилия мастера, дата начала ремонта, дата окончания ремонта.

Определить: o суммарную стоимость всех заказов; o количество заказов на ремонт заданного вида; o минимальная стоимость ремонта.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о продолжительности ремонта заказов, оформленных весной: номер заказа, фамилия заказчика, наименование оборудования, продолжительность заказа.

Вариант № 19

Исходные данные:

- ***Абоненты:*** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
- ***Расценки:*** код города, стоимость *1* минуты разговора.
- ***Заказ:*** дата разговора, телефон вызова, вызываемый пункт, продолжительность в минутах. *Определить:* o максимальную стоимость разговора; o суммарную стоимость всех разговоров; o общее количество разговоров в город с заданным кодом. *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости разговоров, которые состоялись в интервале между двумя заданными датами.

Вариант № 20

Исходные данные:

- ***Товары:*** шифр товара, наименование товара, категория (*A, B, C*), страна-производитель.
- ***Поставка:*** дата поставки, поставщик (наименование фирмы), объем, оптовая цена.
- ***Учет:*** дата продажи, розничная цена, количество проданного товара.

  - По заданному шифру товара выдавать информацию о нем.

Определить:
  - суммарную прибыль от продажи всех товаров;
  - наименование товаров, продаваемых по наивысшей и наиболее низкой цене.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование товара и суммарную выручку.

Вариант № 21

Исходные данные:

- ***Продукция***: номер цеха изготовителя, наименование изделия
- ***Стоимость:*** код изделия, себестоимость
- ***Учет:*** дата изготовления, количество изготовленных изделий, цена.

Определить:
  - суммарное различие между себестоимостью и ценой всех изготовленных изделий;
  - общее количество изделий, изготовленных до заданной даты;
  - цену изделия по заданному наименованию.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о товарах, изготовленных в заданном цехе.

Вариант № 22

Исходные данные:

- ***Рабочие:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.
- ***Расценки:*** разряд, стоимость одного часа.
- ***Учет:*** дата, количество отработанных часов.

Определить:
  - среднее количество часов, отработанных за день;
  - максимальную стоимость одного часа;
  - по заданной дате количество отработанных часов.

• *Создать таблицу*, которая содержит следующие сведения о работниках заданного цеха: o фамилия работника; o суммарная стоимость отработанного им времени.

Вариант № 23

Исходные данные:

• ***Клиенты:*** фамилия, адрес, телефон**.**

• ***Заказ:*** номер заказа, наименование изделия, фамилия мастера.

• ***Учет:*** дата приема, дата выполнения заказа, стоимость заказа.

Определить: o количество заказов, выполненных мастером с заданной фамилией; o стоимость самого дорого заказа; o среднюю стоимость заказов.

• *Создать таблицу*, которая содержит фамилию клиента, номер заказа и продолжительность его выполнения.

Вариант № 24

Исходные данные:

• ***Импортеры:*** фирма-импортер, страна, наименование товара.

• ***Поставка:*** шифр товара, объем партии в штуках, стоимость *1* штуки в условных единицах.

• ***Учет:*** дата поставки, дата получения, подтверждение приема партии. *Определить:* o суммарный объем товаров, импортированных заданной страной;

o суммарную стоимость партии товара по заданному шифру; o минимальную стоимость товара.

• *Создать таблицу,* которая содержит сведения о стоимости товаров, импортированных заданной страной. Таблица должна содержать наименование товара и суммарную стоимость партии.

Вариант № 25

Исходные данные:

• ***Рабочие:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.

• ***Оплата:*** разряд, оплата за изготовление одной качественной детали.

• ***Учет:*** дата, количество изготовленных деталей, количество бракованных деталей. Определить: o общее количество бракованных деталей, изготовленных всеми мастерами заданного цеха; o сумму штрафа за каждую бракованную деталь, которая составляет 20 % от оплаты за качественную работу; o фамилию мастера, который изготовил максимальное количество качественных деталей.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения об оплате труда рабочих. Таблица должна содержать фамилию рабочего, номер цеха и сумму к выплате с учетом штрафа и налога (налог составляет 15 % от стоимости оплаты).

Вариант № 26

Исходные данные:

- ***Отделение:*** номер отделения, фамилию заведующего, номер корпуса, этаж.
- ***Лечение:*** шифр болезни, продолжительность.
- ***Оплата:*** диагностика, стоимость *1* дня лечения, затраты на лекарство.
- ***Суммарная стоимость:*** отработанного им времени.

Определить: o по названию болезни затраты на лекарство; o среднюю стоимость *1* дня лечения;

o рассчитать суммарную стоимость лечения каждой болезни, включая затраты на лекарство.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости лечения в заданном отделении.

Вариант № 27

Исходные данные:

- ***Книги:*** наименование книги, фамилия автора, издательство, год издания, тираж.
- ***Магазины:*** шифр книги, номер магазина, цена.
- ***Учет продаж:*** код продажи, продано, остаток.

Определить: o количество проданных книг в заданном магазине; o суммарную стоимость всех непроданных книг; o среднюю цену одной книги.

- *Создать таблицу,* которая содержит суммарную стоимость книг, проданных каждым магазином.

Вариант № 28

Исходные данные:

- ***Детали:*** наименование детали, цех-изготовитель
- ***Изготовление:*** шифр материала, шифр детали, затрата материала на *1* деталь.
- ***Учет:*** дата изготовления, количество изготовленных деталей, количество брака.

Определить: o для всех деталей суммарные затраты материала на брак; o количество качественных деталей; o деталь, на которую тратится более всего материала. □ *Создать таблицу*, которая содержит шифр детали и процент брака.

Вариант № 29

Исходные данные:

- ***Лекарство:*** название лекарства, категория (антибиотик, жаропонижающее, витамины, противовоспалительное, антидепрессант), дата изготовления, дата истечения срока.
- ***Стоимость:*** шифр лекарства, код аптеки, цена за *1* упаковку.
- ***Продажа:*** количество проданных упаковок, остаток.

Определить: o суммарное количество упаковок лекарства, проданных всеми аптеками и принадлежащее заданной категории. o стоимость всех непроданных упаковок; o среднюю стоимость лекарства.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию о просроченных лекарствах: номер аптеки, название, категория и дату истечения срока.

Вариант № 30

Исходные данные:

- ***Продавцы:*** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- ***Товары:*** шифр товара, тип товара, сложность продажи (средняя, высокая);
- ***Журнал регистрации:*** количество проданных товаров по дням недели (понедельник, вторник, ..., суббота); *Определить:* o общее количество товаров, проданных каждым продавцом; o фамилия продавца, который продал наибольшее число товаров, и определить день, когда он достиг наивысшей производительности труда.
- *Создать таблицу,* которая содержит следующую информацию: фамилия продавца и общее количество товаров, проданное им за неделю.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. *Бекаревич Ю. Б., Пушкина Н. В*. СПб.: БХВ - Петербург, 2016. 464 с. (Самоучитель Microsoft Access 2013).
2. *Гурвиц Г.* Microsoft Access 2013. Разработка приложений на реальном примере:
М., 2012. 258 с.
3. *Одиночкина С. В.* Разработка баз данных в Microsoft Access 2010, НИУ ИТМО, 2012. 81 с.

Дополнительная литература:

1. *Домострой А.* MS Access 2013. Создание базы данных. Урок 1. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=uCenTUX1QcQ
2. *Домострой А.* MS Access 2013. Таблицы. Урок 2. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=VDuyue8ra2Q
3. *Домострой А.* MS Access 2013. Запросы. Урок 3. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=nSIHUvfBy34
4. *Домострой А.* MS Access 2013. Формы. Урок 4. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=54ZZhSYrz8s
5. *Домострой А.* MS Access 2013. Многотабличные формы. Урок 5. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=ou-1q4Q6NjY
6. *Домострой А.* MS Access 2013. Создание отчетов. Урок 6. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=PrH-S8r0nlE
7. *Домострой А.* MS Access 2013. Главная Кнопочная форма Урок 7. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=Ou0HJtzypOU
8. *Макарова Н. В.* Информатика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб: Питер, 2011. 576 с.: ил.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
__________________________С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Екатеринбург
2020

Оглавление

ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП
ТЕМА 1.1 ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ. ПОНЯТИЕ ППП

Цели и задачи дисциплины

- Изучение основных принципов, используемых в разработке интегрированных программных продуктов.
- Изучение структуры, состава и назначения компонентов интегрированного ПО, а также средств организации взаимодействия между компонентами и инструментальных средств расширения функциональности.
- Формирование навыков работы со средствами автоматизации решения прикладных задач.
- Формирование навыков использования встроенных средств разработки.
- Требования к уровню освоения дисциплины
- В результате изучения дисциплины студенты должны:
- знать принципы построения прикладных информационных систем
- уметь использовать современные программные средства для обработки разнородной информации;
- уметь автоматизировать процесс решения прикладных задач с помощью встроенных языков программирования;
- иметь представление о современном состоянии и тенденциях развития рынка прикладного ПО.

Основные понятия и определения

Информационная система (ИС) - организационно упорядоченная совокупность документов (массивов документов) и информационных технологий, в том числе с использованием средств вычислительной техники и связи, реализующих информационные процессы. Информационные системы предназначены для хранения, обработки, поиска, распространения, передачи и представления информации.

Автоматизированная (информационная) система (АС) - совокупность программных и аппаратных средств, предназначенных для хранения и/или управления данными и информацией и производства вычислений и управляемая человеком-оператором (в этом главное отличие автоматизированной системы от автоматической).

Многоуровневое представление ИС - модель представления информационной системы в виде совокупности взаимосвязанных уровней, разделенных по функциональному назначению (рис. 1).

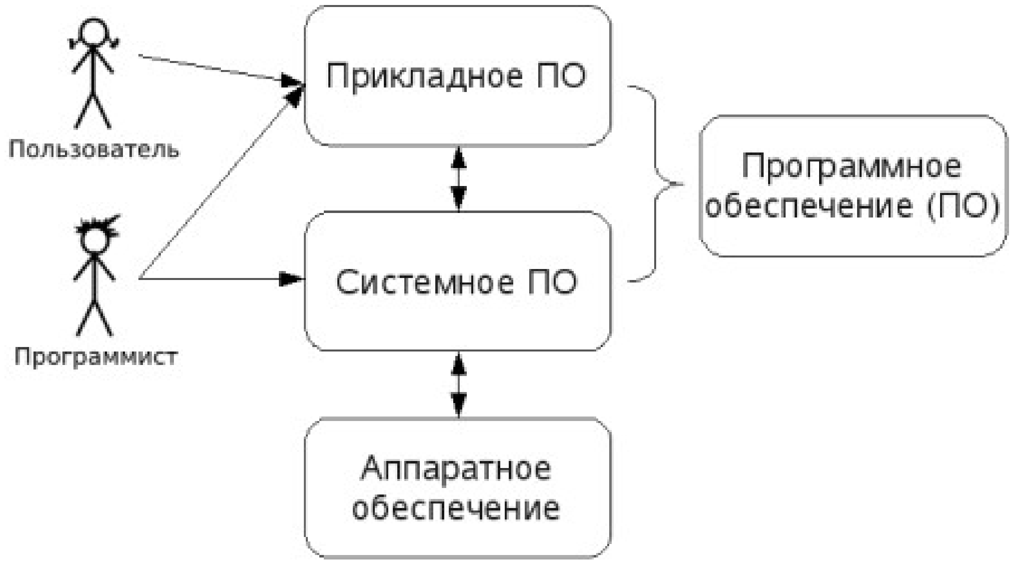


Рис. 1. Многоуровневое представление информационных систем.

Аппаратное обеспечение ИС - комплекс электронных, электрических и механических устройств, входящих в состав информационной системы или сети.

Программное обеспечение (ПО) — совокупность программ и данных, предназначенных для решения определенного круга задач и хранящиеся на машинных носителях.

Программа — последовательность формализованных инструкций, представляющих алгоритм решения некоторой задачи и предназначенная для исполнения устройством управления вычислительной машины. Инструкции программы записываются при помощи машинного кода или специальных языков программирования. В зависимости от контекста термин «программа» может относится к исходным текстам, при помощи которых записывается алгоритм, или к исполняемому машинному коду.

Программист - специалист, занимающийся разработкой и проверкой программ. Различают системных и прикладных программистов.

Пользователь - человек, принимающий участие в управлении объектами и система ми некоторой предметной области и являющийся составным элементом автоматизированной системы.

Прикладное программное обеспечение - программное обеспечение, ориентированное на конечного пользователя и предназначенное для решения пользовательских задач.

Прикладное ПО состоит из:

- отдельных прикладных программ и пакетов прикладных программ, предназначенных для решения различных задач пользователей;
- автоматизированных систем, созданных на основе этих пакетов.

Пакет прикладных программ - комплект программ, предназначенных для решения задач из определенной проблемной области. Обычно применение пакета прикладных программ предполагает наличие специальной документации: лицензионного свидетельства, паспорта, инструкции пользователя и т.п.

Классификация программного обеспечения

Любая классификация подразумевает выбор некоторого группировочного признака (или нескольких), на основании которого и производится отнесение объектов к тому или иному классу. Так, при классификации программного обеспечения по способу распространения можно выделить следующие категории список не полный):

- Commercial Software - коммерческое (с ограниченными лицензией возможностями на использование), разрабатываемое для получения прибыли.
- Freeware - свободное ПО, распространяемое без ограничений на использование, модификацию и распространение.
- Shareware - условно-бесплатное ПО, с частичными ограничениями при работе в ознакомительном режиме (например, определенное количество запусков программы).
- Abandonware - «заброшенное» ПО, поддержка которого непосредственным разработчиком прекращена, но продолжается третьими лицами (например, партнерами или энтузиастами).
- Adware - ПО, в код которого включены рекламные материалы. Такое ПО распространяется бесплатно, но для отключения рекламных блоков необходима оплата.
- Careware - «благотворительное» ПО, оплату за которое разработчик (или распро странитель) просит переводить на благотворительные нужды.

При классификации программного обеспечения по назначению в качестве критерия используют уровень представления ИС, на который ориентирована та или иная программа.

Соответственно выделяют следующие классы ПО:

1. Системное ПО - решает задачи общего управления и поддержания работоспособности системы в целом. К этому классу относят операционные системы, менеджеры загрузки, драйверы устройств, программные кодеки, утилиты и программные средства защиты информации.
2. Инструментальное ПО включает средства разработки (трансляторы, отладчики, интегрированные среды, различные SDK и т.п.) и системы управления базами данных (СУБД).
3. Прикладное ПО - предназначено для решения прикладных задач конечными пользователями.

Прикладное ПО - самый обширный класс программ, в рамках которого возможна дальнейшая классификация, например, по предметным областям. В этом случае группировочным признаком является класс задач, решаемых программой. Приведем несколько примеров:

- Офисные приложения - предназначены для автоматизации офисной деятельности (текстовые редакторы и процессоры, электронные таблицы, редакторы презентаций и т.п.)
- Корпоративные информационные системы - бухгалтерские программы, системы корпоративного управления, системы управления проектами (Project Management), инструменты автоматизации документооборота (EDM-системы) и управления архивами документов (DWM-системы)
- Системы проектирования и производства - системы автоматизированного проектирования (САПР, CAD/CAM-системы), системы управления технологическими (SCADA) и производственными (MES) процессами
- Научное ПО - системы математического и статистического расчета, анализа и моделирования
- Геоинформационные системы (ГИС)
- Системы поддержки принятия решений (СППР)
- Клиенты доступа к сетевым сервисам (электронная почта, веб-браузеры, передача сообщений, чат-каналы, клиенты файлообменных сетей и т.п.)
- Мультимедийное ПО - компьютерные игры, средства просмотра и редактирования аудио- и видеоинформации, графические редакторы и вьюеры, анимационные редакторы и т.п.

С точки зрения конечного пользователя такая классификация оправданна и наглядна, для разработчика же более значимым фактором является структура прикладной программы, в общем случае состоящей из нескольких компонентов. Назначение этих компонентов, связи между ними и способность к взаимодействию определяют интеграцию прикладного ПО. Чем теснее связаны программные компоненты, тем выше степень интеграции.

В зависимости от степени интеграции многочисленные прикладные программные средства можно классифицировать следующим образом[1]:

1. отдельные прикладные программы;
2. библиотеки прикладных программ;
3. пакеты прикладных программ;
4. интегрированные программные системы.

Отдельная прикладная программа пишется, как правило, на некотором высокоуровневом языке программирования (Pascal, Basic и т.п.) и предназначается для решения конкретной прикладной задачи. Такая программа может быть реализована в виде набора модулей, каждый из которых выполняет некоторую самостоятельную функцию (например, модуль пользовательского интерфейса, модуль обработки ошибок, модуль печати и т.п.).
При этом доступ к функциям модулей из внешних программ невозможен.

Библиотека представляет собой набор отдельных программ, каждая из которых решает некоторую прикладную задачу или выполняет определенные вспомогательные функции (управление памятью, обмен с внешними устройствами и т.п.). Библиотеки программ зарекомендовали себя эффективным средством решения вычислительных задач. Они интенсивно используются при решении научных и инженерных задач с помощью ЭВМ.
Условно их можно разделить на библиотеки общего назначения и специализированные библиотеки.

Пакет прикладных программ (ППП) - это комплекс взаимосвязанных программ, ориентированный на решение определенного класса задач. Формально такое определение не исключает из числа пакетов и библиотеки программ, однако у ППП, как отдельной категории, есть ряд особенностей, среди которых: ориентация на решение классов задач, унифицированный интерфейс, наличие языковых средств.

[1] Следует отметить отсутствие безусловных границ между перечисленными формами прикладного программного обеспечения

Интегрированная программная система - это комплекс программ, элементами которого являются различные пакеты и библиотеки программ. Примером служат системы автоматизированного проектирования, имеющие в своем составе несколько ППП различного назначения. Часто в подобной системе решаются задачи, относящиеся к различным классам или даже к различным предметным областям.

Понятие пакета прикладных программ

Итак, пакет прикладных программ (ППП) – это комплекс взаимосвязанных программ для решения определенного класса задач из конкретной предметной области. На текущем этапе развития информационных технологий именно ППП являются наиболее востребованным видом прикладного ПО. Это связано с упомянутыми ранее особенностями ППП. Рассмотрим их подробней:

- Ориентация на решение класса задач. Одной из главных особенностей является ориентация ППП не на отдельную задачу, а на некоторый класс задач, в том числе и специфичных, из определенной предметной области. Так, например, офисные пакеты ориентированы на офисную деятельность, одна из задач которой - подготовка документов (в общем случае включающих не только текстовую информацию, но и таблицы, диаграммы, изображения). Следовательно, офисный пакет должен реализовывать функции обработки текста, представлять средства обработки табличной информации, средства построения диаграмм разного вида и первичные средства редактирования растровой и векторной графики.
- Наличие языковых средств. Другой особенностью ППП является наличие в его составе специализированных языковых средств, позволяющих расширить число задач, решаемых пакетом или адаптировать пакет под конкретные нужды. Пакет может представлять поддержку нескольких входных языков, поддерживающих различные парадигмы. Поддерживаемые языки могут быть использованы для формализации исходной задачи, описания алгоритма решения и начальных данных, организации доступа к внешним источникам данных, разработки программных модулей, описания модели предметной области, управления процессом решения в диалоговом режиме и других целей. Примерами входных языков ППП являются VBA в пакете MS Office, AutoLISP/VisualLISP в Autodesk AutoCAD, StarBasic в OpenOffice.org

- Единообразие работы с компонентами пакета. Еще одна особенность ППП состоит в наличии специальных системных средств, обеспечивавших унифицированную работу с компонентами. К их числу относятся специализированные банки данных, средства информационного обеспечения, средства взаимодействия пакета с операционной системой, типовой пользовательский интерфейс и т.п.
-

ТЕМА 1.2 СТРУКТУРА И ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ППП

Несмотря на разнообразие конкретных пакетных разработок, их обобщенную внутреннюю структуру можно представить в виде трех взаимосвязанных элементов1 (рис. 2):

1. входной язык (макроязык, язык управления) - представляет средство общения пользователя с пакетом;
2. предметное обеспечение (функциональное наполнение) - реализует особенности конкретной предметной области;
3. системное обеспечение (системное наполнение) - представляет низкоуровневые средства, например, доступ к функциям операционной системы.

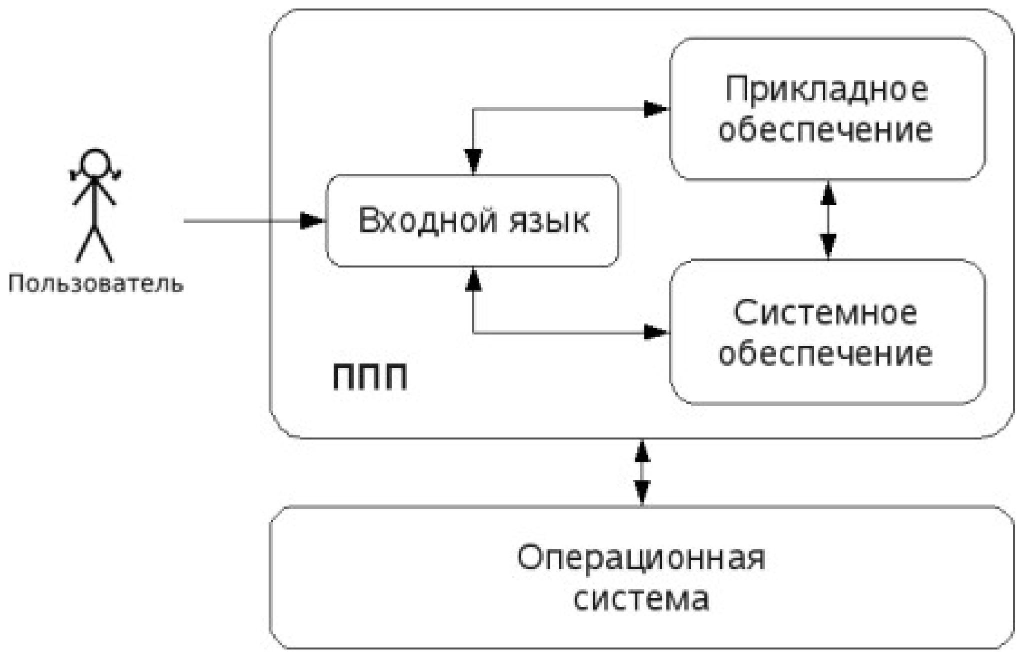


Рис. 2. Структура ППП.

Входной язык - основной инструмент при работе пользователя с пакетом прикладных программ. В качестве входного языка могут использоваться как универсальные (Pascal, Basic и т.п.), так и специализированные, проблемно-ориентированные языки программирования (Cobol - для бизнес-приложений, Lisp - списочные структуры данных, Fortran и MathLAB - математические задачи и т.п.).

Развитый пакет может обладать несколькими входными языками, предназначенными для выполнения различных функций в рамках решаемого класса задач. Так, например, в пакете OpenOffice.org поддерживаются языки StarBasic, Python, JavaScript и Java. StarBasic является основным входным языком, предназначенным для автоматизации работы с пакетом, для этого языка имеется интегрированная среда разработки и встроенный отладчик. Скрипты на языках Python и JavaScript загружаются и исполняются из внешних файлов. На Java (через SDK и функции API OpenOffice) можно создавать модули расширения и полнофункциональные приложения-компоненты.

Входные языки отражают объем и качество предоставляемых пакетом возможностей, а также удобство их использования. Таким образом, именно входной язык является основным показателем возможностей ППП. Однако стоит отметить, что в современных пакетах обращение пользователя к языковым средствам обычно происходит косвенно, через графический интерфейс.

Предметное обеспечение отражает особенности решаемого класса задач из конкретной предметной области и включает:

- программные модули, реализующие алгоритмы (или их отдельные фрагменты) прикладных задач;
- средства сборки программ из отдельных модулей.

Наиболее распространено в настоящее время оформление программных модулей в виде библиотек, подключаемых статически или динамически. В зависимости от использованного разработчиками подхода к проектированию и реализации ППП такие библиотеки содержат встроенные классы и описания их интерфейсов (при использовании объектно-ориентированного программирования). При использовании парадигмы структурного программирования в библиотечных модулях содержатся процедуры и функции, предназначенные для решения некоторых самостоятельных задач. В обоих случаях библиотеки связаны с другими модулями пакета лишь входной и выходной информацией.

Системное обеспечение представляет собой совокупность низкоуровневых средств (программы, файлы, таблицы и т.д.), обеспечивающих определенную дисциплину работы пользователя при решении прикладных задач и формирующих окружение пакета. К системному обеспечению ППП относят следующие компоненты:

- монитор - программа, управляющая взаимодействием всех компонентов ППП;
- транслятор(ы) с входных языков - для ППП характерно использование интерпретируемых языков;
- средства доступа к данным - драйверы баз данных и/или компоненты, представляющие доступ через унифицированные интерфейсы (ODBC, JDBC, ADO, BDE и т.п.);
- информационно-справочный модуль - предоставляет функции поддержки, среди которых информационные сообщения, встроенная справочная системы и т.п.

различные служебные программы, выполняющие низкоуровневые операции (автосохранение, синхронизация совместно используемых файлов и т.д.)

Приведенная логическая структура ППП достаточна условна и в конкретном ППП может отсутствовать четкое разделение программ на предметное и системное обеспечение. Например, программа планирования вычислений, относящаяся к прикладному обеспечению, может одновременно выполнять и ряд служебных функций (информационное обеспечение, связь с операционной системой и т.п.).

Кроме того, одни и те же программы в одном пакете могут относиться к предметному обеспечению, а в другом - к системному. Так, программы построения диаграмм в рамках специализированного пакета машинной графики естественно отнести к предметному обеспечению. Однако те же программы следует считать вспомогательными и относящимися к системному обеспечению, например, в пакете решения вычислительных задач.

ТЕМА 1.3 ЭВОЛЮЦИЯ ППП. ПРИМЕРЫ СОВРЕМЕННЫХ ППП

Этапы развития ППП

Первые ППП представляли собой простые тематические подборки программ для решения отдельных задач в той или иной прикладной области, обращение к ним выполнялось с помощью средств оболочки ОС или из других программ. Современный пакет является сложной программной системой, включающей специализированные системные и языковые средства. В относительно короткой истории развития вычислительных ППП можно выделить *4 основных поколения* (класса) пакетов. Каждый из этих: классов характеризуется определенными особенностями входящих состав ППП компонентов - входных языков, предметного и системного обеспечения.

Первое поколение

В качестве входных языков ППП первого поколения использовались универсальные языки программирования (Фортран, Алгол-60 и т.п.) или языки управления заданиями соответствующих операционных систем. Проблемная ориентация входных языков достигалась за счет соответствующей мнемоники в идентификаторах. Составление заданий на таком языке практически не отличалось от написания программ на алгоритмическом языке.

Предметное обеспечение первых ППП, как правило, было организовано в форме библиотек программ, т.е. в виде наборов (пакетов) независимых программ на некотором базовом языке программирования (отсюда впервые возник и сам термин «пакет»). Такие ППП иногда называют *пакетами библиотечного типа*, или *пакетами простой структуры*.

В качестве системного обеспечения пакетов первого поколения обычно использовались штатные компоненты программного обеспечения ЭВМ: компиляторы с алгоритмических языков, редакторы текстов, средства организации библиотек программ, архивные системы и т.д. Эти пакеты не требовали сколько-нибудь развитой системной поддержки, и для их функционирования вполне хватало указанных системных средств общего назначения. В большинстве случаев разработчиками таких пакетов были прикладные программисты, которые пытались приспособить универсальные языки программирования к своим нуждам.

Второе поколение

Разработка ППП второго поколения осуществлялась уже с участием системных программистов. Это привело к появлению специализированных входных языков на базе универсальных языков программирования. Проблемная ориентация таких языков достигалась не только за счет использования определенной мнемоники, но также применением соответствующих языковых конструкций, которые упрощали формулировку задачи и делали ее более наглядной. Транслятор с такого языка представлял собой препроцессор (чаще всего макропроцессор) к транслятору соответствующего алгоритмического языка.

В качестве модулей в пакетах этого класса стали использоваться не только программные единицы (т.е. законченные программы на том или ином языке программирования), но и такие объекты, как последовательность операторов языка программирования, совокупность данных, схема счета и др.

Существенные изменения претерпели также принципы организации системного обеспечения ППП. В достаточно развитых пакетах второго поколения уже можно выделить элементы системного обеспечения, характерные для современных пакетов: монитор, трансляторы с входных языков, специализированные банки данных, средства описания модели предметной области и планирования вычислений и др.

Третье поколение

Третий этап развития ППП характеризуется появлением самостоятельных входных языков, ориентированных на пользователей-непрограммистов. Особое внимание в таких ППП уделяется системным компонентам, обеспечивающим простоту и удобство. Это достигается главным образом за счет специализации входных языков и включения в состав пакета средств автоматизированного планирования вычислений.

Четвертое поколение

Четвертый этап характеризуется созданием ППП, эксплуатируемых в интерактивном режиме работы. Основным преимуществом диалогового взаимодействия с ЭВМ является возможность активной обратной связи с пользователем в процессе постановки задачи, ее решения и анализа полученных результатов. Появление и интенсивное развитие различных форм диалогового общения обусловлено прежде всего прогрессом в области технических средств (графическая подсистема ЭВМ и средства мультимедиа, сетевые средства). Развитие аппаратного обеспечения повлекло за собой создание разнообразных программных средств поддержки диалогового режима работы (диалоговые операционные системы, диалоговые пакеты программ различного назначения и т. д.).

Прикладная система состоит из *диалогового монитора* - набора универсальных программ, обеспечивающих ведение диалога и обмен данными, и базы знаний об области. Информация о структуре, целях и форма диалога задает сценарий, в соответствии с который монитор управляет ходом диалога. Носителями процедурных знаний о предметной области являются прикладные модули, реализующие функции собственной системы. Таким образом, создание прикладной системы сводится к настройке диалогового монитора на конкретный диалог, путем заполнения базы знаний. При этом программировать в традиционном смысле этого слова приходится лишь прикладные модули, знания о диалоге вводятся в систему с помощью набора соответствующих средств - редактора сценариев. Логично требовать, чтобы редактор сценариев также представлял собой диалоговую программу, отвечавшую рассмотренным выше требованиям. Благодаря готовому универсальному монитору программист может сосредоточиться на решении чисто прикладных задач, выделение же знаний о диалоге в сценарий обеспечивает в значительной степени необходимая гибкость программного продукта.

Большое внимание в настоящее время уделяется проблеме создания *«интеллектуальных ППП»*. Такой пакет позволяет конечному пользователю лишь сформулировать свою задачу в содержательных терминах, не указывая алгоритма ее решения. Синтез решения и сборка целевой программы производятся автоматически. При этом детали вычислений скрыты от пользователя, и компьютер становится интеллектуальным партнером человека, способным понимать его задачи. Предметное обеспечение подобного ППП представляет собой некоторую базу знаний, содержащую как процедурные, так и описательные знания. Такой способ решения иногда называют концептуальным программированием, характерными особенностями которого является программирование в терминах предметной области использование ЭВМ уже на этапе постановки задач, автоматический синтез программ решения задачи, накопление знаний о решаемых задачах в базе знаний.

Краткий обзор некоторых ППП

Для иллюстрации ранее рассмотренных материалов приведем несколько примеров современных пакетов прикладных программ из различных предметных областей. Учитывая, что постоянно появляются новые версии программных продуктов, здесь будут рассматриваться не возможности конкретных версий, а лишь основные структурные компоненты, входящие в состав того или иного пакета.

Autodesk AutoCAD

Основное назначение ППП AutoCAD - создание чертежей и проектной документации. Современные версии этого пакета представляют существенно большие возможности, среди которых построение трехмерных твердотельных моделей, инженерно-технические расчеты и многое другое.

Первые версии системы AutoCAD, разрабатываемой американской фирмой Autodesk, появились еще в начале 80-х годов двадцатого века, и сразу же привлекли к себе внимание своим оригинальным оформлением и удобством для пользователя. Постоянное развитие системы, учет замечаний, интеграция с новыми продуктами других ведущих фирм сделали

AutoCAD мировым лидером на рынке программного обеспечения для автоматизированного проектирования.

Языковые средства

В основе языковых средств ППП AutoCAD - технология Visual LISP, базирующаяся на языке AutoLISP (подмножество языка LISP) и используемая для создания приложений и управления в AutoCAD. Visual LISP представляет полное окружение, включающее:

- Интегрированную среду разработки, облегчающую написание, отладку и сопровождение приложений на AutoLISP
- Доступ к объектам ActiveX и обработчикам событий
- Защиту исходного кода
- Доступ к файловым функциям операционной системы
- Расширенные функции языка LISP для обработки списочных структур данных.

Для разработчиков совместимых приложений в AutoCAD включена поддержка ObjectARX. Это программное окружение представляет объектно-ориентированный интерфейс для приложений на языках C++, C# и VB.NET и обеспечивает прямой доступ к структурам БД, графической подсистеме и встроенным командам пакета.

Кроме того, в AutoCAD имеется поддержка языка Visual Basic for Applications (VBA), что позволяет использовать этот пакет совместно с другими приложениями, в частности, из семейства Microsoft Office.

Предметное обеспечение

К предметному обеспечению пакета в первую очередь относятся функции построения примитивов - различных элементов чертежа. Простые примитивы - это такие объекты как точка, отрезок, круг (окружность) и т.д. К сложным примитивам относятся: полилиния, мультилиния, мультитекст (многострочный текст), размер, выноска, допуск, штриховка, вхождение блока или внешней ссылки, атрибут, растровое изображение. Кроме того, есть пространственные примитивы, видовые экраны и пр. Операции построения *большей части* примитивов могут быть выполнены через пользовательский интерфейс, *все* - через команды языка.

Высокоуровневые средства представлены расширениями и приложениями AutoCAD для конкретных предметных областей. Например в машиностроении используется Autodesk

Mechanical Desktop - предназначенный для сложного трехмерного моделирования, в том числе валов и пружин. Для проектирования деталей из листовых материалов предназначена система Copra Sheet Metal Bender Desktop (разработчик - Data-M Software GmbH). Моделирование динамики работы механизмов может выполняться в системе Dynamic Designer (Mechanical Dynamics). В числе известных архитектурных и строительных приложений можно отметить системы АРКО (АПИО-Центр), СПДС GraphiCS (Consistent Software), ArchiCAD. Для проектирования промышленных объектов может использоваться система PLANT-4D (CEA Technology). Это лишь некоторые из областей использования AutoCAD.

Системное обеспечение

Среди системного обеспечения следует отметить основной формат файлов AutoCAD .dwg, который стал стандартом «де факто» для прочих САПР.

К системному же обеспечению относятся типовые и специализированные библиотеки деталей и шаблонов, использование которых позволяет существенно ускорить процесс проектирования. Здесь же упомянем требования отраслевых и государственных стандартов, которым должны соответствовать чертежи и спецификации.

Конфигурация и настройки различных режимов AutoCAD устанавливаются через т.н. системные переменные. Изменяя их значения можно задавать пути к файлам, точность вычислений, формат вывода и многое другое.

Adobe Flash

Adobe (ранее Macromedia) Flash - это технология и инструментарий разработки интерактивного содержания с большими функциональными возможностями для цифровых, веб- и мобильных платформ. Она позволяет создавать компактные, масштабируемые анимированные приложения (ролики), которые можно использовать как отдельно, так и встраивая в различное окружение (в частности, в веб-страницы). Эти возможности обеспечиваются следующими компонентами технологии: языком Action Script, векторным форматом .swf и видеоформатом .flv, всевозможными flash-плейерами для просмотра и редакторами для создания.

Рассмотрим интегрированную среду Adobe Flash как основное средство создания flash-приложений. При этом отметим, что языковые и системные средства относятся не только к этому пакету, а к технологии в целом.

Язык ActionScript

ActionScript — объектно-ориентированный язык программирования, который добавляет интерактивность, обработку данных и многое другое в содержимое Flash-приложений. Синтаксис ActionScript основан на спецификации ECMAScript (сюда же относятся языки JavaScript и JScript). Библиотека классов ActionScript, написанная на C++, представляет доступ к графическим примитивам, фильтрам, принтерам, геометрическим функциям и пр.

ActionScript как язык появился с выходом 5 версии Adobe (тогда еще Macromedia) Flash, которая стала первой программируемой на ActionScript средой. Первый релиз языка назывался ActionScript 1.0. Flash 6 (MX). В 2004 году Macromedia представила новую версию ActionScript 2.0 вместе с выходом Flash 7 (MX 2004), в которой было введено строгое определение типов, основанное на классах программирование: наследование, интерфейсы и т. д. Также Macromedia была выпущена модификация языка Flash Lite для программирования под мобильные телефоны. ActionScript 2.0 является не более чем надстройкой над ActionScript 1.0, то есть на этапе компиляции ActionScript 2.0 осуществляет некую проверку и превращает классы, методы ActionScript 2.0 в прежние прототипы и функции ActionScript 1.0.

В 2005 году вышел ActionScript 3.0 в среде программирования Adobe Flex, а позже в Adobe Flash 9.

ActionScript 3.0 (текущая версия на момент подготовки этого материала) представляет, по сравнению с ActionScript 2.0 качественное изменение, он использует новую виртуальную машину AVM 2.0 и дает взамен прежнего формального синтаксиса классов настоящее классовое (class-based) Объектно-ориентированное программирование. ActionScript 3.0 существенно производительней предыдущих версий и по скорости приблизился к таким языкам программирования, как Java и C++.

С помощью ActionScript можно создавать интерактивные мультимедиа-приложения, игры, веб-сайты и многое другое.

Системное обеспечение

ActionScript исполняется виртуальной машиной (ActionScript Virtual Machine), которая является составной частью Flash Player. ActionScript компилируется в байткод, который включается в SWF-файл.

SWF-файлы исполняются Flash Player-ом. Flash Player существует в виде плагина к веб-браузеру, а также как самостоятельное исполняемое приложение. Во втором случае возможно создание исполняемых exe-файлов, когда swf-файл включается во Flash Player.

Для создания и просмотра видеофайлов в формате flv используются программные кодеки, поддерживающие этот формат.

Прикладное обеспечение

К прикладному обеспечению в рамках технологии Flash относятся средства создания роликов в форматах .swf, .flv и .exe. Основным инструментом является среда среда Adode Flash, включающая различные средства для создания и редактирования мультимедийного содержания, в т.ч. видео- и аудиофайлов, интегрированную среду разработки на ActionScript и множество дополнительных функций упрощения процесса создания роликов.

Пакет MatLab

MatLab (сокращение от англ. «Matrix Laboratory») — пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений, и язык программирования, используемый в этом пакете. По данным фирмы-разработчика, более 1000000 инженерных и научных работников используют этот пакет, который работает на большинстве современных операционных систем, включая GNU/Linux, Mac OS, Solaris и Microsoft Windows.

Язык MatLab

MATLAB как язык программирования был разработан Кливом Моулером (англ. Cleve Moler) в конце 1970-х годов. Целью разработки служила задача использования программных математических библиотек Linpack и EISPACK без необходимости изучения языка Фортран. Акцент был сделан на матричные алгоритмы.

Программы, написанные на MATLAB, бывают двух типов — функции и скрипты. Функции имеют входные и выходные аргументы, а также собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Скрипты же используют общее рабочее пространство. Как скрипты, так и функции не компилируются в машинный код, а сохраняются в виде текстовых файлов. Существует также возможность сохранять так называемые pre-parsed программы — функции и скрипты, приведенные в вид, удобный для машинного исполнения и, как следствие, более быстрые по сравнению с обычными.

Системное обеспечение

Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Имеются интерфейсы для получения доступа к внешним данным, клиентам и серверам, общающимся через технологии Component Object Model (COM) или Dynamic Data Exchange (DDE), а также периферийным устройствам, которые взаимодействуют напрямую с MATLAB. Многие из этих возможностей известны под названием MATLAB API.

Встроенная среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления, такими как кнопки, поля ввода и другими. С помощью компонента MATLAB Compiler эти графические интерфейсы могут быть преобразованы в самостоятельные приложения.

Для MATLAB имеется возможность создавать специальные наборы инструментов (англ. toolbox), расширяющие его функциональность. Наборы инструментов представляют собой коллекции функций, написанных на языке MATLAB для решения определенного класса задач.

Прикладное обеспечение

MATLAB предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием концепций объектно-ориентированного программирования. В нем имеются все необходимые средства интегрированной среды разработки, включая отладчик и профайлер.

MATLAB предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающие практически все области математики, в частности:

- Матрицы и линейная алгебра — алгебра матриц, линейные уравнения, собственные значения и вектора, сингулярности, факторизация матриц и другие.
- Многочлены и интерполяция — корни многочленов, операции над многочленами и их дифференцирование, интерполяция и экстраполяция кривых и другие.
- Математическая статистика и анализ данных — статистические функции, статистическая регрессия, цифровая фильтрация, быстрое преобразование Фурье и другие.

- Обработка данных — набор специальных функций, включая построение графиков, оптимизацию, поиск нулей, численное интегрирование (в квадратурах) и другие.
- Дифференциальные уравнения — решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием, уравнений с ограничениями, уравнений в частных производных и другие.
- Разреженные матрицы — специальный класс данных пакета MATLAB, использующийся в специализированных приложениях.

В составе пакета имеется большое количество функций для построения графиков, в том числе трехмерных, визуального анализа данных и создания анимированных роликов, функции для создания алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений.

ЧАСТЬ II. ППП MS OFFICE

ТЕМА 2.1 СТРУКТУРА И СОСТАВ MS OFFICE. ОСНОВНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Структура MS Office и назначение компонентов

ППП Microsoft Office - это совокупность программных средств автоматизации офисной деятельности. В состав пакета входит множество приложений, каждое из которых предназначено для выполнения определенных функций и может быть использовано автономно и независимо от остальных. Весь набор офисных приложений можно разделить на *основные* и *дополнительные*.

Основные компоненты Microsoft Office

Список и назначение основных компонентов, входящих в состав Microsoft Office приведен в таб. 1.

Таблица 1. Основные компоненты Microsoft Office

Название приложения	Функциональное назначение приложения
Microsoft Word	Текстовый процессор
Microsoft Excel	Табличный процессор
Microsoft PowerPoint	Система подготовки презентаций
Outlook	Система управления персональной информацией

Microsoft Access	Система управления базами данных
Microsoft Binder	Система управления подшивками
Microsoft FrontPage	Система управления Web-узлами
Microsoft PhotoDraw	Графический редактор
Microsoft Publisher	Настольная издательская система
Microsoft Project	Система управления проектами
Microsoft Team Manager	Система управления персоналом

Дополнительные компоненты MS Office

Кроме основных компонентов, в семейство Microsoft Office входит большое количество вспомогательных приложений, которые устанавливаются (или не устанавливаются) вместе с основными. Ими можно воспользоваться из основных приложений или вызвать независимо. В таб. 2 перечислены некоторые из вспомогательных приложений.

Таблица 2. Некоторые вспомогательные приложения Microsoft Office

Название приложения	**Функциональное назначение приложения**
Microsoft Query	Интерпретатор запросов к внешним базам данных
Microsoft Organization Chart	Программа рисования блок-схем
Microsoft WordArt	Программа создания фигурных текстов
Microsoft Equation	Редактор математических формул
Microsoft Map	Программа отображения данных на географических картах
Microsoft Graph	Программа построения диаграмм
Microsoft Photo Editor	Графический редактор
Microsoft Draw	Средство рисования
Microsoft Find Fast	Служба индексации документов
Microsoft Extended Finder	Средство поиска документов в папках файловой системы и электронной почты
Microsoft Script Editor	Редактор сценариев
Microsoft ClipArt	Коллекция картинок и клипов

Панель Microsoft Office	Средство быстрого доступа к приложениям Office

Кроме основных и вспомогательных приложений, могут быть установлены и использованы различные расширения (надстройки). Их можно условно разделить на три группы:

1. *Самостоятельные приложения*, разработанные фирмой Microsoft, которые являются компонентами семейства Microsoft Office, но формально не входят в состав пакета. Примерами являются приложения Microsoft Project и Microsoft Team Manager.
2. *Надстройки* над компонентами Microsoft Office, разработанные фирмой Microsoft и представляющие собой дополнительные функции. Как правило, надстройки оформляются не в виде готовых к выполнению программ, а в виде документов специального типа: шаблонов, рабочих книг, библиотек динамической компоновки (DLL) и т.п.
3. *Приложения третьих фирм*, разработанные для пользователей Microsoft Office. В этот класс попадают как продукты сторонних фирм, так и собственные разработки пользователей. Сюда можно отнести средства распознавания текстов (OCR), автоматического перевода текста, средства управления большими массивами документов (перечисленные задачи не реализованы или слабо развиты в самом пакете MS
   Office).

Приведенный перечень основных компонентов носит условный характер, поскольку состав пакета зависит от следующих факторов:

1. *Устанавливаемый комплект (или редакция) пакета*. Пакет выпускается в нескольких редакциях, и состав приложений в разных редакциях различен.
2. *Источник установки. Установка* может быть выполнена с компакт-диска или с сетевого сервера. Наборы файлов, которые устанавливаются на компьютер, существенно различаются.
3. *Операционная система*. Microsoft Office может работать под управлением различных ОС: MS Windows и Mac OS. Эти операционные системы могут иметь разные версии и модификации, что также влияет на состав устанавливаемых компонентов.

4. *Наличие на компьютере в момент установки предшествующих версий*. Некоторые компоненты старых версий автоматически включаются в состав обновляемой версии Microsoft Office (если они уже установлены на компьютере).
5. *Параметры, заданные при установке*. В случае так называемой выборочной (т.е. по выбору пользователя) установки, можно указать несколько десятков независимых параметров, влияющих на состав пакета.

Несмотря на большое число различных приложений в составе пакета, все они в совокупности образуют единое целое. Для каждого из приложений MS Office характерно наличие следующих отличительных признаков:

1. совместимость по данным;
2. унифицированный интерфейс;
3. единые средства программирования.

Документы Microsoft Office

Единица данных самого верхнего уровня структуризации в Microsoft Office называется **документом**.

Документы классифицируются по типам в зависимости от того, какого сорта информация в них хранится. Как правило, документы разных типов обрабатываются разными приложениями Microsoft Office. Основные типы документов, с которыми работают программы Microsoft Office, перечислены в таб. 3.

Таблица 3. Основные типы документов Microsoft Office

Название	Расширение	Приложение	Краткое описание
Документ	.doc	Word	Основной тип документов Word. Содержит форматированный текст, т.е. текст с дополнительной информацией о шрифтах, отступах, интервалах и т.п., а также рисунки, таблицы и другие элементы
Рабочая книга	.xls	Excel	Основной тип документов Excel. Содержит данные различных типов: формулы, диаграммы и макросы
База данных	.mdb	Access	Основной тип документов Access. Содержит как собственно базу данных, то есть совокупность таблиц, так и соответствующие запросы, макросы, модули, формы и отчеты

Презентация	.ppt	PowerPoint	Основной тип документов PowerPoint. Содержит презентацию, состоящую из набора слайдов, заметок выступающего, раздаточных материалов и другой информации
Публикация	.pub	Publisher	Основной тип документов Publisher. Как и Word, содержит форматированный текст, рисунки, таблицы и т.п.
План проекта	.mpp	Project	Основной тип документов Project. Содержит календарный план проекта, описание задач, ресурсов и их взаимосвязи

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующий вывод: входящие в состав пакета MS Office приложения способны тесно взаимодействовать при решении прикладных задач; они создают единую информационную среду и позволяют обмениваться объектами. Документы Microsoft Office являются частными примерами объектов. Поэтому Microsoft Office является *документо-ориентированным пакетом* (средой).

Программная среда

Основным средством разработки приложений в MS Office является комплексное решение на основе языка Visual Basic, а именно - Visual Basic for Application (VBA). Эта технология включает макрорекордер, интерпретатор Visual Basic, интегрированную среду разработки с встроенным отладчиком, библиотеки времени выполнения (runtime library) и библиотеки типов, представляющие объекты пакета. Эти средства позволяют расширять функциональность пакета и адаптировать его к решению специализированных задач.

Интерфейс MS Office

Приложения Microsoft Office имеют унифицированный интерфейс, суть которого заключается в следующем: сходные функции имеют одинаковое обозначение (название команды или значок на кнопке), а несходные функции имеют различные обозначения.

В большей степени унификация коснулась интерфейсов таких приложений, как Microsoft Word, Microsoft Excel и Microsoft PowerPoint.

Одним из достоинств пакета Microsoft Office является последовательное использование графического интерфейса пользователя (Graphical User Interface, GUI), представляемого операционной системой и различных элементов управления. Как правило, отдельные элементы группируются в более крупные конструкции, такие как окна, панели инструментов, меню. Рассмотрим характеристику каждой из этих групп.

Оконный интерфейс

Оконный интерфейс - такой способ организации пользовательского интерфейса программы, когда каждая интегральная часть располагается в *окне* — собственном субэкранном пространстве, находящемся в произвольном месте «над» основным экраном. Несколько окон одновременно располагающихся на экране могут перекрываться, находясь
«выше» или «ниже» друг относительно друг

В MS Office использует окна четырех типов:

- окно приложения;
- окно документа; • диалоговое окно;
- форма.

Панели инструментов

Панели инструментов - это элементы пользовательского интерфейса, на которых могут располагаются такие элементы управления, как кнопки быстрого вызова и раскрывающиеся списки. Панели инструментов разных приложений могут содержать кнопки, сходные по функциям и внешнему виду, что упрощает освоение интерфейса Microsoft Office.

Панели инструментов могут быть:

- пристыкованными вдоль границы окна приложения;
- плавающими, т.е. находится в любой части окна приложения;
- представленными в отдельных окнах; в этом случае форму и размеры панели инструментов можно менять произвольно.

Меню

Меню представляет доступ к иерархическим спискам доступных команд. Результатом выбора команды из меню может быть:

- непосредственное выполнение некоторого действия;
- раскрытие еще одного меню;

- раскрытие диалогового окна или формы.

Меню интерфейса Microsoft Office, кроме строки меню любого приложения, можно разделить (по способу перехода к ним) на раскрывающиеся и контекстные (или всплывающие).

Элементы управления

Элементы управления - это объекты оконного интерфейса, реализующие типовые операции с интерфейсом: щелчок мышью, выбор из списка, выбор вариантов, прокрутка и т.п. К элементам управления относятся следующие: кнопки, текстовые поля (или поля ввода), флажки, переключатели, списки и раскрывающиеся списки, полосы прокрутки, палитры, счетчики и прочие, специфичные для некоторых приложений или условий.

ТЕМА 2.2 ВВЕДЕНИЕ В ОФИСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Офисное программирование — это процесс разработки приложений, предназначенных для автоматизации офисной деятельности с использованием специализированных пакетов (MS Office, OpenOffice.org или подобных).

Офисное программирование имеет ряд особенностей, отличающих его от программирования в общем смысле:

- цели разработки;
- область применения;
- макроязык;
- среда разработки;
- поддержка объектно-ориентированного программирования.

Рассмотрим эти особенности на примере MS Office.

Цели разработки

В офисной среде *программный проект неразрывно связан с документом*, хранится как часть документа и не может существовать независимо от него. *Документ, а не программа, является целью разработки.*

Стандартные возможности среды по работе с документами велики. Однако возможность изменить типовой документ, снабдив его дополнительными функциями – это одна из важнейших задач офисного программирования. Для ее решения офисная среда представляет совокупность библиотек классов, которые составляют каркас (Framework) текстовых документов, электронных таблиц, презентаций, баз данных и приложений на основе этих документов. Всякий раз, когда создается новый документ, его каркас составляют объекты библиотек, заданные по умолчанию. Этот каркас можно существенно изменить, добавив в документ новые свойства. Расширение каркаса не требует от программиста значительных усилий – достаточно включить в него необходимые библиотеки классов.

Область применения

Область применения офисного программирования широка – от настройки отдельных документов до решения задач автоматизации офисной деятельности масштаба предприятия, в т.ч. ориентированных на совместную работу в глобальной сети.

Visual Basic for Application

Visual Basic для приложений (Visual Basic for Application, VBA) – это инструмент разработки приложений, который позволяет создавать программные продукты, решающие практически все задачи, встречающиеся в среде Windows. Эти продукты можно использовать, например, для оформления документов (подготовки текстов) или анализа данных таблиц (электронных таблиц). VBA – уникальное приложение, поскольку оно встраивается в другое приложение и расширяет его функциональные возможности.

Visual Basic for Application (VBA) - стандартный макроязык пакета Microsoft Office, предназначенный для расширения функциональных возможностей приложения в котором используется.

С помощью VBA можно:

- создать собственное диалоговое окно и придать ему требуемый внешний вид;
- создать макросы, расширяющие функциональные возможности приложения, в которое встроен VBA;
- изменить меню приложения Microsoft Office;
- управлять другим приложением Microsoft Office или принадлежащими ему данными;
- объединить данные из нескольких приложений Microsoft Office в одном документе;
- автоматически создавать или изменять страницы Web, совместно используя приложения Microsoft Office и VBA.

Для разработчика доступны следующие инструменты и средства, которые используются при создании проекта VBA:

- отладка приложений без предварительной компиляции;
- средства Win32 API;
- SQL и объекты доступа к данным для управления данными и извлечения их из внешних источников данных, таких как Microsoft SQL Server;
- построение и проверка элементов интерфейса непосредственно в среде разработки VBA (Integrated Development Environment, IDE);
- связывание программ и процедур с событиями, которые возникают в приложениях VBA.

Среда разработки

Среда приложений Office ориентирована в первую очередь на пользователей, а не на программистов и в ней можно создавать документы без всякого программирования. Поэтому программист обычно начинает работать с документами не на пустом месте, а с их заготовками, созданными пользователями, т.е. и сам программист может выступать в роли пользователя. Средства совместной работы над документами Office обеспечивают одновременную работу программистов и пользователей.

Среда MS Office предлагает два способа создания программ, отличающихся подходом к процессу: использование макрорекордера и ручное кодирование (на языке VBA). Эти подходы ориентированы на разные категории: непосредственно пользователей и программистов соответственно.

Макрорекордер (MacroRecorder) – это программный инструмент, записывающий действия пользователя при работе с документами и приложениями, с сохранением записи в виде макроса -исходного кода на языке VBA. При вызове сохраненного макроса воспроизводится вся сохраненная последовательность действий.

Макрорекордер представляет возможность создания программного проекта или, по крайней мере, его отдельных компонентов автоматически, без программирования. Для записи и воспроизведения макроса не требуется специальных знаний, поэтому пользователь может самостоятельно создавать программы (макросы), в общем случае даже не представляя себе, как они работают.

Для программиста макрорекордер полезен тем, что позволяет создавать фрагменты программы автоматически, тем самым увеличивая скорость разработки и уменьшая время отладки.

Интегрированная среда разработки на VBA (Visual Basic Environment, VBA) - встроенное в MS Office средство для написания, тестирования и отладки приложений на VBA. Среда VBA представляет все возможности для создания законченных офисных приложений, включая средства визуального проектирования пользовательского интерфейса. VBA ориентирована на использование программистами для разработки офисных приложений (это отнюдь не означает, что пользователи не могут применять VBA).

Поддержка ООП

Разработка приложений для MS Office тесно связана с парадигмой объектно-ориентированного программирования. Все документы (более того, сами компоненты пакета) в MS Office - суть объекты, наделенные собственными наборами свойств (характеристик объекта), методов (подпрограмм управления свойствами) и событий (подпрограмм, обрабатывающих изменения состояния объекта в результате некоторых действий). Соответственно, для обеспечения более полной интеграции с пакетом, входной язык (VBA) также поддерживает ООП.

Все объекты приложения MS Office образуют иерархическую структуру, которая определяет связь между ними и способ доступа. Такая структура называется объектной моделью (object model). За рамки объектной модели выходят, но также могут использоваться в офисных приложениях, внешние объекты, поддерживающие технологии DDE, OLE/ActiveX и ряд других.

В объектно-ориентированную концепцию удачно вписывается технология *визуального программирования*. Все отображаемые элементы графического интерфейса, такие как формы, элементы управления, меню и панели инструментов являются объектами, наделенными набором свойств и методов и способными реагировать на события (например, щелчки мыши, нажатия клавиш и т.п.). При визуальном подходе не требуется программного задания (хотя это и возможно) их основных свойств (например, ширина или высота, цвет фона и т.п.). Эти свойства можно задать при помощи мыши (например, ширину и высоту формы путем операции "перетаскивания" маркеров) или установить их в окне свойств (название формы, цвет фона формы и т. д.). Таким образом, визуальное программирование делает проектирование интерфейса программы более наглядным и быстрым. При этом сохраняется возможность управлять всеми объектами и программно.

Преимущества офисного программирования

Преимущества, которые получает конечный пользователь, использующий программируемые офисные документы:

- Пользователь получает документы, обладающие новыми функциями и способные решать задачи, характерные для проблемной области пользователя.
- Пользователь находится в единой офисной среде независимо от того, с каким документом он работает в данный момент и какой программист разрабатывал этот документ.
- Большинство доступных при работе с документами функций являются общими для всех документов, поскольку их предоставляет сама офисная среда. Единый стиль интерфейса разных документов облегчает работу с ними.
- Пользователь сам, не будучи программистом, способен создавать простые виды программируемых офисных документов, постепенно совершенствуясь в этой деятельности.

Преимущества, которые получает программист, работающий в Office:

- В распоряжении программиста находится мощная интегрированная среда. Для него эта среда представлена в виде совокупности хорошо организованных объектов, доступных в языке программирования и по принципу работы ничем не отличающихся от встроенных объектов языка или объектов, создаваемых самим программистом.
- Большинство повседневных задач становятся для него простыми, – чтобы их решить, зачастую достаточно стандартных средств.
- Там, где стандартных средств не хватает, где у документа должны появиться новые функциональные возможности, где необходимо создать документ по заказу, вступает в силу язык программирования – VBA, существенная особенность которого – возможность работы с объектами любого из приложений Office.

- Офисное программирование позволяет применять на практике идеи компонентного программирования. Компонентный подход предполагает взаимодействие компонентов, создаваемых в разных программных средах, на разных языках, на разных платформах и находящихся на разных машинах. Работа с компонентами (DLL, ActiveX, AddIns, ComAddIns) является неотъемлемой частью офисного программирования.

ТЕМА 2.3 МАКРОСЫ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАКРОРЕКОРДЕРА

Макросы

Независимо от используемых операционной системы и программных приложений MS Office пользователь часто выполняет одни и те же последовательности команд для многих рутинных задач. Вместо повторения последовательности команд каждый раз, когда необходимо выполнить какую-либо задачу, можно создать макрос (macro), который вместо пользователя будет выполнять эту последовательность. Термин macro произошел от греческого слова, означающего расширенный или растянутый.

Макрос – это программа (в контексте офисного программирования - созданная автоматически), состоящая из списка команд, которые должны быть выполнены приложением.

Основными преимуществами использования макросов являются:

- повышение точности и скорости работы, поскольку компьютеры лучше приспособлены для выполнения повторяющихся задач, чем человек;
- при выполнении макросов обычно нет необходимости в присутствии человека-оператора; в случае, если макрос очень длинный и выполняет операции, требующие значительного времени (например, поиск в базе данных и сортировка), пользователь может переключиться на другое приложение.

Макрос служит для объединения нескольких различных действий в одну процедуру, которую можно легко вызвать. Этот список команд состоит в основном из макрокоманд, которые тесно связаны с приложением, в котором создается макрос – т.е. с командами Word, Excel или других приложений Microsoft Office.

Можно выделить *три основные разновидности макросов*:

1. *Командные макросы* – это наиболее распространенные макросы, обычно состоящие из операторов, эквивалентным тем или иным командам меню или параметрам диалоговых окон. Основным предназначением такого макроса является выполнение действий, аналогичных командам меню – т.е. изменение окружения и основных объектов приложения.
2. *Пользовательские функции* – работают аналогично встроенным функциям приложения. Отличие этих функций от командных макросов состоит в том, что они используют значения передаваемых им аргументов, производят некоторые вычисления и возвращают результат в точку вызова, но не изменяют среды приложения.
3. *Макрофункции* – представляют сочетание командных макросов и пользовательских функций. Они могут использовать аргументы и возвращать результат, подобно пользовательским функциям, а также могут изменять среду приложения, как и командные макросы. Чаще всего эти макросы вызываются из других макросов, и активно используются для модульного программирования.

Поддержка макросов позволяет порой обойтись вообще безо всякого программирования: достаточно включить автоматическую запись выполняемых пользователем действий и в результате получить готовый макрос, а затем назначить ему кнопку на панели инструментов или новую команду меню, которые будут использоваться для вызова. Простые макросы удается создавать, не написав вручную ни одной строки программного кода.

Для разработки же серьезных приложений приходится программировать.

Таким образом, различают 2 способа разработки макроса:

- автоматическое создание, с использованием макрорекордера;
- написание макроса "с нуля", используя язык программирования VBA.

Отметим, что возможен и комбинированный подход: фрагменты будущей программы записываются автоматически, а затем они корректируются и дополняются "рукописным" кодом.

Для записи макросов из приложений Microsoft Office используется **макрорекордер**. Это встроенный инструмент, который фиксирует все действия пользователя, включая ошибки и неправильные запуски. При выполнении макроса интерпретируется каждая записанная макрорекордером команда точно в такой последовательности, в которой пользователь выполнял их во время записи.

Для **записи макроса** в приложении Microsoft Office можно использовать меню "Сервис/Макрос/Начать запись" или выбрать кнопку "Записать макрос" на панели инструментов Visual Basic. До начала записи нужно указать имя макроса и определить, где он будет храниться и как будет доступен. Затем выполнить действия, которые требуется сохранить в макросе. Для завершения записи нужно на панели инструментов "Остановка записи" щелкнуть кнопку "Остановить запись".

Для **выполнения макроса** необходимо:

1. Установить курсор в место вставки выполнения макроса.
2. Выбрать пункт меню "Сервис/Макрос/Макросы".
3. В появившемся диалоговом окне "Макрос" выбрать имя нужного макроса и выбрать "Выполнить".

Чтобы **просмотреть код** записанного макроса, надо выбрать меню "Сервис/Макрос/Макросы". В появившемся диалоговом окне выбрать имя нужного макроса и щелкнуть кнопку "Изменить". Исходный код указанного макроса будет загружен в окно редактора Visual Basic.

Структура записанного макроса

Макросы, создаваемые макрорекордером MS Office, сохраняются в специальной части файла данных, называемой *модулем*. Модуль VBA содержит исходный код программы на языке VBA. Фактически макрос является подпрограммой (а точнее, процедурой) VBA. Записанный макрос имеет строго определенную структуру. Ниже представлен исходный код простого макроса, созданного в Microsoft Word.

Листинг 1. Пример макроса

```
Sub Hello()
' Макрос изменяет размер, начертание шрифта, выравнивание абзаца и
' выводит надпись в активный документ MS Word
'
        Selection.Font.Size = 24
        Selection.Font.Bold = wdToggle
        Selection.ParagraphFormat.Alignment = wdAlignParagraphCenter
```

```
    Selection.TypeText Text:="Hello, World!"
End Sub
```

В общем виде структуру кода макроса можно представить следующим образом[2]:

```
Sub имяМакроса ()
' текст комментария
    Оператор1
    Оператор2 ...
    ОператорN
End Sub
```

Каждый макрос VBA начинается с ключевого слова Sub, за которым следует имя макроса. Строку, содержащую ключевое слово Sub и имя макроса, называют *строкой объявления (declaration)* макроса. За именем макроса всегда следуют пустые круглые скобки (т.к. макрос является процедурой VBA без параметров).

За строкой объявления макроса следуют строки комментариев. *Комментарий (comment)* – это строка в макросе VBA, которая не содержит инструкций, являющихся частью этого макроса. Каждая строка комментария начинается с символа апострофа ('). Комментарии содержат имя макроса и текст, который был введен пользователем в текстовое поле "Описание" ("Description") диалогового окна "Запись макроса" ("Record Macro") в момент записи этого макроса.

Сразу за объявлением макроса следует *тело макроса (body)*. Каждая строка в теле макроса состоит из одного или более операторов VBA. *Оператор VBA (statement)* – это последовательность ключевых слов и других символов, которые вместе составляют одну полную инструкцию для VBA. Макрос VBA состоит из одного или нескольких операторов.

Конец макроса выделяется ключевой строкой End Sub, завершающей тело макроса.

ТЕМА 2.4 СРЕДА РАЗРАБОТКИ VBA

Visual Basic for Application (VBA) – это система программирования, которая используется как единое средство программирования во всех приложениях Microsoft

[2] Локализованные версии пакета MS Office позволяют использовать в макросах символы национальных алфавитов (например, в идентификаторах). Однако не следует пользоваться этой сомнительной возможностью во избежании сложностей с отладкой и портированием приложений на VBA.

Office. Всякая система программирования включает в себя, по меньшей мере, три составные части:

1. Язык (или языки) программирования.
2. Среду разработки, т.е. набор инструментов для написания программ, редактирования, отладки и т.п.
3. Библиотеку (или библиотеки) стандартных программ, т.е. набор готовых программ (процедур, функций, объектов и т.д.), которые можно использовать как готовые элементы при построении новых программ.

Для создания офисных приложений в MS Office имеется *интегрированная среда разработки* (Integrated Development Environment, *IDE*) с унифицированным интерфейсом. VBA IDE – это набор инструментов разработки программного обеспечения, таких как редактор Visual Basic (Visual Basic Editor, VBA), средства отладки, средства управления проектом и т.д.

Вызов VBA IDE из любого приложения выполняется через комбинацию клавиш Alt+F11 или меню "Сервис/Макрос/Редактор Visual Basic".

Структура VBA

VBA – это стандартное интерфейсное окно, содержащее меню, панели инструментов, другие окна и элементы, которые применяются при создании проектов VBA. Общий вид окна редактора Visual Basic представлен на рис. 3.

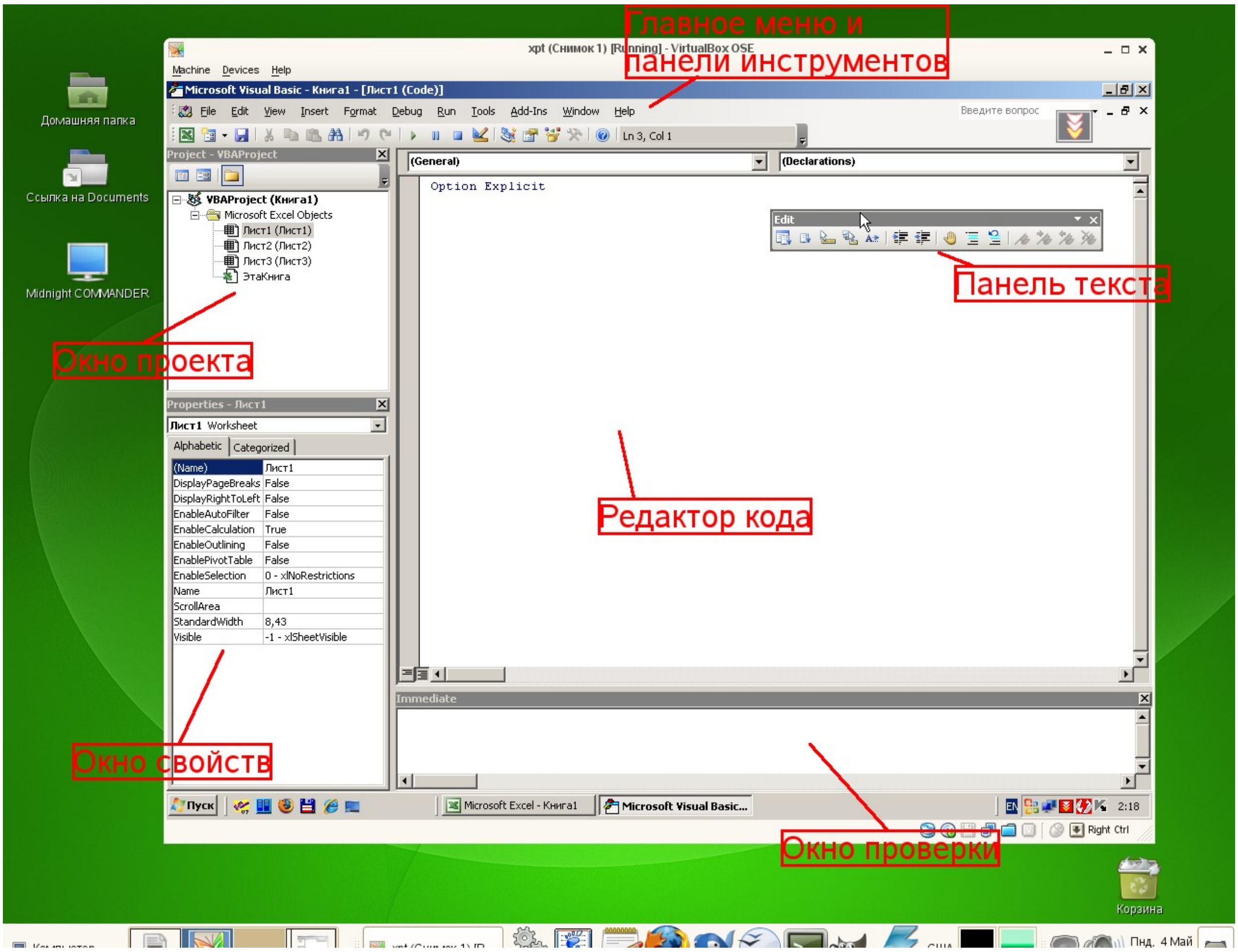


Рисунок 3. Окно редактора Visual Basic

Основными (открывающимися по умолчанию) являются три окна: окно проекта, окно свойств и окно редактирования кода. Краткое описание этих и некоторых других компонентов VBA приведено в таб. 4. Все они доступны через команды, представленные в меню "Вид".

Таблица 4. Назначение компонентов VBA

Наименование окна	Описание
Project (Проект)	Предназначено для отображения всех открытых проектов, а также их составляющих: модулей, форм и ссылок на другие проекты
Toolbox (Панель элементов)	Содержит элементы управления для конструирования форм
UserForm	Используется для создания форм путем размещения на них элементов

Наименование окна	Описание
	управления
Code (Программа)	Предназначено для просмотра, написания и редактирования программы на языке VBA. Поскольку среда разработки является многооконной, то для каждого модуля проекта можно открыть отдельное окно
Properties (Свойства)	Отображает свойства выделенных объектов. В этом окне можно задавать новые значения свойств формы и элементов управления
Object Browser (Просмотр объектов)	Отображает классы, свойства, методы, события и константы различных библиотек объектов. Используется для быстрого получения информации об объектах
Immediate (Проверка)	Предназначено для быстрого выполнения вводимых в него инструкций. В данном окне также выводятся результаты выполнения вводимых инструкций
Locals (Локальные переменные)	Автоматически показывает все переменные данной процедуры
Watches (Контрольные значения)	Применяется при отладке программ для просмотра значений выражений

Характеристики компонентов VBA

Окно проекта (Project)

Проект – это совокупность всех программных модулей, связанных с документом Microsoft Office. Окно *Project (Проект)* предназначено для быстрого получения информации о различных составляющих проекта.

Проект может содержать модули следующих видов:

- *Объекты основного приложения*. Проекты VBA выполняются совместно с другими приложениями. Приложение, в котором разрабатывается и выполняется проект VBA, называется основным.
- *Модули форм*. В VBA имеется возможность создавать пользовательские формы, предназначенные для ввода или вывода данных, а также процедуры обработки событий, возникающие в этих формах.

- *Модули кода*. Модульность - один из основных принципов парадигмы структурного программирования. Каждый модуль, как правило, содержит подпрограммы, сход-
  ные по назначению. Небольшие модули проще отлаживать и использовать повторно. В частности, в VBA имеются средства импорта/экспорта готового кода.
- *Модули классов*. VBA позволяет создавать и использовать собственные объекты. Описание объектов включается в модули класса. Каждый модуль класса содержит полную информацию об одном типе объекта.

С помощью окна проекта можно добавить или удалить какой-либо объект из проекта. Модули кода добавляются в проект командой "Вставить/Модуль". Формы создаются командой "Вставить/UserForm", а модули класса командой "Вставить/Модуль класса".

Окно проекта можно использовать также для быстрой навигации по формам проекта и программному коду. Для этого необходимо выбрать в контекстном меню соответственно команды "Объект" или "Программа".

Окно свойств (Properties)

Список свойств выделенного объекта выводится в окне Properties (Свойства). Для того чтобы выделить объект, необходимо с помощью окна проекта выбрать форму и перейти в режим конструктора, используя команду "View Object". Свойства объекта можно упорядочить в алфавитном порядке (Alphabetic (По алфавиту)) или по категориям (Categorized (По категориям)), выбрав соответствующую вкладку. Предусмотрена также возможность получения быстрой справки по какому-либо свойству объекта. Для этого достаточно установить курсор на нужное свойство и нажать клавишу F1.

Окно просмотра объектов(Object Browser)

Окно Object Browser (Просмотр объектов) предназначено для просмотра объектов, доступных при создании программы. Точнее, в этом окне отображаются не сами объекты, а структура соответствующего класса объектов. Окно просмотра объектов может использоваться для поиска метода или свойства объекта.

Окно Code (Окно редактирования кода)

Окно Code (Программа) представляет собой текстовый редактор, предназначенный для написания и редактирования кода процедур приложения. Это окно появляется на экране, например, при создании нового модуля. Код внутри модуля организован в виде отдельных разделов для каждого объекта, программируемого в модуле. Переключение между разделами выполняется путем выбора значений из списка "Object" ("Объект"), который находится в левом верхнем углу окна. Каждый раздел может содержать несколько процедур, которые можно выбрать из списка "Procedure" ("Процедура") в правом верхнем углу.

Интеллектуальные возможности редактора кода:

1. При написании кода пользователю предлагается список компонентов, логически завершающих вводимую пользователем инструкцию.
2. На экране автоматически отображаются сведения о процедурах, функциях, свойствах и методах после набора их имени.
3. Автоматически проверяется синтаксис набранной строки кода сразу после нажатия клавиши Enter. В результате проверки выполняется выделение определенных фрагментов текста:
   - красным цветом – синтаксические ошибки; • синим цветом – зарезервированные ключевые слова;
   - зеленым цветом – комментарии.
4. Если курсор расположить на ключевом слове VBA, имени процедуры, функции, свойства или метода и нажать клавишу F1, то на экране появится окно со справочной информацией об этой функции.

Окно редактирования форм (UserForm)

Для создания диалоговых окон, разрабатываемых приложений VBA, используются формы. Редактор форм является одним из основных средств визуального программирования. При добавлении формы в проект (команда "Insert" – "UserForm" ("Вставить" – "UserForm")) на экран выводится незаполненная форма с панелью инструментов Toolbox (Панель элементов).

Используя панель инструментов Toolbox (Панель элементов) из незаполненной формы конструируется требуемое для приложения диалоговое окно. Размеры формы и размещаемых на ней элементов управления можно изменять. Также окно редактирования форм поддерживает операции буфера обмена. Кроме того, команды меню "Format" ("Формат") автоматизируют и облегчают процесс выравнивания элементов управления как по их взаимному местоположению, так и по размерам.

Окна отладочной информации

Окно Immediate (Проверка) позволяет ввести инструкцию и выполнить ее. При этом инструкция должна быть записана в одну строку, директивы которой будут выполнены после нажатия клавиши Enter. Данное окно можно использовать для быстрой проверки действий, выполняемой той или иной инструкцией. Это позволяет не запускать всю процедуру, что удобно при отладке программ.

Окно Locals (Локальные переменные) автоматически отображает все объявленные переменные текущей процедуры и их значения.

Окно Watches (Контрольные значения) применяется при отладке программ для просмотра значений выражений.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Г. П. КОЗИНА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических работ

по дисциплине «Геодезия»

для студентов очного и заочного обучения

направления подготовки (специальности)

21.05.03 Технология геологической разведки

(уровень специалитета)

Екатеринбург, 2020 г

Г. П. КОЗИНА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических работ

по дисциплине «**Геодезия**»

для студентов очного и заочного обучения

направления подготовки (специальности)
21.05.03 Технология геологической разведки
(уровень специалитета)

СОДЕРЖАНИЕ

I. РАБОТА С ТОПОГРАФИЧЕСКИМИ КАРТАМИ

Для современных топографических карт установлены следующие масштабы: 1:1 000 000, 1:500 000, 1:300 000, 1:200 000, 1:100 000, 1:50 000, 1:25 000, 1:10 000.

Топографические карты широко используются в народном хозяйстве для решения различных инженерных задач и служат основой для создания карт специального назначения.

Листы топографических карт различных масштабов объединены специальной системой разграфки и номенклатуры, основой которой является лист карты масштаба 1:1000 000. Каждый лист топографической карты ограничен с севера и юга параллелями, а с запада и востока – меридианами. Линии меридианов и параллелей образуют внутреннюю географическую рамку листа топографической карты, а их пересечение – углы рамки, которым соответствуют географические координаты, подписываемые на карте (широта φ и долгота λ). Например, координаты северо-западного угла рамки (рис. 1.1.).

$$\varphi = 54^{0}20' \;,\;\; \lambda = 14^{0}15'$$

Параллельно линиям географической раски с внешней ее стороны на карте показывается минутная рамка, линии которой разделены на черные и белые интервалы. Длины интервалов по северной и южной сторонам рамки соответствуют одной минуте долготы, а по западной и восточной – одной минуте широты.

Каждый интервал минутной рамки разбит точками на интервалы по 10$''$. С помощью минутной рамки определяют географические координаты точек на карте: широта φ и долгота λ .

Для определения плоских прямоугольных координат точек на топографических картах наносится прямоугольная координатная сетка. Линии координатной сетки проходят параллельно осям координат зоны, в которой расположен данный лист. Обычно линии координатной сети проходят через 1 км. Оцифровка линий координатной сетки дается у их выходов за географической рамкой (рис. 1.1). Полные абсциссы и ординаты в (километрах) подписываются на выходах крайних линий данного листа. Остальные линии подписываются двумя последними цифрами.

Например:

абсциссы: 6019, 20, 21, 22, 6023,

ординаты: 3452, 53, 54, 3455.

Листы топографических карт сопровождаются зарамочным оформлением. Над северной рамкой указывается номенклатура листа, его название, система координат (рис. 1.1.). Под южной рамкой указывается численный и линейный масштабы карты, высота сечения рельефа, система высот, данные о склонении магнитной стрелки и сближении меридианов, график заложений, вызодные данные, указывающие метод и год создания карты.

Между минутной и внешней рамками помещены номенклатуры смежных листов карт того же масштаба. На топографических картах специальными условными знаками изображаются контуры и рельеф местности, а также прочие сведения о ней.

Наличие на картах географической и прямоугольной сеток координат, данных о склонении магнитной стрелки и сближении меридианов, графика заложений и других данных позволяет решать по карте различные топографические и инженерные задачи.

студентами работы выполняются по топографической карте масштаба 1:10 000 на специальных бланках.

1.1. Определение раастояний

Циркулем – измерителем снимается величина отрезка на топографической карте между заданными точками. По линейке до 0,01 см измеряют длину этого отрезка (ℓ см). С помощью численного масштаба карты (I:M) определяется расстояние на местности (D) в метрах

$\boldsymbol{D = \ell \cdot M}$,

где ℓ - длина отрезка с карты, измеренная по линейке в см;

M – знаменатель численного масштаба карты.

Пример: ℓ=4,25 см, M – 10 000, D = 4,25 & 10 000 = 42 500 см = 425 м.

Это же расстояние определяют с помощью линейного масштада, который помещается за южной рамкой листа карты под численным масштабом (рис. 1.1). Для этого циркулем – измерителем отрезок с карты откладывается на линейном масштабе так, чтобы правая игла измерителя была поставлена на оцифрованное деление линейного масштаба справа от «0», а левая игла попадала на первое (дробное) основание – слева от «0». По линейному масштабу справа налево считывается расстояние в метрах.

$\boldsymbol{D = 425}$ м.

1.2. Определение географических координат $\boldsymbol{\varphi}$ $\boldsymbol{\lambda}$

Географические координаты определяются по минутной рамке. Для определения широты $\boldsymbol{\varphi}$ через точку (Рис. 1.1 точки N) проводят параллель до пересечения с минутной рамкой. По западной или восточной сторонам рамки, считают число минут и секунд ($\boldsymbol{\Delta\varphi}$) между южной стороной рамки и параллелью данной точки.

Широта (φ) точки будет $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, φ_0 - широта южной стороны рамки, долгота - $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, λ_0 - долгота западной стороны рамки.

Для определения долготы через точку проводят меридиан и по северной или южной стороне минутной рамки отсчитывают долготу (λ).

Пример: определить φ и λ точки N (Рис. 1.1).

$$\lambda_0 = 54^0 17'30'' \quad \Delta\varphi = 1'53'',\ \varphi_N = 54^0 17'30'' + 1'53'' = 54^0 19'23''$$

$$\lambda_0 = 14^0 15' \quad \Delta\lambda = 0'32'',\ \lambda_N = 14^0 15' + 0'32'' = 14^0 15'32''$$

1.3. Определение прямоугольных координат X и Y

Прямоугольные координаты точки на карте определяются по координатной сетке. Для этого из точки опускают перпендикуляры на южную и западную стороны квадрата координатной сетки. Измерителям с помощью линейного масштаба определяют расстояния по этим перпендикулярам в метрах, которые представляют приращения координат ΔX и ΔY по оси абсцисс и оси ординат. Полученные приращения прибавляют к оцифрованным координатам сетки X_i и Y_i.

Пример: определить прямоугольные координаты точки D (рис. 1.1).

$$X_D = X_i + \Delta X \ ,\ Y_D = Y_i + \Delta Y$$

X_i - абсцисса южной горизонтальной линии сетки квадрата, в котором находится D.

$$X_i = 6022 \text{ км},$$

Y_i - ордината западной вертикальной линии этого же квадрата.

$$Y_i = 3453 \text{ км}.$$

$$\Delta X = 684 м = 0{,}684 км \ ,\ \Delta Y = 460 м = 0{,}460 км$$

$$X_D = 6022 км + 0{,}684 км = 6022684 м$$

$$Y_D = 3453 км + 0{,}460 км = 3453460 м \ .$$

1.4. Определение положения точки относительно осевого меридиана зоны.

Долгота осевого меридиана зоны вычисляется по формуле:

$$L_0 = 6^0 \cdot n - 3^0 \ ,$$

где n – номер зоны.

Для n = 3 $\quad L_0 = 6^0 \cdot 3 - 3^0 = 15^0$

Расстояние от осевого меридиана до точки определяется по формуле:

$$d_D = Y_D - 500км \ , \ Y_D = 453460м$$

где Y_D - ордината точки.

$$d_D = 453460м - 500км = -46540м$$

следовательно, точка D расположене к западу от осевого меридиана на расстоянии 46540 м.

1.5. Определение дирекционного угла α, истинного азимута A и магнитного азимута азимута A_m линии.

Для определения дирекционного угла заданной линии через начальную точку линии проводят прямую параллельную оси абсцисс, направлением на север (рис. 1.1., линия 1 – 2), от которой транспортиром измеряют угол по ходу часовой стрелки до направления на конечную точку линии.

Пример: $\quad \alpha_{1-2} = 238^0$.

Истинный и магнитный азимуты вычисляют по формулам, пользуясь данными о сближении меридианов и склонении магнитной стрелки или по графику взаимного расположения меридианов.

$$A = \alpha + \gamma \ ,$$

$$A_m = \alpha - (\delta - \gamma) \,.$$

где γ - сближение меридианов,

δ - склонение магнитной стрелки.

При вычислении A и A_m по формулам учитываются знаки δ и γ. Азимут истинный $A = 238^0 + (-0^0 35') = 237^0\,25'$.

Азимут магнитный $A_m = 238^0 - (0^0 45' - (-0^0\,35')) = 236^0\,40'$.

Контроль вычисления A и A_m выполняют с помощью графика взаимного расположения меридианов (рис. 1.2).

Схема взаимного расположения меридранов

Из схемы видно, что $A_m = \alpha - (-0^0\,35' + 0^0\,45')$.

Для определения магнитного азимута на текущий год необходимо учесть годовое изменение склонения магнитной стрелки $\Delta\alpha = +2'$

$2'$ & 34 года = $68'$ = $1^0\,08'$; $\delta = 0^0\,45' + 1^0\,08' = 1^0\,53'$.

На 1993 год $A_m = 238^0 - (0^0\,35' + 1^0\,53') = 238^0 - 2^0\,28' = 235^0\,32'$.

1.6 Определение отметок точек и превышений

Отметки точек на карте определяют по горизонталям. если точка находится на горизонтали, то ее отметка равна отметке этой горизонтали. Точки I находится на горизонтали с отметкой 187,5 м. Следовательно, $H_I = 187{,}5$ м (рис. 1.3).

Если точка находится между горизонталями, то ее отметка определяется по формуле $\boldsymbol{H = H_0 + h'}$

где $\boldsymbol{H_0}$ - отметка ближайшей к точке горизонтали,

$\boldsymbol{h'}$ - превышение между точкой и горизонталью $\boldsymbol{H_0}$.

Превышение $\boldsymbol{h'}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Зная, что высота между горизонталями изменяется пропорционально заложению, $\boldsymbol{h'}$ определяют по формуле: $\boldsymbol{h' = \frac{h \cdot в}{a}}$,

где h – высота сечения рельефа,

$\boldsymbol{a}$ - расстояние между горизонталями (заложение),

$\mathit{в}$ – расстояние от точки до ближайшей горизонтали $\boldsymbol{H_0}$.

Пример: Определить отметку H точки 2.

$$\boldsymbol{h = 2{,}5м}\ ,\ \boldsymbol{в = \frac{I}{2}a}\ ,\ \boldsymbol{h' = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25м}\ ,$$

$$\boldsymbol{H_0 = 190{,}0}\ ,\ \boldsymbol{H_2 = H_0 + h' = 190{,}0м + 1{,}25м = 191{,}2м}\ .$$

Привышение между двумя точками (точки I и 2) находят как разность отметок этих точек

$$\boldsymbol{h_{1-2} = H_2 - H_1},$$

$$\boldsymbol{H_I = 187{,}5м}\ ,\quad \boldsymbol{H_2 = 191{,}2м}\ ,$$

$$\boldsymbol{h_{1-2} = 191{,}2м - 187{,}5 = +3{,}7м.}$$

Рис. 1.3. Определение отметок точек

1.7. Помтроение профиля местности по заданному направлению

Профиль по заданному направлению строят по отметкам точек, расположенных на этой линии. Горизонтальный масштаб 1:10 000 (равен масштабу карты), вертикальный – 1:1 000. Пример: Построить профиль по линии 3 – 4 (рис. 1.4.). (Сплошные горизонтали проведены через 2,5 м).

Для построения профиля на миллиметровой бумаге проводят прямую АВ – основание профиля (рис. 1.5), на которую переносят все точки пересечения (а,в,с…) заданного направления с горизонталями карты, и подписывают их отметки. Основанию профиля дают условную отметку H_0 , которая должна быть меньше минимальных отметок точек линии на 15 – 30 м. В примере H_0 = 170,0 м). К основанию профиля в отмеченных точках проводят пунктиром перпендикуляры, на которых откладывают в данном вертикальном масштабе (1:1000) значения отметок. Полученные точки соединяют отрезками прямых линий.

Шкала отметок в вертикальном масштабе

Рис. 1.5. Профиль по заданному направлению

1.8. Определение крутизны ската

Крутизна ската $\boldsymbol{\nu^0}$ определяют по графику заложений (рис. 1.6.). Для этого измерителем берут заложение «а» (в примере по направлению СД), которое затем откладывают на графике заложений вдоль его вертикальных линий. Затем по основанию графика заложений определяют угол наклона, характеризующий крутизну ската (рис. 1.6.).

$$\boldsymbol{\nu^0 = 1^0{,}3}.$$

График заложений

Рис. 1.6. Определение крутизны ската

1.9. Проектирование линии с заданной крутизной ската

Между точками 1 и 2 (рис. 1.7.) спроектировать линию с крутизной ската не более 2 ^{0}. Для решения этой задачи по графику заложений измерителем берут заложение, которое соответствует заданной крутизне ската $\boldsymbol{\nu^0 = 2^0}$. Этим раствором циркуля из точки I засекают следующую горизонталь и получают точку «а», затем из точки «а» засекают этим же раствором циркуля следующую горизонталь, получают точку «б» и т.д.

Соединив все точки, получают линию заданного уклона.

Задание выполняют на кальке, на которую предварительно копируют участок местности с горизонталями вдоль проектируемой линии.

Рис. 1.7. Проектирование линии с заданной крутизной ската

Образец бланка

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра геодезии и фотограмметрии

РАБОТА С ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ КАРТОЙ

1. Расстояние между точками

D = 4,25 см х 10 000 = 425 м по численному масштабу

По линейному масштабу D = 400 м + 25 м = 425 м

2. Географические координаты точек

$$\varphi_Д = 54^0 19' 37'' \qquad \lambda_N = 54^0 19' 23''$$

$$\lambda_Д = 14^0 17' 07'' \qquad \lambda_N = 14^0 15' 32''$$

3. Прямоугольные координаты точек

$X_Д$ = 6022584 м X_N = 6022264 м

$X_Д$ = 453460 м $У_N$ = 451788 м

4. Долгота осевого меридиана зоны

$L_0 = 6^0$ **&** $n - 3^0 = 6^0$ **&** $3 - 3^0 = 15^0$

5. Расстояние точки от осевого меридиана зоны

$d_Д = У_Д$ -500 км = 453460 м – 500 км = - 46540 м

6. Дирекционный угол и азимуты линии (1-2)

Дирекционный угол α = 238 ^{0}

Истинный азимут $A = 237^0\,25'$

Магнитный азимут $A_m = 236^0\,40'$

На 1993 г. магнитный азимут $A_m = 235^0\,32'$

7. Абсолютные отметки точек

$$H_1 = 187,5 \text{ м}$$

$$H_2 = 191,2 \text{ м}$$

8. Превышение между точками

$$h = H_2 - H_1 = 191,2 \text{ м} - 187,5 \text{ м} = +3,7 \text{ м}$$

9. профиль местности по заданной линии

10. Крутизна ската ν^0

$$\boldsymbol{\nu^0_{max} = 7^0 \qquad \nu^0_{min} = 7^0,5}$$

11. Проектирование линии с крутизной ската не более 2^0

Преподаватель МД-94-1

Петров

1.10. Измерение площадей по топографическим картам полярным планиметром

полярный планиметр состоит из двух рычагов: полюсного и обводного. Обводный рычаг имеет ручку со шпилем для обвода контуров и подвижную каретку со счетным механизмом. Вместо шпиля может использоваться марка (точка, окружность), выгравированная на стеклянной пластине. полюсный рычаг на одном конце имеет груз с иглой, которая при обводе контура накалывается на бумагу и служит полюсом планиметра. На другом конце этого рычага находится шарнирная головка, которая вставляется в углубление на каретке счетного механизма и соединяет тем самым оба рычага планиметра в одно целое.

Рис. 1.8. счетный механизм планиметра

Счетный механизм планиметра (рис. 1.8.) состоит из циферблата 1 счетного колеса 2 , вращающегося на оси, параллельной обводному рычагу и верньера 3. При обводе фигуры счетное колесо катится по бумаге и дает отсчет. Первую цифру отсчета берут с циферблата, одно деление которого соответствует целому обороту счетного колеса 4 . Следующие две цифры отсчета берут со счетного колеса по нулевому штриху верньера 32 . Четвертая цифра отсчитывается по верньеру – это номер штриха верньера, совпадающего со штрихом счетного колеса - 5. Отсчет на рис. 1.8 равен 4323. площадь, измеренную планиметром вычисляют по формуле:

$$S = C \cdot \Delta h_{cp}.\ \ \Delta n = n_2 - n_1$$

где: C - цена деления планиметра;

n_1 - отсчет по планиметру до обвода контура;

n_2 - отсчет по планиметру после обвода контура.

Образец бланка

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра геодезии и фотограмметрии

Определение площади на топокартах планиметром						
Обвод квадрата километровой сетки топокарты				Обвод контура измеряемой площади		
Приемы	Отсчеты по планиметру		Разность отсчетов Δn	Отсчеты по планиметру		Разность отсчетов Δn
I	n 1	1102	994	n 1	0085	1184
	n 2	2096		n 2	1269	
	n 2	2096		n 2	1269	
II			993			1191
	n 3	3089		n 3	2460	
	n 3	3089		n 3	2460	
III			986			1195
	n 4	4075		n 4	3655	
$\Delta n_{cp} = 991{,}0$				$\Delta n_{cp} = 1190$		
Площадь квадрата 100 га				Измеряемая площадь		

		$S = C \cdot \Delta n_{cp}$ S = 0,1009 **&** 1190 = 120,1 га
Цена деления планиметра $C = \frac{100 га}{\Delta n_{cp}} = \frac{100}{991} = 0{,}1009 га$		МД -94-2 Петров

Цену деления планиметра определяют обводом квадрата координатной сетки на топографической карте масштаба 1:10 000, площадь которого известно (P_0 = 100 га).

Для измерения площади устанавливают полюс планиметра вне контура так, чтобы при обводе угол между обводным и полюсным рычагами был в пределах от 30 ^{0} до 150 ^{0}.

Затем устанавливают обводной шпиль над выбранной начальной точкой квадрата и берут по отсчетному механизму отсчет n_1. Обводят квадрат по часовой стрелке до исходной точки и берут отсчет n_2.

Затем выполняют следующие обводы, не меняя положения полюса; берут отсчеты n_3 и n_4. Отсчеты записывают в специальный бланк. Вычисляют разности отсчетов: $\Delta n_1 = n_2 - n_1$, $\Delta n_2 = n_3 - n_2$, $\Delta n_3 = n_4 - n_3$.Расхождение разностей не должно превышать 10 – 12 делений.

Находят среднее арифметическое из разностей по трем приемам:

$$\Delta n_{cp} \frac{\Delta n_1 + \Delta n_2 + \Delta n_3}{3} = \frac{994 + 993 + 986}{3} = 992$$

цену деления планиметра вычисляют по формуле:

$$C = \frac{P_0}{\Delta n_{cp}} = \frac{100 га}{991} = 0{,}1009 га .$$

Заданную площадь по топографической карте измеряют также тремя приемами, обводя эту площадь по контуру (см. образец бланка, стр. 16).

$$S = C \cdot \Delta n_{ch} = 0{,}1009 \cdot 1190 = 120{,}1 га .$$

2. РАБОТА С АЭРОФОТОСНИМКАМИ

Современные топографические карты создаются с помощью аэрофотосъемки. Аэрофотосъемка характеризуется масштабом фотографирования, фокусным расстоянием аэрофотоаппарата, высотой фотографирования, форматом кадра и рядом других характеристик, которые можно определить непосредственно по аэрофотоснимкам.

2.1. Привязка аэроснимка к топографической карте

Для выполнения задания используют аэроснимок и соответствующую карту. Привязка снимка к карте заключается в отождествлении фотоизображения контуров границ снимка с их графическим изображением на топографической карте. С этой целью рассматривают аэрофотоснимок и карту, опознавая на них идентичные объекты: населенные пункты, элементы дорожной сети, гидрография, контуры растительного покрова и т.д. Изучив изображения идентичных объектов на аэрофотоснимке и карте, с помощью штриховых наметок карандашом фиксируют на карте примерные границы снимка. Если привязка аэрофотоснимка сделана правильно, то полученная фигура должна быть близка к квадрату.

2.2. Определение масштаба аэрофотоснимка
и высоты фотографирования

Масштаб аэрофотоснимка определяют по формуле:

$\mathbf{1} := \dfrac{\ell}{L \cdot M}$, отсюда знаменатель масштаба аэроснимка $m = \dfrac{L}{\ell} \cdot M$,

где: ℓ - длина отрезка на аэрофотоснимке;

L - длина этого же отрезка на топографической карте;

M - знаменатель масштаба карты;

m - знаменатель масштаба аэроснимка.

Для определения масштаба аэрофотоснимка используют два отрезка, концы которых опознают на аэрофотоснимке и карте с погрешностью не более 0,2 мм. С этой целью используют четкие контурные точки аэрофотоснимка и карты: перекрестки дорог, углы построек, углы леса и сельхозугодий.

Оба отрезка должны проходить примерно через главную точку аэроснимка, а расстояния от главной точки до концов отрезка должны быть примерно равными (допустимая разность длин не должна превышать 1 – 2 см). Главная точка «0» аэрофотоснимка находится в точке пересечения линий, соединяющих координатные метки аэрофотоаппарата, изображения которых располагаются в середине каждой из четырех сторон аэрофотоснимка (рис. 2.1.).

Рис. 2.1. Определение главной точки аэроснимка

Образец бланка

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра геодезии и фотограмметрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСШТАБА АЭРОФОТОСНИМКА

И ВЫСОТЫ ФОТОГРАФИРОВАНИЯ

Аэроснимок № 034

Лист карты Y-35-38-А-в-3

Исходные данные

Масштаб карты 1:М = 1:10 000

Фокусное расстояние

аэрофотоаппарата f = 100 мм

$$m = \frac{L \cdot M}{\ell} \qquad H = m_{cp} \cdot f$$

допуст. $\Delta m = \dfrac{2 \cdot \Delta d \cdot M}{\ell_{cp}}$

М = 10 000

Схема расположения отрезков на аэроснимке

Измерение длины отрезков

на аэроснимке	на карте
ℓ_1 = 178,7 мм	L_1 = 195,2 мм
ℓ_2 =148,3 мм	L_2 = 217,0 мм
m_1 = 10926	m_2 = 10943

$\Delta m = m_1 - m_2 = 17$ доп. $\Delta m = 280$

$m_{cp} = 10934$

Высота фотографирования

H = 1093 м

Преподаватель МД-94-1

Иванов

Опознав выбранные точки аэрофотоснимка на топографической карте, измеряют отрезок с помощью измерителя и линейки. Вычисления выполняют в бланке (стр. 19). Разность знаменателей масштаба Δm аэрофотоснимка, полученная из определений по двум отрезкам, не должна превышать величины:

допустимая $\Delta m = \dfrac{2\Delta d \cdot M}{\ell_{cp}}$, $\Delta m = m_2 - m_1$

где: Δd - допустимая ошибка положения контуров на топографической карте ($\Delta d = \pm 1 мм$).

В качестве окончательного значения знаменателя масштаба аэрофотоснимка принимают его среднее значение из двух определений:

$$m_{cp} = (m_1 + m_2) : 2 \quad .$$

Высоту фотографирования определяют по формуле:

$$H = f \cdot \frac{L \cdot M}{\ell} \quad \text{или} \quad H = f \cdot m_{cp} \ ,$$

где f - фокусное расстояние аэрофотоаппарата, которым была выполнена аэрофотосъемка.

Фокусное расстояние задается преподавателям.

Высоту фотографирования вычисляют в метрах.

3. СОСТАВЛЕНИЕ ТОПОГРАФИЧЕСКОГО ПЛАНА

По данным топографической съемки необходимо составить топографический план местности в масштабе 1:2000 с высотой сечения рельефа 1 м.

Составление плана выполняют в такой последовательности:

построение координатной сетки;

нанесение точек съемочного обоснования по координатам;

нанесение ситуации, точек рельефа на план и проведение горизонталей;

вычерчивание топографического плана.

3.1. Построение координатной сетки

Координатную сетку строят на листе чертежной бумаги размером 289 х 210 мм (формат А 4). Стороны координатной сетки принимают равными 5 х 5 см.

Для построения сетки на листе бумаги карандашом проводят диагонали (относительно углов листа). Из точки пересечения диагоналей откладывают на них циркулем-измерителем 4 равных отрезка (полудиагонали) длиной 12 – 13 см (рис. 3.1.), получают точки а,б,в,г. Соединив эти точки на диагоналях, получают стороны вспомогательного прямоугольника а,б,в,г, на которых, начиная от точки г, измерителем откладывают равные отрезки (по 5 см) – стороны сетки квадратов. Общий размер сетки 20 см по оси *X*, 15 см – по оси *У*.

Правильность построения координатной сетки контролируют путем измерения циркулем-измерителем диагоналей всех квадратов сетки. Ошибки в длинах диагоналей не должны превышать 0,2 – 0,3 мм. После контроля все вспомогательные построения (на рис. 3.1.показаны пунктиром) убирают.

3.2. Нанесение точек съемочного обоснования по координатам

Для нанесения точек съемочного обоснования по координатам сетку координат оцифровывают через 100 метров. За начало координат принимают юго-западный угол рамки. Координаты юго-западного угла сетки выбирают так, чтобы точки съемочного обоснования разместились примерно в середине сетки. От юго-западного угла к северу подписывают абсциссы Х, к востоку – ординаты У.

Координаты, высоты точек съемочного обоснования и горизонтальные проложения приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

Номера точек	Координаты		Высоты, м	Горизонт. проложен., м
	Х	У		
I	5319,8	2490,0	148,2	
				169,2
2	5488,8	2481,6	156,6	
				155,8
3	5469,6	2636,3	154,7	
				159,2
4	5311,2	2619,8	146,5	
				130,1

в примере координаты юго-западного угла удобно взять равными Х = 5,2 км, У = 2,4 км (рис. 3.4). Нанесение каждой точки съемочного обоснования производят с помощью циркуля – измерителя и масштабной линейки. Вначале определяют, в каком квадрате располагается данная точка. Затем значение абсциссы циркулем-измерителем откладывают по обеим сторонам квадрата, наколы соединяют тонкой прямой линией. На этой линии откладывают значение ординаты У. Делают накол, полученную точку обводят условным знаком (кружочком), рядом слева подписывают номер точки, справа отметку до 0,1 м. Накладку точек съемочного обоснования обязательно контролируют. Для этого значение горизонтального проложения между двумя точками циркулем - измерителем берут по масштабной линейке и сравнивают с расстоянием между соответствующими точками на плане. Расхождение между этими величинами допускается 0,2 мм на плане (рис. 3.4.).

3.3. Нанесение ситуации, точек рельефа и проведение горизонталей

Ситуацию наносят на план по данным полевых измерений и абрисов (рис. 3.2 табл. 3.2).

Съемочные пикеты, снятые полярным способом, наносят на план по горизонтальному углу и горизонтальному проложению. Горизонтальные углы откладывают при помощи кругового транспортира от начального направления по ходу часовой стрелки, а горизонтальное проложение по линейке или циркулем-измерителем в заданном масштабе. Полученную точку обводят кружочком, рядом подписывают номер и отметку. Руководствуясь абрисом и записями, сделанными в примечании, вычерчивают условными знаками элементы ситуации. Виды угодий пока обозначают надписями (рис. 3.2.).

Нанесение съемочных пикетов, снятых на местности способом прямоугольных координат (перпендикуляров), производят с помощью линейки и треугольника, откладывая по линейке расстояния, указанные в абрисе, вдоль начального направления и перпендикулярно к нему в масштабе 1:2000 (рис. 3.2 а., начальное направление линия 3 – 4).

Рис. 3.2. а) Съемка способом перпендикуляров

Таблица 3.2

Исходные данные к составлению

топографического плана

станция 1 H_1 = 148,2

начальное направление на т.2

Пикет	Гориз. угол ^{0}	Гориз. пролож.	Высоты Н, м	Примечание
1	350	20,0	150,0	гран. пашни
2	5	92,0	155,0	гран. пашни
3	27	64,5	153,2	шосс. дор.
4	44	94,0	153,7	шосс. дорога (шир. 5 м, гравий)
5	53	52,6	151,5	точка рельефа
6	355	70,0	154,0	столб ЛЭП

Проводят горизонтали по отметкам точек с высотой сечения 1 м путем линейного интерполирования отметок по линии ската. в результате интерполирования находят на плане точки, отметки которых кратны принятому сечению. (На рис. 3.3 проведены горизонтали и отметками 154 и 153 м).

Рис. 3.3. Проведение горизонталей: а) графическим интерполированием, б) с помощью палетки

Горизонтали можно провести с помощью палетки. Для изготовления палетки берут восковку размером примерно 7 х7 см. На восковке проводят ряд параллельных линий через равные интервалы (0,5 см или 1,0 см), подписывают их значениями отметок через 1 метр, начиная с минимальной отметки (например 151, 152 и т.д. (рис. 3,3 б). Затем палетку накладывают на 2 соседние А и Б точки на плане таким образом, чтобы эти точки заняли на палетке соответствующее положение по высоте (152,4 и 154,4). Направление линии АБ пересекает линии палетки в точке «а» с отметкой 153 м, в точке «б» с отметкой 154 м. Точки «а» и «б» перекалывают на план и подписывают их отметки. Таким же образом находят положение горизонталей между другими точками на плане. Соединяя точки с одинаковыми отметками плавными линиями, проводят горизонтали.

3.4. Вычерчивание топографического плана

План оформляют в соответствии с «Условными знаками для топографических планов масштабов 1:5 000, 1:2 000, 1:1 000, 1:500».

Вычерчивают план в следующей последовательности:

пункты съемочного обоснования;

здания, постройки, отдельные местные предметы;

дороги, линии электропередач, просеки, границы контуров и другие элементы линейной протяженности;

надписи объектов и отметки высотных точек.

Вычерчивают горизонтали, выделяют утолщенные горизонтали краткие 5 метрам, размещают надписи горизонталей;

почвенно-растительный покров (условные знаки угодий, лес, луг и пр.);

рамку и зарамочное оформление.

Топографический план вычерчивают в карандаше.

Образец топографического плана приведен на рис. 3.4.

Рис. 3.4. Вычерчивание топографического плана

4. ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ ТРАССЫ

Трассой называют ось проектируемого линейного сооружения: дороги, канала, трубопровода и др. Профиль трассы является основным графическим, по которому выполняется проектирование высотного положения будущего инженерного сооружения. Строят профиль по результатам технического нивелирования пикетов, закрепленных на трассе через 100 м, промежуточных точек и поперечников.

4.1. Обработка результатов нивелирования

По результатам технического нивелирования по пикетажу трассы (рис. 4.1.) разбитой между пикетами 0 и 6 с известными отметками (H_0 = 127,410 м, H_6 = 133,446 м), получены превышения $h_{изм.}$, которые выписаны в специальную ведомость вычисления отметок в графу 2 (табл. 4.1., стр. 29).

Сначала вычисляют невязку нивелирного хода f_h и допустимое значение невязки доп. f_h по формулам:

$$f_h = \sum h_{изм.} - (H_6 - H_0) ,$$

доп. $f_h = 50 мм\sqrt{L_{км}}$, где: f_h - полученная невязка нивелирного хода, $\sqrt{h_{изм.}}$ - сумма измеренных превышений по всему нивелирному ходу H_6 – отметка конечного пикета (ПК 6), H_0 - отметка начального пикета (ПК 0), L – длина хода в км (0 . 6 км.).

f_h = + 6016 – (133,446 – 127,410) = 6016 – 6036 = - 20 мм;

$$доп.\ f_h = 50 мм\sqrt{0,6_{км}} = 40 мм .$$

Если полученная невязка меньше допустимой, то ее распределяют с обратным знаком на все измеренные превышения, для чего находим поправки δ_h к превышениям ($h_{изм}$).

$$\delta_h = -\frac{f_h}{n},\ \text{где n – число превышений.}$$

Поправки округляют до целых миллиметров, распределяют так, чтобы сумма поправок была равна невязке с обратным знаком. В примере $\delta_h = -(-\frac{20мм}{9}) = +2мм$ (и остаток 2 мм). Остаток 2 мм распределяют еще по 1 мм на 2 превышения Таким образом, в нашем примере два превышения получили поправку по 3 мм, а семь превышение – по 2 мм.

Контроль: $\sum\delta_h \cdot 7 + 3мм \cdot 2 = +20мм$

Поправки выписывают в графу 2 над значениями h изм. В графу 3 записывают исправленные превышения (h испр.), которые вычисляют по формуле.

$h_{испр.} = h_{изм.} + \delta_h$ = + 8800 +2 = + 0802; - 2100 + 2 = - 2098 и т.д.

Контроль: $\sum h_{испр.} = H_6 - H_0$

Рис. 4.1. Схема нивелирного хода

Далее вычисляют отметки пикетов плюсовых точек оси трассы, отметки поперечного профиля.

Отметки пикетов и плюсовых точек трассы вычисляют по формуле;

$H_n = H_{n-1} + h_{испр.}$,

где: H_n -отметка определяемого пикета

H_{n-1}- отметка предыдущего пикета

$h_{испр.}$ - исправленное превышение между предыдущим и определяемым пикетами.

В нашем примере:

$H_1 = H_0 + h_{испр.} = 127{,}410 + 0{,}802 = 128{,}212$,

$H_2 = H_1 + h_{испр.} = 128{,}212 - 2{,}098 = 126{,}114$.

Контролем правильности вычисления отметок является полученная в результате вычисления отметка конечного пикета (ПК 6), (H_6 = 133,446 м). Отметки всех точек записывают в графу 4 используя полученные отметки пикетов оси трассы, вычисляют отметки точек поперечника.

В ведомости вычисления отметок нивелирного хода выписаны превышения между пикетом 5 и точками поперечного профиля.

Отметки точек поперечного профиля вычисляют по формуле:

$\boldsymbol{H_1 = H_5 + h_i}$,

где: $\boldsymbol{H_1}$ - отметка определяемой точки;

$\boldsymbol{H_5}$ - отметка пикета 5;

$\boldsymbol{h_i}$ - превышение между ПК 5 и точкой поперечного профиля.

Таблица 4.1.

Ведомость вычисления отметок

Номер точек	Превышения, мм		Отметки Н м
	$\boldsymbol{h_{изм.}}$	$\boldsymbol{h_{испр.}}$	
1	2	3	4
ПК 0	+2		127,410
	+0800	+0802	
ПК 1	+2		128,212
	- 2100	- 2098	
ПК 1+ 40	+ 2		126,114
	- 0190	- 0188	
ПК 2	+2		127,618
	+2412	+ 2414	
Х	+ 2		130.032
	+ 1408	+ 1410	

ПК 3	+ 2		131,442
	+ 2598	+ 2600	
ПК 4	+ 3		134,042
	- 1202	- 1199	
ПК 5	+ 3		132,843
	+ 0600	+ 0603	
ПК 6			133,446
$\sum h$	+ 6016	+ 6036	$\boldsymbol{H_6 - H_0 = +6036}$

Поперечный профиль

Номер точек	Превышения $h_{испр.}$	Отметка H м
ПК 5		132,843
	+0810	
Л + 5		133,653
	- 1588	
Л + 10		131,255
	- 1342	
П + 10		131,501

В примере: $\boldsymbol{H_{Л+5} = 132 \cdot 843 + 0,810 = 133,653 м}$

$$\boldsymbol{H_{Л+10} = 132 \cdot 843 - 1,588 = 131,255 м}$$

$$\boldsymbol{H_{Л+10} = 132 \cdot 843 - 1,342 = 131,501 м}$$

Вычисленные отметки записывают в ведомость в графу «отметки» против соответствующей точки.

4.2. Построение профиля

По вычисленным отметкам пикетов и промежуточных точек на миллиметровой бумаге строят продольный профиль трассы и профиль поперечника. Профили строят в масштабах:

Продольный профиль:

горизонтальный масштаб 1:2 000;

вертикальный масштаб 1:200;

Поперечный профиль:

горизонтальный масштаб 1:200;

вертикальный масштаб 1:200;

На листе миллиметровой бумаги размером 400 х 400 мм вычерчивают сетку профиля. Названия граф и размеры их в миллиметрах показаны на рис. 4.2.

В графе «расстояния» отмечают положение пикетов (через 5 см) и плюсовых точек в заданном масштабе. Между пикетами и плюсовыми точками выписывают расстояния. Икс – точки не строят. Ниже этой графи подписывают номера пикетов.

В графе «фактические отметки» выписывают из ведомости нивелирного хода отметки пикетов и плюсовых точек с округлением до 0,01 м.

Выбирают и подписывают отметку условного горизонта профиля, которая должна быть на 5 – 8 метров меньше самой низкой отметки по трассе. (В примере минимальная отметка ПК 1 + 60 Н = 125,93, следовательно отметку условного горизонта можно взять 120,0 м).

От линии условного горизонта на перпендикулярах, проведенных пунктирными линиями через точки трассы, откладывают отметки точек в масштабе 1:200. Полученные точки последовательно соединяют прямыми линиями, в результате чего получают продольный профиль местности по оси трассы.

Над продольным профилем строят сетку для поперечного профиля. Заполняют графи «расстояния» и «фактические отметки» так же, как и при построении продольного профиля. Под сеткой подписывают пикетажные обозначения точек поперечника (рис. 4.2.).

Выбрав условный горизонт, по вычисленным отметкам строят положение точек поперечника и, соединив эти точки, получают поперечный профиль местности.

4.3. Проектирование по профилю

Вдоль продольного профиля проектируют положение оси будущего инженерного сооружения. Проектную линию намечают графически с учетом следующих требований:

проектную отметку нулевого пикета принимают равной фактической отметке этого пикета;

уклоны отдельных участков проектной линии не должны превышать 0,050;

шаг проектирования (длину отдельного участка) принимают от 200 м до 600 м;

объем земляных работ должен быть минимальным, а объемы насыпей и выемок должны быть примерно одинаковыми, т.е. на профиле должно соблюдаться примерное равенство площадей насыпей и выемок;

изменение уклона проектной линии производят на пикетах или плюсовых точках.

На рис. 4.2. проектная отметка ПК 0 равна фактической отметке (127,41). Намечено три участка проектной линии с разными уклонами. Длина каждого участка 200 м. Вычисляют уклон участка проектной линии по формуле:

$$\boldsymbol{i = \frac{h}{D} = \frac{H_{кон.} - H_{нач.}}{D}},$$

где: i - уклон участка проектной линии,

h - превышение участка проектной линии,

D - горизонтальной проложение участка проектной линии,

$H_{нач.}$ - проектная отметка начального пикета участка проектной линии,

$H_{кон.}$ - проектная отметка конечного пикета участка проектной линии.

В примере уклоны равны:

$$i_1 = \frac{H_2 - H_0}{200} = \frac{127{,}62 - 127{,}41}{200} = \frac{0{,}21}{200} = 0{,}001\ ,$$

$$i_2 = \frac{H_4 - H_2}{200} = \frac{134.04 - 127{,}61}{200} = \frac{6.43}{200} = 0{,}032\ ,$$

$$i_3 = \frac{H_6 - H_4}{200} = \frac{133{,}45 - 134{,}01}{200} = \frac{-0{,}64}{200} = -0{,}003\ .$$

Полученные уклоны округляют до 0,001 и выписывают в графу «Проектные уклоны» над диагональю. Под диагональю выписывают горизонтальное проложение участка с данным уклоном. Направление диагонали показывает знак уклона:

- уклон положительный;

- уклон отрицательный;

- уклон нулевой (горизонтальный участок).

Вычисляют проектные отметки точек продольного профиля по формуле:

$$H_{n+1} = H_n + i \cdot d\ ,$$

где: H_{n+1} - проектная отметка определяемой точки,

H_n - проектная отметка предыдущей точки,

i - уклон данного участка,

d - горизонтальное проложение между соответствующими точками.

В примере

$$H_1 = H_0 + i \cdot d = 127{,}41 + 0.001 \cdot 100 = 127{,}51 м$$

$$H_{1+40} = H_1 + i \cdot d = 127{,}51 + 0.001 \cdot 40 = 127{,}55 м$$

$$H_{1+60} = H_1 + i \cdot d = 127{,}51 + 0.001 \cdot 60 = 127{,}57 м$$

$$H_2 = H_1 + i \cdot d = 127{,}51 + 0.001 \cdot 100 = 127{,}61 м$$

Полученные проектные отметки выписывают в графу «Проектные отметки». Таким же образом вычисляют проектные отметки для второго участка.

$$H_3 = H_2 + i \cdot d = 127{,}61 + 0.032 \cdot 100 = 127{,}61 + 3{,}20 = 130{,}81 \text{ и т.д.}$$

Контролем вычислений служат проектные отметки концов участка проектной линии (ПК 2, ПК 4, ПК 6).

Вычисляют рабочие отметки по формуле

$$H_{раб.} = H_{проект.} - H_{фактич.}$$

$$H_{раб.} = 127{,}51 - 128{,}21 = -0{,}70 \text{ и т.д.}$$

Рабочие отметки выписывают около проектной линии: положительные (высота насыпи) – выше линии, отрицательные (глубина выемки) – ниже проектной линии.

На поперечном профиле по вычислено проектной отметке пикета 5 (H_5 = 133,71) от которого был разбит поперечник, наносят положение проектной линии. Ее проводят горизонтально по 6 метров влево и вправо от оси трассы. Показывают кюветы, (если линия идет в выемке) и откосы (если линия идет по насыпи). Уклон откосов и бортов канав 45 ^{0}. Ширина дна кюветов 0,6 м., глубина 1 м.

Над проектной линией выписывают ее отметку (в примере 133,71).

Все проектные данные – проектные линии, уклоны, проектные отметки, рабочие отметки вычерчивают на профиле красным цветом.

Слева над продольным профилем вычерчивают штамп. (Размеры произвольные рис. 4.2).

5. РАБОТА С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ПРИБОРАМИ

Работа с геодезическими приборами включает измерение горизонтальных углов, вертикальных углов, расстояний теодолитом (рис. 5.1) и измерение превышений нивелиром (рис. 5.5.).

Для выполнения измерений теодолит или нивелир приводят в рабочее положение – горизонтируют и фиксируют. Для горизонтирования теодолита поворотом алидады (8) устанавливают уровень (13) по направлению двух подъемных винтов прибора (5). Вращая эти винты в разные стороны выводят пузырек уровня на середину (в нольпункт). Открепив алидаду, поворачивают ее на 90 ^{0}, устанавливая уровень по направлению третьего подъемного винта. Вращением этого винта приводят пузырек уровня на середину. Затеи вращением диоптрийного кольца (14) устанавливают резкое изображение сетки нитей (рис. 5.3).

5.1. Измерение горизонтальных и вертикальных углов

Устанавливают теодолит в вершине угла, горизонтируют его, вращением алидады (9) и трубы (10) при положении вертикального круга слева (КЛ) наводят ее с помощью визира (3) на левую визирную цель (рис. 5.2), устанавливают ее резкое изображение с помощью кремальеры (12).

Рис. 5.2. Расположение марок при измерении горизонтальных углов

Рис. 5.3. Сетка нитей теодолита

Далее наводящими винтами алидады (9) и трубы (11) точно совмещают центр сетки нитей с визирной целью и с помощью микроскопа (1) берут отсчеты по горизонтальному и вертикальному кругам и записывают в журнал (Табл. 5.1.), затем поворачивают алидаду, наводят сетку нитей на правую визирную цель и также берут и записывают отсчеты по кругам теодолита. Выполненные действия при «круге лево» (КЛ) составляют первый полуприем. Второй полуприем выполняют при «круге право» (КП), для чего трубу переводят через зенит и далее действуют аналогично первому полуприему (КЛ). Порядок записи результатов измерений показан в жернале цифрами с 1 по 8 .

Значение горизонтального угла получают дважды:

1 полуприем КЛ $\boldsymbol{\beta_л = 95^0 30' - 48^0 25' = 47^0 05'}$ 9

2 полуприем КП $\boldsymbol{\beta_п = 275^0 30' - 228^0 26' = 47^0 04'}$ 10

Допустимое расхождение угла КЛ – КП не должно превышать 2′. За окончательное значение угла принимается его средняя величина

$$\boldsymbol{\beta_{ср} = (\beta_л + \beta_п) : 2 = 47^0 04'.5} \qquad 11$$

Вертикальные углы вычисляют по формуле $\boldsymbol{\nu = КЛ - МО}$

МО = (КЛ + КП – 180 ^{0}) : 2, где КЛ и КП отсчеты по вертикальному кругу теодолита, МО – место нуля вертикального круга.

$$МО = (16^0 32' + 163^0 27' - 180^0) : 2 = -0'.5 \qquad 12$$

$$\boldsymbol{\nu = 16^0 32' - (-0,'5) = 16^0 32,'5} \quad 14$$

Таблица 5.1.

ЖУРНАЛ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ И ДЛИН ЛИНИЙ

Дата 4 декабря исполнитель Иванов С. И.

Точки стояния	Круг	Точки визирования	Горизонтальный круг		
			Отсчет ° ′	Измеренный угол ° ′	Средний угол ° ′
1	2	3	4	5	6
В	КЛ	Д	48 25 1	9 47 05	11 47 04,5
		С	3 95 30		
	КП	Д	228 26 5	10 47 05	
		С	7 275 30		

Точки		Круг	Вертикальный круг			Длина линий
Стояния	Визирования		Отсчет	Место нуля	Угол наклона	Измеренн. / Гориз. прол.
7	8	9	10	11	12	13
В	Д	КЛ	16 32 2	12 - 0′, 5	14 16 32,5	17,6 16
		КП	163 27 6			
В	С	КЛ	351 18 4	13 + 0,5	15 -8 42,5	
		КП	188 43 8			
		КЛ				

5.2. Измерение расстояний нитяным дальномером

Измерение расстояний нитяным дальномером производят по рейке с сантиметровыми шашечными делениями (рис. 5.4), для чего труба теодолита наводят на рейку и наводящим винтом трубы (11) совмещают верхнюю дальномерную нить сетки нитей с ближайшим целым дециметровым делением рейки (например 10 дц.). Затем берут отсчет n_2 по нижней нити с точностью до 1 мм.

На рис. 5.4 n_1 = 1000 мм n_2 =1176 мм

Измеренное расстояние $S = K\ (n_1 - n_2)$, где К – коэффициент дальномера. $K = 100$

$S = 100\ (1176\text{-}1000) = 17{,}6$ м

Результат записывают в графу 13 журнала (табл. 5.1). 16

5.3. Измерение превышений

Нивелир (рис. 5.5) приводят в рабочее положение – горизонтируют, приводя на середину пузыре круглого уровня (7) подъемными винтами (11), фокусируют сетку нитей (1). Затем наводят трубу на заднюю рейку, добиваются ее резкого изображения с помощью кремальеры (5). Элевационным винтом (8) приводят пузырек цилиндрического уровня (9) на середину, берут отсчет по черной стороне рейки средней горизонтальной нитью до 1 мм (рис. 5.6), затем – по красной стороне рейки. Отсчеты записывают в графу 3 журнала (1 2 табл. 5.2). Затем рейку устанавливают на переднюю точку и действуя аналогично, берут отсчеты по черной и красной сторонам передней рейки 3 и 4, записывая их в графу 4 журнала.

Превышение вычисляют по формуле $\boldsymbol{h = a - в}$

где : a - отсчет по задней рейке,

$в$ – отсчет по передней рейке.

Превышение вычисляют дважды: по черным и красным сторонам рейки

$h_ч = 1171 - 1793 = -622$ 5

$h_к = 5854 - 6478 = -624$ 6 $h_ч - h_к = 2$ мм

Расхождение между $h_к$ и $h_к$ не должно превышать 5 мм. В графе 7 вычисляют среднее превышение 7

$h_{ср.} = (h_ч + h_к) : 2 = -623$ мм.

Рис. 5.5. Основные части нивелира Н-3

1 – диоптрийное кольцо; 2 – зрительная труба; 3 – визир; 4 – объектив; 5 – кремальера; 6 – наводящий вид; 7 – круглый уровень; 8 – элевационный винт; 9 – цилиндрический уровень; 10 – закрепительный винт; 11 – подъемный винт; 12 – подставка.

Рис. 5.6. Поле зрения зрительной трубы нивелира

Таблица 5.2

Журнал нивелирования

№№ стан-ций	Номер точек наблюде-ний	Отсчеты по рейкам, мм			Превышения, мм	
		Задней а	Передний в	Промежу-точный	Вычислен-ный	Средние
1	2	3	4	5	6	7
	1	1171 (1)				
1		5854 (2)			- 622 (5)	
	2		1793 (3)			- 623 (7)
			6478 (4)		- 624 (6)	

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Е.А.Акулова

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ГЕОДЕЗИЯ»

для студентов очного и заочного обучения

направления подготовки (специальности)
21.05.03 Технология геологической разведки
(уровень специалитета)

Екатеринбург, 2020 г

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»
(ФГБОУ ВО «УГГУ»)

Е.А.Акулова

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «**Геодезия**»

для студентов очного и заочного обучения

направления подготовки (специальности)
21.05.03 Технология геологической разведки
(уровень специалитета)

Стр.

Общие положения

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. Любой вид занятий, создающий условия для зарождения самостоятельной мысли, познавательной активности студента связан с самостоятельной работой. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа студентов – это средство вовлечения студента в самостоятельную познавательную деятельность, формирующую у него психологическую потребность в систематическом самообразовании.

Сущность самостоятельной работы студентов как специфической педагогической конструкции определяется особенностями поставленных в ней учебно-познавательных задач. Следовательно, самостоятельная работа – это не просто самостоятельная деятельность по усвоению учебного материала, а особая система условий обучения, организуемых преподавателем.

Основные задачи самостоятельной работы:

- развитие и привитие навыков студентам самостоятельной учебной работы и формирование потребностей в самообразовании;

- освоение содержания дисциплины в рамках тем, выносимых на самостоятельное изучение студента;

- осознание, углубление содержания и основных положений курса в ходе конспектирования материала на лекциях, отработки в ходе подготовки к семинарским и практическим занятиям;

- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий, при написании курсовых и дипломной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Активная самостоятельная работа студентов возможна только при наличии серьезной и устойчивой мотивации. Самый сильный мотивирующий фактор - подготовка к дальнейшей эффективной профессиональной деятельности.

2. Требования к уровню освоения образовательной программы

Объектом профессиональной деятельности выпускника по направлению подготовки бакалавриата 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» являются земельные ресурсы, используемые в различных отраслях народного хозяйства, их распределение по категориям земель, землевладениям и землепользованиям, правовой режим землепользования, количественная и качественная характеристики, управление и контроль за их состоянием и использованием, а также объекты недвижимости, включая земельные участки, находящиеся в границах городов и других поселений, их правовой статус, регистрация, оценка, контроль использования; городская среда; кадастровые информационные системы; проектно-техническая документация.

Выпускник по направлению подготовки бакалавриата 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» должен знать:

— методы проектирования и проведения технико-экономических расчетов; принципы землеустройства, земельного кадастра и городского кадастра; технологии проектирования; постановления, распоряжения, приказы вышестоящих и других органов;

— методические и нормативные материалы по землеустройству, земельному кадастру и городскому кадастру;

— стандарты, технические условия и другие руководящие материалы по разработке и оформлению проектно-сметной документации; технические средства проектирования в землеустройстве, земельном и городскому кадастрах, основы патентоведения;

— передовой отечественный и зарубежный опыт землеустройства, земельного и городского кадастров;

— технические, экономические, экологические и социальные требования к проектам (схемам) землеустройства и автоматизированным системам земельного и городского кадастров;

— законы, указы, постановления, приказы, методические и нормативные материалы по вопросам землеустройства организации государственного земельного и городского кадастров и автоматизированных кадастровых систем; перспективы их развития; организацию экономического планирования и оперативного регулирования производства;

— структуру проектных предприятий и кадастровых организаций, производственные и функциональные связи между его подразделениями;

— задачи и содержание земельно-кадастровых систем; порядок разработки системы государственного земельного и городского кадастров; прогнозов, планов, схем и проектов землеустройства, технических и рабочих проектов;

— экономико-математические и статистические методы и модели;

— средства вычислительной техники, коммуникаций и связи; порядок постановки задач, их алгоритмизации;

— методы определения экономической эффективности землеустройства; внедрения кадастровых систем и технологий;

— стандарты унифицированной системы проектной и кадастровой документации;

— порядок разработки и оформления технической документации;

— основы экономики, организации производства, труда и управления в землеустройстве и земельном кадастре, основы трудового законодательства, правила и нормы охраны труда.

Государственным образовательным стандартом предусмотрено 8640 часов теоретического обучения (240 з.е).

Срок освоения основной образовательной программы подготовки выпускника при очной форме обучения составляет 208 недель, в том числе: теоретическое обучение, включая научно-исследовательскую работу студентов, практикумы, в том числе лабораторные - 177 недель; экзаменационные сессии 23 недели; практики: 30 недель; итоговая государственная аттестация, включая подготовку и защиту выпускной квалификационной работы (проекта) 6 недель; каникулы (включая 8 недель последипломного отпуска) 31 неделя.

Максимальный объем учебной нагрузки студента устанавливается 54 часа в неделю, включая все виды его аудиторной и внеаудиторной (самостоятельной) учебной работы.

Объем аудиторных занятий студента при очной форме обучения не должен превышать в среднем за период теоретического обучения 24 часов в неделю. При этом в указанный объем не входят обязательные практические занятия по физической культуре и занятия по факультативным дисциплинам. При очно-заочной (вечерней) форме обучения объем аудиторных занятий должен быть не менее 10 часов в неделю.

Следует заметить, что самостоятельная работа в пределах теоретического обучения составляет 4150 часов. Учебные практики составляют 16 недель, из расчета 36 часов в неделю самостоятельная работа составляет 576 часов. В период экзаменационной сессии самостоятельная работа студента в среднем составляет 25-30 часов. Не составляет исключение и выпускная квалификационная работа, где самостоятельная работа может составлять в среднем 500 часов. В итоге, за весь период обучения самостоятельная работа студентов составляет более 5000 часов. Для эффективного использования этого времени при подготовке дипломированного специалиста необходимо рационально его использовать, грамотно организовать работу и иметь мотивацию для ее реализации.

3. Внутренние факторы, способствующие активизации самостоятельной работы

Среди них можно выделить следующие:

1. Полезность выполняемой работы. Если студент знает, что результаты его работы будут использованы в лекционном курсе, в методическом пособии, в лабораторном практикуме, при подготовке публикации или иным образом, то отношение к выполнению задания существенно меняется в лучшую сторону и качество выполняемой работы возрастает. При этом важно психологически настроить студента, показать ему, как необходима выполняемая работа.

Другим вариантом использования фактора полезности является активное применение результатов работы в профессиональной подготовке. Так, например, если студент получил задание на дипломную (квалификационную) работу на одном из младших курсов, он может выполнять самостоятельные задания по ряду дисциплин гуманитарного и социально-экономического, естественно-научного и общепрофессионального циклов дисциплин, которые затем войдут как разделы в его квалификационную работу.

Материальные стимулирующие факторы могут выражаться в надбавках к основной стипендии, номинированные на именные стипендии, участие в конкурсах научно-исследовательских работ, где в качестве приза могут выступать материальные поощрения.

2. Участие студентов в творческой деятельности. Это может быть участие в научно-исследовательской, опытно-конструкторской или методической работе, проводимой на кафедре.

3. Участие в олимпиадах по учебным дисциплинам, конкурсах научно-исследовательских или прикладных работ и т.д.

4. Использование мотивирующих факторов контроля знаний (накопительные оценки, рейтинг, тесты, нестандартные экзаменационные процедуры). Эти факторы при определенных условиях могут вызвать стремление к состязательности, что само по себе является сильным мотивационным фактором самосовершенствования студента.

5. Поощрение студентов за успехи в учебе и творческой деятельности (стипендии, премирование, поощрительные баллы) и санкции за плохую учебу. Например, за работу, сданную раньше срока, можно проставлять повышенную оценку, а в противном случае ее снижать.

6. Индивидуализация заданий, выполняемых как в аудитории, так и вне ее, постоянное их обновление.

7. Мотивационным фактором в интенсивной учебной работе и, в первую очередь, самостоятельной является личность преподавателя. Преподаватель может быть примером для студента как профессионал, как творческая личность. Преподаватель может и должен помочь студенту раскрыть свой творческий потенциал, определить перспективы своего внутреннего роста.

4. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

— формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);

— написание рефератов;

— подготовка к лабораторным работам, их оформление;

— выполнение микроисследований;

— подготовка практических разработок;

— выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;

— выполнение конкретного задания в период прохождения учебной практики;

— компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов;

— подготовка докладов и презентаций для конкурсов НИРС и конкурсов профессионального мастерства;

— подготовка к контрольным мероприятиям, таким как текущий контроль знаний в виде проверочных тестов или расчетно-графических работ, зачетов, экзаменов;

— выполнение курсовой работы или проекта;

— подготовка выпускной квалификационной работы.

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

— текущие консультации;

— прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);

— прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);

— выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);

— выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);

— прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);

— выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

5. Организация СРС

Аудиторная самостоятельная работа может реализовываться при проведении практических занятий, семинаров, выполнении лабораторного практикума и во время чтения лекций.

При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории контролируется усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам, тестового контроля знаний, опроса студентов и т.д.

На практических и лабораторных занятиях различные виды СРС позволяют сделать процесс обучения более интересным и поднять активность значительной части студентов в группе.

На практических занятиях не менее 1 часа из двух (50% времени) отводится на самостоятельное решение задач. Лабораторные занятия строятся следующим образом:

1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены).

2. Беглый опрос.

3. Решение 1-2 типовых задач.

4. Самостоятельное решение задач.

5. Проверка решения задач с обязательной работой над ошибками. Лабораторная или практическая работа считается выполненной при условии отсутствия ошибок.

Для проведения занятий необходимо иметь большой банк заданий и задач для самостоятельного решения, причем эти задания могут быть дифференцированы по степени сложности. В зависимости от дисциплины или от ее раздела можно использовать два пути:

1. Давать определенное количество задач для самостоятельного решения, равных по трудности, а оценку ставить за количество решенных за определенное время задач.

2. Выдавать задания с задачами разной трудности и оценку ставить за трудность решенной задачи.

По результатам самостоятельного решения задач следует выставлять по каждому занятию оценку.

При проведении лабораторных работ и учебных практик студенты могут выполнять СРС как индивидуально, так и малыми группами, каждая из которых разрабатывает свою задачу. Выполненная задача затем рецензируется преподавателем и членами бригады. Публичное обсуждение и защита своего варианта повышают роль СРС и усиливают стремление к ее качественному выполнению. Данная система организации практических занятий позволяет вводить в задачи научно-исследовательские элементы, упрощать или усложнять задания.

Активность работы студентов на обычных практических занятиях может быть усилена введением новой формы СРС, сущность которой состоит в том, что на каждую задачу студент получает свое индивидуальное задание (вариант), при этом условие задачи для всех студентов одинаковое, а исходные данные различны. Перед началом выполнения задачи преподаватель дает лишь общие методические указания (общий порядок решения, точность и единицы измерения определенных величин, имеющиеся справочные материалы и т.п.). Выполнение СРС на занятиях с проверкой результатов преподавателем приучает студентов грамотно и правильно выполнять технические расчеты, пользоваться вычислительными средствами и справочными данными. Изучаемый материал усваивается более глубоко, у студентов меняется отношение к лекциям, так как без понимания теории предмета, без хорошего конспекта трудно рассчитывать на успех в решении задачи. Это улучшает посещаемость как практических, так и лекционных занятий.

Выполнение лабораторного практикума, как и другие виды учебной деятельности, содержит много возможностей применения активных методов обучения и организации СРС на основе индивидуального подхода.

Любая лабораторная работа должна включать глубокую самостоятельную проработку теоретического материала, изучение методик проведения и планирование эксперимента, освоение измерительных средств, обработку и интерпретацию экспериментальных данных. При этом часть работ может не носить обязательный характер, а выполняться в рамках самостоятельной работы по курсу. В ряд работ целесообразно включить разделы с дополнительными элементами научных исследований, которые потребуют углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

Разработка комплекса методического обеспечения учебного процесса является важнейшим условием эффективности самостоятельной работы студентов. К такому комплексу следует отнести тексты лекций, учебные и методические пособия, лабораторные практикумы, банки заданий и задач, сформулированных на основе реальных данных, банк расчетных, моделирующих, тренажерных программ и программ для самоконтроля, автоматизированные обучающие и контролирующие системы, информационные базы дисциплины или группы родственных дисциплин и другое. Это позволит организовать проблемное обучение, в котором студент является равноправным участником учебного процесса.

Результативность самостоятельной работы студентов во многом определяется наличием активных методов ее контроля. Существуют следующие виды контроля:

- входной контроль знаний и умений студентов при начале изучения очередной дисциплины;

- текущий контроль, то есть регулярное отслеживание уровня усвоения материала на лекциях, практических и лабораторных занятиях;

- промежуточный контроль по окончании изучения раздела или модуля курса;

- самоконтроль, осуществляемый студентом в процессе изучения дисциплины при подготовке к контрольным мероприятиям;

- итоговый контроль по дисциплине в виде зачета или экзамена;

- контроль остаточных знаний и умений спустя определенное время после завершения изучения дисциплины.

В последние годы наряду с традиционными формами контроля - коллоквиумами, зачетами, экзаменами достаточно широко вводятся новые методы, то есть организация самостоятельной работы студентов производится на основе современных образовательных технологий. В качестве такой технологии в современной практике высшего профессионального образования часто рассматривается рейтинговая система обучения, позволяющая студенту и преподавателю выступать в виде субъектов образовательной деятельности, т.е. являться партнерами.

Тестовый контроль знаний и умений студентов, который отличается объективностью, экономит время преподавателя, в значительной мере освобождает его от рутинной работы и позволяет в большей степени сосредоточиться на творческой части преподавания, обладает высокой степенью дифференциации испытуемых по уровню знаний и умений и очень эффективен при реализации рейтинговых систем, дает возможность в значительной мере индивидуализировать процесс обучения путем подбора индивидуальных заданий для практических занятий, индивидуальной и самостоятельной работы, позволяет прогнозировать темпы и результативность обучения каждого студента.

Тестирование помогает преподавателю выявить структуру знаний студентов и на этой основе переоценить методические подходы к обучению по дисциплине, индивидуализировать процесс обучения. Весьма эффективно использование тестов непосредственно в процессе обучения, при самостоятельной работе студентов. В этом случае студент сам проверяет свои знания. Не ответив сразу на тестовое задание, студент получает подсказку, разъясняющую логику задания и выполняет его второй раз.

Следует отметить и все шире проникающие в учебный процесс автоматизированные обучающие и обучающе-контролирующие системы, которые позволяют студенту самостоятельно изучать ту или иную дисциплину и одновременно контролировать уровень усвоения материала.

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой.

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. Первичное - эти внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятного олова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача вторичного чтения полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой. Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

• Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

• Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

• Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).
• Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

• При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

•Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

• Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

• Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

• «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

• Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

- информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких ***видов чтения***:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;

2. Выделите главное, составьте план;

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя

студент должен:

– освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО/ГОС СПО) по данной дисциплине.

– планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

– самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

– выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ГОС ВПО/ГОС СПО по данной дисциплине:

– самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

– предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

– в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

– предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

– использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

– использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

6. Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы зияний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма

продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов),* причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра*.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самопроверка.

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Подготовка к экзаменам и зачетам.

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неутомительные занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

• Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

• Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

• Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

• Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

• Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Правила написания научных текстов (рефератов, курсовых и дипломных работ):

• Важно разобраться сначала, какова истинная цель Вашего научного текста - это поможет Вам разумно распределить свои силы, время и.

• Важно разобраться, кто будет «читателем» Вашей работы.

• Писать серьезные работы следует тогда, когда есть о чем писать и когда есть настроение поделиться своими рассуждениями.

• Как создать у себя подходящее творческое настроение для работы над научным текстом (как найти «вдохновение»)? Во-первых, должна быть идея, а для этого нужно научиться либо относиться к разным явлениям и фактам несколько критически (своя идея – как иная точка зрения), либо научиться увлекаться какими-то известными идеями, которые нуждаются в доработке (идея – как оптимистическая позиция и направленность на дальнейшее совершенствование уже известного). Во-вторых, важно уметь отвлекаться от окружающей суеты (многие талантливые люди просто «пропадают» в этой суете), для чего важно уметь выделять важнейшие приоритеты в своей учебно-исследовательской деятельности. В-третьих, научиться организовывать свое время, ведь, как известно, свободное (от всяких глупостей) время – важнейшее условие настоящего творчества, для него наконец-то появляется время. Иногда именно на организацию такого времени уходит немалая часть сил и талантов.

• Писать следует ясно и понятно, стараясь основные положения формулировать четко и недвусмысленно (чтобы и самому понятно было), а также стремясь структурировать свой текст. Каждый раз надо представлять, что ваш текст будет кто-то читать и ему захочется сориентироваться в нем, быстро находить ответы на интересующие вопросы (заодно представьте себя на месте такого человека). Понятно, что работа, написанная «сплошным текстом» (без заголовков, без выделения крупным шрифтом наиболее важным мест и т, п.), у культурного читателя должна вызывать брезгливость и даже жалость к автору (исключения составляют некоторые древние тексты, когда и жанр был иной и к текстам относились иначе, да и самих текстов было гораздо меньше – не то, что в эпоху «информационного взрыва» и соответствующего «информационного мусора»).

• Объем текста и различные оформительские требования во многом зависят от принятых в конкретном учебном заведении порядков.

Содержание основных этапов подготовки курсовой работы

Курсовая работа - это самостоятельное исследование студентом определенной проблемы, комплекса взаимосвязанных вопросов, касающихся конкретной финансовой ситуации.

Курсовая работа не должна составляться из фрагментов статей, монографий, пособий. Кроме простого изложения фактов и цитат, в курсовой работе должно проявляться авторское видение проблемы и ее решения.

Рассмотрим основные этапы подготовки курсовой работы студентом.

Выполнение курсовой работы начинается с выбора темы.

Затем студент приходит на первую консультацию к руководителю, которая предусматривает:

- обсуждение цели и задач работы, основных моментов избранной темы;
- консультирование по вопросам подбора литературы;
- составление предварительного плана;
- составление графика выполнения курсовой работы.

Следующим этапом является работа с литературой. Необходимая литература подбирается студентом самостоятельно.

После подбора литературы целесообразно сделать рабочий вариант плана работы. В нем нужно выделить основные вопросы темы и параграфы, раскрывающие их содержание.

Составленный список литературы и предварительный вариант плана уточняются, согласуются на очередной консультации с руководителем.

Затем начинается следующий этап работы - изучение литературы. Только внимательно читая и конспектируя литературу, можно разобраться в основных вопросах темы и подготовиться к самостоятельному (авторскому) изложению содержания курсовой работы. Конспектируя первоисточники, необходимо отразить основную идею автора и его позицию по исследуемому вопросу, выявить проблемы и наметить задачи для дальнейшего изучения данных проблем.

Систематизация и анализ изученной литературы по проблеме исследования позволяют студенту написать первую (теоретическую) главу.

Выполнение курсовой работы предполагает проведение определенного исследования. На основе разработанного плана студент осуществляет сбор фактического материала, необходимых цифровых данных. Затем полученные результаты подвергаются анализу, статистической, математической обработке и представляются в виде текстового описания, таблиц, графиков, диаграмм. Программа исследования и анализ полученных результатов составляют содержание второй (аналитической) главы.

В третьей (рекомендательной) части должны быть отражены мероприятия, рекомендации по рассматриваемым проблемам.

Рабочий вариант текста курсовой работы предоставляется руководителю на проверку. На основе рабочего варианта текста руководитель вместе со студентом обсуждает возможности доработки текста, его оформление. После доработки курсовая работа сдается на кафедру для ее оценивания руководителем.

Защита курсовой работы студентов проходит в сроки, установленные графиком учебного процесса.

Рекомендации по подготовке к защите курсовой работы

При подготовке к защите курсовой работы студент должен знать основные положения работы, выявленные проблемы и мероприятия по их устранению, перспективы развития рассматриваемой экономической ситуации.

Защита курсовой работы проводится в университете при наличии у студента курсовой работы, рецензии и зачетной книжки. Оценка - дифференцирована. Преподаватель оценивает защиту курсовой работы и заполняет графу "оценка" в ведомости и в зачетной книжке.

Не допускаются к защите варианты курсовых работ, найденные в Интернет, сканированные варианты учебников и учебных пособий, а также копии ранее написанных студенческих работ.

7. Требования к учебно-методическому обеспечению самостоятельной работы студентов

Для нормальной самостоятельной работы студент должен быть обеспечен достаточным количеством учебных пособий разного вида. Чем более разнообразны учебные пособия, тем более успешна будет самостоятельная работа студента, так как каждый может выбрать себе учебное пособие по силам, по склонностям, по материальным возможностям. Должны быть пособия краткие и подробные, с неглубокими и глубокими теоретическими обоснованиями, теоретического и практического содержания. Нужны справочники, конспекты-справочники, учебники. Часть учебных пособий должна находиться в учебной студенческой библиотеке, часть пособий студент должен иметь возможность купить для личного пользования в книжном магазине учебного заведения. Основная часть учебных пособий должна быть в бумажном виде (книги, брошюры, чертежи и т.д.).

Наряду с ними нужно создавать, накапливать в учебных фондах и продавать учебные пособия электронного вида. Этот вид учебных пособий в обозримом будущем не может стать основным и вряд ли когда-нибудь станет. Это – вспомогательные, дополнительные учебные пособия, используемые в основном для заочного, дистанционного образования. Количество учебных пособий в учебном фонде библиотеки должно быть таким, чтобы каждый студент мог получить хотя бы один из рекомендованных учебников.

Многоуровневая система высшего образования должна предоставлять человеку условия для развития его потенциальных возможностей и наиболее полного удовлетворения потребности личности в самореализации. Поэтому на каждом из уровней подготовки самостоятельная работа студентов (СРС) есть обязательное условие, которое должно быть соблюдено для достижения проектируемых результатов обучения. Правильная (психологически и дидактически обоснованная) организация СРС при изучении каждой дисциплины – это один из основных педагогических путей развития и становления творческих качеств личности учащегося на каждом уровне обучения.

Из дидактики следует, что для непрерывного развития учащегося и становления его как творческой личности все элементы содержания образования (знания, умения и навыки, опыт творческой и оценочной деятельности), выделенные в рамках определенной дисциплины, должны быть им усвоены с установкой на перенос и активное использование.

Поэтому на первом уровне обучения каждого студента по каждой учебной дисциплине нужно снабдить комплектом учебно-методических материалов, помогающих ему организовывать самостоятельную работу. В такой комплект обязательно должны входить: программа, адаптированная для студента; учебная литература (учебник, задачник, руководство по выполнению лабораторных работ); система заданий для самостоятельной работы студентов; методические указания по организации самостоятельной работы при выполнении заданий по разным видам занятий, включая и курсовые работы (проекты).

На втором и третьем уровнях обучения их следует снабдить методическими указаниями по выполнению выпускной работы, завершающей подготовку специалиста. Программа должна содержать: обоснование необходимости изучения дисциплины, написанное в убеждающей и понятной для студентов форме; четкую формулировку цели изучения и задач, которые должны быть решены для достижения общей цели; последовательность тем и разделов курса дисциплины, обязательных для данного направления подготовки; перечень видов деятельности, которые должен освоить студент, выполняя задания по дисциплине; перечни методологических и предметных знаний, общеобразовательных и специальных умений (с указанием уровня их усвоения), которыми необходимо овладеть в процессе изучения данной дисциплины; сроки и способы текущего, рубежного и итогового контроля уровня усвоения знаний сформированности умений.

Учебная литература по содержанию и последовательности представления материала должна соответствовать программе. Объем, научный уровень и стиль изложения должны позволять каждому студенту самостоятельно усвоить приведенный в ней материал за время, отведенное на его изучение, и овладеть знаниями, умениями, видами деятельности, перечисленными в программе. Для обеспечения терминологической однозначности в системе знаний, усваиваемых студентом, каждое учебное пособие (или другой вид учебной литературы) должно содержать словарь основных терминов, используемых в нем.

Задания для самостоятельной работы должны быть конкретными. Их содержание, соответствуя программе, должно знакомить студентов с современными методами решения задач данной дисциплины.

Структура заданий должна соответствовать принципу доступности: от известного к неизвестному и от простого к сложному, а трудоемкость – времени, выделенному программой на самостоятельную работу по изучению данной темы. В заданиях следует указывать знания и умения, которыми должен овладеть студент по мере их выполнения. Кроме того, в них нужно включать вопросы для самоконтроля и взаимного контроля, тесты и контрольные вопросы для оценки и самооценки уровня усвоения знаний, сформированности умений.

Методические указания по организации СРС на каждом уровне обучения должны способствовать непрерывному развитию у них рациональных приемов познавательной деятельности в процессе изучения конкретных дисциплин. Основное назначение всех методических указаний – дать возможность каждому студенту перейти от деятельности, выполняемой под руководством преподавателя, к деятельности, организуемой самостоятельно, к полной замене контроля со стороны преподавателя самоконтролем. Поэтому они должны содержать подробное описание рациональных приемов выполнения перечисленных видов деятельности, критериев оценки выполненных работ, а также рекомендации по эффективному использованию консультаций и по работе при подготовке и сдаче экзаменов.

Каждый из названных учебно-методических материалов влияет в большей степени на один из этапов усвоения знаний и видов деятельности, но одновременно способствует осуществлению других этапов и более полной реализации их задач.

Так, программа с четко выделенной целью и перечнем задач, влияющих на ее достижение, определяет мотивационный этап и способствует организации деятельности на всех остальных, указывая последовательность изучаемых разделов, сроки контроля. Учебная литература служит информационной основой, прежде всего для ориентировочного этапа. В то же время работа с литературой усиливает мотивацию, если изложение материала по уровню сложности соответствует зоне ближайшего развития студента; помогает осуществлению исполнительского и контрольного этапов, если в ней указаны особенности выполнения заданий, даны контрольные вопросы.

Задания для самостоятельной работы организуют исполнительский этап, задавая последовательность видов деятельности, необходимых для усвоения знаний и приобретения умений. Так как задания содержат средства контроля, то они определяют и контрольный этап.

Вопросы и задачи в заданиях требуют от студента не только воспроизведения знаний, но и проявления творчества, формируют и развивают его опыт творческой деятельности. Это расширяет основы мотивации, усиливает и укрепляет ее. В целом содержание и структура заданий, отвечающих перечисленным требованиям, позволяет регулярно занимающимся студентам получать удовлетворение от самостоятельно выполненной работы. Такой эмоциональный фон, в свою очередь, формирует положительное отношение к выполненному делу, а через него – и к изучаемой дисциплине.

Методические указания по организации СРС способствуют грамотному и рациональному осуществлению исполнительского этапа, обеспечивают контрольный этап. Для этого виды деятельности, активно используемые при изучении дисциплины, должны быть подробно описаны в указаниях с выделением последовательности действий и даже операций. В этом случае сами виды деятельности становятся предметом изучения, что дает верное направление ориентировочному этапу и, безусловно, усиливает мотивацию обучения. Работа студентов с такими методическими указаниями позволяет им уже при изучении общенаучных дисциплин усвоить полную и обобщенную ориентировочную основу для каждого из таких видов деятельности, как работа с литературой, проведение эксперимента, решение задач.

Таким образом, создание для каждой учебной дисциплины рассмотренного комплекта учебно-методических материалов обеспечивает обязательные этапы усвоения знаний, видов деятельности, опыта творчества, Снабжение таким комплектом каждого студента – необходимое условие полной реализации в процессе обучения всех возможностей СРС как вида познавательной деятельности, метода и средства учения и преподавания.

7. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этом пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебе с будущей профессиональной деятельности.

Список используемой литературы

1. ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ направление подготовки бакалавриата 21.03.02 «Землеустройство и кадастры.

2. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы./ ГОУ ВПО «Московский государственный гуманитарный университет
им. М.А. Шолохова». 2010г.

МИНОБРНАУКИ РФ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ
СТУДЕНТОВ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ГЕОЛОГИЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ
«ТЕХНОЛОГИЯ ГЕОЛОГИЧСКОЙ РАЗВЕДКИ»**

Авторы: Огородников В. Н., д.г-м.н., доцент; Поленов Ю. А., д.г-м.н., доцент

Екатеринбург
2019

Лабораторные занятия по курсу «Геология» представляют важную часть в общем цикле геологических дисциплин. Эти занятия дают студентам возможность познакомиться с главнейшими породообразующими минералами и наиболее распространенными горными породами, а также получить навыки работы с горным компасом.

Выполнение лабораторных работ производится в три этапа. В начале студенты знакомятся с основными породообразующими минералами и учатся распознавать их в составе горных пород. На втором этапе студенты получают навыки определения и описания магматических, метаморфических и осадочных горных пород. В завершение занятий студенты знакомятся с устройством горного компаса и получают представление о работе с ним.

Объем аудиторных лабораторных занятий не достаточен для получения навыков по определению горных пород и минералов, поэтому студенты обязаны самостоятельно заниматься с коллекциями на кафедре в пределах часов, предусмотренных рабочими программами дисциплин.

В целях удобства работы на занятиях методические материалы скомпонованы в четыре самостоятельные брошюры:

Часть 1. Минералы

Часть 2. Магматические горные породы

Часть 3. Метаморфические горные породы

Часть 4. Осадочные горные породы

Часть 1

МИНЕРАЛЫ

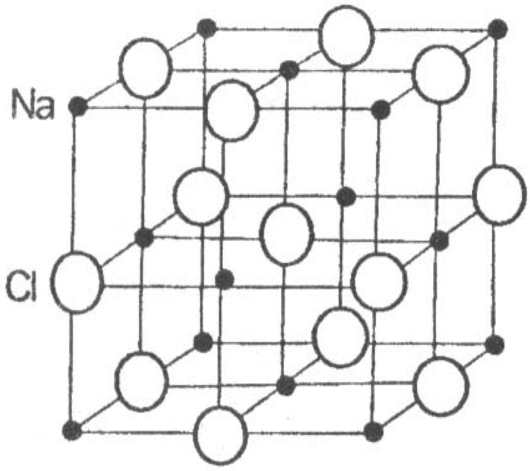
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МИНЕРАЛАХ

Подавляющее большинство химических элементов образуют в земной коре простые или сложные соединения (исключения составляют инертные газы и некоторые самородные элементы).

Минералы – химические соединения, образовавшиеся в земной коре в результате природных геологических процессов и обладающие определенными химическим составом и физическими свойствами.

Каждый минерал обладает вполне определенным химическим составом и вполне определенной кристаллической структурой, т. е. закономерным расположением в пространстве элементарных частиц (атомов, ионов). Например, минерал галит (каменная соль) состоит из 39,4 % Na и 50,6 % Cl и имеет химическую формулу NaCl. Кристаллическая структура галита характеризуется поочередным расположением ионов Na^+ и Cl в углах кубов (рис. 1), где каждый ион хлора окружен шестью ионами натрия, и наоборот.

Рис. 1. Кристаллическая структура галита (NaCl)



В зависимости от особенностей химического состава и кристаллической структуры минералы образуют многогранники различной формы, называемые кристаллами. Эти же характеристики минералов (химический состав и кристаллическая структура) обусловливают их физические свойства. Иногда минералы имеют неупорядоченные строения, когда атомы и ионы располагаются беспорядочно, хаотично. Минералы с таким строением называют аморфными.

Образование минералов является результатом различных геологических процессов. По способу образования (источнику энергии) минералы могут быть объединены в две группы.

1. Минералы эндогенного генезиса, образующиеся за счет внутренней энергии Земли. Возникают в результате кристаллизации магмы и связанных с ней горячих газовых и водных растворов (гидротерм) на различных глубинах, а также путем преобразования минералов в условиях больших давлений и температур.

2. Минералы экзогенного генезиса, образующиеся за счет внешней (солнечной) энергии. Источником минералообразования являются разнообразные горные породы, вступающие во взаимодействие с атмосферой, гидросферой и биотой, давая начало новым минералам.

Пути и способы образования минералов разнообразны. Они могут быть следствием: 1) кристаллизации огненно-жидкого силикатного расплава (магмы); 2) кристаллизации из горячих минерализованных растворов (гидротерм); 3) отложения кристаллического вещества из газообразных продуктов возгонов; 4) перекристаллизации минералов и горных пород; 5) образования новых минералов за счет разрушения ранее созданных.

1.1. Формы нахождения минералов

В природе минералы встречаются в виде отдельных хорошо образованных кристаллов либо в виде скоплений неправильной формы зерен (агрегатов).

1.1.1. Облик кристаллов

Среди минералов выделяют три группы, обладающие характерным обликом, или габитусом, кристаллов.

Изометричные – формы, имеющие близкие размеры во всех направлениях. Примером могут служить кубы пирита, галенита, октаэдры магнетита, ромбоэдры кальцита и др. (рис. 2).

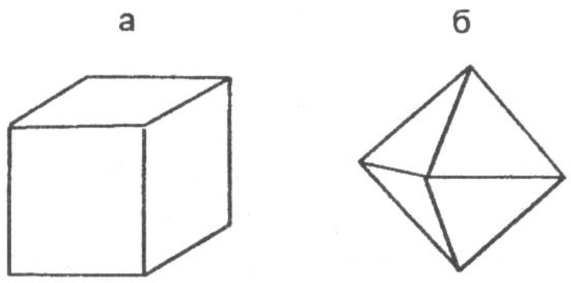


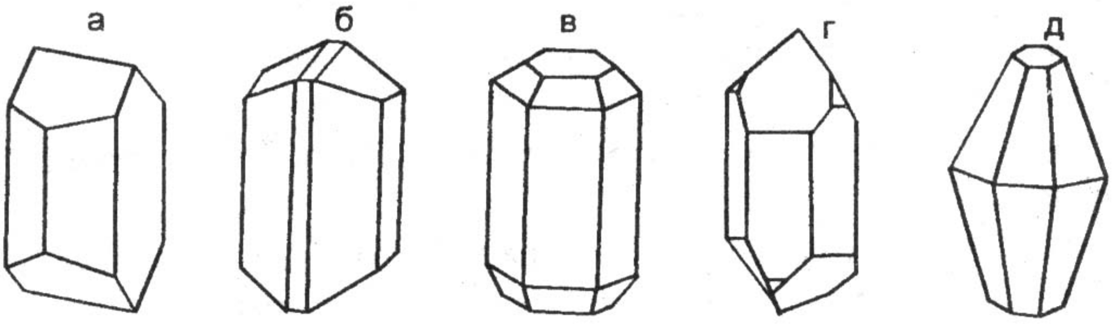
Рис. 2. Изометричные формы кристаллов:
а – кубический кристалл пирита;
б – октаэдрический кристалл магнетита

Уплощенные - формы, хорошо развитые преимущественно в двух направлениях. Сюда относятся таблитчатые, пластинчатые, листоватые и чешуйчатые кристаллы слюды, хлорита, графита и т. д. (рис. 3).

Рис. 3. Уплощенные формы кристаллов:
а – таблитчатый кристалл гематита;
b– пластинчатый кристалл мусковита

Удлиненные - формы, развитые в одном направлении. К этой группе относятся призматические, столбчатые, шестоватые, игольчатые и волокнистые кристаллы роговой обманки, пироксена, кварца и т. д. (рис. 4).

Рис. 4. Удлиненные формы кристаллов:



а – полевого шпата; б – роговой обманки; в – апатита; г – кварца; д - корунда

1.1.2. Минеральные агрегаты

В природе чаще встречаются не единичные кристаллы минералов, а скопления или срастания различной формы зерен. Эти скопления называют минеральными агрегатами.

Агрегаты бывают мономинеральными (моно - один), т. е. состоящими из зерен одного минерала, и полиминеральными (поли - много), сложенными несколькими различными минералами. Выделяют несколько видов минеральных агрегатов.

Зернистые агрегаты обладают наибольшим распространением в земной коре. В зависимости от формы слагающих зерен различают собственно зернистые (состоящие из изометричных зерен), а также пластинчатые, листоватые, чешуйчатые, волокнистые, игольчатые, шестоватые и другие агрегаты. По величине зерен можно выделять агрегаты крупнозернистые, более 5 мм в поперечнике, среднезернистые - от 1 до 5 мм и мелкозернистые - с зернами менее 1 мм.

Землистые агрегаты - порошкообразные, рыхлые мягкие минеральные массы скрытокристаллического строения, обычно пачкают руки, легко распадаются на мелкие комочки.

Сажистые - (черные цвета) или охристые (желтого, бурого и других ярких цветов). Образуются в процессе химического выветривания. Примером являются минерал каолинит и марганцевые руды.

Натечные формы выделений минералов образуются на стенках пустот при медленном испарении или охлаждении поступающих туда растворов. Эти образования имеют разнообразную форму: почковидную, гроздевидную, неправильную, цилиндрическую. Натеки, свисающие в виде сосулек со сводов пустот, называются сталактитами, а поднимающиеся им навстречу со дна пустот - сталагмитами. Характерным примером натечных образований являются: лимонит, малахит, кальцит.

Друзы - это сростки более или менее хорошо ограненных кристаллов на стенках каких-либо пустот. Примером могут служить довольно часто встречающиеся друзы кристаллов кварца или пирита.

Реже встречаются другие виды минеральных агрегатов: *секреции* -выполнение пустот изометричной, часто округлой формы, отличающиеся концентрически-зональным строением. Мелкие секреции в излившихся эффузивах называют миндалинами, крупные – жеодами; *конкреции* — шарообразные или неправильной формы стяжения и желваки, образующиеся в рыхлых осадочных породах (илах, глинах, песках и др.); *оолиты* - (от греч.-яйцо) - мелкие стяжения сферической формы размером от долей миллиметра до нескольких миллиметров, образующиеся путем наслоения коллоидального материала на песчинки в подвижной водной среде.

1.2. Физические свойства минералов

Минералы отличаются друг от друга по многим внешним признакам: цвету, блеску, твердости, форме и другим свойствам. Все физические свойства находятся в прямой зависимости от химического состава и кристаллической структуры, поэтому каждый из минералов характеризуется своим набором физических свойств, позволяющим проводить их диагностику (определение).

1.2.1. Оптические свойства

Цвет

У минералов различают идиохроматическую, аллохроматическую и псевдохроматическую окраски.

Идиохроматическая (от греч. «идиос» - свой, собственный и «хрома» - цвет) окраска обусловлена внутренними свойствами минерала, особенностями строения кристаллической решетки. Такую окраску имеют латунно-желтый пирит, черный магнетит, свинцово-серый галенит и др.

Аллохроматическая (от греч. «аллос» - посторонний) окраска связана с присутствием в минералах либо элементов-хромофоров (красителей), либо тонкорассеянных механических примесей. Например, очень сильным элементом-красителем является хром. Даже незначительная примесь Cr_2O_3 (0,1 %) окрашивает бесцветный минерал корунд в ярко-красный цвет, прозрачная разновидность которого называется рубином.

Наличие тонкорассеянных механических примесей оксидов и гидрооксидов железа в бесцветных минералах окрашивает последние во всю гамму красно-желтых тонов. Тонкорассеянное органическое вещество дает серые, черные цвета и т. д. Примером окраски такого рода может служить цвет галита. Чистые минералы галита прозрачны и бесцветны или имеют белый цвет. Но часто те или иные красящие пигменты обусловливают окраску различных цветов: серый (обычно глинистые частицы), желтый (*гидроксиды* железа), красный (*оксиды* железа), бурый и черный (органические вещества).

Природа окрашивания некоторых минералов кроется в нарушении однородности строения их кристаллических решеток, в возникновении в них различных дефектов (черный кварц, аметист и др.).

Псевдохроматическая (от греч. «псевдос» - ложный) окраска не имеет ничего общего с природой самого минерала. Некоторые минералы меняют окраску в зависимости от освещения. Например, на полированной поверхности минерала лабрадорита при некоторых углах поворота освещения появляются густые синие и зеленовато-синие переливы, вызванные интерференцией световых лучей, отраженных от плоскостей спайности лабрадорита. Такое явление называется иризацией.

Иногда минералы бывают покрыты тонкой поверхностной пленкой другого минерала, которая обычно имеет радужную окраску, напоминающую окраску тонких пленок нефти на поверхности воды. Подобные пленки на минералах называют побежалостью.

При определении окраски минерала обычно широко применяется метод сравнения с окраской хорошо известных предметов или веществ: яблочно-зеленый, лазурно-синий, шоколадно-коричневый и т. п. Эталонами считаются названия цветов следующих минералов: фиолетовый у аметиста, зеленый у малахита, красный у киновари, бурый у лимонита, свинцово-серый у галенита, железо-черный у магнетита, латунно-желтый у пирита, металлически-золотистый у золота.

Прозрачность - способность минерала пропускать свет. В зависимости от этой способности все минералы делятся: на прозрачные - горный хрусталь, топаз, исландский шпат и др.; полупрозрачные - флюорит, сильвин и др.; непрозрачные - пирит, магнетит и др.

Цвет черты

Это цвет тонкого порошка минерала, который легко получить, если провести испытуемым минералом черту на матовой (неглазурованной) поверхности фарфоровой пластики, называемой бисквитом. Цвет черты является более надежным признаком по сравнению с окраской минералов. В ряде случаев он соответствует цвету минерала (серая черта у серого галенита), но иногда цвет черты резко отличается от цвета минерала (латунно-желтый пирит оставляет черную черту). Для некоторых минералов этот признак является диагностическим. Например, очень похожие друг на друга минералы группы железа легко распознаются по цвету черты: магнетит имеет черную черту, гематит – вишневую, лимонит – желто-бурую.

Цвет черты определяется только у минералов с металлическим блеском, потому что другие минералы имеют белую или светлоокрашенную черту.

Блеск

Блеск – способность минералов отражать от своей поверхности световой поток. Установлено, что блеск зависит от показателя преломления минерала, т. е. величины, характеризующей разницу в скорости света при переходе из воздушной в кристаллическую среду. Минералы с показателем преломления 1,3-1,9 имеют *стеклянный* блеск, с 1,9-2,6 — *алмазный* блеск. *Полуметаллический* блеск отвечает минералам с показателем преломления 2,6-3,0 и *металлический* – выше 3,0. Металлический блеск отвечает отражению полированной поверхности металла. Такой блеск характерен для непрозрачных минералов. Примером могут служить минералы пирит, галенит, халькопирит. Полуметаллический блеск напоминает блеск потускневшего металла. Он характерен для гематита, графита и др. Наиболее широко распространен стеклянный блеск, на его долю приходится около 70 % минералов. Стеклянным блеском обладают горный хрусталь, кальцит, корунд, флюорит, амфиболы, пироксены, полевые шпаты и другие минералы.

Более сильным, чем стеклянный, является алмазный блеск, характерный, например, для алмаза, серы.

Блеск минерала зависит также от характера его поверхности. Если поверхность неровная, то отраженный свет несколько рассеивается, преобразуя стеклянный и алмазный блески в так называемый жирный. Порошковатые рыхлые минералы, обладающие тонкой пористостью, имеют матовый блеск, так как микроскопические поры являются своего рода «ловушками» для света. Примерами могут служить каолинит, землистые массы лимонита и др.

У минералов с параллельно-волокнистым строением наблюдается типичный шелковистый блеск (асбест), полупрозрачные «слоистые» и пластинчатые минералы имеют перламутровый отлив.

1.2.2. Механические свойства

Спайность и излом

Спайностью называют свойство минералов раскалываться по определенным направлениям, обусловленным строением их кристаллических решеток, образуя при этом ровные площади – плоскости спайности. Это свойство минералов связано исключительно с внутренним их строением и не зависит от внешней формы кристаллов. Например, при раскалывании кристаллов кальцита самой разнообразной формы получается спайный выколок всегда одной и той же формы – ромбоэдр, кристаллов флюорита – октаэдр, галенита и галита – куб.

По степени совершенства различают следующие виды спайности: *весьма совершенная* - минералы легко расщепляются на тонкие листочки, чешуйки (мусковит, биотит, хлорит, тальк, графит); *совершенная* — минералы при ударе раскалываются на обломки, со всех сторон ограниченные тремя и более плоскостями спайности (кальцит, флюорит, галенит, галит); *средняя* – минералы раскалываются на обломки, ограниченные двумя плоскостями спайности и неровными поверхностями по случайным направлениям (полевые шпаты, роговая обманка, пироксен); несовершенная – минералы раскалываются на обломки, ограниченные неровными поверхностями и одной плоскостью спайности (корунд, апатит); весьма несовершенная или отсутствует – минералы раскалываются только по случайным направлениям с неровными поверхностями (кварц, магнетит, пирит).

Чтобы не спутать грани кристаллов с плоскостями спайности необходимо помнить, что направление спайности дает систему взаимопараллельных плоскостей или трещин. При определении спайности в агрегате выбирается одно или несколько наиболее крупных зерен и в них наблюдаются плоскости спайности. Если угол спайности, например, равен 90 градусам, то излом *ступенчатый*, а если угол спайности острый – излом *занозистый.*

Неровные поверхности, получаемые при расколе минерала по случайным направлениям, называют *изломом.* Наиболее распространен *неровный* излом, но иногда наблюдаются и другие виды: *гладкий, раковистый* – излом характерен для минералов с весьма несовершенной спайностью, напоминает поверхность раковины с концентрической скульптурой (кварц, пирит); *ступенчатый, занозистый* – излом характерен для игольчатых или волокнистых минералов (селенит). Излом, как и спайность, определяется внутренним строением минерала, его кристаллической решеткой.

Твердость, хрупкость, ковкость, упругость

Под твердостью минерала подразумевается степень его сопротивления внешним механическим воздействиям. В минералогической практике применяют наиболее простой способ определения твердости - царапанье одного минерала другим, т. е. устанавливается относительная твердость минерала. Для оценки относительной твердости немецким минералогом Ф. Моосом была предложена шкала, состоящая из десяти минералов, каждый из которых, обладая более высокой твердостью, своим острым концом царапает все предыдущие с меньшими номерами. Твердость минералов-эталонов в шкале условно обозначена целыми числами.

Шкала Мооса представлена следующими минералами:

Тальк	$Mg_3[Si_4O_{10}](OH)_2$	1
Гипс	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	2
Кальцит	$CaCO_3$	3
Флюорит	CaF_2	4
Апатит	$Ca_5[P0_4]_3(F,C1)$	5
Ортоклаз	$K[A1Si_30_8]$	6
Кварц	SiO_2	7
Топаз	$A1_2[SiO_4]F_2$	8
Корунд	$A1_20_3$	9
Алмаз	C	10

Для определения твердости исследуемого минерала устанавливают, какой эталон с максимальным номером он царапает. Например, если испытуемый минерал царапает апатит, но оставляет порошок, т. е. истирается на ортоклазе, значит его твердость выше 5, но ниже 6 и оценивается в 5.5.

Относительную твердость можно определить, не имея шкалы Мооса, используя некоторые заменители. Так, твердость ногтя – 2,5; медной монеты – 3,0-3,5; оконного стекла – 5,0; стального ножа – 6,0; напильника – 7,0. Твердость порошковатых разностей бывает занижена по сравнению с твердостью этого минерала в крупных зернах.

Под хрупкостью понимают свойство минерала крошиться при проведении по нему черты ножом. Противоположный эффект – гладкий блестящий след – свидетельствует о свойстве минерала деформироваться пластически. Ковкие минералы расплющиваются под ударом молотка в тонкую пластинку, упругие – способны восстанавливать форму после снятия нагрузки (слюды, асбест).

1.2.3. Прочие свойства

Удельный вес

Удельный вес может быть точно замерен только в лабораторных условиях различными методами; приблизительное суждение об удельном весе можно получить путем сопоставления с распространенными минералами, удельный вес которых принимается за эталон. Все минералы по удельному весу можно разделить на три группы:

легкие - с удельным весом меньше 3 г/см^3 (галит, гипс, кварц и др.); *средние* - с удельным весом порядка 3-5 г/см^3 (апатит, корунд, пирит и др.); *тяжелые* - с удельным весом больше 5 г/см^3 (галенит, золото и др.).

1.2.4. Специфические свойства

Некоторые минералы обладают особыми, характерными только для них свойствами, когда нет необходимости определять их в других индивидах.

Магнитность. Сравнительно небольшое число минералов обладает свойством воздействовать на магнитную стрелку. Для минералов, обладающих магнитностью, это свойства имеет важное диагностическое значение. Минералы, обладающие ярко выраженными ферромагнитными свойствами, могут притягивать даже мелкие железные предметы - опилки, булавки (магнетит). Менее магнитные минералы (парамагнитные) слабо притягиваются магнитом (пирротин), и, наконец, имеются минералы, которые отталкивают магнитную стрелку, - самородный висмут.

Реакция с соляной кислотой. С соляной кислотой взаимодействуют минералы из класса карбонатов:

- кальцит $Ca\ CO_3$ - бурно реагирует, "вскипая" в кислоте;
- доломит $Ca\ Mg\ (CO_3)_2$ - «вскипает» только в порошке;
- магнезит $Mg\ CO_3$ - не реагирует с кислотой.

Двойное лучепреломление. Двупреломление света – разложение светового луча, входящего в кристалл, на два. Это свойство характерно для карбонатов, особенно для прозрачной разновидности кальцита – исландского шпата. При наложении исландского шпата на рисунок или текст явственно заметно раздвоение изображения.

Физиологические свойства. (Воздействие на вкусовые, обонятельные и тактильные анализаторы человека). Ряд минералов можно определить по вкусу. Например, галит имеет соленый вкус, сильвин – горько-соленый. Эти минералы, кроме того, растворяются в воде. Другие минералы можно различить по запаху. При горении серы ощущается запах сернистого газа, в то время как горящий янтарь издает ароматический запах. Существенна также степень шероховатости минералов, т. е. ощущение, возникающее при прикосновении к минералу. Есть минералы жирные на ощупь (тальк), гладкие (горный хрусталь) и шершавые (каолин).

1.3. Классификация минералов

Существует несколько классификаций минералов, в основу каждой из которых положены различные признаки. Наиболее признанной является кристаллохимическая классификация, в основе которой лежит в равной мере химический состав и кристаллическая структура минералов. По этой классификации выделяется большое количество классов, из которых в данном курсе будут рассмотрены лишь следующие: 1 - самородные элементы, 2 - сульфиды 3 - галогениды, 4 - оксиды и гидрооксиды, 5 - карбонаты, 6 - сульфаты, 7 - фосфаты и 8 - силикаты.

Класс 1 - самородные элементы – некоторые химические элементы в свободном минеральном состоянии. К ним относят: *металлы* - золото (Au), серебро (Ag), медь (Cu) и др.; *полуметаллы* - мышьяк (As), висмут (Bi); *неметаллы* - графит (C), сера (S) и др.

Класс 2 – сульфиды – соли сернистой кислоты H_2S. Наиболее характерными признаками, свойственными большинству сульфидов, являются сильный металлический блеск и высокий удельный вес. Сюда относят минералы: пирит – FeS_2, халькопирит – $CuFeS_2$ и галенит – PbS.

Класс 3 – галогениды – соли соляной кислоты HCl (*хлориды*) и соли плавиковой кислоты HF (*фториды*). Для них характерны низкая твердость (2-4), прозрачность и совершенная спайность. К этому классу относят галит – NaCl, сильвин – КС1 и флюорит – CaF_2.

Класс 4 – оксиды и гидрооксиды – соединения металлов и неметаллов с кислородом и водой H_2O. Для оксидов характерна прочность кристаллической решетки, чем обусловлена их высокая твердость (5-9). К этому классу относят корунд – Al_2O_3, кварц – SiO_2, опал – $SiO_2 \cdot nH_2O$ и минералы группы железа: магнетит – Fe_3O_4, гематит – $Fe_2O_3 \cdot n H_2O$.

Класс 5 – карбонаты – соли угольной кислоты H_2CO_3. Большая часть карбонатов бесцветна, твердость невысокая (3), характерна совершенная спайность по ромбоэдру и эффект двойного лучепреломления. К этому классу относят кальцит – $CaCO_3$, доломит – $CaMg(CO_3)_2$, магнезит – $MgCO_3$.

Класс 6 – сульфаты – соли серной кислоты H_2SO_4. В технических науках их называют купоросами. Для минералов этого класса характерна низкая твердость (2-3,5) и пестрые цвета окраски. К ним относят гипс – $CaSO_4 \cdot 2H2O$ и ангидрит – $CaSO_4$, медный купорос – $CuSO_4$ и железный купорос – $FeSO_4$.

Класс 7 – фосфаты – соли ортофосфорной кислоты H_3PO_4. Характерна средняя твердость (5) и светлая окраска. Сюда относят минерал апатит – $Ca_5[PO_4]_3(F,Cl)$.

Класс 8 – силикаты – самая обширная группа породообразующих минералов, содержащих SiO_2. Основой кристаллической решетки силикатов является скелет из кремнекислородных тетраэдров $[SiO_4]^{-4}$ (рис.5,а). Кремнекислородные тетраэдры в структурах силикатов могут находиться либо в виде изолированных друг от друга структурных единиц $[SiO_4]$, либо сочленяются друг с другом разными способами. В зависимости от способа их сочленения выделяют следующие подклассы:

Островные силикаты с изолированными тетраэдрами (см. рис.5, а) представлены оливином. Для них характерны повышенные твердость и удельный вес, а также изометричные формы кристаллов.

Цепочечные силикаты с одинарными цепочками тетраэдров (см. рис. 5, б) представленные пироксенами;

Ленточные силикаты со сдвоенной цепочкой тетраэдров (см. рис. 5, в) представлены роговой обманкой. Несмотря на существенное различие в количественных соотношениях компонентов, цепочечные и ленточные силикаты имеют много общих свойств: удлиненная форма кристаллов, средняя спайность в двух направлениях, твердость 5-6, темный цвет.

Листовые силикаты с непрерывными слоями кремнекислородных тетраэдров представлены слоями кремнекислородных тетраэдров (рис. 5, г). Сюда относят слюды (биотит, мусковит), хлорит, тальк, каолинит, серпентинит. В прямой зависимости от кристаллической структуры находится важное диагностическое свойство этих силикатов - весьма совершенная спайность, а также гексагональная форма кристаллов.

Каркасные силикаты с непрерывными трехмерными каркасами тетраэдров $[SiO_4]^{-4}$ представлены почти исключительно алюмосиликатами, в которых часть ионов Si^{4+} в кремнекислородных тетраэдрах замещена на ионы Al^{3+}. Для этих силикатов характерна светлая окраска и твердость 5-7.

3. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Основная цель работы – знакомство с минералами и изучение их физических свойств. Исследование физических свойств выполняется в соответствии с рекомендациями, изложенными в разделе 1. Вначале определяется форма и характер минеральных агрегатов, затем цвет, блеск и другие физические свойства. Полученные данные сводятся в таблицу описания минералов.

Название	Форма кристаллов	Физические свойства минералов						Приме-
		цвет	цвет	блеск	спай-	твер-	спец.	

минерала, формула	или минераль-ных агрегатов		черты		ность	дость	св-ва	чание
1	2	3	4	5	6	7	8	9

После нескольких лабораторных занятий проводится контрольная работа для проверки и закрепления полученных знаний.

Часть 2

МАГМАТИЧЕСКИЕ ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

2.1. Общие сведения о магматических горных породах

Магматические горные породы образуются в результате затвердевания магмы на глубине или на земной поверхности при вулканических извержениях. Магматические породы также называют изверженными.

Магма (от греч. «густая мазь») — огненно жидкий, главным образом силикатный расплав, возникающий в верхней мантии или в земной коре. Магма содержит большое количество растворенных газов и паров воды (F, C1, CO_2, H_2O и др.). На большой глубине магма находится под очень большим всесторонним давлением и обладает высокой температурой.

Поднимаясь вверх, магма внедряется в твердые и относительно холодные породы, которым она отдает свое тепло, начинает охлаждаться и кристаллизоваться. Большую роль в процессе кристаллизации играют летучие компоненты: пары воды и газа, способствующие и часто определяющие скорость кристаллизации минералов.

Поднимаясь вверх, магма оказывается в различных термодинамических условиях.

На значительных глубинах при медленном остывании магмы и сохраняющемся большом давлении происходит постепенная, последовательная и полная кристаллизация расплава. Последовательность в кристаллизации магмы связана с существованием минералов с разной температурой плавления. Тугоплавкие минералы кристаллизуются при более высоких температурах, когда другие еще находятся в расплаве.

К тугоплавким относят минералы, содержащие Fe и Mg (железисто-магнезиальные силикаты: оливин, авгит, роговая обманка, биотит и др.). При понижении температуры последовательно кристаллизуются и другие минералы.

Таким образом, на больших глубинах весь силикатный расплав превращается в агрегат тех или иных минералов, образуется полнокристаллическая горная порода. Долго сохраняющиеся условия высоких температур и давления создают благоприятные условия роста для всех минералов, в результате образуются полнокристаллические и равнокристаллические структуры пород с более или менее одинаковым размером зерен всех минералов.

На средних и небольших глубинах условия кристаллизации магмы менее стабильны и более разнообразны.

Если масса и температура расплава, внедрившегося на средних глубинах, достаточно велики для прогрева вмещающих пород и давление является достаточным для удержания в расплаве летучих компонентов, происходит также полная раскристаллизация расплава и образуется полнокристаллическая порода. При этом центральные части получают равнокристаллическое, а краевые — неравнокристаллическое строение в связи с относительно быстрым охлаждением на контакте с вмещающими породами и частичной потерей летучих компонентов. Летучие компоненты для некоторых минералов являются катализаторами и заметно повышают скорость их роста, тогда при полнокристаллическом строении возникает большая разница в размерах зерен разных минералов, могут возникать порфировидные структуры.

На небольших глубинах температура и давление магмы могут быть недостаточными для ее полной кристаллизации. В таких условиях часть магмы успевает раскристаллизоваться и превратиться в минеральные зерна — вкрапленники, а другая часть затвердевает в виде вулканического стекла — аморфной массы, в которой могут быть зародыши кристаллов — микролиты, хорошо различимые только под микроскопом. В этих условиях образуются неполнокристаллические породы.

При вулканических извержениях магма либо изливается на земную поверхность (или на дно водного бассейна) в виде лавы, либо при взрывах выбрасывается в воздух на разную высоту, застывает и падает на поверхность в виде твердых частиц и обломков разного размера (вулканический пепел, песок, лапилли, вулканические бомбы), давая начало пирокластическим горным породам обломочного строения. Последние образуют особую группу вулканических пород и будут рассмотрены ниже.

Магма, излившаяся на поверхность в виде лавы, попадает в условия резкого понижения температуры и давления и связанной с этим почти полной потери летучих компонентов, что приводит к быстрому затвердеванию лавы. При этом если расплав поднимается медленно и с больших глубин и до выхода на поверхность в нем произошла частичная кристаллизация, то есть образовались кристаллы минералов, то при затвердевании на поверхности образуются неполнокристаллические породы. При быстром движении расплав не успевает кристаллизоваться и застывает на поверхности в виде вулканического стекла, образуя стекловатую породу, в которой кристаллы почти или полностью отсутствуют.

По условиям образования магматические горные породы подразделяют на следующие виды.

1. **Интрузивные** (внедрившиеся):
   - глубинные (абиссальные),
   - полуглубинные (гипабиссальные).
2. **Вулканические**:
   - эффузивные (излившиеся),
   - пирокластические.

Интрузивные, или внедрившиеся (от лат. «интрузио» — внедрение), горные породы образуются при застывании магмы под земной поверхностью и по глубине застывания делятся на глубинные и полуглубинные.

Глубинные, или абиссальные (от греч. «абиссос» — бездонный), или плутонические, породы формируются на больших глубинах, в условиях длительно сохраняющихся высоких температур и давлений и характеризуются полной раскристаллизацией магматического расплава.

Полуглубинные (гипабиссальные) горные породы, затвердевшие на средних и небольших глубинах, по условиям образования являются промежуточными между глубинными интрузивными и эффузивными. Температура и давление магмы на разных глубинах меняются по-разному, и могут возникать как полно-, так и неполнокристаллические породы.

Излившиеся, или **эффузивные,** породы (от лат. «эффузио» — излияние) образуются при излиянии лавы на дневную поверхность, где резко понижаются температура и давление. Эффузивные породы характеризуются неполной кристаллизацией или быстрым затвердеванием расплава в виде вулканического стекла.

Различия в условиях образования магматических пород четко отражаются на их внешнем облике и легко распознаются макроскопически по характеру структуры и текстуры.

2.2. Структуры и текстуры магматических горных пород

Структуры магматических горных пород макроскопически классифицируются по степени кристалличности вещества, относительному и абсолютному размеру зерен.

По *степени кристаллизации* магматического расплава выделяют следующие структуры:

полнокристаллические, когда все вещество раскристаллизовано в агрегат минералов;

неполнокристаллические, когда часть расплава раскристаллизовалась и образовались минеральные зерна, а другая часть затвердела в виде вулканического стекла;

стекловатые, когда вся порода представлена вулканическим стеклом. Для глубинных пород характерны полнокристаллические структуры, для полуглубинных — полно- и неполнокристаллические, а для излившихся — неполнокристаллические и стекловатые структуры.

По *относительному размеру* минеральных зерен выделяют структуры:

равнокристаллические (равномерно-кристаллические). Если порода полнокристаллическая по степени кристаллизации и размеры минеральных зерен близки по величине;

неравнокристаллические структуры выделяются как для полнокристаллических, так и для неполнокристаллических пород.

Для полнокристаллических различают:

неравнокристаллические, когда размер минеральных зерен различается не резко;

порфировидные, если одни зерна по размеру резко отличаются от других.

Для неполнокристаллических пород различают:

порфировые, состоящие из нераскристаллизованной части исходного расплава, которая вне зависимости от ее количества в породе называется «основной массой», и раскристаллизованной — «вкрапленников», представленных кристаллами минералов;

афировые, если порода состоит из основной массы без вкрапленников .

Равно- и неравнокристаллические и порфировидные структуры характерны для интрузивных пород, порфировые и афировые — для эффузивных и близповерхностных полуглубинных пород.

Для пород полно- и равнокристаллических выделяют *структуры по абсолютному размеру зерен*, см:

Гигантокристаллические	> 1
Крупнокристаллические	1-0,3
Среднекристаллические	0,3-0,1
Мелкокристаллические	0,1-0,05
Скрытокристаллические (афанитовые)	< 0,05

Все вышеперечисленные структуры, от гиганто- до скрытокристал-лической, характерны для интрузивных глубинных и полуглубинных пород, афанитовые — для основной массы эффузивных пород (вкрапленники при этом могут иметь различные размеры).

Среди многочисленных структур, выделяемых по взаимоотношениям минералов в породе, макроскопически хорошо различима *пегматитовая (письменная)*, характеризующаяся закономерным прорастанием полевого шпата кварцем, образующим клинообразные зерна, напоминающие древнееврейские письмена, откуда и произошло название структуры.

Текстуры изверженных горных пород подразделяют на компактные, когда нет пор и пустот, и некомпактные, если есть в породе пустоты и поры. К компактным текстурам относят: *массивную, пятнистую, флюидалъную, полосчатую, миндалекаменную;* к некомпактным — *пористую, пенистую, пузырчатую.*

Массивная текстура отличается беспорядочным расположением минеральных зерен, она наиболее характерна для интрузивных пород, нередко встречается и в эффузивных породах.

Пятнистую текстуру выделяет при неравномерном распределении светлых и темных минералов в породе. Встречается реже, главным образом в интрузивных породах.

Флюидальная текстура отличается ориентированным расположением удлиненных кристаллов, например столбиков роговой обманки, что отражает вязкое течение магмы или лавы в процессе застывания, при котором удлиненные кристаллы, как бревна в реке, располагаются своими длинными осями по направлению течения более или менее параллельно друг другу.

Флюидальная текстура может проявляться также в *полосчатости,* характеризующейся различиями в составе или структуре полос.

Некомпактные текстуры характерны для эффузивных пород и связаны с выделением из лавы летучих компонентов, после чего в затвердевшей лаве остаются пустоты округлой или миндалевидной формы.

Если пустоты мелкие (до нескольких миллиметров), образуется *пористая,* более крупные — *пузырчатая текстура*. В особо благоприятных условиях пары и газы могут вспенивать лаву, и при застывании образуется *пенистая,* или *пемзовая, текстура,* в которой пустоты по объему преобладают.

Миндалекаменная (мандельштейновая) текстура характерна для эффузивных горных пород и образуется в результате заполнения пор и пустот в затвердевшей лаве вторичными минералами (кварц, халцедон, кальцит, хлорит и др.). Образовавшиеся миндалины обычно выделяются своим более светлым цветом на фоне темно-серой или черной породы. От вкрапленников миндалины отличаются округлой или миндалевидной формой. Горные породы с миндалекаменной текстурой называют мандельштейнами.

2. 3. Классификация магматических горных пород по химическому и минеральному составам

В основу классификации магматических горных пород положены химический и минеральный составы и структурные особенности пород (см. таблицу).

Химический анализ магматических горных пород показывает, что они состоят в основном из восьми оксидов: SiO_2, Al_2O_3, Fe_2O_3, FeO, MgO, CaO, Na_2O, K_2O. В значительно меньших количествах присутствуют TiO_2, MnO, P_2O_5, H_2O и некоторые другие. Из главных оксидов только SiO_2 присутствует во всех магматических породах в значительных количествах. Оксид SiO_2 и принят за основу химической классификации изверженных горных пород.

По содержанию кремнезема (оксида SiO_2) магматические породы подразделяют на четыре группы:

- кислые (SiO_2 = 64-78 %),
- средние (SiO_2 = 53-64 %),
- основные (SiO_2 = 44-53 %),
- ультраосновные (SiO_2 = 30-44 %).

Границы между этими группами магматических пород в известной мере являются условными, так как между породами соседних групп существуют постепенные переходы.

Важным показателем для классификации является содержание в магматической породе щелочей. По сумме щелочей (Na_2O + K_2O) выделяют три ряда магматических пород:

нормальной щелочности (низкощелочные, известково-щелочные), субщелочные (умеренно-щелочные) и щелочные (с высокой щелочностью).

Границы содержаний суммы щелочей для выделения рядов значительно варьируют в зависимости от группы магматических пород по содержанию оксида SiO_2.

По относительному количеству железисто-магнезиальных силикатов в объемных процентах (М — цветное число) магматические породы подразделяют на ультрамафические ($M > 70$), мафические ($70 > M > 20$) и салические ($M < 20$).

Химический состав магматических пород взаимосвязан с комплексом слагающих их минералов. Минералами — показателями степени кислотности (содержания оксида SiO_2) являются кварц и оливин. Кислые породы отличаются значительным содержанием кварца. Для основных и ультраосновных пород характерен оливин, а кварц может встречаться только как второстепенный (менее 5 %) минерал и макроскопически обычно не виден. Средние по степени кислотности породы, занимая промежуточное положение и по минералогическому составу, являются переходными между кислыми и основными породами. В них выделяют средние кварцевые, переходные к кислым, и средние бескварцевые, переходные к основным породы.

Количество железисто-магнезиальных темноцветных минералов постепенно увеличивается от кислых к основным и ультраосновным породам. Некоторые разности основных и все ультраосновные породы состоят почти на 100 % из цветных силикатов и относятся к ультрамафитам.

Содержание полевых шпатов уменьшается от кислых к основным породам. В кислых и средних породах полевые шпаты развиты широко, в основных — количество их уменьшается, а ультраосновные породы являются бесполевошпатовыми.

Высокая щелочность магматических пород определяется присутствием щелочных минералов, таких как нефелин, калиевый полевой шпат и другие.

Химический и минералогический состав определяют цвет магматической породы: чем кислее порода, тем она светлее, чем основнее — тем темнее. Кислые и средние породы обычно бывают серыми или цветными (розовыми, красными, желтыми), основные — темно-серыми или черными, ультраосновные — черными или темно-зелеными.

Условия образования не оказывают существенного влияния на химический и минеральный состав изверженных пород. Поэтому в классификации по степени кислотности

Классификация магматических горных пород нормальной щелочности

	Группы пород по содержанию SiO_2 (в масс. %)							
	кислые (78-64)		средние (64-53)		основные (53-44)		ультраосновные (44-30)	
	глубинные	излившиеся	глубинные	излившиеся	глубинные	излившиеся	глубинные	излившиеся
Породы нормальной щелочности	Гранит, гранодиорит	Риолит, обсидиан, дацит	Диорит	Андезит	Габбро	Базальт	Дунит, перидотит, пироксенит, горнблендит	Пикрит, коматиит
Породо-образующие минералы	**Кварц,** КПШ, биотит, кислый плагиоклаз В обсидиане, пемзе - стекло		Средний плагиоклаз, роговая обманка, пироксен		Основной плагиоклаз, пироксен, роговая обманка, оливин		Оливин, пироксен, роговая обманка	
Количество кварца	15-40 %		-		-		-	
Цвет излившихся пород		Белый, серый, светлые тона		Темно-серый, коричневый		Черный		Черный
Количество темно-цветных минералов в глубинных породах	10-15 ± 5 %		25 ± 15 %		50 ± 15 %		100 %	

изверженных пород в одну группу объединяют различные по происхождению (интрузивные, эффузивные, жильные), но близкие по химическому и минеральному составу.

Первоначальный минералогический состав магматических пород может заметно меняться в результате вторичных изменений.

Магматические горные породы весьма разнообразны, но лишь немногие из них распространены в земной коре широко. Наиболее широко развиты породы основного и кислого состава.

В земной коре среди магматических пород *около 70 %* составляют *основные* породы, а *кислые* и *средние* вместе — *около 30 %.* На ультраосновные породы приходится незначительная доля процента.

При этом среди эффузивов самыми распространенными являются лавы основного состава (базальты), а среди интрузивных образований — кислые породы (граниты и гранодиориты).

Среди всех типов по степени кислотности (кислые, средние и т. д.) наиболее широко распространены магматические породы нормальной щелочности (известково-щелочные). Однако субщелочные и щелочные породы хотя и развиты меньше, но не являются редкими.

В таблицах приводится характеристика наиболее часто встречающихся разновидностей глубинных (плутонических) и эффузивных пород.

Порядок описания интрузивных пород.

1. Цвет.
2. Структура (по степени кристаллизации, по относительному размеру зерен и для равно-, полнокристаллических по абсолютному размеру зерен).
3. Текстура.
4. Минералогический состав в процентах.
5. Характеристика каждого из минералов, входящих в состав породы (размер и форма зерен, цвет, спайность, излом, блеск).
6. Вывод: название породы, условия образования, группа по степени кислотности и щелочности.
7. Эффузивный аналог.

Порядок описания эффузивных пород.

1. Цвет.
2. Структура (по степени кристаллизации, по относительному размеру зерен).
3. Текстура.
4. Соотношение основной массы и вкрапленников в процентах.
5. Характеристика основной массы (цвет, особенности).
6. Характеристика вкрапленников (цвет, форма и размер зерен, спайность, блеск, излом, вторичные изменения).
7. Вывод: название, условия образования, группа по степени кислотности и щелочности.
8. Глубинный аналог.

После нескольких лабораторных занятий проводится контрольная работа для проверки и закрепления полученных знаний.

Часть 3

МЕТАМОРФИЧЕСКИЕ ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

3.1. Общие сведения о метаморфизме

Горные породы после формирования могут попасть в такую геологическую обстановку, которая будет существенно отличаться от обстановки образования породы и на нее будут оказывать влияние различные эндогенные силы: тепло, давление (нагрузка) вышележащих толщ, глубинные флюиды, растворы и газы, вода, водород, углекислота и др. Изменение магматических и осадочных пород в твердом состоянии под воздействием эндогенных факторов и называется **метаморфизмом**. Преобразованию могут подвергаться любые горные породы: осадочные, магматические и ранее образовавшиеся метаморфические. В физико-химических условиях, отличных от тех, в которых образовались горные породы, происходит изменение их минерального состава, структуры и текстуры. Изменение минерального состава при метаморфизме может протекать **изохимически**, т. е. без изменения химического состава метаморфизуемой породы, и **метасоматически**, т. е. со значительным изменением химического состава метаморфизуемой породы за счет привноса и выноса вещества. Особенность метаморфических процессов заключается в том, что они протекают с сохранением твердого состояния системы, без существенного расплавления пород. Лишь при определенных физико-химических условиях метаморфизм сопровождается частичной или полной кристаллизацией исходных пород. Процессы подобного характера объединяются под названием **ультраметаморфизма.**

В зависимости от интенсивности метаморфических процессов наблюдается постепенный переход от слабо измененных, сохраняющих состав и структуру исходных разностей, до глубоко преобразованных пород, первичная природа которых практически утрачена. Метаморфические отложения широко распространены в земной коре.

Метаморфизм - процесс преобразования любых исходных пород под воздействием изменившихся физико-химических условий среды. Он реализуется преимущественно путем перекристаллизации пород без существенного плавления под воздействием меняющихся температур, давлений, газовой (флюидной) среды. Преобразуя свой минеральный состав, порода, таким образом, приспосабливается к изменившимся термодинамическим (Т-Р) условиям.

Название термина происходит от греческого слова metamorpho – преобразование, превращение. Метаморфическим преобразованием могут подвергаться изначально осадочные, магматические и (повторно) метаморфические породы. При этом исходные породы, как правило, после таких преобразований полностью теряют свой первоначальный облик.

Факторами метаморфизма, т. е. непосредственными причинами преобразования пород, являются: давление (Р), температура (Т), а также растворы и газы (флюиды), пронизывающие толщи горных пород.

Давление при метаморфических преобразованиях может быть обусловлено рядом причин: давлением нагрузки вышележащих толщ (литостатическим - Рл), динамическим давлением тектонического движения (стрессовым - Рс), давлением движущейся магмы (Рм), а также давлением поровых (гидротермальных и флюидных) растворов (Рф). Главным среди отмеченных причин следует считать тектоническое или стрессовое давление, способное достигать десятков тысяч атмосфер и распространяться на огромные пространства. При проявлении тектонического или стрессового давления роль нагрузки вышележащих пород может оказаться незаметной, а проявление магматического и порового давления флюидов на таком фоне может повлиять на характер минеральных преобразований лишь локально, в местах их проявления.

Температура метаморфических преобразований могут быть обусловлены несколькими причинами и достигать уровней, когда порода начинает плавиться, т. е. 1000 - 1200 °С. Всегда существует температурный фон, обусловленный глубиной погружения пород, т. е. геотермическим градиентом (Тг), составляющим обычно около 30°/1 км. Однако основные тепловые превращения в породе осуществляются за счет тектонических подвижек (Тс), а также нередко сопровождающих такие движения аномальных глубинных тепловых потоков (Тф). На контакте с магматическими породами преобразование осуществляется за счет прогрева пород очагом остывающей магмы (Тм).

Гидротермальные растворы и флюиды, которые способны привносить или выносить различные химические компоненты, могут влиять на характер минералообразования, создавать специфическую окислительную или восстановительную (Eh), а также кислую либо щелочную (pH) среды.

Глубинные флюиды насыщены, прежде всего, парами воды и углекислоты, а также более редкими соединениями водорода, хлора, фтора и др.

3.2. Типы метаморфизма

В зависимости от сочетания упомянутых выше факторов выделяются те или иные типы метаморфизма. Наиболее простая схема типов метаморфизма, выделяющихся в зависимости от термодинамических (P, T) параметров, показана на рис. 1, а геологические условия их проявления - на рис. 2. Можно говорить о контактовом типе метаморфизма, когда порода преобразуется под преимущественным воздействием температуры, а также динамическом, когда основным фактором выступает давление, и динамотермальном, когда проявляются оба фактора одновременно. Каждый из этих типов обладает своими специфическими геологическими условиями проявления (рис. 2).

Контактовый тип метаморфизма проявляется в породах обрамления магматических тел, на контакте с ними, поэтому он называется контактовым. Температура магматических тел колеблется в интервале 800-1200° С, а вмещающие породы, разогретые первоначально за счет геотермического градиента, могут быть относительно «холодным». Ширина зоны (ореол) контактового метаморфизма зависит, главным образом, от объема магматического очага и может достигать нескольких километров. Если вмещающая порода разогрета жильным магматическим телом (пегматитовая жила, дайка гранитоидов и т. д.), то прогретой бывает лишь узкая полоса в несколько метров.

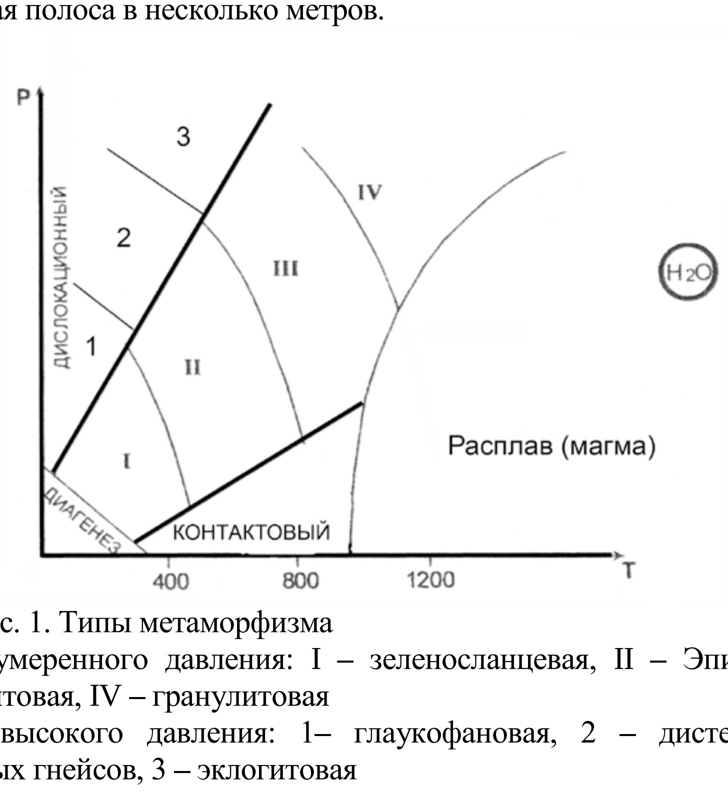


Рис. 1. Типы метаморфизма

Фации умеренного давления: I – зеленосланцевая, II – Эпидот-амфиболитовая, III – амфиболитовая, IV – гранулитовая

Фации высокого давления: 1– глаукофановая, 2 – дистен-мусковитовых сланцев и дистеновых гнейсов, 3 – эклогитовая

Весьма существенную роль при контактовом метаморфизме играет химический состав магмы и вмещающих пород, а точнее, контрастность состава между ними. В случае резкого контраста между многокомпонентной магмой и вмещающими породами на их контакте протекают диффузионные процессы взаимного проникновения, меняющие как состав внешней оболочки магматического тела, так и состав вмещающих пород. Такой процесс перекристаллизации пород, протекающий с существенным изменением их первичного химического состава, называется **метасоматозом**. Обычно метасоматоз сопровождается интенсивной гидротермальной и флюидной проработкой, способствующей привносу и выносу химических компонентов. Типичными представителями таких контактово-метасоматических процессов (на границе между силикатными магмами и известняками) являются скарны. С другой стороны, в случае, если силикатная магма находится в контакте с близкими ей по химическому составу вмещающими породами, то формируются роговики - прогретые и перекристаллизованные продукты метаморфизма первичных пород без проявления метасоматоза.

Дислокационный метаморфизм протекает в условиях высокого стрессового давления, под воздействием тектонических движений по крупным разрывным нарушениям (разломам). При этом, происходит дробление пород с образованием структур катаклаза, а под действием проникающих в ослабленные зоны флюидов (гидротермальных растворов), горные породы подвергаются частичной или полной перекристаллизации и цементации.

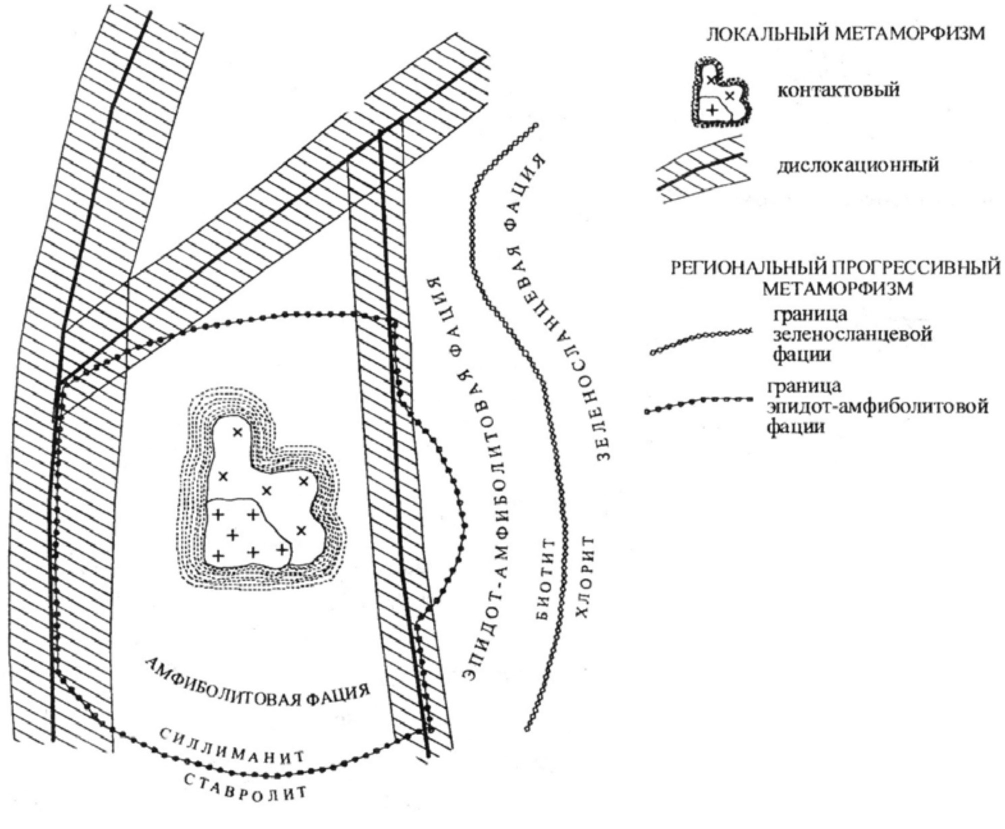


Рис. 2. Схематическая карта метаморфизма

Новообразованными минералами - индикаторами высоких давлений являются кианит, глаукофан, пироп, омфацит (пироксен), алмаз. Эти минералы фиксируют давления больших глубин, где всегда имеется и некоторый температурный фон, создаваемый геотермальным градиентом. В приповерхностных условиях можно наблюдать и неперекристаллизованные брекчии, милониты, филлониты.

Процессы контактового и дислокационного типов метаморфизма протекают в ограниченных пространствах, т. е. развиваются локально. Контактовый метаморфизм проявляется в виде узкой полосы вокруг магматических тел, а дислокационный – такой же полосой сопровождает тектонические трещины, в связи с чем эти два тип метаморфизма объединяются под общим названием **локальный метаморфизм** (рис. 3).

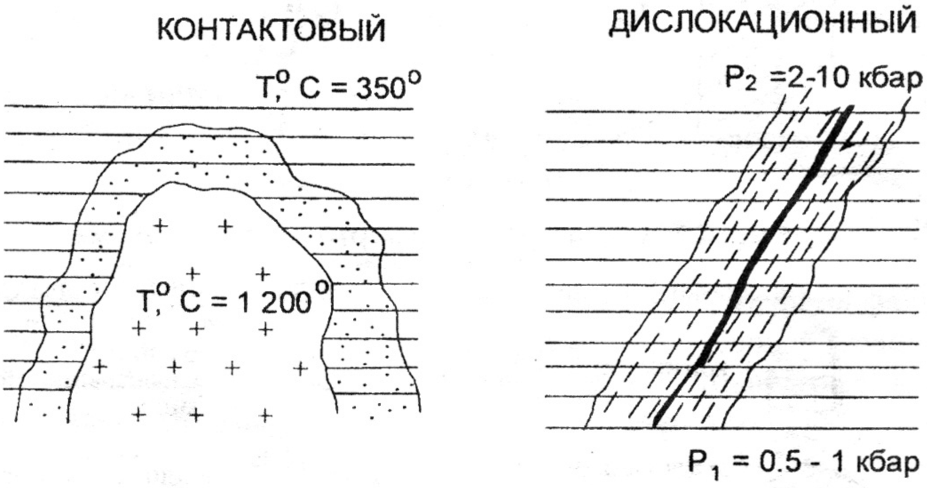


Рис. 3. Локальные типы метаморфизма

В противоположность локальному выделяют **региональный метаморфизм.** Региональный метаморфизм – широкомасштабный процесс, охватывающий огромные территории в пределах подвижных поясов земной коры. Главными его факторами являются температура и давление, а также воздействие воды и углекислоты, содержащихся в исходных породах и способствующих ходу химических реакций. Преобразование горных пород, происходящее на глубине без существенного плавления и метасоматоза, сопровождается перекристаллизацией и развитием новых минералов в условиях расплющивания и пластического течения вещества, что приводит к появлению характерной для метаморфических образований ориентированности (параллельному расположению) минеральных зерен. Породы регионального метаморфизма имеют наиболее широкое распространение.

Метасоматоз контактовый – процесс метасоматического изменения горных пород в контакте с интрузивными телами. При метасоматозе возникают как экзометасоматиты, то есть контактовоизмененные вмещающие породы под воздействием внедрившихся в них интрузий, так и эндометасоматиты, являющиеся продуктами изменения самих интрузивных образований при биметасоматических реакциях. Температурный режим этих процессов изменяется от 900 до 300-200 ºС. Примерами контактового метасоматоза могут служить скарнообразование, грейзенизация и пр.

1.2. Фации метаморфизма

В зависимости от параметров метаморфизма и минерального состава образующихся пород выделяют **фации метаморфизма**, понимая под этим термином совокупности горных пород, минеральный состав которых находится в равновесии при данных условиях метаморфизма.

Для метаморфических пород, в соответствии с типами метаморфизма, выделяют две группы фаций:

- фации умеренных давлений (региональный метаморфизм);

- фации высокого давления (дислокационный метаморфизм).

Метаморфические породы **умеренных давлений** подразделяются на четыре фации. По мере возрастания Р-Т условий регионального метаморфизма выделяют: 1 – зеленосланцевую фацию; 2 – эпидот-амфиболитовую фацию; 3 – амфиболитовую фацию; 4 – гранулитовую фацию. Название фации определяется по типичной породе, сложенной определенной ассоциацией минералов. В области термодинамических условий гранулитовой (иногда амфиболитовой) фации в породе может отмечаться частичное плавление, такое преобразование называют ультраметаморфизмом. Это переходная зона от метаморфизма к магматизму, сложенная мигматитами.

Фация зеленых сланцев (зеленосланцевая) соответствует наиболее низкотемпературной ступени регионального метаморфизма и объединяет породы, сформировавшиеся в температурном интервале 250-450 °С при давлении от 1,5 до 3 кбар. Широкое развитие минералов зеленого, светло-зеленого цвета (хлорита, актинолита, серицита, талька и др.) определило название фации.

Эпидот-амфиболитовая фация отвечает более высокотемпературной ступени регионального метаморфизма (Т = 450-600 °С, Р = 3-6 кбар) и поэтому характеризуются заменой низкотемпературных минералов более высокотемпературными. Граница прорисована линией исчезновения хлорита и замещением его биотитом. В этой фации появляется гранат, эпидот, ставролит, роговая обманка и другие. Наиболее широко распространены кристаллические сланцы с гранатом, биотитом, мусковитом, ставролитом и другие.

Амфиболитовая фация представлена гнейсами, амфиболитами, для образования которых требуются уже значительные температуры и давление (Т = 600-800 °С, Р = 4-8 кбар). При этих условиях исчезает эпидот, ставролит.

При высоком содержании в породах воды наступает частичное их плавление – анатексис с возникновением гранитного расплава, что приводит к образованию мигматитов.

Гранулитовая фация отличается наиболее интенсивными параметрами метаморфизма (Т = 750-1100 °С, Р = 6-11 кбар). Такие условия создавались на больших глубинах, на ранних стадиях развития Земли – архейского и протерозойского эонов. Породы, сформированные в условиях этой фации, почти полностью лишены воды; гидроксилсодержащие минералы в них содержатся редко.

В условиях дислокационного метаморфизма выделяются **фации высокого давления,** которые локализуются в глубинных узких тектонических зонах, формируются в условиях повышенного давления (до 10-20 кбар) и температурах 300-800 °С.

Глаукофановая фация является наиболее низкотемпературной и в этом отношении сопоставимой с зеленосланцевой фацией. Эта фация характеризуется развитием различных сланцев, в которых обычно присутствует хлоритоид, фенгит, парагонит, глаукофан.

Фация дистен-мусковитовых сланцев и дистеновых гнейсов соответствует примерно интервалам температур эпидот-амфиболитовой фации умеренных давлений, но наряду с минералами, свойственными указанной фации появляются новые минералы, индикаторы высокого давления – дистен, омфацит, глаукофан, пироповый гранат, парагонит и ряд других минералов. Обычными породами этой фации являются дистен-мусковитовые (парагонитовые) сланцы и более высокотемпературные дистеновые гнейсы.

Эклогитовая фация включает весьма своеобразные породы, называемые эклогитами. Главными минералами эклогитов является пироксен (омфацит) и гранат (пироп).

3.3. Особенности минерального состава метаморфических горных пород

Широкий диапазон термодинамических условий проявления метаморфизма обусловил большое разнообразие минерального состава пород. Кроме того, этот набор минералов зависит от состава исходных пород. Сам механизм перекристаллизации пород, протекающий в твердом виде, представляет собой сложный процесс замещения одних минералов (неустойчивых при новых P-T- условиях) другими, более устойчивыми. При этом важную роль играют поровые флюиды как катализаторы реакций замещения.

Кроме упоминавшихся минералов, входящих в состав магматических пород, выделяется группа минералов, характерных преимущественно для метаморфических пород.

Тальк – низкотемпературный чешуйчатый минерал, возникающий при гидротермальной проработке магнезиальных пород. Мягкий, с жирным блеском.

Хлорит – низкотемпературный чешуйчатый минерал часто с зеленоватым оттенком. Образуется при гидротермальной проработке основных пород.

Серпентин **–** возникает как продукт гидротермальной проработки ультраосновных пород. Не обладает четко выраженной формой (иногда образует волокнистые агрегаты), серого с зеленоватыми оттенками цвета.

Серицит **–** низкотемпературная, мелкочешуйчатая, наиболее гидроксилнасыщенная разновидность слюды - мусковита. Присутствие в породе серицита обусловливает ее шелковистый блеск.

Эпидот **–** образует призматические кристаллы, лучистые или зернистые агрегаты. Цвет светло-зеленый. Блеск сильный стеклянный.

Гранат – кристаллы изометричные в виде ромбододекаэдров, реже зернистые агрегаты. Цвет – от коричневого до красного. Макроскопически легко узнается по характерному облику кристаллов и цвету.

Актинолит – низкотемпературная разновидность роговой обманки. Образует волосовидные, тонколучистые неориентированные агрегаты. Цвет светло-зененый.

Глаукофан – разновидность роговой обманки, образующаяся при высоких давлениях. Образует тонколучистые агрегаты. Цвет густо фиолетовый до черного.

Ставролит – кристаллы в виде коротких ромбического сечения призм, характерные двойники, напоминающие прямой или косой (угол 60°) крест. Цвет коричневый, красно-бурый до черного. Легко узнается по цвету и двойниковым формам.

Дистен (кианит) – кристаллы длинные, уплощенные. Имеет анизотропию твердости. Цвет голубой или синий.

3.4. Текстуры и структуры метаморфических горных пород

Текстуры и структуры метаморфических пород зависят от специфических физических условий их образования. Эти условия отличаются от термодинамических параметров кристаллизации магматических пород, для которых действует в полной мере известный закон Паскаля, обеспечивающий при любом направленном тектонических движений одинаковое давление во все стороны. Этим условием обеспечивается повсеместная массивная текстура глубинных магматических пород. Слюды в гранитах, например, благодаря действию закона Паскаля, не ориентированы в одном направлении.

Метаморфические процессы не достигают условий плавления, поэтому породы изменяются в твердом или пластичном состоянии, когда закон Паскаля работает лишь частично или не проявляется вовсе. Для регионального метаморфизма, например, ориентированное давление влияет на форму возникающих минералов, а также на их параллельную или субпараллельную ориентировку. Поэтому у низкотемпературных продуктов регионального метаморфизма отмечаются, как правило, **сланцеватые текстуры** с параллельным и субпараллельным расположением вытянутых, уплощенных или чешуйчатых минералов.

С повышением температуры, в условиях амфиболитовой фации, когда вещество начинает проявлять пластические свойства, а значит, частично проявляется закон Паскаля, четкая ориентировка удлиненных, уплощенных минералов постепенно исчезает, т. к. давление становится, до определенной степени, всесторонним. Такая текстура со слабо выраженной ориентировкой минералов называется **гнейсовой,** по названию главного и типичного представителя пород амфиболитовой фации - гнейса.

Максимальное проявление закона Паскаля достигается в условиях гранулитовой фации, поэтому ее продукты не несут следов ориентировки минералов, а текстура называется **массивной** как у глубинных магматических пород.

Так как региональный метаморфизм протекает в условиях тектонического давления, то сланцеватые текстуры могут усложняться мелкой складчатостью. Тогда такая текстура называется плойчатой. Нередко метаморфические процессы высокотемпературных фаций сопровождаются расслоением первично однородной массы на слои контрастного минерального состава. Образуются темно-окрашенные (с амфиболом, слюдами) и светлоокрашенные (с кварцем, полевым шпатами) слои. В этом случае говорят о **полосчатой** текстуре пород.

Более широкий диапазон текстур характерен для продуктов локального (контактового и дислокационного) метаморфизма. Для скарнов, роговиков, березитов, лиственитов, мраморов, образующихся при контактовом метаморфизме без проявления тектонического (стрессового) давления, наиболее часто отмечается **массивная** текстура, хотя может встречаться пористая, ноздреватая, пятнистая и другие.

Структурные особенности метаморфических пород также в существенной степени определяются Р-Т условиями среды минералообразования. Очевидно, что в условиях полной анизотропии среды, когда относительно «холодная» твердая порода подвергается тектоническому направленному сжатию, легче кристаллизоваться и расти чешуйчатым минералам, которые относительно легко могут наращивать свой размер вкрест, перпендикулярно вектору давления. В то же время в условиях изотропной среды гранулитовой фации, когда давление становится всесторонним, возникают благоприятные условия для кристаллизации изометричных, объемных минералов.

Так как для метаморфических процессов отмечается тесная обусловленность внешними факторами формы минералов, эта особенность заложена в понятие структуры (в противоположность магматическим и осадочным породам, где в понятие структуры вкладывается не форма, а размер минералов, зерен и т. д.). Форма минералов, а значит и структура породы, совместно с ее текстурными особенностями позволяют восстанавливать Р-Т условия образования продуктов метаморфизма.

Конкретные названия структур определяются несколькими латинскими названиями упомянутых форм минералов: лепидос - чешуйка; нематос - нить, иголка; гранос - зерно. Кроме того, следует помнить, что метаморфизм – процесс постоянного обновления минерального состава породы, все минералы вновь выросшие, возникшие. Этот процесс называется бластезом (от греческого «бластос» – росток). В итоге структуры продуктов регионального метаморфизма, в зависимости от формы слагающих ее минералов, могут называться: лепидобластовая, гранобластовая, нематобластовая, либо более сложными комбинированными названиями: лепидо-гранобластовая, немато-гранобластовая или лепидо-немато-бластовая т. д.

Гранобластовая структура чаще отмечается для пород амфиболовой и гранулитовой фаций метаморфизма при наличии зерен изометричной формы кварца, полевых шпатов, гранатов, карбонатов и др.

Лепидобластовая характерна обычно для зеленосланцевой фации при обилии чешуйчатых, листоватых минералов – серицита, мусковита, биотита, хлорита, талька, серпентина.

Нематобластовая в чистом виде встречается редко (амфиболиты, актинолитовые сланцы) и отличаются наличием минералов игольчатой, длиннопризматической формы (эпидот, роговая обманка, актинолит, кианит, рутил).

Иногда в породе отмечаются разнозернистые агрегаты, когда один из новообразованных минералов резко выделяется по размеру среди остальных. В этом случае можно говорить о **порфиробластовой** структуре.

Значительно меньшую информацию об условиях образования несут структуры контактового метаморфизма, продукты которого чаще всего обладают **кристаллобластовыми** структурами.

Среди пород регионального метаморфизма имеется два характерных исключения. В зависимости от Р-Т условий различные формы минералов возникают лишь в том случае, если в исходном химическом составе имелись в наличии необходимые породообразующие компоненты, позволяющие строить все многообразие решеток минералов (чешуйчатых, игольчатых, зернистых). Среди осадочных пород известны две мономинеральные, а значит простые по составу, образования - известняки ($CaCO_3$, $MgCO_3$) и кварцевые пески (SiO_2). При метаморфизме эти простые по составу породы не способны формировать игольчатые, чешуйчатые и другие, кроме зернистых, формы. Поэтому известняки при метаморфизме переходят в мономинеральную (с одним кальцитом) породу – мрамор с возможным укрупнением зерна по мере роста температуры. Аналогично ведут себя кварцевые пески, которые способны образовать только зернистый агрегат кварцита. Так как отмеченные породы не способны реагировать на давление изменением формы зерен, то для них, обычно, трудно восстановить тип метаморфизма – региональный или контактовый.

3.5. Методика выполнения лабораторной работы

Основная цель лабораторной работы – знакомство с метаморфическими горными породами, их текстурно-структурными особенностями, минеральным составом. Студенты должны научиться определять продукты разных типов метаморфизма (регионального, термального и дислокационного) и, при возможности, устанавливать их исходный состав (эдукт).

Выполнение лабораторных работ проводится в определенной последовательности: вначале определяется текстура породы, позволяющая устанавливать тип метаморфизма; затем исследуются структурные особенности, по которым восстанавливают термодинамические условия проявлений метаморфизма (фации – для продуктов регионального метаморфизма), которые уточняются после диагностики минерального состава породы. По совокупности полученных сведений о метаморфической породе делаются выводы об исходной породе (эдукте).

Описание пород ведется в следующей последовательности: цвет породы, текстура, структура, минеральный состав. По совокупности всех описанных признаков студент должен определять тип метаморфизма, фациальный уровень (Р-Т- условия), и при возможности предположить возможный состав эдукта.

Часть 4

ОСАДОЧНЫЕ ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

4.1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОСАДОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

4.1.1. Литогенез

Формирование осадочных пород представляет собой сложный и длительный процесс, связанный с экзогенными процессами. В образовании осадочных пород выделяют следующие стадии: 1) образование исходного осадочного материала; 2) перенос осадочного материала; 3) накопление осадка (седиментогенез); 4) преобразование осадка в осадочную породу (диагенез); 5) изменение осадочной породы до начала метаморфизма или начача выветривания (катагенез). Процесс формирования осадочной породы, начиная от образования исходного материала и заканчивая превращением осадка в породу, носит название литогенеза. Крупный вклад в изучение этого процесса внесли советские учёные Н. М. Страхов, Л. В. Пустовалов, Г. Ф. Крашенинников, Н. Б. Вассоевич, Л. Б. Рухин, Н. В. Логвиненко, Т. А. Лапинская и др.

Исходным материалом осадочных пород служат продукты разрушения магматических, метаморфических и ранее образовавшихся осадочных пород на поверхности Земли. Разрушаются горные породы и входящие в их состав минералы в результате экзогенных процессов, причём основная масса продуктов разрушения образуется в результате выветривания. Под действием поверхностных вод и в меньшей степени ледников и ветра продукты разрушения переносятся к областям седиментации (осадконакопления). Весь этот материал, находящийся на стадии переноса, при соответствующих условиях рельефа и геохимической обстановки может перейти в осадок. При этом начинается третья стадия образования породы - седиментогенез, или накопление осадка. Осаждение частиц может быть временным, когда частицы вновь подхватываются движением среды, или окончательным, когда происходит накопление осадка, т. е. постепенное закрепление частиц на дне.

Подавляющая масса осадков накапливается в конечных водоёмах стока - озёрах и, главным образом, морях. Такие осадки называют субаквальными. В отличие от них осадки, накапливающиеся на суше, вне водной среды, называют субаэральными. В конечных водоёмах стока в зависимости от характера поступающего материала, а также от гидродинамического и гидрохимического режимов формируются осадки трёх типов: обломочные, органогенные и хемогенные. Характерно, что породы биогенного происхождения встречаются только в толщах субаквальных отложений. Субаэральные отложения обычно представлены только обломочными и хемогенными образованиями, отличными по своим свойствам от тех же разностей, сформировавшихся в субаквальных условиях. На стадии седиментогенеза закладываются такие важные свойства осадка, как минеральный состав, размер и форма слагающих его частиц, слоистость. Следующим этапом формирования породы является стадия диагенеза. Диагенез - совокупность процессов, преобразующих осадок в осадочную породу. Свежесформированные осадки обычно образуют рыхлые, сильно обводнённые слои, насыщенные разнообразными химически активными соединениями. Кроме минеральных веществ в осадке присутствует органическое вещество в виде остатков отмерших организмов и живые бактерии.

Только что образовавшийся осадок представляет собой рыхлое или текучее тело, обильно обводненное, богатое микроорганизмами и состоящее из весьма разнообразного материала, частью твердого, частью жидкого и газообразного. Главная особенность свежесформированного осадка - отсутствие равновесия между входящими в его состав реакционноспособными соединениями. Из-за неравномерности свежий осадок представляет собой неустойчивую физико-химическую систему. Так, в осадке имеется много кислорода и богатых им веществ, здесь же - живые организмы, нуждающиеся в кислороде для своего существования, и органическое вещество, которое способно к окислению и сгоранию. Пропитывающая иловый осадок вода по составу почти не отличается в первый момент от воды наддонной. Эта вода не насыщена карбонатами, кремнеземом, фосфатами и другими компонентами; в то же время в осадке много биогенно осажденных или перенесенных в виде взвеси кальцита, магнезита, кремнезема и других веществ. В состав глинистых минералов в виде примеси входят также поглощенные ими катионы многих металлов.

После фиксации осадка на дне естественно начинается процесс уравновешивания этой системы. Физико-химическое равновесие достигается при процессах обезвоживания, разложения органических остатков, уплотнения и цементации осадков, образования конкреций.

Стадией диагенеза заканчивается процесс собственно формирования осадочной горной породы. Она продолжает существовать в земной коре до тех пор, пока находится в термодинамических условиях, характерных для верхних горизонтов. Однако и здесь осадочная горная порода не остаётся неизменной. Наступает стадия катагенеза. Катагенез — это совокупность процессов, изменяющих осадочную породу в период её' существования до начала метаморфизма или выветривания. В отличие от диагенетических процессов, обусловленных внутренней неуравновешенностью осадка, причиной катагенез является отсутствие равновесия между породой и средой, в которую она попадает в результате прогибания или подъёма участков земной коры. Основными факторами катагенеза являются температура и воздействие подземных вод. В целом процессы катагенеза протекают менее интенсивно, чем диагенетические, но зато чрезвычайно длительны и приводят к заметным результатам, а именно: уплотнению и обезвоживанию, растворению и выносу ряда минералов подземными водами, перекристаллизации минералов в осадочной породе.

4. 1.2. Химический и минеральный составы осадочных пород

Осадочные горные породы состоят из различных по составу и происхождению компонентов: аллотигенных, органических остатков разного типа и вулканогенного материала.

Аллотигенные (привнесённые извне) компоненты составляют основную массу обломочных и некоторых глинистых пород и представляют собой обломки и частицы пород и минералов различного размера. Как правило, в осадочных породах встречаются обломки наиболее устойчивых минералов и пород. Главным образом это кварц, затем следуют полевые шпаты, слюды. пироксены, амфиболы.

Аутигенные (образовавшиеся на месте нахождения) компоненты образуются за счёт выделения минерального вещества из природных растворов или в результате обменных и других реакций либо в воде бассейна осадконакопления, либо в осадочной горной породе. Наибольшее значение из них имеют глинистые минералы, карбонаты, сульфаты, соли, оксиды и гидроксиды Fe, Mn, Al, Si, а также фосфаты. Эти минералы слагают основную массу хемогенных и часть глинистых пород, а также широко распространены в цементах обломочных пород и конкрециях.

Органические остатки. В осадочных горных породах присутствуют органические останки или следы жизнедеятельности организмов. Это обломки раковин или скелетных частей различных животных и растительных организмов. В породах биогенного происхождения органические останки являются преобладающим компонентом, а в некоторых случаях породы целиком сложены ими (ракушняки, известняки, мел и др.).

В значительной части современных осадков присутствует вулканогенный материал в виде обломков вулканического стекла и эффузивных пород. Вулканогенный материал попадает в осадки обычно как примесь вулканического пепла, песка и более крупных образований при извержениях. При этом название породы состоит из двух слов, например, туфогенный песчаник. Следует иметь в виду, что прилагательное в этом словосочетании (в данном случае «туфогенный») означает, что вулканогенного материале в породе меньше, чем терригенного. В песчанистом туфе меньше терригенного материала, чем вулканогенного.

3.2. Классификация осадочных горных пород

Общепризнанных классификаций осадочных горных пород нет, что связано, прежде всего, с разнообразием процессов и факторов, контролирующих образование осадков. В нашей стране распространением пользуется классификация осадочных пород, предложенная в 1958 г. М. С. Шевцовым, в основу которой положено, с одной стороны, их происхождение, а с другой - их химический и минеральный составы. Упрощенная классификация осадочных пород приведена в виде таблицы.

По генетическим признакам среди осадочных горных пород выделяют три главные группы.

1. Терригенные (обломочные) породы образуются в результате механического разрушения ранее существовавших горных пород и накопления обломочного материала. К ним относят песчаники, гравелиты, конгломераты, а также их не сцементированные и неокатанные разности: пески, гравий, дресву, галечник и щебень. В эту же группу входят глинистые породы, являющиеся продуктом преимущественно химического разрушения пород, а также переотложения глинистых минералов, освободившихся при выветривании глинистых толщ и тончайшего дробления химически стойких минералов.
2. Органогенные породы, которые образуются в результате жизнедеятельности организмов (коралловые постройки) и их отмирания (кости рыб, зубы акул и т. д.). В отдельную группу выделяют каустобиолиты, образующиеся из растительных и животных (планктон) останков, преобразованных под влиянием биохимических, химических и другихгеологических факторов и обладающих горючими свойствами. Это - угли, торф, сапропель и др.
3. Хемогенные породы, образующиеся при химическом разрушении, растворении минералов материнских пород и последующем выпадении новых минералов в осадок из пересыщенных растворов.

Более детальное подразделение осадочных пород в пределах выделяемых генетических групп производится по вещественному и минеральному составам. Терригенные осадочные горные породы по размеру обломков (частиц) подразделяют на грубообломочные (псефиты), песчаные (псаммиты), пылеватые (алевролиты) и глинистые (пелиты). По характеру связи (цементации) обломочного материала их подразделяют на сцементированные и несцементированные (рыхлые).

При классификации органогенных и хемогенных пород определяющим является их химический состав.

3.3. Текстуры и структуры осадочных горных пород

Строение осадочных пород характеризуется текстурой и структурой.

Текстура - это общий рисунок породы, черты ее строения, определяемые способом заполнения пространства, характером сочетания между собой элементарных частиц (минералов, зерен, обломков). Текстура породы формируется с этапа накопления осадка. Возникшие в процессе осадконакопления первичные текстуры отражают состояние среды в момент накопления осадочного материала и результаты её взаимодействия с осадком. Вторичные текстуры возникают в уже сформировавшейся породе при процессах диагенеза и гипергенеза.

'Структура осадочной породы - это особенности её строения, которые определяются размером, формой, степенью однородности составных частей, а также количеством, размером и степенью сохранности органических остатков. Элементы структуры породы формируются на протяжении всех этапов образования и жизни породы.

Важнейшим признаком, характеризующим строение осадочных пород, является их слоистая текстура. Образование слоистости связано с условиями накопления осадков. Любые перемены этих условий вызывают либо изменение отлагающегося материала, либо обстановку в его поступлении, что внешне выражается в появлении слоев.

Классификация осадочных горных пород

ТЕРРИГЕННЫЕ				
Структура	Рыхлые, несцементированные		Сцементированные	Размер, мм
	неокатанные	окатанные		
псефитовая	Глыбы Щебень Дресва	Валуны Галечник Гравий	>50 Конгломераты 10 Гравелит	> 1-10
псаммитовая	Песок		Песчаник	0,1-1,0
алевритовая	Алевриты		Алевролиты	0,01 -ОД
пелиговая	Глины		Аргшшпы	<0,01
ОРГАНОГЕННЫЕ				
Название			Химический состав	
Известняки, мел			CaCOз	
Доломит			CaMg(CQ,)	
Опоки, трепела			SiQz-nHaO	
Сапропелиты, торф, уголь			Органические соединения углерода	
Х Е М О Г Е Н Н Ы Е				
Название			Химический состав	
Соли галоидные: галит сильвин Соли сернокислые: гипс ангидрит Соли фосфатные: аштит Бурые железняки Бокситы			NaCl КС1 $CaS0_4$-2H20 $CaS0_4$ АЩз • nH_2O, Al(OHb A10(OH)	

Слои представляют собой более или менее плоские тела, горизонтальные размеры которых во много раз больше их толщины (мощности), и отделяющиеся друг от друга поверхностями напластования. Слоистая текстура обусловлена чередованием слоев нескольких разностей осадочных пород и может быть вызвана резким изменением размера обломочных частиц и вещественного состава пород либо ориентировкой осадочного материала.

Для осадочных пород характерна также пористая текстура, характеризующая степень её проницаемости. По степени пористости выделяют следующие породы:

микропористые, в которых пористость не заметна на глаз, но устанавливается специальными методами;

мелкопористые, в которых можно различить мелкие частые поры;

крупнопористые - с колебанием размера пор в пределах от 0,5 до 2,5 мм;

кавернозные имеют крупные поры (каверны) на месте выщелоченных раковин и остатков других организмов, а также отдельных частей горной породы.

Для однородных, преимущественно зернистых хемогенных и органогенных пород, характерны массивные текстуры. Все несцементированные осадочные горные породы имеют рыхлую текстуру.

Структура осадочных пород отражает их происхождение. Структуры осадочных пород определяются, главным образом, размером и отчасти формой слагающих их частиц. По величине обломков для терригенных горных пород (мм) выделяют такие структуры, как: галечная (окатанные обломки) - 10 - 100; щебеночная (остроугольные обломки) - 10 - 100; гравийная (окатанные обломки) - 1 - 10 ; дресвяная (остроугольные обломки) — 1-10; псаммитовая -0,1-1; алевролитовая — 0,01 - 0,1; пелитовая - < 0,01.

Для хемогенных пород (известняки, доломит, гипс) характерна кристаллически-зернистая структура. В зависимости от размера слагающих породу зерен выделяют крупнозернистую (преобладают зерна величиной 1,0 -0,5 мм), среднезернистую (0,5 - 0,25 мм), мелкозернистую структуры (0,25 -0,1 мм), иногда, когда порода плохо отсортирована, выделяют разнозернистую структуру.

Оолитовая структура наблюдается в случаях, когда в породе в массовых количествах присутствуют мелкие шаровидные стяжения (оолиты) различного размера (боксит, оолитовый известняк).

Структуры пород, в составе которых большое участие принимают остатки организмов (свыше 20 - 30 % объема породы), определяются степенью сохранности этих останков и их количеством. Выделяются следующие структуры: биоморфная - в случае хорошей сохранности скелетных остатков организмов; детритовая - порода почти полностью состоит из скелетных обломков размером крупнее 0,1 мм.

Осадочные породы имеют самую разнообразную окраску и оттенки. При этом иногда окраска является признаком, характерным для определения этих пород, и зависит: 1) от окраски минералов, слагающих пород; 2) окраски рассеянных в породе примесей и цемента; 3) цвета тончайшей корочки, часто обволакивающей зерна составляющих породу минералов. Белый и светлосерый цвета обычно обусловлены окраской главных минералов осадочных пород (кварца, каолинита, кальцита, доломита и др.) и свидетельствует до некоторой степени о чистоте породы. Темно-серый и черный цвета чаще всего появляются в результате примеси углеродистого вещества и, реже, оксидов и гидрооксидов марганца. Красный и розовый цвета связаны с примесью в породе оксидов железа, а зеленый цвет зависит от примеси закисного железа и присутствия минералов с зеленой окраской - чаще глауконита, реже хлорита и малахита.

4.3. Методика выполнения лабораторной работы

Основная цель лабораторной работы - знакомство с осадочными горными породами, их текстурно-структурными особенностями, минеральным составом.

Правильное определение осадочных горных пород возможно только при полном учете всего комплекса внешних свойств. Подробно должны быть описаны текстура и структура породы, характер слоистости (в случае отсутствия последней это должно быть специально указано), наличие или отсутствие кавернозности и т. д. Необходимо устанавливать и указывать возможно точнее структуру породы со всеми ее особенностями, окраску, твердость, излом, удельный вес и другие признаки, точно определять состав породы. Не менее подробно, чем породу, следует описывать и все инородные включения в нее: органические остатки, конкреции, прожилки, различные выделения, выцветы, примазки и т. д. Полное описание дает возможность установить тип породы и способ ее образования, а тем самым и определить ее.

При описании псефитов следует указывать состав, окраску, величину и характер окатанности обломков, состав и окраску цемента и соотношение в породе обломков и цемента.

Описывая глину, необходимо указать следующие ее внешние признаки: цвет, причем подчеркнуть, в каком состоянии влажности описывается глина; пластичность (глина бывает жирная, пластичная, сухая и песчанистая); характер примесей, часто обусловливающих окраску; структуру; растительные остатки и окаменелости.

МИНОБРНАУКИ РФ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

По самостоятельной работе

«ГЕОЛОГИЯ»

для студентов специальности

«Технология геологической разведки»

Автор: Огородников В. Н., д.г-м.н., доцент

Екатеринбург
2019

Введение

Естественные науки – совокупность наук о природе. Природа – в широком смысле – все сущее, весь мир в многообразии его форм; объект естествознания. К естественным наукам относятся и география, и геология. **География –** система естественных – физико-географических и общественных – экономико-географических наук, изучающих географическую оболочку Земли, природные и производственно-территориальные комплексы и их компоненты. **Геология –** комплекс наук о составе, строении и истории развития земной коры и Земли (Советский энциклопедический словарь. М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1979).

В школьных программах нет дисциплины «Геологии». Элементарные сведения о Земле как планете и ее внутреннем строении школьники получают на уроках «Географии» в 6 и 7 классах. Для изучения геологических вопросов рекомендуем самостоятельно читать учебники по геологии. В настоящее время выпущено огромное число самых различных учебников, учебных пособий, методических указаний по всем направлениям геологических наук. Любой желающий по своему усмотрению без особого труда может для себя их приобрести. Но следует помнить афоризм Козьмы Пруткова: «Никто не обнимет необъятного!» Нельзя школьникам сразу преподносить геологические знания в объеме читаемой в высшей школе, но знать основы геологии необходимо каждому грамотному человеку для того, чтобы понимать историю развития природы. Без этих знаний невозможно понять процесс формирования как прошлых, так и современных ландшафтов – важнейших составных частей географической оболочки Земли.

Для квалифицированного подхода к встрече с природными объектами рекомендуем иметь элементарные познания по геологии. Аннотации первоочередных лекций приведены в настоящих методических указаниях.

Геология – это наука о Земле, о ее свойствах и изменениях, происходящих на ней в настоящее время, а также совершавшихся во времена прошедшие. Геология – это история Земли, и эту историю она сама записывает. Она сама ведет свою автобиографию; ведет ее без перерыва почти от начала своего образования и до настоящего времени, записывая ее на своих каменных страницах, и человеку остается лишь научиться читать эту занимательную каменную летопись, научиться понимать эти каменные письмена, в которых буквами являются попадающиеся нам под ноги камешки, а чернилами – воды ручьев, рек и морей. Вначале мы должны научиться различать буквы – камни, потом должны постигнуть самый процесс чтения записей Земли, для этого должны изучать геологические процессы, и лишь после того, как мы хорошо освоимся с ними, мы можем приступить к чтению древних страниц этой летописи. В этой великой многотомной летописи Вселенной всякая летопись человека, будь то самый древний папирус, является лишь одной незначительной строчкой, помещенной в конце ее последней страницы. Читая эту великую автобиографию, мы уносимся в бесконечно отдаленные от нас, неизмеримые даже тысячелетиями, времена. Эти далекие времена отдалены от нас во времени так, как отдалены от нас в пространстве далекие, загадочно мерцающие звезды.

Но где и как можно научиться читать эту великую летопись Земли? Где и как надо изучать геологию? Везде и всюду – в каждом овраге, в каждой речке, в любом карьере можно наблюдать результаты геологических процессов. Для изучения геологических процессов необходимо принимать участие в геологических экскурсиях, проходящих по геологическим объектам, доступными непосредственно нашему наблюдению.

1. ОБЪЕКТ И ПРЕДМЕТ ГЕОЛОГИИ

1.1. НАУКА О ЗЕМЛЕ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Два греческих слова "гео" — Земля и "логос – учение позволяют трактовать термин "геология" как науку о Земле. Однако в наше время ограничиться таким простым толкованием уже нельзя, поскольку этот термин объединяет в себе целый комплекс самостоятельных направлений, как фундаментальных, так и прикладных.

Под ***фундаментальными*** обычно понимают те направления, которые разрабатывают понятия, открывают явления, закономерности, свойства, определяющие развитие геологии как науки. Фундаментальность не следует отождествлять с теоретическими разработками. К фундаментальным геологическим наукам могут быть отнесены следующие дисциплины: геохимия, минералогия, петрография, геотектоника, общая геология и историческая геология. Названные дисциплины занимаются различными уровнями организации вещества Земли в пространстве и во времени. Именно это обстоятельство в основном и определяет фундаментальность каждого из названных направлений. Все они теснейшим образом связаны между собой.

К ***прикладным направлениям*** принято относить те, которые непосредственно работают на производство: создают приёмы, методы, технологию геологических исследований, связанных в первую очередь, с поисками и разведкой полезных ископаемых, а также охраной и рациональной эксплуатацией земных недр. Их в современной геологии значительно больше, чем фундаментальных. Назовём лишь несколько: региональная геология, структурная геология, геологическое картирование, поиски и разведка месторождений полезных ископаемых, инженерная геология.

1.2. ОБЪЕКТ И ПРЕДМЕТ ГЕОЛОГИИ

Объектом общей геологии является Земля в целом: её возникновение как планеты, формирование внутренних и внешних оболочек, их функционирование и взаимодействие. Иными словами, речь идёт об изучении Земли как геологической системы.

Предметом непосредственного изучения геологии служат минералы, горные породы, ископаемые органические остатки и современные геологические процессы.

В основе научного познания геологической истории Земли, реконструкции процессов и обстановок прошлого лежит ***метод актуализма.*** При использовании этого метода к пониманию прошлого идут от изучения современных процессов, но с осознанием того, что в прошлом, особенно отдалённом от современности, и физико-географическая обстановка, и сами процессы отличались от современных тем больше, чем больше отдалена от нас прошлая геологическая эпоха.

1.3. ЗНАЧЕНИЕ ГЕОЛОГИИ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ОБЩЕСТВА

Огромное значение, которое имеет геология, может быть рассмотрено в двух аспектах - общенаучном и народнохозяйственном.

Общенаучное значение геологии заключается в её неоценимой роли в формировании материалистического понимания природы. Данные геологии играют важную роль в диалектико-материалистическом обосновании философских принципов, отражающих материальное единство мира и его развитие,

Практическое значение геологии заключается в обеспечении минерально-сырьевыми ресурсами различных отраслей хозяйства, в инженерно-геологическом обосновании строительства разнообразных гражданских и промышленных объектов, в решении питьевого и технического водоснабжения.

1.4. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ГЕОЛОГИИ

Геология зародилась в глубокой древности. Задолго до новой эры человек научился выплавлять металлы, использовать минеральную воду. Издавна привлекали внимание человека и природные процессы. Однако временем возникновения геологии как науки принято считать вторую половину ХУШ в. – период зарождения и бурного развития горнодобывающей промышленности. В России основоположником обобщений геологических знаний стал М.В. Ломоносов (1711-1765), в Западной Европе - Д.Геттон (1726-1797) и А.Г.Вернер (1750-1817).

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЗЕМЛЕ

2.1. ЗЕМЛЯ ВО ВСЕЛЕННОЙ

"Вселенная, весь мир, бесконечный во времени и пространстве и бесконечно разнообразный по тем формам, которые принимает материя в процессе своего развития. Вселенная существует объективно, независимо от сознания человека, её познающего. Вселенная содержит гигантское множество небесных тел, многие из которых по размерам превосходят Землю иногда во много миллионов раз (БСЭ, т.5, с. 1315). Доступная для изучения часть Вселенной называется ***Метагалактикой,*** включающей свыше миллиарда звёздных скоплений, или ***галактик*** (греч. "галактика" - молочный, млечный).

Наша ***Галактика Млечного Пути*** - типичная звездная система с массой около 10^{10} масс Солнца относится к типу спиральных и включает свыше 150 миллиардов звёзд. С Земли, расположенной внутри Галактики, Млечный Путь представляется в виде широкой белёсой полосы звезд, пересекающей небо. Период обращения Солнца и звёзд вокруг центра Млечного Пути 200 млн. лет. Возраст Галактики около 12 млрд. лет. Когда речь идёт о Солнечной системе, то имеется в виду Солнце и всё, что находится в поле его тяготения. К наиболее крупным телам этой системы относятся 9 планет, 34 их спутника, многочисленные кометы и астероиды. Согласно современным космогеническим представлениям Земля и другие планеты Солнечной системы образовались 4,6 млрд. лет назад почти одновременно с Солнцем.

Земля обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите на среднем расстоянии 149,6 млн. км (144,117 млн. км в перигелии, 152,083 в афелии), период обращения 365,242 средних солнечных суток (год), скорость в среднем 29,765км\с (30,27км\с в перигелии, 29,27км\с в афелии). Период обращения Земли вокруг оси 23 час 56 мин 4,1 с (сутки).

Пожалуй, все согласны с тем, что исходным веществом для формирования Солнечной системы послужили межзвёздная пыль и газы, широко распространенные во Вселенной. Но каким образом в их составе оказался полный набор химических элементов таблицы Менделеева и что послужило толчком для начала конденсации газа и пыли в протосолнечную туманность остается дискуссионной проблемой. Следующая стадия образования Солнечной системы предусматривает распад протопланетного диска на отдельные планеты внутренней и внешней групп с поясом астероидов между ними. Промежуточной фазой было образование сонма твердых и довольно крупных, до сотен километров в диаметре, тел, именуемых планетезималями, последующее скопление и соударение которых и явилось процессом аккреции (наращивания) планеты. Этот процесс занял не более сотни миллионов лет, т.е. был с геологической точки зрения очень быстрым.

Важнейшее отличие Земли от других планет Солнечной системы - существование на ней жизни, появившейся 3-3,5 млрд. лет назад и достигшей с появлением человека (12 млн. лет назад) своей высшей формы.

2.2. ФОРМА И РАЗМЕРЫ ЗЕМЛИ

Поверхность реальной Земли чрезвычайно сложна и во всех деталях навряд ли может быть описана с помощью математических формул. Однако эта сложность существенно уменьшается при переходе от крупномасштабного к мелкомасштабному изображению, когда особенности рельефа Земли рассматриваются для достаточно обширных территорий.

Под фигурой, или формой Земли, понимают форму ее твердого тела, образованную поверхностью материков и дном морей и океанов. Форма планеты определяется ее вращением, соотношением сил притяжения и центробежной, плотностью вещества и его распределением в теле Земли. Геодезические измерения показали, что упрощенная форма Земли приближается к ***эллипсоиду вращения (сфероиду).*** В СССР в качестве эталона в 1946 году был принят эллипсоид Ф.Н.Красовского и его учеников (А.А.Изотов, и др.), основные параметры которого подтверждаются современными исследованиями и с орбитальных станций. По этим данным экваториальный радиус равен 6378,245 км, полярный радиус 6356,863 км, полярное сжатие 1/298,25.

Поверхность реальной Земли чрезвычайно сложна и во всех деталях навряд ли может быть описана с помощью математических формул. Однако эта сложность существенно уменьшается при переходе от крупномасштабного к мелкомасштабному изображению, когда особенности рельефа Земли рассматриваются для достаточно обширных территорий.

В связи с расчлененностью рельефа (наличием высоких гор и глубоких впадин) действительная форма Земли является более сложной, чем трехосный эллипсоид. Наиболее высокая точка на Земле - гора Джомолунгма в Гималаях - достигает высоты 8848 м. Наибольшая глубина - 11 034 м - обнаружена в Марианской впадине. Таким образом, наибольшая амплитуда рельефа земной поверхности составляет немногим менее 20 км. Учитывая эти особенности, немецкий физик Листинг в 1873 г. фигуру Земли назвал геоидом, что дословно обозначает «землеподобный». **Геоид —** некоторая воображаемая уровневая поверхность, которая определяется тем, что направление силы тяжести к ней будет всегда перпендикулярно. Эта поверхность совпадает с уровнем воды в Мировом океане, который мысленно проводится под континентами. Это та поверхность, от которой проводится отсчет высот рельефа. Поверхность геоида приближается к поверхности трехосного эллипсоида, отклоняясь от него местами на величину 100-150 м (повышаясь на материках и понижаясь на океанах, что, по-видимому, связано с плотностными неоднородностями масс в Земле и появляющимися из-за этого аномалиями силы тяжести.

2.4. СТРОЕНИЕ ЗЕМЛИ

Изучение внутреннего строения Земли производится различными методами. Геологические методы, основанные на изучении естественных обнажений горных пород, разрезов шахт и рудников, керна глубоких буровых скважин, дают возможность судить о строении приповерхностной части земной коры. Глубинное внутреннее строение Земли изучается главным образом геофизическими методами: сейсмическими, гравиметрическими, магнитометрическими и др. Одним из важнейших методов является сейсмический, основанный на изучении скорости распространения упругих волн, вызванных естественными и "искусственными" землетрясениями.

На основании скорости распространения сейсмических волн австралийский сейсмолог К. Буллен разделил Землю на ряд зон, дал им буквенные обозначения в определённых усреднённых интервалах глубин, которые используются с некоторыми уточнениями до настоящего времени.

Выделяются три главные области Земли:

Земная кора (слой А) - верхняя оболочка Земли, мощность которой изменяется от 6-7 км под глубокими частями океанов до 35- 40 км под равнинными платформенными территориями континентов, до 50 - 75км под горными сооружениями (наибольшие под Гималаями и Андами).

Мантия Земли распространяется до глубин 2900км. В её пределах по сейсмическим данным выделяются: верхняя мантия - слой В глубиной до 400км и С - до 800 - 1000км (некоторые исследователи слой С называют средней мантией); нижняя мантия - слой D до глубины 2900 с переходным слоем от 2700 до 2900км.

Ядро Земли подразделяется на внешнее ядро - слой Е в пределах глубин 2900 - 4980км; переходную оболочку - слой Г - от 4980 - 5120км; и внутреннее ядро - слой G до 6971 км.

Земная кора - это верхняя каменная оболочка Земли, сложенная магматическими, метаморфическими и осадочными породами. Она представляет собой наиболее активный слой твердой Земли - сферу деятельности магматических и тектонических процессов. Нижняя граница земной коры как бы зеркально повторяет поверхность Земли. Под материками она глубоко опускается в мантию, под океанами приближается к поверхности Земли,

Мантия Земли является самым крупным элементом Земли - она занимает 83% ее объема и составляет около 66% ее массы.

Верхняя мантия характеризуется резким нарастанием скорости распространения сейсмических волн с глубиной. Выделяется два слоя: В (35-420 км), С (420-1000 км). Внутри слоя В, с глубин 80-100 км под материками и 50-70 км под океанами и до глубин 250-300 км, выделяется слой пониженной вязкости, который носит название *астеносферы.* Астеносфера выделяется по геофизическим данным как слой пониженной скорости, поперечных сейсмических волн и повышенной электропроводности. Повышенная вязкость астеносферы обусловлена, по-видимому, высокой температурой, приводящей, как полагают, к частичному выплавлению базальтовой магмы. Астеносфера играет важную роль в эндогенных процессах, протекающих в земной коре.

Земная кора вместе с твёрдой частью слоя Гутенберга образует единый жесткий слой, лежащий на астеносфере, который называется *литосферой.* По существу, литосфера является своеобразной геосферой, отделённой от остальной части мантии активным поясом астеносферы.

Земная кора и верхняя мантия, включая астеносферу, представляют собой *тектоносферу* - область Земли, где происходят тектонические явления.

3. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

Под воздействием внутренних, или ***эндогеннных,*** и внешних, или ***экзогенных,*** сил земная кора испытывает постоянные изменения, которые называются ***геологическими процессами***. Соответственно различают эндогенные и экзогенные процессы.

Эндогенные процессы определяются глубинными источниками энергии. В результате на поверхности Земли образуются горные хребты и впадины, в земной коре возникают магматические очаги, происходят вулканические извержения, землетрясения. Эндогенные процессы характеризуются сложностью и большим разнообразием.

Экзогенные **процессы** развиваются на поверхности Земли за счёт энергии Солнца, и их интенсивность связана с активностью атмосферных явлений, геологической деятельностью поверхностных и подземных вод, озер, ледников, морей и океанов.

Сформировавшийся под воздействием эндогенных процессов рельеф молодых горных областей подвергается воздействию экзогенных сил, направленных на сглаживание, выравнивание рельефа. Таким образом, эндогенные и экзогенные процессы развиваются одновременно, связанно и взаимно обусловленно.

К эндогенным процессам относятся тектонические движения, магматизм и метаморфизм.

3.2. ТЕКТОНИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Совокупность тектонических движений и деформаций, под воздействием которых формируются геологические структуры, называется тектоническими процессами, или *тектогенезом.* Тектонические движения – механические перемещения масс горных пород различного масштаба, сопровождающиеся изменениями их залегания и строения, а также связанными с этими изменениями деформациями (дислокациями). Тектоническим движениям принадлежит ведущая роль в развитии всех геологических процессов, так как они обусловливают перераспределение и трансформацию внутренней энергии Земли, влияют на изменение давления, интенсификацию теплопотока и т.д.

Упрощенно в зависимости от интенсивности, преимущественной направленности и геологических результатов тектонические движения можно разделить на две основные группы - *колебательные и дислокационные.*

3.3. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАГМАТИЗМА

Магматизмом называют явления, связанные с образованием, изменением состава и движением магмы из недр Земли к ее поверхности. Магма представляет собой природный высокотемпературный расплав, образующийся в виде отдельных очагов в литосфере и верхней мантии, главным образом в астеносфере. Подъем магмы и прорыв ее в вышележащие горизонты происходят вследствие инверсии плотностей, при которой внутри литосферы появляются очаги менее плотного, но мобильного расплава. Магматизм - это глубинный процесс, обусловленный тепловым и гравитационными полями Земли.

В зависимости от характера движения магмы различают магматизм интрузивный и эффузивный. При ***интрузивном магматизме*** (плутонизме) магма не достигает земной поверхности, а активно внедряется во вмещающие вышележащие породы, частично расплавляя их, и застывает в трещинах и полостях коры. При ***эффузивном магматизме*** (вулканизме) магма через подводящий канал достигает поверхности Земли, где образует вулканы различных типов, и застывает на поверхности. В обоих случаях при застывании расплава образуются магматические горные породы. Температуры магматических расплавов, находящихся внутри земной коры, судя по экспериментальным данным и результатам изучения минерального состава магматических пород, находятся в пределах 700-1100°С.

Измеренные температуры магм, излившихся на поверхность, в большинстве случаев колеблются в интервале 900-1100°С, изредка достигая 1350°С. Более высокая температура наземных расплавов обусловлена тем, что в них протекают процессы окисления под воздействием атмосферного кислорода. На больших глубинах в магме в растворенном состоянии присутствуют летучие компоненты - пары воды и газов (H_2O, H_2, CO_2, HCl и др.). В условиях высоких давлений их содержание может достигать 12%. Они являются химически очень активными подвижными веществами и удерживаются в магме только благодаря высокому внешнему давлению.

3.4. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТАМОРФИЗМА

Метаморфизм - преобразование горных пород под действием эндогенных процессов, вызывающих изменение физико-химических условий в земной коре. Преобразованию могут подвергаться любые горные породы: осадочные, магматические и ранее образовавшиеся метаморфические. Изменение минерального состава при метаморфизме может протекать ***изохимически,*** т. е. без изменения химического состава метаморфизуемой породы, и ***метасоматически,*** т. е. со значительным изменением химического состава метаморфизуемой породы за счет привноса и выноса вещества. Изменение структуры и текстуры пород обычно происходит в процессе перекристаллизации вещества. Особенность метаморфических процессов заключается в том, что они протекают с сохранением твердого состояния системы.

Метаморфизм представляет собой сложное физико-химическое явление, обусловленное комплексным воздействием температуры, давления и химически активных веществ.

3.5. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ЭКЗОГЕННЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Экзогенные геологические процессы в отличие от эндогенных протекают в самых верхних слоях земной коры на её границе с внешними геосферами Земли. Их энергетической основой является энергия солнечной радиации и сил гравитации. Экзогенные процессы протекают при нормальных значениях температуры и давления с поглощением тепла и направлены на дифференциацию вещества земной коры. Выделяют четыре группы (стадии) экзогенных геологических процессов: выветривание, денудацию, аккумуляцию, диагенез.

Выветривание (нем. "веттер" - погода) представляет собой процесс глубокого изменения магматических, метаморфических и осадочных горных пород и минералов, оказавшихся неустойчивыми в условиях земной поверхности. Изменение физического и химического состояния первичных минералов и горных пород происходит в месте их залегания в результате физического, химического и биологического воздействия воды, углекислого газа, различных минеральных и органических кислот, живых организмов, а также непосредственного воздействия солнечной радиации.

Денудация (лат. "денудацио" - обнажение) - это совокупность процессов удаления (сноса и переноса) продуктов выветривания с места их образования и непосредственного разрушения горных пород агентами денудации (силы гравитации, воды континентов, морей и океанов, ветер, ледники). Перемещая материал с возвышенностей в пониженные участки рельефа, денудационные процессы приводят к разрушению земной поверхности и образованию выровненных форм рельефа.

Аккумуляция (осадконакопление) - геологические процессы, в результате которых рыхлые продукты разрушения первичных горных пород накапливаются в понижениях рельефа: в речных долинах, озёрах, болотах, морях и океанах.

Диагенез (перерождение) представляет собой сложный процесс преобразования продуктов экзогенной деятельности (осадков) в осадочные горные породы под влиянием гравитационных сил и изменения физико-химических условий в приповерхностной части земной коры.

Все экзогенные геологические процессы тесно взаимосвязаны. Благодаря выветриванию происходит подготовка материала для денудации, а сами продукты выветривания, оставшиеся на месте, являются материалом для образования новых горных пород.

Основными результатами экзогенных геологических процессов являются изменения вещественного состава верхней части земной коры, дифференциация вещества по физическим и химическим свойствам, создание толщ осадочных горных пород и форм рельефа земной поверхности. Благодаря экзогенным процессам формируются почвы и полезные ископаемые. Около 60% мировой добычи полезных ископаемых связано с продуктами экзогенной деятельности.

Вместе с тем разрушения берегов рек, озёр и морей, обвалы, оползни, снежные лавины, размыв и разрушение склонов, рост оврагов и заболачивание территорий - это также результаты деятельности экзогенных геологических процессов

4. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ СОСТАВ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Земную кору — верхнюю твердую оболочку Земли - слагают горные породы (магматические, осадочные и метаморфические), состоящие из определенного сочетания минералов, в состав которых входят различные химические элементы. Изучая такую иерархию: химические элементы – минералы – горные породы, можно судить о строении земной коры в различных структурных зонах.

4.1. МИНЕРАЛЫ

Подавляющие большинство химических элементов образуют в земной коре простые или сложные соединения (исключения составляют инертные газы и некоторые самородные элементы). Химические соединения, образовавшиеся в земной коре в результате природных процессов и обладающие определенными химическим составом и физическими свойствами, называются ***минералами.*** Установлено, что в земной коре содержится около 4000 минералов.

Любой минерал обладает вполне определённым химическим составом и вполне определённой кристаллической структурой, т.е. закономерным расположением в пространстве элементарных частиц (молекул, атомов, ионов). В зависимости от особенностей химического состава и кристаллической структуры минералы образуют многогранники различной формы, называемые кристаллами. Эти же характеристики минералов (химический состав и кристаллическая структура) обуславливают все физические свойства, такие, как цвет, блеск, твёрдость и т.д.

4.2. ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

Горными породами называются устойчивые парагенетические ассоциации минералов, возникающие в результате определённых геологических процессов и образующие геологически самостоятельные тела в земной коре. Науки, изучающие горные породы, - петрография, литология, астрофизика и физика горных пород.

Традиционно под горными породами подразумеваются только твёрдые тела, в широком применении к горным породам относят также воду, нефть и природные газы.

Горные породы могут слагаться как одним минералом, так и их комплексом. Минералы, входящие в состав горной породы и определяющие её состав и свойства, называются ***породообразующими***

Если горные породы состоят из одного минерала (кварцит, известняк, каменная соль), они называются ***мономинеральными,*** если же из нескольких ***-полиминеральными*** (гравий, глина).

Все горные породы обладают комплексом морфологических особенностей, которые объединяют в понятия структура и текстура. Наряду с химическим и минеральным составом структура и текстура являются важнейшими диагностическими признаками горных пород.

По происхождению горные породы делятся на три класса: осадочные, магматические и метаморфические.

Осадочные горные породы образуются только на поверхности земной коры при разрушении_любых, ранее существовавших горных пород, в результате жизнедеятельности и отмирания организмов и выпадения осадков из пересыщенных растворов.

Магматические горные породы возникают путём кристаллизации природных силикатных расплавов внутри земной коры или на её поверхности.

Метаморфические горные породы возникают путем коренного преобразования магматических, осадочных и ранее существовавших метаморфических пород под влиянием высоких температур, давления и химически активных растворов.

5. СТРОЕНИЕ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Строение земной коры рассматривается отдельно по той причине, что эта геосфера является основным объектом геологии и средой горного производства.

Земная кора - это верхняя каменная оболочка Земли, сложенная магматическими, метаморфическими и осадочными породами и имеющая мощностьот 7 до 75 км. Она представляет собой наиболее активный слой твёрдой Земли - сферу деятельности магматических и тектонических процессов. Нижняя граница земной коры как бы зеркально повторяет поверхность Земли. Под материками она глубоко опускается в мантию, под океанами приближается к поверхности Земли.

Выделяют два главных типа земной коры: континентальную и океаническую.

Мощность ***континентальной*** коры в зависимости от тектонических условий меняется в среднем от 25-45. (на платформах) до 45-75 км (в областях горообразования), однако в пределах каждой геоструктурной области она не остаётся строго постоянной. В континентальной коре различают осадочный, гранитный и базальтовый слои.

Мощность осадочного слоя достигает 20 км, но распространён он не повсеместно. Названия гранитного и базальтового слоев условны и исторически связаны с выделением разделяющей их границы Конрада, хотя последующие исследования показали некоторую сомнительность этой границы.

Основное отличие ***океанической*** коры от континентальной - отсутствие гранитного слоя, существенно меньшая мощность (2-10 км), более молодой возраст (юра, мел, кайнозой), большая латеральная однородность. Океаническая кора состоит из трёх слоев. Первый слой, или осадочный, характеризуется широким диапазоном скоростей и мощностью до 2 км. Второй слой, или акустический фундамент, имеет среднюю мощность 1,2-1,8 км. Глубоководным бурением установлено, что этот слой сложен сильно трещиноватыми и брекчированными базальтами, которые с увеличением возраста океанической коры становятся более консолидированными. Третий слой сложен породами в основном габброидного состава.

Кроме двух главных типов земной коры выделяется кора переходного типа - субконтинентальная в островных дугах и субокеаническая на континентальных окраинах.

Участки земной коры, различающиеся типом геологического строения, называются ***структурными элементами.*** *С* точки зрения закономерностей пространственного строения земной коры океаны и континенты - это ***структуры*** **I** (планетарного) порядка. В пределах структурных элементов I порядка по особенностям геологического строения и развития выделяются структуры П порядка: на материках - платформы и геосинклинальные пояса, на океанической коре - талассократоны и срединно - океанические хребты.

6. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ЗЕМНОЙ КОРЫ.
ОСНОВЫ ИСТОРИЧЕСКОЙ ГЕОЛОГИИ

Геология - наука естественно-историческая, и поэтому особо важное значение имеет ее раздел, посвященный изучению развития геологических событий по времени. Задачи исторической геологии - восстановление физико-географических обстановок накопления осадков в различные эпохи, последовательности формирования пород и их распределения по относительному возрасту, изучение истории развития органического мира от древнейших эпох до настоящего времени.

6.1. ГЕОХРОНОЛОГИЧЕСКАЯ И СТРАТИГРАФИЧЕСКАЯ ШКАЛЫ

В геологии как в никакой другой науке важна последовательность установления событий, их хронологии, основанной на естественной периодизации геологической истории. Геологическая хронология, или геохронология, основана на выяснении геологической истории наиболее хорошо изученных регионов. На основе широких обобщений, сопоставления геологической истории различных регионов Земли, закономерностей эволюции органического мира в конце прошлого века на первых международных геологических конгрессах была выработана и принята Международная геохронологическая шкала, отражающая последовательность подразделений времени, в течение которых формировались определённые комплексы отложений, и эволюцию органического мира. Таким образом, Международная геохронологическая шкала - это естественная периодизация истории Земли.

Среди геохронологических подразделений выделяются: зон, эра, период, эпоха, век, время. Каждому геохронологическому подразделению отвечает комплекс отложений, выделенный в соответствии с изменением органического мира и называемый стратиграфическим: эонотема, группа, система, отдел, ярус, зона. Таким образом существует две шкалы - геохронологическая и стратиграфическая. Первую мы используем, когда говорим об относительном времени в истории Земли, а вторую, когда имеем дело с отложениями. В настоящее время выделяют три наиболее крупных стратиграфических подразделения - эонотемы: архейскую, протерозойскую и фанерозойскую.

6.2. СОВРЕМЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ФОРМИРОВАНИИ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Представления о закономерностях формирования земной коры развивались на протяжении длительного времени по мере накопления фактического материала, совершенствования геологических и геофизических методов исследований. Особое значение на современном этапе развития теоретической геологии имеют данные, полученные при изучении обширных океанических территорий, и результаты космических исследований.

Гипотезы горизонтального дрейфа континентов

Механизм горизонтального перемещения континентальных глыб был разработан в 1929г. американским учёным А.Холмсом. Его гипотеза подкоровых течений предполагает существование в мантии (субстрате) медленных конвективных потоков, обусловленных различным накоплением тепла под континентами и океанами. Восходящие конвективные потоки приводят к разрыву коры, раздвиганию блоков и образованию молодого океанического дна. В районах нисходящих потоков, наоборот, блоки сталкиваются, сминаются, образуя системы надвигов, шарьяжей, а глубинные слои коры даже вовлекаются в мантию, переходя в глубинные аналоги базальтов - эклогиты.

Можно отметить, что с разработкой гипотезы А.Холмса идеи мобилизма получили новый импульс, обусловивший их широкую популярность и в наши дни. Кроме того, в последние годы при изучении строения дна океанов получены новые данные, которые также используются для подтверждения возможности горизонтального дрейфа. Эти данные послужили основой гипотезы новой глобальной тектоники, или тектоники плит. Гипотеза разработана американскими учёными Г.Хессом и Р.Дицем. Значительный вклад в её развитие внесли зарубежные и советские геологи.

Основные идеи, положенные в основу гипотезы тектоники плит, связаны с открытием зон формирования молодой океанической коры в зонах рифтообразования и зон поглощения коры у глубоководных желобов.

По мнению авторов гипотезы, в зонах рифтообразования происходит "раздвигание" плит литосферы с образованием молодой океанической коры в центральной рифтовой зоне. Это явление называется ***спредингом*** океанического дна, характеризуется прерывистостью, сопровождается внедрениями мантийного вещества из астеносферы и разрывами маломощных базальтов в рифтовой зоне. С этой активной зоной связаны проявления вулканизма, неглубокие зоны землетрясений и аномалии теплового потока.

Образование новой коры в зонах спрединга сопровождается поглощением блоков (плит) литосферы в других участках нашей планеты. По мнению авторов гипотезы, такими участками являются зоны глубоководных океанических желобов, в которых происходит прерывистое поддвигание одной плиты литосферы под другую. Это явление называется ***субдукцией,*** сопровождается кратковременным выделением значительной механической энергии в виде землетрясений, проявлений вулканизма. Длительное поддвигание океанической коры под континентальную приводит к деформации окраинного моря, смещению островной дуги к континенту и складкообразованию. При этом поддвигание может смениться развитием обширных надвигов океанической коры - ***обдукцией***. Другим путём образования орогенных зон, по мнению авторов гипотезы, является столкновение - ***коллизия*** континентов.

Движущие силы механизма перемещения блоков литосферы авторы гипотезы тектоники плит связывают с конвективным перемешиванием мантийного вещества, что близко к взглядам А.Холмса. Однако в отличие от положений гипотезы подкоровых течений, в соответствии с рассматриваемой гипотезой потоки мантийного вещества здесь замыкаются на уровне астеносферы.

Таким образом, в соответствии с гипотезой тектоники плит под действием потоков мантийного вещества происходят глобальные перемещения континентов, но не изолированно, как считал А.Вегенер, а в составе мощных плит литосферы. При таком горизонтальном перемещении плит в зонах спрединга происходит обновление коры, а в зонах субдукции - её поглощение и растворение в астеносфере.

По современным данным, литосфера состоит из семи крупных плит, ограниченных зонами спрединга, субдукции или смятия: Тихоокеанской, Евразиатской, Индийской, Африканской, Антарктической, Северо-Американской и Южно-Американской.

7. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕСТОРОЖДЕНИЯХ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Важнейший раздел геологии, позволяющий решать обширные прикладные задачи, - учение о полезных ископаемых. Он включает в себя совокупность сведений о геологической позиции и закономерностях размещения месторождений различных полезных ископаемых, методику поисков и экономику минерального сырья, тесно соприкасается с технологий переработки руд и извлечения из них ценных компонентов.

Полезным ископаемым называют природное минеральное образование, которое используется в народном хозяйстве в естественном виде или после предварительной обработки (переработки) путем дробления, сортировки, обогащения для извлечения ценных металлов или минералов. По физическому состоянию полезные ископаемые бывают газообразными, жидкими и твердыми. К первым относятся горючие газы углеводородного состава и негорючие инертные газы, ко вторым - нефть, рассолы, вода, к третьим - большинство полезных ископаемых, которые применяются как химические элементы или их соединения, а также в виде кристаллов, минералов, горных пород. По промышленному использованию полезные ископаемые разделяются на ***металлические, неметаллические, горючие или каустобиолиты, гидро-и газоминеральные.***

Металлические полезные ископаемые служат для извлечения из них металлов и элементов: черных (железо, титан, хром, марганец и др.); легирующих (никель, кобальт, вольфрам, молибден и др.); цветных (алюминий, свинец, цинк, сурьма, ртуть и др.); благородных (золото, серебро, платина, палладий и др.); радиоактивных (уран, радий, торий и др.); редких и рассеянных (висмут, цирконий, ниобий, тантал, галлий, германий, кадмий, индий и др.); редкоземельных (лантан, церий, иттрий, прометий, самарий, лютеций и др.).

К *неметаллическим* полезным ископаемым принадлежат строительные горные породы (естественные строительные камни, пески, глины, сырье для каменного литья, стекол и керамики и др.), индустриальное (алмаз, графит, асбест, слюды, драгоценные и поделочные камни, пьезокристаллы, оптические минералы и др.), а также химическое и агрономическое сырье (сера, флюорит, барит, галит, калийные соли, апатит, фосфориты и др.).

Горючие ископаемые включают торф, бурый уголь, каменный уголь, антрацит, горючие сланцы, озокерит, нефть, горючий газ. Они служат энергетическим и металлургическим топливом, а также сырьем для химической промышленности.

К ***газоминеральному*** сырью относятся негорючие инертные газы: гелий, неон, аргон, криптон и др.

Гидроминеральные полезные ископаемые разделяются на подземные воды питьевые, технические, бальнеологические или минеральные и нефтяные, содержащие ценные элементы (бром, йод, бор, радий и др.) в количестве, позволяющем извлекать их, а также рассолы (озерные рассолы, минеральные грязи, илы). Важным гидроминеральным сырьем являются воды морей и океанов, используемые для получения пресной воды и извлечения многих ценных элементов.

Рудой называется минеральное сырье, содержащее ценные полезные компоненты (металлы, их соединения, минералы) в количестве, достаточном для промышленного извлечения при современном состоянии экономики, техники и технологии. В зависимости от вида извлекаемого компонента выделяются руды металлические (железные, медные, свинцово-цинковые и т. д.) и неметаллические (серные, асбестовые, графитные, апатитовые и др.). По количеству компонентов руды различают монометалльные (мономинеральные), биметалльные (биминеральные) и полиметалльные (полиминеральные).

Месторождением **полезного ископаемого** называется его природное в виде геологических тел скопление в земной коре, которое по условиям залегания, количеству и качеству минерального сырья при данном состоянии экономики и техники может служить объектом промышленной разработки в настоящее время или в ближайшем будущем. К месторождениям полезных ископаемых промышленность предъявляет требования, определяемые технической возможностью и экономической целесообразностью их разработки.

Совокупность требований промышленности к минеральному сырью называется ***кондициями*** - они не являются постоянными и зависят от экономических условий и состояния техники и технологии добычи и переработки минерального сырья.

Площади распространения полезных ископаемых в порядке их уменьшения разделяются на провинции, области (пояса, бассейны), районы (узлы), поля, месторождения, тела.

Телом полезного ископаемого называют ограниченное со всех сторон скопление минерального вещества, которое приурочено к отдельным структурным элементам или их комбинациям.

7.2. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ СОСТАВ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Являясь природными минеральными образованиями, все полезные ископаемые обладают определенным вещественным (минеральным и химическим) составом, строением или структурно-текстурными особенностями, а также некоторым комплексом физических, физико-химических и технологических свойств. Все эти характеристики в общем случае обусловливают качество полезных ископаемых, которое имеет важнейшее значение для оценки месторождений с целью их промышленного использования.

Вещественный состав металлических и неметаллических руд определяется соотношением рудных, или ценных, и сопутствующих им нерудных, или жильных, минералов. В металлических рудах рудные минералы являются носителями ценных металлов, в неметаллических - минералы сами представляют практический интерес благодаря специфическим свойствам.

По составу преобладающей части минералов выделяются следующие типы руд:

самородные - самородные металлы и интерметаллические соединения - медь, золото, платина и др.;

***сернистые* и им** подобные - сульфиды, арсениды и антимониды тяжелых металлов - меди, цинка, свинца, никеля, кобальта, молибдена и др.;

оксидные - оксиды и гидроксиды железа, марганца, хрома, олова, урана, алюминия и др.;

карбонатные - карбонаты железа, марганца, магния, свинца, цинка, меди и др.;

сульфатные - сульфаты бария, стронция, кальция и др.;

фосфатные - *апатитовые и фосфоритовые неметаллические руды, а также фосфаты некоторых металлов и др.;*

силикатные - *сравнительно редкие руды железа, марганца, меди; широко распространенные неметаллические полезные ископаемые* - *слюды, асбест, тальк и др.;*

галоидные - *минеральные соли и флюорит и др.*

По вещественному составу, определяющему промышленную ценность и технологические свойства, полезные ископаемые разделяются на природные типы и промышленные сорта.

7.3. ГЕНЕТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

В настоящее время известно несколько десятков генетических классификаций месторождений полезных ископаемых. Наиболее известной является классификация В.И.Смирнова.

Эндогенные месторождения, к числу которых относятся скопления полезных ископаемых, прямо или косвенно связанные с магматической деятельностью, подразделяют на: собственно магматические, пегматитовые и постмагматические.

Магматическими называются месторождения, образующиеся из жидких магматических расплавов в процессе их внедрения и раскристаллизации. При подъеме магматических расплавов в верхние горизонты земной коры и остывании происходит их дифференциация, с чем связана концентрация, а иногда и полное обособление рудных компонентов. Процессы образования магматических месторождений достаточно сложны. В одних случаях месторождения образуются в результате внедрения магмы, обогащенной рудными компонентами еще на глубине, в других - рудные концентрации возникают из магм при ее подъеме, в третьих - лишь на месте становления интрузива.

Главная особенность всех магматических месторождений - их связь с материнскими интрузивами, которые рассматриваются как вещественный или энергетический источник оруденения. Магматические месторождения разделяются на генетические подгруппы: ликвационные, раннемагматические и позднемагматические.

В группу ***экзогенных*** включаются скопления полезных ископаемых, которые образуются при экзогенных процессах в результате химической, биохимической и механической дифференциации вещества земной коры. По способу накопления осадочного материала различают месторождения выветривания и осадочные.

К ***месторождениям выветривания*** относятся остаточные и инфильтрационные месторождения. ***Остаточные*** месторождения полезных ископаемых образуются при физическом и химическом выветривании горных пород, которое сопровождается гидролизом породообразующих минералов, растворением и выносом неустойчивых компонентов.

К **осадочным месторождениям** относятся аллювиальные и прибрежно-морские россыпи, химические и биохимические осадочные месторождения.

Метаморфизованными называют месторождения любого происхождения, испытавшие метаморфические преобразования одновременно с вмещающими породами. При этом процессы метаморфизма могут выражаться в изменении и преобразовании структур и текстур, изменении характера минерального состава руд, а также в переотложении рудного вещества, изменении формы рудных тел, рассланцевании и изменении состава вмещающих пород.

Под ***метаморфическими*** месторождениями понимают такие месторождения, которые возникли в результате метаморфизма горных пород, до того не содержащих промышленных рудных скоплений и не представляющих собой полезного ископаемого. К возникающим в процессе метаморфизма собственно метаморфическим месторождениям относятся месторождения высокоглиноземистого сырья (кианит, андалузит, силлиманит), графита, гранулированного кварца, слюды, амфибол-асбеста, корунда, наждака, граната, титана и др.

8. СИСТЕМА ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИЗУЧЕНИЯ НЕДР

Геологическое изучение недр в России производится последовательно и планомерно с тем, чтобы не только получить необходимую геологическую информацию о недрах, но и своевременно выявить промышленные и отбраковать непромышленные скопления полезных ископаемых. В общей системе геологического изучения недр можно выделить три крупных этапа. Этапы геологического изучения включают несколько последовательных стадий.

Этап I. Работы общегеологического и минерагенического назначения.

Стадия 1. Региональное геологическое изучение недр прогнозирование полезных ископаемых.

Этап II. Поиски и оценка месторождений.

Стадия 2. Поисковые работы.

Стадия 3.Оценочные работы.

Этап III. Разведка и освоение месторождений.

Стадия 4. Разведка месторождения.

Стадия 5. Эксплуатационная разведка.

На каждой стадии геологического изучения недр осуществляется их геолого-промышленная оценка, заключающаяся в определении действительной или возможной значимости изучаемого участка земной коры, в котором содержатся или могут содержаться скопления полезной минерализации или же предполагается горное строительство. С этой целью исследуются состав и строение горных пород и полезного ископаемого, условия залегания, степень и характер тектонической нарушенности, гидрогеологические и инженерно-геологические характеристики месторождения, географо-экономические условия района и т. п.

РЕКОМЕНДАЦИИ

Для более углубленного изучения отдельных разделов геологических дисциплин рекомендуем воспользоваться следующими методическими указаниями.

Часть 1. Минералы.
Часть 2. Магматические горные породы.
Часть 3. Метаморфические горные породы.
Часть 4. Осадочные горные породы.
Часть 5. Организация геологических экскурсий.
Часть 6. Художественная обработка камнесамоцветного сырья.

МИНОБРНАУКИ РФ
Уральский государственный горный университет

Н.В. Рубан, И. А. Антонова

Гидрогеология и инженерная геология

Учебно-методическое пособие по практическим занятиям по дисциплине «Гидрогеология и инженерная геология» для студентов специальности 21.05.03 «Технология геологической разведки»

Екатеринбург
2020

МИНОБРНАУКИ РФ

Уральский государственный горный университет

Н.В. Рубан, И. А. Антонова

ГИДРОГЕОЛОГИЯ И ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОЛОГИЯ

Учебно-методическое пособие по практическим занятиям по дисциплине «Гидрогеология и инженерная геология» для студентов специальности 21.05.03 «Технология геологической разведки»

Екатеринбург

2018

Содержание

1. Основы гидрогеологической стратификации

Гидрогеологическая стратификация – это расчленение геологического разреза на элементы, существенно отличающиеся в гидрогеологическом отношении.

По Г. Н. Каменскому «гидрогеологический элемент – это некоторый объем геологической среды, выделенный на основе гидрогеологических признаков и не подвергающийся дельнейшему членению».

Главный принцип гидрогеологической стратификации основан на учете стратиграфических и гидрогеологических признаков системы «вода-порода». При этом основное расчленение геологического разреза выполняется с учетом геолого-структурных особенностей территории, а литолого-фациальный анализ рассматривается как база для определения исходных гидрогеологических свойств. По этим признакам в разрезе выделяют водонасыщенные и неводонасыщенные, водопроницаемые и водонепроницаемые слои и пласты и пр.

Гидрогеологический слой (тело) – это одновозрастные породы, характеризующиеся выдержанностью по мощности и распространению, и обладающие относительно одинаковыми фильтрационными и емкостными свойствами. Выделяют следующие типы слоев: водоносный, водоупорный, относительно водоупорный, неводонасыщенный проницаемый, слабопроницаемый, непроницаемый.

Водоносный горизонт (зона) – проницаемое гидрогеологическое тело, постоянно содержащее подземные воды и отличающееся преимущественно однородным составом пород, характером питания, транзита и разгрузки подземных вод. Водоносная зона отличается от водоносного горизонта пространственной локализацией повышенной трещиноватости (тектонической или экзогенной) и проницаемости пород.

Относительно водоносный горизонт (зона) – слабопроницаемое гидрогеологическое тело, содержащее подземные воды.

Относительно водоупорный горизонт (зона) – весьма слабопроницаемое гидрогеологическое тело, содержащее подземные воды преимущественно в связанном виде и характеризующееся замедленной, вертикальной фильтрацией при возникновении градиента напора между смежными водоносными подразделениями.

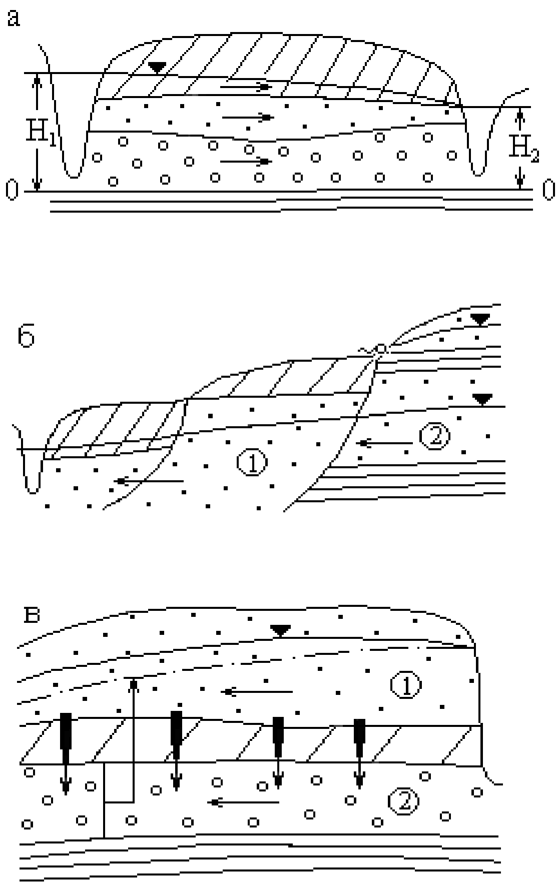
Водоупорный горизонт (зона) – практически водонепроницаемое гидрогеологическое тело.

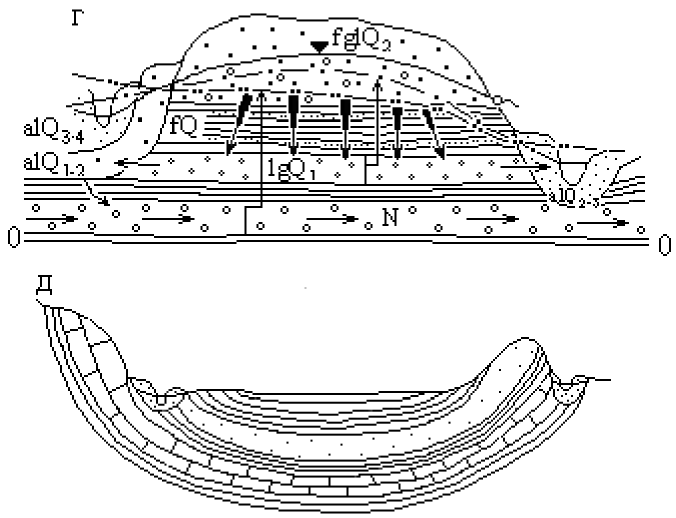
Водоносный (относительно водоносный) комплекс – гидрогеологическое тело, состоящее из нескольких гидравлически взаимосвязанных водоносных (относительно водоносных) горизонтов или зон и разделяющих их локально или относительно водоупорных горизонтов (зон).

Водоносный этаж - система водоносных горизонтов (зон) и комплексов, характеризующаяся общими условиями водообмена и формирования подземных вод. Водоносный этаж подстилается входящим в его состав региональным водоупорным горизонтом, повсеместно развитым в границах гидрогеологической структуры.

Гидрогеологический бассейн – совокупность нескольких водоносных, водоупорных и относительно водоупорных горизонтов и (или) комплексов, характеризующихся в целом, общностью геологического развития и формирования гидродинамических, гидрохимических и гидрогеотермических процессов.

Гидрогеологическая система – совокупность нескольких гидрогеологических бассейнов, характеризующихся в целом общностью формирования ресурсов подземных вод.





Типы исходных элементов гидрогеологической стратификации (ИЭГГС) с геологической средой, представленной осадочными породами: а) водоносный горизонт неоднородного строения с грунтовыми водами; б) водоносные горизонты ①, ② с межпластовыми грунтовыми водами; в) водоносный комплекс с грунтовыми ① и напорными ② водами в четвертичных отложениях; г) междуречный бассейн с межпластовыми напорными водами в неогеновых, четвертичных отложениях и грунтовыми водами в аллювиальных и флювиогляциальных отложениях; д) артезианский бассейн с напорными водами.

Рис. 1.1. Элементы гидрогеологической стратификации

Выделение гидрогеологических элементов по условиям залегания.

Факторы, определяющие условия залегания подземных вод:

- Геологические (структурно-тектонические, литолого-фациальные и генетические типы отложений);
- Геоморфологические (тип, форма рельефа, характер и степень его эрозионной расчлененности, влияющие на условия питания и разгрузки подземных вод);
- Физико-географические или ландшафтные (определяют характер связи подземных вод с атмосферой, реками и т. п., величину питания и режим подземных вод, их запасы и ресурсы, качество).

По условиям залегания выделяют два вида подземных вод: грунтовые (безнапорные ①) и артезианские (напорные②), рис. 1.2.

По степени и характеру водонасыщенности выделены в разрезе 3 зоны: А – неполного (аэрации); Б – полного насыщения капельножидкой водой пор и трещин водовмещающих пород; и В – диссипации (где вода может находиться в диссоциированном состоянии). Для каждой зоны характерны преобладающие виды подземных вод по условиям нахождения и движения в горных породах. В зоне А – инфильтрационная и физически связанная вода, основная форма ее движения – инфильтрация (или влагоперенос). В зоне Б – свободная гравитационная вода, основная форма движения – фильтрация (или миграция подземных вод); в зоне В – физически- и химически связанная вода.

В таблице 1.1 приведена систематизация основных факторов, при анализе которых выделяются гидрогеологические системы по условиям залегания, а в таблице 1.2 приведены основные виды гидрогеологических систем с грунтовыми и напорными водами.

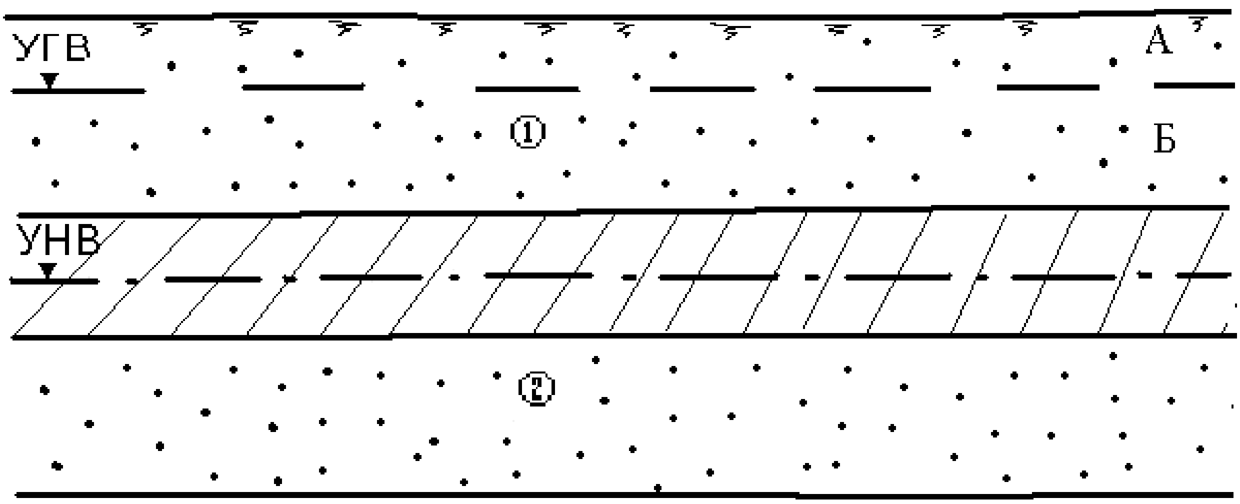


Рис. 1.2. Виды подземных вод по условиям залегания

Таблица 1.1

Факторы, определяющие выделение гидрогеологических систем в гидролитосфере по условиям залегания

Зона	Вид подземный воды	Признак				
		гидрогеологический	структурный	морфологический	литолого-генетический	гидротермодинамический
Аэрации	Инфильтрационная, физически связанная	Локальные зоны, потоки	-	-	-	Влагоперенос
Насыщения	Грунтовая (гравитационная)	Бассейны, потоки	Платформы, геосинклинали Впадины, прогибы, щиты, синклинали, антиклинали, разрывные структуры и др.	Речные долины, междуречья, конусы выноса, предгорные равнины, мелкосопочник, озы, камы	Осадочные породы, метаморфические и изверженные породы Недислоцированные, дислоцированные Терригенные, карбонатные Аллювий, пролювий, делювия	Фильтрация Миграция а) конвекция, б) гидродисперсия, в) диффузия, г) сорбция, д) растворение и др.
	Напорная (гравитационная)	Бассейны, склоны, потоки	Платформы, геосинклинали Впадины, прогибы, щиты, синклинали, антиклинали, разрывные структуры и др.	Виды складчатых структур Виды разрывных нарушений	Осадочные породы, метаморфические и изверженные породы Недислоцированные, дислоцированные Терригенные, карбонатные Аллювий, пролювий, делювия	Фильтрация Миграция а) конвекция, б) гидродисперсия, в) диффузия, г) сорбция, д) растворение и др.
	Глубинная (физически и химически связанная, свободная)	Потоки	Крупные разломы линеаменты и др.	-	Осадочные породы, метаморфические и изверженные породы	Миграция
Диссипации	мономолекулярная	- » -	Системы глобальных разломов	-	-	

Таблица 1.2

Систематизация гидрогеологических систем по условиям залегания

<table>
<tr><td>Зоны гидролитосферы</td><td>Виды подземных вод</td><td colspan="7">Виды гидрогеологических систем по условиям залегания</td></tr>
<tr><td>Неполного насыщения</td><td>Инфильтрационная, капиллярная и гравитационная</td><td colspan="7">Инфильтрующаяся вода (локальные потоки)
Зона с капиллярно-подвешенной водой
Верховодка (локальный бассейн)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Полного насыщения</td><td rowspan="2">Грунтовые (гравитационные)</td><td colspan="5">А. Грунтовые потоки и бассейны вне криолитозоны и молодой вулканической деятельности</td><td>Б. Грунтовые бассейны и потоки криолитозоны</td><td>В. грунтовые бассейны и потоки зон молодой вулканическо й деятельности</td></tr>
<tr><td>I. Потоки речных долин:
1) потоки в аллювии равнинных рек;
2) подрусловые потоки;
3) потоки в погребенных долинах</td><td>II. Бассейны и потоки междуречных пространств:
1) в осадочных отложениях, недисло-цированных;
2) то же, дислоцированных;
3) в изверженных и метаморфических породах;
4) то же, с зонами разломов;
5) в вулканических лавах.</td><td>III. Потоки конусов выноса, предгорных равнин:
1) поток грунтовых вод головной части конуса выноса;
2) поток грунтово-напорных вод слоистых толщ.</td><td>IV. Бассейны синклинальных структур:
1) горных сооружений;
2) мелко-сопочника.</td><td>V. Бассейны и потоки с линзами пресных вод:
1) под-песчаными;
2) под-такырными;
3) при-канальными, приречными.</td><td>С наличием зон высокотемпературных полей, гейзеров, фумарол и др. в отложениях речных долин, междуречных пространств синклинальных структур, горных сооружений</td><td>С наличием зон многолетних мерзлых пород в отложениях речных долин, междуречных пространств, синклинальн ых структур горных сооружений</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 1.2.

Зоны гидролитосферы	Виды подземных вод	Виды гидрогеологических систем по условиям залегания						
	Напорные (гравитационные)	I. Артезианские бассейны: 1) платформ; 2) меж-горных впадин, краевых прогибов; 3) наложенные бассейны; 4) бассейны горных сооружений в осадочных отложениях, лагунах, вулканогенах	II. Артезианские склоны: 1) моноклиналей; 2) асимметричных структур; 3) выклинивания.	III. Субартезианские бассейны: 1) в осадочных отложениях на щитах; 2) в осадочных породах на платформах; 3) в дислоцированных породах горных сооружений.	IV. Бассейны междуречных пространств с межпластовыми напорными водами: 1) в четвертичных ледниковых отложениях; 2) в горизонтально залегающих четвертичных и более древнего возраста осадочных отложениях.	V. Потоки напорных вод крупных разломов: 1) вне криолитозоны и молодой вулканической деятельности; 2) в криолитозоне; 3) в зоне молодой вулканической деятельности.		
Диссипации	Глубинные (химически и физически связанные, гравитационные)	Сосредоточенные потоки напорных вод систем глобальных нарушений						

2. Изучение режима подземных вод

Режим подземных вод – процесс изменения во времени основных показателей подземных вод под влиянием различных факторов в данной естественноисторической обстановке.

Основными характеристиками режима называют числовые значения, характеризующие главные морфологические особенности хронологических графиков изменения показателей режима. Хронологическими называют графики изменения уровня, расхода, минерализации, температуры подземных вод во времени. К основным характерным параметрам режима относят (рис. 2.1): амплитуде А и период Т колебаний, экстремальные точки (минимумы, максимумы), средние, минимальные, максимальные и другие значения уровня, расхода, минерализации и т. п. С помощью этих характеристик можно более компактно в числовом виде представить хронологические графики показателей режима и тем самым уменьшить объем исходной информации.

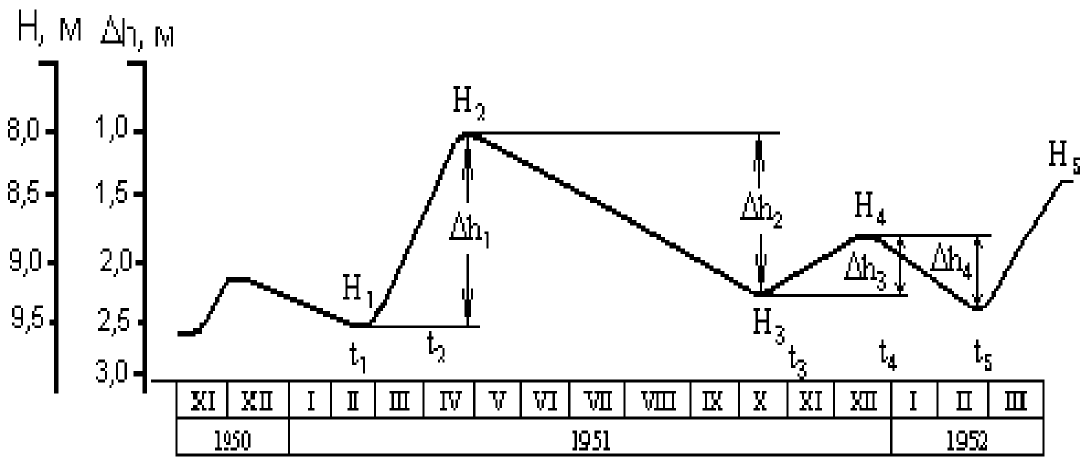


Рис. 2.1. Основные показатели сезонного изменения уровня подземных вод (по М. А. Шинкаревскому)

Определяют минимальные и ма значения суточных, декадных, месячных, весенних, летних, зим ых, многолетних амплитуд, подъемов, спадов (для уровней), температур, минерализации воды и других показателей режима. За эти интервалы времени вычисляют средние значения показателей:

$$\ddot{I}_{\tilde{n}\eth} = \frac{\sum_{1}^{n} \ddot{I}_{i}}{n},$$

где $П._i$ – значение показателя; n – число имеющихся показателей за рассматриваемый интервал времени.

К экстремальным точкам графиков относят максимум и минимум уровня, температуры, минерализации и соответственно дату его наступления (см. рис. 2.1). Амплитуды характеризуют разность между максимальным $П_{max}$ и минимальным $П._{min}$ значениям каждого из этих показателей за выделенный период времени

$$A = П_{max} - П._{min}$$

При нарушенном режиме вычисляют характерные показатели от действия техногенных факторов, например, амплитуду многолетнего подъема уровня воды под влиянием орошения или амплитуду снижения уровня воды под влиянием откачки и т. п.

Период колебаний Т характеризует интервал времени между двумя значениями какого-либо показателя режима

$$T = t_2 - t_1$$

Чаще всего это интервал между временем наступления максимального и минимального значений показателя.

<u>Задача</u>. В предгорной части долины реки в толще аллювиальных песчано-глинистых отложений оборудованы створ наблюдательных скважин и гидрометрический пост на реке (рис.2.2). Провести первичную обработку наблюдений, пользуясь фактическими данными (таблица 2.1). Для этого выполнить следующее:

1) построить хронологические графики колебаний уровня воды в реке и скважинах; предварительно вычислить отметки уровня воды, зная, что отметки устьев скважины равны: скв.1 – 211,7 м, скв.2 – 211,65 м, скв 3. – 211,63 м, отметка “0” на гидропосте равна 209,5 м;
2) по графикам определить основные параметры режима подземных вод;
3) установить наличие и характер связи с рекой, для этого нанести на геологический разрез (рис. 2.2) положение уровня грунтовых вод на минимальные и максимальные даты.

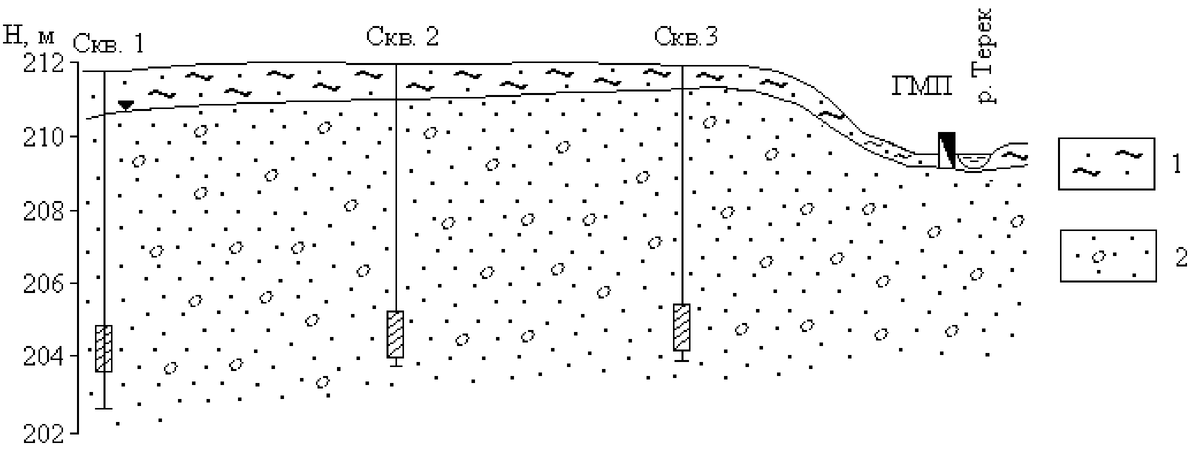


Рис. 2.2. Гидрогеологический створ в предгорной части долины р. Терека (alQ_4): 1 – супесчаный почвенный слой; 2 – гравийно-галечниковые отложения; ГМП – гидрометрический створ

Таблица 2.1

Данные наблюдений за уровнями грунтовых вод и реки

Дата наблюдений	Глубина залегания уровня от поверхности земли, м			
	Скв.1	Скв.2	Скв.3	Река

I/I 2002 г.	6,05	6.55	7.05	0.50
15/I	6,02	6.52	7.02	0.50
I/II	6,06	6.56	7.16	0.50
15/II	6,10	6.60	7.10	0.50
I/III	6,10	6.60	7.10	0.50
15/III	6,10	6.60	7.10	0.50
I/IV	6,10	6.60	7.10	0.60
15/IV	6,10	6.60	7.10	0.60
I/V	6,10	6.60	7.10	1.00
15/V	6,00	6.50	7.05	0.70
I/VI	5,90	6.40	6.90	1.00
15/VI	5,80	6.30	6.80	0.80
I/VII	5,80	6.30	6.80	1.00
15/VII	5,30	5.90	6.50	1.00
I/IX	4,50	5.00	5.90	1.00
15/IX	4,40	4.90	5.90	0.60
I/X	4,40	4.90	5.90	10.45
I/XI	4,40	4.90	6.0	0.50
15/XI	4,85	5.35	6.10	0.45
I/XII	4,90	5.40	6.13	0.50
I/I 2003 г.	5.00	5.30	6.15	0.50
15/I	5.90	6.40	6.90	0.45

3. Водные свойства горных пород

3.1. Определение коэффициента фильтрации песчаных горных пород

3.1.1. Водопроницаемость горных пород

Процесс фильтрации – это механическое движение свободной воды под действием градиента напора в порах и трещинах горных пород в условиях их полного заполнения этой водой. Водопроницаемость горных пород – это способность их пропускать через себя воду.

Водопроницаемость зависит от размера сообщающихся между собой пор и трещин в горных породах и характеризуется коэффициентом фильтрации, имеющим размерность скорости (см/с, м/с, м/сут).

Такая размерность получается из закона линейной фильтрации – закона Дарси, согласно которому количество фильтрующей воды в единицу времени прямо пропорционально коэффициенту фильтрации $K_ф$, площади фильтрации F и гидравлическому градиенту J:

$$Q = K \cdot F \cdot J \tag{1}$$

Разделив правую и левую части этого уравнения на F, получим

$$\frac{Q}{F} = K \cdot J, \text{где} \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{F}} = V \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что коэффициент фильтрации есть скорость фильтрации при градиенте, равном единице.

$$V = \text{К при J} = 1 \tag{3}$$

Формулой (3) определяется скоростная размерность коэффициента фильтрации горных пород.

Следует отметить, что расчетная скорость фильтрации отличается от истинной скорости движения воды в породах, так как жидкость движется не через всю площадь, а через площадь поровых и трещинных пространств.

Величина коэффициента фильтрации зависит от физических свойств горных пород (гранулометрический состав, плотность сложения и др.).

Средние значения $К_ф$ для различных горных пород приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Классификация пород по водопроницаемости

Группа	$К_ф$, м/сут	Примеры пород
Весьма проницаемые	>100	Крупный гравий, закарстованные сильнотрещиноватые известняки, галечник с песчаным заполнителем.
Хорошо проницаемые	100 – 10	Гравийно-галечниковые отложения, крупнозернистые пески, сильнотрещиноватые породы.
Проницаемые	10 – 1	Пески разной зернистости, трещиноватые породы.
Слабопроницаемые	1 – 10 $^{-1}$	Мелко- и тонкозернистые пылеватые пески, супеси, слабо трещиноватые породы.

Группа	$К_ф$, м/сут	Примеры пород
Весьма слабопроницаемые	10^{-1}- 10^{-3}	Мелкие и средние суглинки, песчаные породы.
Относительно водоупорные	10^{-3}	Средние глины, плотные суглинки.

В лабораторных условиях коэффициент фильтрации определяется с помощью специальных приборов на образцах естественного и нарушенного сложения.

3.1.2. Определение коэффициента фильтрации песчаных грунтов

Определение коэффициент фильтрации песчаных пород с помощью прибора, называющегося трубкой СпецГео, в основе работы которого лежит принцип трубки Дарси, и который дает возможность вести испытания пород при постоянном гидравлическом градиенте.

В состав трубки Спецгео входит:

1) фильтрационная трубка, состоящая из прямого цилиндра с площадью поперечного сечения 25 $см^2$ и высотой 100 мм с заостренными краями, перфорированного дна с отверстиями размером 2х2 мм и муфты с латунными сетками;
2) мерный стеклянный баллон со шкалой объемом 100 $см^3$;
3) приспособление для насыщения грунта водой и регулирования градиента напора, состоящее из подставки, подъемного винта, планки со шкалой градиентов напора от 0,1 до 1.

Последовательность определения.

1. Заполняют цилиндр испытуемым грунтом.

При испытании пород естественного сложения заостренным концом рабочего цилиндра вырезают образец грунта.

При испытании пород нарушенного сложения с высушенным до воздушно-сухого состояния грунтом проводят 2 опыта: в предельно рыхлом и предельно плотном сложении. В 1-ом случае наполнение цилиндра производится насыпанием грунта до необходимой высоты без уплотнения, во 2-ом – цилиндр наполняется слоями грунта толщиной 1-2 см с уплотнением каждого слоя трамбованием.

2. Насыщение грунта водой.

В корпус наливают воду и вращением подъемного винта поднимают подставку до упора. Устанавливают цилиндр с грунтом на подставку, медленно погружают в воду до отметки градиента напора 0,8 и оставляют его в таком положении до тех пор, пока грунт увлажнится. В процессе водонасыщения грунта поддерживают постоянный уровень воды у верхнего края корпуса. Породу водонасыщают снизу, чтобы не произошло защемление воздуха. На полное водонасыщение укажет появившаяся на поверхности грунта пленка воды.

3. После водонасыщения грунта на образец помещают латунную сетку, на цилиндр одевают муфту. Вращением винта устанавливают цилиндр с грунтом до совмещения отметки необходимого градиента напора на пленке с верхним краем крышки корпуса и доливают воду в корпус до верхнего его края.

Замеряют температуру воды, заполняют его мерный стеклянный баллон и, закрывая пальцем его отверстие, быстро опрокидывают отверстием вниз и укрепляют в муфте фильтрационной трубки так, чтоб его горлышко соприкасалось с латунной сеткой.

После установки мерного баллона в него начинают равномерно подниматься мелкие пузырьки воздуха, что указывает на начало фильтрации. Если в баллон прорываются крупные пузырьки воздуха, то его необходимо опустить глубже, добившись появления мелких пузырьков.

Отметив уровень воды в стеклянном баллоне, заметить соответствующее этому уровню время по секундомеру. Следить за скоростью фильтрации воды.

Замеры расхода воды произвести несколько раз (не менее четырех) и вычислить среднее значение.

4. Обработка результатов. Данные опыта занести в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

Журнал для определения Кф в трубке СпецГео

№ опыта	Описание породы	Площадь поперечного сечения трубки	Градиент напора	Температура воды	Объем профильтрованной воды	Время фильтрации	$К_ф$ по отдельным замерам	Средний коэффициент фильтрации

Коэффициент фильтрации $К_{10}$, м/сут, приведенный к условиям фильтрации при температуре воды 10 ^{0}С, вычисляют по формуле:

$$K_{10} = \frac{864 \cdot V}{t \cdot A \cdot T \cdot J},$$

где V – объем профильтровавшейся воды при одном замере, см^3;

t- время фильтрации;

А – площадь поперечного сечения цилиндра с грунтом, см^2;

J - градиент напора;

$T=0,7+0,03T_ф$ – температурная поправка,

где $Т_ф$ - фактическая температура воды при опыте;

864 – переводной коэффициент (из см/сек в м/сут).

4. Химический состав подземных вод

Природные воды являются растворами сложного состава и разнообразной минерализации, колеблющейся в пределах от единиц миллиграммов до сотен граммов в литре.

Формирование химического состава природных вод происходит в результате выщелачивания, испарения, конденсации, ионного обмена, поглощения и выделения газов, органической жизни и продуктов ее деятельности и других физико-химических процессов взаимодействия вод с породами, почвами и газами. Растворяющая способность воды делает ее важнейшим агентом в геохимических процессах перераспределения элементов в земной коре.

В практике гидрогеологических работ исследование химического состава природных вод решает следующие задачи:

1. Изучение закономерностей формирования и распространения природных вод различного состава.
2. Исследование природных вод как поискового критерия на месторождения полезных ископаемых.
3. Оценка природных вод как химического сырья для получения йода, брома, бора, меди и др. веществ.
4. Оценка состава и свойств природных вод для питьевого, технического, сельскохозяйственного, лечебного и других видов использования.
5. Оценка загрязненности природных вод под воздействием антропогенных факторов.

С целью определения химического состава растворенных в воде веществ производят химический анализ воды.

В зависимости от задач и целей исследований полнота и характер анализа могут быть различными. В практике применяются общие, сокращенные и специальные анализы воды, производимые в полевых и стационарных условиях.

4.1. Обработка результатов химического анализа подземных вод

Ионно-солевой состав воды принято выражать в виде содержания в воде отдельных ее компонентов ионов.

Результаты химического анализа вод могут быть представлены в различных формах. Различают ионно-весовую, эквивалентную и процент-эквивалентную формы выражения химических анализов.

Ионно-весовая форма – основная форма выражения результатов анализа, представляет собой выражение ионно-солевого состава подземных вод в виде весовых количеств отдельных ионов в миллиграммах или граммах на 1 л воды, а для минерализованных вод и рассолов – на 1 кг воды.

Однако, для полной характеристики свойств воды ионная форма выражения анализа недостаточна. Поэтому наряду с ионной формой пользуются мг/экв формой выражения анализа, наиболее полно отражающей внутреннюю химическую природу входящих в состав воды веществ и ее важнейшие свойства.

Эквивалентная форма основана на том положении, что ионы в растворе реагируют между собой не в равных весовых количествах, а в эквивалентных количествах, зависящих от массы иона и их валентности. Эквивалентным весом иона называется частное от деления его ионной массы на валентность, например: эквивалент Na^{+} равен 23/1; Cl^{-} - 35,5/1; Ca^{2+} - 40/2. Следовательно, при реакции реагируют на 1 г Na с 1 граммом Cl^{-}, а 1 эквивалент Na^{+} с 1 эквивалентом Cl^{-}.

Для перехода от ионно-весовой формы к мг/экв–форме необходимо число миллиграммов каждого иона разделить на его эквивалентный вес, или умножить на коэффициент, представляющий величину, обратную эквивалентному весу. В таблице 4.1. представлены пересчетные коэффициенты для наиболее распространенных в подземных водах ионов.

Таблица 4.1

Таблица эквивалентных масс и пересчетных коэффициентов

Анионы А	Эквивалент-ная масса	Пересчетный коэффициент	Катионы К	Эквивалент-ная масса	Пересчетный коэффициент
Cl^{-}	35,457	0,02820	Na^{+}	22,997	0,04348
SO_4^{2-}	48,033	0,02082	K^{+}	39,098	0,02558
HCO_3^{-}	61,018	0,01639	Mg^{2+}	12,160	0,08224
CO_3^{2-}	30,005	0,03333	Ca^{2+}	20,040	0,04990
NO_2^{-}	46,008	0,02174	NH_4^{+}	18,040	0,05543
NO_3^{-}	62,008	0,01613	Fe^{2+}	27,925	0,03581
PO_4^{3-}	31,658	0,03159	Fe^{3+}	18,617	0,05371

Если содержание какого-либо иона выражают в эквивалентной форме, то перед символом ставят знак “r” (реагирующая величина).

Согласно правилу Фрезениуса, все химические соединения, растворенные в водном растворе, реагируют между собой в эквивалентных количествах, т. е.

$$\mathbf{\Sigma rK = \Sigma rA}$$

Практически в полном анализе, когда все ионы определены аналитически, точного совпадения цифр ввиду погрешностей анализа не бывает.

Для сопоставления химического состава природных вод различной минерализации и более ясного представления о соотношениях между ионами одной и той же воды проводится пересчет результатов анализа воды в % - эквивалентную форму.

Для вычисления <u>%-экв</u> принимают сумму <u>мг·экв</u> анионов (ΣrA), содержащихся в 1л воды за 100% и вычисляют процент содержания каждого аниона в <u>мг·экв</u> по отношению к этой сумме. Аналогично поступают и с катионами:

$$\% - \underset{(илиК)}{эквA} = \frac{100 \cdot rA(илиК)}{\sum rA(илиК)}$$

Результат анализа ионов, выраженный в различных формах, представляют в виде таблицы 4.2:

Таблица 4.2

Пример выражения результатов химического анализа воды

Катионы	Содержание			Анионы	Содержание		
	мг/л	мг-экв/л	%-экв/л		мг/л	мг-экв/л	%-экв/л
Na^+	78	3,39	34	Cl^-	125	3,53	36
K^+	9	0,23	2	SO_4^{2-}	83	1,73	17
Ca^{2+}	89	4,44	44	NO_3^-	5	0,08	1
Mg^{2+}	24	1,97	20	HCO_3^-	282	4,62	46
Итого pH=7,6	200	10,03	100	Итого	495	9,96	100

<u>Определение общей минерализации.</u> Для определения общей минерализации находят сумму миллиграммов всех ионов, молекул и других соединений, содержащихся в воде согласно выполненному анализу. О

величине общей минерализации можно судит по сухому, или плотному остатку, полученному после выпаривания воды. Растворенные газы, летучие соединения, в том числе органические вещества, при выпаривании и высушивании улетучиваются, но могут идти процессы гидролиза и образования кристаллогидратов. Все это может приводить к значительным погрешностям в определении сухого остатка. Расхождение между экспериментальным определением сухого остатка и расчетной величиной общей минерализации не должно превышать 3 %.

Определение видов жесткости воды. Общая жесткость определяется как сумма миллиграмм-эквивалент в 1 л ионов Ca^{2+} и Mg^{2+}, карбонатная – как величина иона HCO_3^-, связанного с Ca^{2+} и Mg^{2+}. В случае, когда количество иона HCO_3^- превышает суммарное содержание ионов Ca^{2+} и Mg^{2+}, вся жесткость считается карбонатной. Постоянную жесткость воды определяют как разницу между общей и карбонатной.

4.2. Графическое изображение результатов химических анализов

Формула Курлова (или формула состава воды) - прием наглядного изображения химического состава природной воды. Эта формула представляет собой псевдодробь, в числителе которой в убывающем порядке записывают процент-эквивалентное содержание анионов, в знаменателе катионов.

Перед дробью сокращенно указывают величину минерализации (М) в г/л с точностью до одного десятичного знака, и компоненты (в том числе и газы), придающие воде специфические свойства (CO_2, H_2S, Br, Y, радиоактивность и др.). Справа от дроби указывают показатели, характеризующие Eh, pH, T (ºC), при наличии данных – дебит Q скважины или источника в м^3/сут.

Ионы, присутствующие в количествах менее 10 %-экв/л в форму не вносят.

В наименование состава воды включаются анионы и катионы, содержание которых превышает 25 %-экв/л. Наименование состава воды дается в следующем порядке: по минерализации, по анионному, затем по катионному составу (в порядке увеличения), по специфическим компонентам, по величине pH, по температуре.

В качестве примера рассмотрим формулу состава воды для приведенного выше результата химического анализа подземных вод.

$$M0,7\frac{HCO_3 46Cl36SO_4 17}{Ca44Na34Mg20}pH7,6$$

Т. е. вода хлоридно-гидрокарбонатная натриево-кальциевая пресная, слабощелочная.

Существуют графические способы выражения химического состава природных вод, которые позволяют на небольшой по размерам схеме показать результаты сотен анализов. Рассмотрим 2 из них: метод треугольных координат и график–квадрат Толстихина.

Метод треугольных координат (графики-треугольники Фере). Применение равносторонних треугольников для отображения химического состава природных вод основано на общеизвестном их свойстве: общая длина перпендикуляров, восстановленная из любой точки равностороннего треугольника на его стороны, является величиной постоянной, т. е. перпендикуляры из каждой точки треугольника могут служить координатами (рис. 4.1).

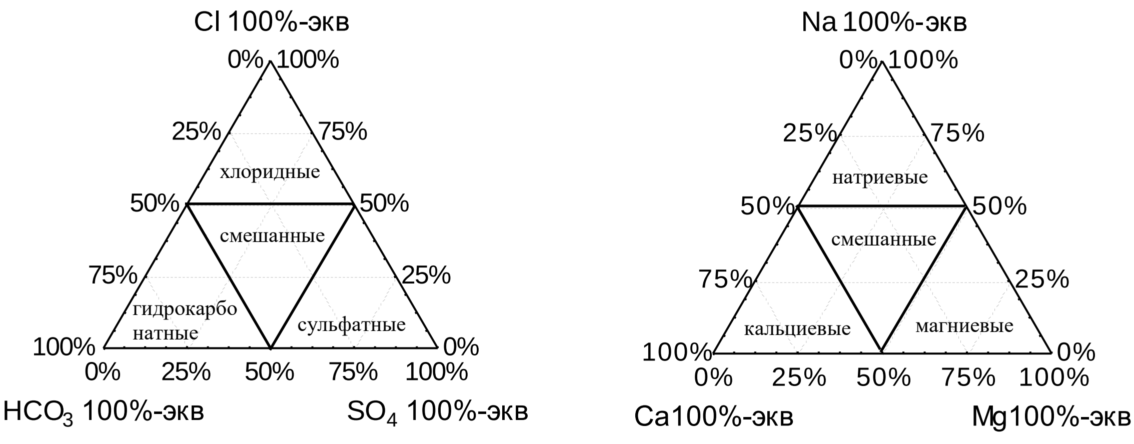


Рис. 4.1. Графическая систематизация химических анализов подземных вод по треугольникам Фере

Графики-треугольники Фере составляются отдельно для катионов и анионов, содержание которых дается в %-экв/л. В вершинах треугольников содержание ионов составляет 100 %-экв/л. Каждая сторона треугольника делится на 10 равных частей по 10 %-экв. Положение анализов определяется пересечением 3-х линий, параллельных основаниям треугольника.

Группировка анализов в вершинах треугольников указывает на преобладание в водах соответствующих ионов; в средней части располагаются смешанные по составу воды. Графики-треугольники дают возможность определения соотношений каждого иона, но сопоставление анализов затрудняется разобщенным изображением анионов и катионов.

График-квадрат Н. И. Толстихина. График-квадрат представляет собой квадрат, каждая сторона которого разделена на 10 равных частей – по 10 %-экв. По горизонтальным сторонам квадрата наносят количество катионов (%-экв), по вертикальным – количество анионов. На левой стороне квадрата сверху вниз откладывается эквивалентное содержание сумы ионов Cl^{-}+SO_4^{2-}; на правой - соответственно, снизу вверх HCO_3^{-}; на верхней стороне слева направо - Ca^{2+}+Mg^{2+} и тяжелые металлы (Me), внизу - Na^{+}+K^{+}. Положение анализа на квадрате отмечается точкой и определяется пересечением 2-х осей координат (рис. 4.2).

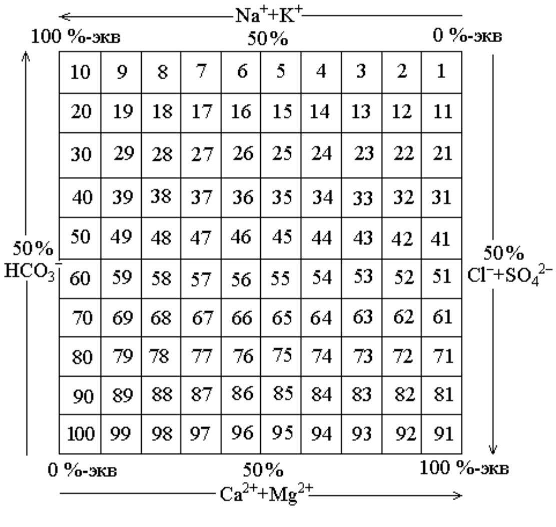


Рис. 4.2. Графическая систематизация химических анализов подземных вод по квадрату Н. И. Толстихина

Группировка анализов в вершинах квадрата указывает на преобладание химического состава воды: если точка находится в верхнем правом углу квадрата, вода, как правило, имеет гидрокарбонатный магниево-кальциевый состав; если в левом верхнем углу – гидрокарбонатный натриевый. В левом нижнем углу сосредоточены преимущественно хлоридные и сульфатные натриевые воды, а в правом нижнем – хлоридно-сульфатные магниево-кальциевые, в центре – смешанные по составу воды.

Недостатком использования графиков-квадратов является суммарное изображение ионов Cl^- и SO_4^2, Ca^{2+} и Mg^{2+}.

Задание. Обработать химический анализ подземный воды, приведенный в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Результаты химических анализов воды

№ п.п.	Водопункт	Температура воды, ^0C	pH	Своб. CO_2, мг/л	Сухой ост., мг/л	Анионы, мг/л				Катионы, мг/л			Примечание
						CO_3^{2-}	HCO_3^-	SO_4^{2-}	Cl^-	Na^++K^+	Ca^{2+}	Mg^{2+}	
1.	Скважина 1	8	7,2	0,8	298	-	115,9	107,4	8,9	12,9	52,1	15,2	NO_3 –1.4 мг/л
2.	Скважина 2	7	7,7	15,0	328	-	158,6	118,8	5,3	16,0	66,1	14,6	
3.	Скважина 3	6	7,1	49,5	278	-	134,2	71,1	7,1	8,5	50,1	12,1	$Fe_{общ}$ - 0,2 мг/л
4.	Шахтный водоотлив	15	7,8	21,0	3394	348,1	2041,0	4,1	585,0	1364,0	9,0	23,1	NO_3 -3,3 мг/л $Fe_{общ}$ – 0,2 мг/л
5.	Скважина 4	5	8,5	57,0	468	3,0	94,6	258,4	5,3	19,1	73,2	32,8	NO_2 – 0,02 мг/л NO_3 – 0,2 мг/л
6.	Скважина 5	7	7,3	1,6	798	-	405,7	261,2	24,8	170,1	50,1	36,4	NO_3 – 7,0 мг/л
7.	Шахтный водоотлив	10	7,6	33,3	1062	42,0	610,2	174,4	120,6	300,7	23,1	52,3	NO_3 –7,5 мг/л
8.	Скважина 6	8	7,7	88,0	211	-	58,0	93,4	10,6	9,4	30,1	15,8	NO_3 – 0,9 мг/л
9.	Шахтный водоотлив	13	7,3	12,4	3184	9,0	485,1	1564,7	280,1	465,3	244,5	198,2	NO_3 – 1,8 мг/л NO_2 – 1,2 мг/л
10.	Скважина 7	10	7,7	43,7	688	12,0	201,3	179,7	152,4	104,8	70,1	44,9	NO_3 – 0,9 мг/л
11.	Шахтный водоотлив	12	7,6	31,5	3164	24,0	521,7	811,8	921,8	826,5	86,2	149,6	NO_3 – 0,5 мг/л
12.	Скважина 8	9	7,1	8,8	390	-	67,1	206,1	7,1	14,9	62,1	21,8	NO_3 – 1,2 мг/л NH_4 –1,2 мг/л
13.	Скважина 9	9	7,1	19,2	332	-	259,3	68,8	7,5	16,3	70,1	20,6	NO_3 –1,8 мг/л Fe –0,9 мг/л

Продолжение табл. 4.3

№ п.п .	Водопункт	Температура воды, ^0C	pH	Своб. CO_2, мг/л	Сухой ост., мг/л	Анионы, мг/л				Катионы, мг/л			Примечание
						CO_3^{2-}	HCO_3^-	SO_4^{2-}	Cl^-	Na^++K^+	Ca^{2+}	Mg^{2+}	
14.	Шахта	14	7,7	10,5	2078	66,0	744,4	161,7	657,8	703,0	28,1	53,5	NO_3 – 4,0 мг/л
15.	Скважина 10	10	8,3	22,4	328	6,0	137,3	115,6	7,1	11,3	66,1	15,2	
16.	Скважина 11	8	7,9	38,9	447	-	94,6	245,7	7,1	9,4	75,2	31,6	NO_3 – 1,2 мг/л NH_4 – 2,0 мг/л
17.	Скважина 12	7	8,1	71,8	489	-	85,4	256,0	12,4	27,1	80,2	27,3	NO_3 -22,5 мг/л Fe –5,7 мг/л
18.	Скважина 13	8	8,0	13,3	304	-	125,1	104,1	14,2	29,9	56,1	7,9	NO_3 – 8,0 мг/л
19.	Шахта	13	7,3	46,0	1056	-	317,2	385,4	145,3	159,3	116,2	55,3	NO_3 – 1,2 мг/л
20.	Шахта	14	7,4	11,0	1250	-	283,7	503,6	138,2	143,4	134,2	74,1	NO_3 –0,5 мг/л
21.	Скважина 14	9	7,5	78,5	438	-	140,3	216,3	10,6	18,6	86,1	24,3	
22.	Шахта	13	7,9	28,0	1842	-	-	291,8	850,9	537,3	58,1	45,0	NH_4 –0,7 мг/л Fe –2,0 мг/л
23.	Скважина 15	10	6,4	21,1	617	-	30,5	393,4	7,1	19,8	78,2	49,8	NO_3 – 1,5 мг/л NH_4 – 1,0 мг/л Fe – 1,7 мг/л
24.	Скважина 16	8	7,1	36,5	295	-	36,6	141,1	26,6	18,8	47,1	15,2	NO_3 – 8,0 мг/л
25.	Скважина 17	9	7,6	15,4	367	-	244,0	1,0	9,0	46,3	35,3	6,0	

4.3. Оценка качества питьевых вод

При оценке подземных вод для питьевого водоснабжения пользуются следующими нормативными документами: ГОСТ 2874-82 «Вода питьевая», СанПиН 2.1.4.1074-01 «Питьевая вода. Гигиенические требования к качеству воды централизованных систем питьевого водоснабжения. Контроль качества».

Согласно этим документам, питьевая вода должна быть безопасна в эпидемическом и радиационном отношении, безвредна по химическому составу и иметь благоприятные органолептические свойства.

Безопасность воды в эпидемическом отношении определяют ее соответствием нормативам по микробиологическим и паразитологическим показателям, представленным в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Микробиологические и паразитологические показатели качества воды

Показатели	Единицы измерения	Нормативы
Термотолерантные колиформные бактерии (ТТКБ)	число бактерий в 100 мл	отсутствие
Общие колиформные бактерии (ОКБ)	число бактерий в 100 мл	-”-
Общее микробное число (ОМЧ)	число образующих колоний бактерий в 1 мл	не более 50
Колифаги	число бляшкообразующих единиц (БОЕ) в 100 мл	отсутствие
Споры сульфитредуцирующих клостридий	число спор в 20 мл	отсутствие
Цисты лямблий	число цист в 50 л	отсутствие

Безвредность питьевой воды по химическому составу определяется ее соответствием нормативам по:

- обобщенным показателям и содержанию вредных химических веществ, наиболее часто встречающихся в природных водах на территории Российской Федерации, а также веществ антропогенного происхождения, получивших глобальное распространение (таблица 4.5);
- содержанию вредных химических веществ, поступающих и образующихся в воде в процессе ее обработки в системе водоснабжения (таблица 4.6);

- содержанию вредных химических веществ, поступающих в источники водоснабжения в результате хозяйственной деятельности человека (приложение 2 СанПиНа 2.1.1074-01).

Таблица 4.5

Обобщенные показатели и содержания вредных химических веществ в природных водах

Показатели	Ед. изм.	Нормативы (предельно-допустимые концентрации (ПДК), не более	Показатель вредности*	Класс опасности
Обобщенные показатели				
Водородный показатель	Ед. pH	в пределах 6-9		
Общая минерализация (сухой остаток)	мг/л	1000 (1500)**		
Жесткость общая	мг-экв/л	7,0 (10)**		
Окисляемость перманганатная	мг/л	5,0		
Нефтепродукты, суммарно	мг/л	0,1		
Поверхностно-активные вещества (ПАВ), анионоактивные	мг/л	0,5		
Фенольный индекс	мг/л	0,25		
Неорганические вещества				
Алюминий (Al^{3+})	мг/л	0,5	с.-т.	2
Барий (Ba^{2+})	-“-	0.1	-“-	2
Бериллий (Be^{2+})	-“-	0,0002	-“-	1
Бор (B, суммарно)	-“-	0,5	-“-	2
Железо (Fe, суммарно)	-“-	0,3 (1,0)**	орг.	3
Кадмий (Cd суммарно)	-“-	0,001	с.-т.	2
Марганец (Mn, суммарно)	-“-	0,1 (0,5)**	орг.	3
Медь (Cu, суммарно)	-“-	1,0	-“-	3
Молибден (Mo, суммарно)	-“-	0,25	с.-т.	2
Мышьяк (As, суммарно)	-“-	0,05	-“-	2
Никель (Ni, суммарно)	-“-	0,1	-“-	3
Нитраты (по NO_3^-)	-“-	45,0	-“-	3
Ртуть (Hg, суммарно)	-“-	0,0005	-“-	1
Свинец (Pb, суммарно)	-“-	0,03	-“-	2
Селен (Se, суммарно)	-“-	0,01	-“-	2
Стронций (Sr^{2+})	-“-	7,0	-“-	2
Сульфаты (SO_4^{2-})	-“-	500	орг.	4
для климатических районов				
- I и II	-“-	1,5	с.-т.	2
- III	-“-	1,2	-“-	2

Продолжение табл. 4.5.

Показатели	Ед. изм.	Нормативы (предельно-допустимые концентрации (ПДК), не более	Показатель вредности*	Класс опасности
Хлориды (Cl^-)	-“-	350	орг.	4
Хром (Cr^{6+})	-“-	0,05	с.-т.	3
Цианиды (CN^n)	-“-	0,035	-“-	2
Цинк (Zn^{2+})	-“-	5.0	орг.	3
Органические вещества***				
γ-ГХЦГ (линдан)	-“-	0,002	с.-т.	1
ДДТ (сумма изомеров)	-“-	0,002	-“-	2
2,4-Д	-“-	0,03	-“-	2

Примечание: * - *лимитирующий признак вредности вещества, по которому установлен норматив: «с.-т.» - санитарно-токсикологический, «орг.» - органолептический;* ** - *величина, указанная в скобках, может быть установлено по постановлению главного государственного санитарного врача по соответствующей территории для конкретной системы водоснабжения на основании оценки санитарно-эпидемиологической обстановки в населенном пункте и применяемой технологии водоподготовки;* *** - *нормативы приняты в соответствии с рекомендациями ВОЗ.*

Таблица 4.6

Содержание вредных химических веществ, поступающих и образующихся в воде в процессе ее обработки в системе водоснабжения

Показатели	Ед. изм.	Нормативы (предельно-допустимые концентрации (ПДК), не более	Показатель вредности	Класс опасности
Хлор				
- остаточный свободный	мг/л	в пределах 0,3-0,5	орг.	3
- остаточный связанный	-“-	в пределах 0,8-1,2	-“-	3
Хлороформ (при хлорировании воды)	-“-	0,2	с.-т.	2
Озон остаточный	-“-	0,3	орг.	
Формальдегид (при озонировании воды)	-“-	0,05	с.-т.	2
Полиакриламид	-“-	2,0	-“-	2
Активированная кремнекислота (по Si)	-“-	10	-“-	2
Полифосфаты (по PO_4^{3-})	-“-	3,5	орг.	3
Остаточные количества алюминий- и железосодержащих коагулянтов	-“-	см. показатели «Алюминий» и «Железо» таблицы 4.5		

При обнаружении в питьевой воде нескольких химических веществ, относящихся к 1 и 2 классам опасности и нормируемых по санитарно-токсикологическому признаку вредности, сумма отношений обнаруженных концентраций каждого из них в воде к величине его ПДК не должна быть больше 1. Расчет ведется по формуле:

$$\frac{C_1}{ПДК_1} + \frac{C_2}{ПДК_2} + ... + \frac{C_n}{ПДК_n} \leq 1$$

Благоприятные органолептические свойства воды определяются ее соответствием нормативам, указанным в таблице 4.7, а также нормативам содержания веществ, оказывающих влияние на органолептические свойства воды, приведенным в табл. 4.5 и 4.6 и в Приложении 2 СанПиН 2.1.4.1074-01.

Таблица 4.7

Нормируемые значения показателей органолептических свойств воды

Показатели	Единицы измерения	Норматив, не более
Запах	баллы	2
Привкус	-“-	2
Цветность	градусы	20 (35)*
мутность	ЕМФ (единицы мутности по формазину) или мг/л (по каолину)	2,6 (3,5)* 1,5 (2,0)*

Примечание: * - *величина, указанная в скобках, может быть установлена по постановлению главного государственного санитарного врача по соответствующей территории для конкретной систему водоснабжения на основании оценки санитарно-эпидемиологической обстановки в населенном пункте и применяемой технологии водоподготовки.*

Не допускается присутствие в питьевой воде различимых невооруженным глазом водных организмов и поверхностной пленки.

Радиационная безопасность питьевой воды определяется ее соответствием нормативам по показателям общей α и β-активности, представленным в таблице 4.8.

Таблица 4.8

Нормируемые показатели общей α и β-активности питьевой воды

Показатели	Единицы измерения	Нормативы	Показатель вредности
Общая α-активность	Бк/л	0,1	радиац.
Общая β-активность	Бк/л	1,0	- « -

5. Построение и анализ карт гидроизогипс

Грунтовые воды - подземные воды первого от поверхности постоянно существующего водоносного горизонта, залегающего на первом выдержанном водоупорном пласте.

Форма поверхности грунтовых вод определяется водопроницаемостью пород, условиями питания водоносного горизонта, конфигурацией берегов рек, к которым стекают грунтовые воды, понижением водоупора, мощностью водоносного пласта и т. д.

О форме их поверхности можно судить по карте изогипс.

Гидроизогипсами называют линии, соединяющие точки одинаковой абсолютной высоты поверхности грунтовых вод, или иначе - это линии - горизонтали зеркала грунтовых вод.

Для построения карты изогипс пользуются данными замеров глубин залегания уровней грунтовых вод в скважинах, шурфах, колодцах, горных выработках, отметками источников, сведениями водомерных постов на поверхностных водоемах.

Так как уровень грунтовых вод постоянно изменяется под влиянием различных природных и искусственных факторов, все данные, используемые при построении карт изогипс, должны быть взяты на одну дату, т. е. получены по одновременным замерам всех точек наблюдения, поэтому карты изогипс всегда датируются.

Карты изогипс составляют в масштабах от 1:10000 до 1:200000 в зависимости от характера и стадии гидрогеологических исследований. Сечение гидроизогипс выбирают в зависимости от принятого масштаба карты, пустоты пунктов наблюдений за уровнем грунтовых вод, уклона их поверхности. Обычно берут сечения 0,5, 1, 2, 5 и более м.

Глубина залегания грунтовых вод в каждой точке замера пересчитывается на абсолютные или относительные отметки:

$$H_в = H_з - h,$$

где $H_в$ - абсолютная отметка уровня грунтовых вод;

$H_з$ - абсолютная отметка поверхности земли;

h - глубина залегания подземных вод.

Вычисленные отметки уровня грунтовых вод наносятся на топографическую основу и методом интерполяции строят изогипсы.

Наиболее удобно интерполировать отметки по способу треугольников: все точки, по которым производятся замеры, соединяют линиями, образующими треугольники. При интерполяции этим методом должны соблюдаться следующие правила:

Линии, образующие треугольники, необходимо проводить так, чтобы длинная сторона была перпендикулярна к направлению падения потока.

Нельзя интерполировать точки, расположенные по разные стороны поверхностных водотоков и водоемов. При наличии таких водотоков определять отметки урезов рек по водомерным постам и использовать их при интерполяции как точки выхода грунтовых вод на урезе реки (предварительно должен быть проанализирован характер дренирования грунтовых вод).

Не следует проводить интерполяцию между грунтами скважин, расположенных далеко друг от друга. Лучше проводить интерполяцию для каждой группы скважин отдельно, иначе можно исказить действительную форму поверхности грунтового потока.

При интерполяции удобно пользоваться палеткой на кальке в виде масштабной сетки, состоящей из системы параллельных линий, проведенных на расстоянии 2 - 5 мм. С помощью масштабной сетки пропорционально делят отрезки, соединяющие точки, отметки уровня которых подлежат интерполяции. После интерполяции соединяют точки с одинаковыми отметками; эти кривые и будут гидроизогипсами.

Необходимо отметить, что грунтовый поток обычно разбивается реками и поверхностными водоемами на отдельные, более мелкие потоки. Поэтому не следует интерполировать точки, расположенные по разные стороны поверхностных водотоков и водоемов. При наличии таких водотоков необходимо определять отметки урезов рек по водомерным постам и использовать их при интерполяции как точки выхода грунтовых вод на урезе реки.

Кроме карт гидроизогипс для целей проектирования и строительства могут составляться карты глубин залегания поверхности грунтовых вод, или карты гидроизобат. **Гидроизобатами** называют линии, соединяющие точки с одинаковыми глубинами залегания грунтовых вод. Карты гидроизобат, так же как и гидроизогипс, строят методом интерполяции глубин залегания уровня грунтовых вод.

Чаще всего для решения различных практических задач, карты гидроизогипс и гидроизобат составляют на одной и той же топографической основе.

Анализ карт гидроизогипс позволяют составить краткую гидрогеохимическую характеристику участка. По карте гидроизогипс можно определить:

- Направление движения грунтовых вод на заданном участке.
- Глубину залегания грунтовых вод в любой точке или на любом участке.
- Уклон грунтового потока.

- Характер взаимосвязи грунтовых вод с поверхностными.
- Условия питания и разгрузки подземных вод.

Направление движения грунтовых вод определяется по нормам к 2-м смежным гидроизогипсам. Движение воды направлено от более высоких отметок уровня к более низким.

Глубину залегания грунтовых вод в любом заданном пункте определяют по разности отметок горизонтами рельефа и гидроизогипсы.

Уклон потока подземных вод (J) определяется для любого заданного участка карты делением сечения карты гидроизогипс на кратчайшие расстояния между двумя гидроизогипсами, взятые в масштабе карты:

$$J = \frac{H_1 - H_2}{L}$$

где H_1 и H_2 – отметки уровня грунтовых вод в двух точках;

L – расстояние между этими точками в масштабе карты.

Для определения уклона грунтового потока выбирается участка с наиболее равномерным и прямолинейным распределением гидроизогипс.

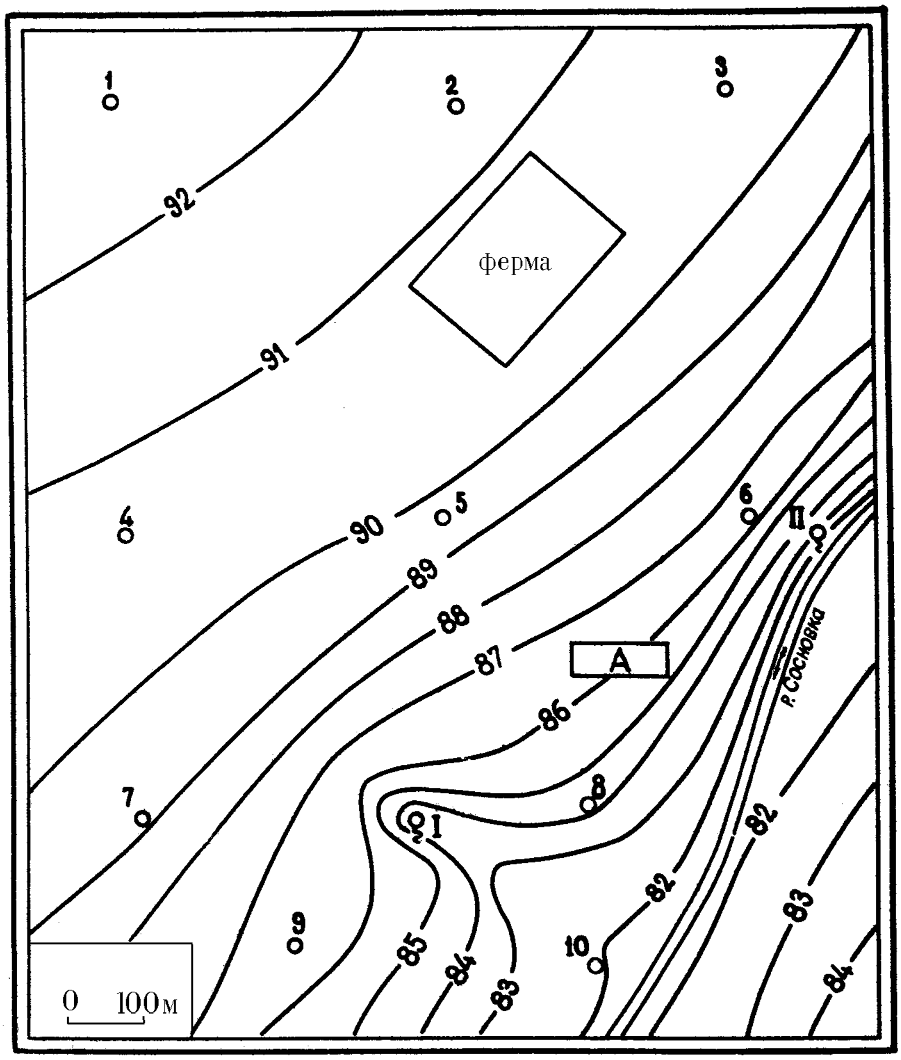
Связь грунтовых вод с поверхностными определяется по характеру сопряжения гидроизогипс с водоемами; если грунтовый поток направлен к реке, то он дренируется ею, если потоку грунтовых вод направлен от реки – река дренируется грунтовыми водами.

По соотношению и характеру изменения гидроизогипс могут быть выделены водоразделы подземных вод, участки их питания и разгрузки.

Участки замкнутых гидроизогипс с высокими отметками указывают на положение водоразделов грунтовых вод, где условия питания наиболее благоприятны.

Зоны с нулевой глубиной до воды указывают на участки выхода подземных вод на поверхность земли.

Задание. Построить карту гидроизогипс на топографической основе заданного масштаба, используя данные таблицы 5.1.



Данные для построения карты гидроизогипс:

№ скважины	Абсолютная отметка устья скважины, м	Глубина залегания грунтовых вод, м	Абсолютная отметка зеркала грунтовых вод, м
1		5,2	
2		4,5	
3		4,3	
4		5,0	
5		4,1	
6		2,0	
7		4,0	
8		1,0	
9		2,6	
10		0,5	

Необходимо:

1. Пользуясь приведенными данными по буровым скважинам, шурфам, колодцам, источникам и водомерному посту на реке – провести на карте гидроизогипсы через 1 м.
2. Определить направление движения подземных вод, показать его стрелками на карте, на характерных участках определить гидравлический уклон потока.
3. Определить по карте, на какой глубине можно встретить подземные воды, выделить зоны с различной глубиной (до 1 м, 1-3 м, 3-6 м, 6 м).
4. Охарактеризовать условия питания и разгрузки подземных вод.
5. Определить характер взаимосвязи реки и подземных вод, выявить влияние оврагов на поверхность подземных вод.

6. Построение и анализ гидрогеологических разрезов

Гидрогеологические разрезы – широко применяемая форма графической обработки и обобщения информации, разрезы характеризуют гидрогеологические условия территории в вертикальном разрезе.

Гидрогеологические разрезы характеризуют условия залегания и приуроченность подземных вод к различным горным породам, их связь с поверхностными водами, положение уровня подземных вод.

Построение разрезов выполняется в следующей последовательности:

1) выбирается наиболее информативный участок, где линия разреза пересекает различные геоморфологические элементы, зоны разломов, долины рек;
2) выбирается горизонтальный и вертикальный масштабы разреза. Горизонтальный масштаб должен соответствовать масштабу карты, вертикальный масштаб должен обеспечить четкое изображение

условий залегания и взаимосвязи водоносных горизонтов и комплексов, рек и т. п.;

3) строится гипсометрический профиль, на котором вертикальными линиями показывается местоположение скважин, отметки их устья и забоя, показывается рельеф поверхности земли. По данным бурения строят геолого-литологические колонки, проводят геологические и литологические границы пород, зоны разломов. Наносят положение уровня подземных вод по замерам в скважинах, колодцах, шурфах, источниках и др. На основании гидрогеологических данных выделяют водоносные горизонты и комплексы, разделяющие их водоупоры, указывают интервалы опробования, количественные показатели изученных свойств.

Для построения разреза необходимы топографическая карта, геологический и геоморфологический профили по выбранному направлению, геолого-литологические колонки скважин, шурфов и других выработок, находящихся на линии разреза или вблизи него, результаты наблюдений за уровнем подземных вод в скважинах, колодцах и др. выработках, результаты наблюдений на гидрометрических постах, специализированные исследования в скважинах и т. п.

Гидрогеологические разрезы анализируют в следующем порядке:

1. Устанавливают водоносные горизонты, условия их залегания, состав пород и данные об уровнях подземных и поверхностных вод.
2. Определяют мощность водоносного пласта как разность отметок его кровли и подошвы, величину напора над кровлей как разность отметок между пьезометрическим уровнем и кровлей пласта. Зоны, где поверхность земли располагается ниже пьезометрической кривой, выделяют как участки возможного самоизлива. Глубина безнапорных подземных вод определяется как разность отметок поверхности земли и уровня подземных вод, мощность - разностью отметок зеркала

подземных вод и водоупорной подошвой водоносного пласта; определяют мощность и строение зоны аэрации, устанавливают наличие относительно водоупорных прослоев в зоне аэрации, т. к. на них может формироваться верховодка, возможно создание и зон местного напора.

3. Характеризуют условия движения подземных вод; направление, уклон потока на разных участках.
4. Выделяют вид, условия питания и разгрузки подземных вод, местоположение областей питания и разгрузки.
5. Устанавливают характер и интенсивность взаимосвязи между водоносными горизонтами из литолого-фациального анализа разреза и соотношений напоров смежных водоносных горизонтов, характера изменения этих соотношений по разрезу.

Задание. Построить гидрогеологический разрез по карте гидроизогипс, используя данные таблицы 6.1.

Таблица 6.1

Данные бурения, необходимые для построения гидрогеологического разреза по линии 1- 11 по карте гидроизогипс

№ слоя (сверху вниз)	Мощность слоя, м	Геолог. индекс	Литологическая характеристика пород	Глубина выработки, м
			скважина 1	20
1	4,8	Q_{IV}	суглинок делювиальный, водонепроницаемый	
2	14,0	Q_{IV}	песок аллювиальный, разнозернистый	
3	1,2	Q_{III}	глина плотная	
			скважина 4	18
1	2,4	Q_{IV}	суглинок делювиальный, водонепроницаемый	
2	12,6	Q_{IV}	песок аллювиальный, разнозернистый	
3	3,0	Q_{III}	глина плотная	
			скважина 9	15
1	1,3	Q_{IV}	суглинок делювиальный, водонепроницаемый	
2	9,6	Q_{IV}	песок аллювиальный, разнозернистый	
3	4,1	Q_{III}	глина плотная	
			Скважина 10	3
1	3,0	Q_{IV}	песок аллювиальный, разнозернистый	
			Скважина 11	10
1	6,8	Q_{IV}	песок аллювиальный, разнозернистый	
2	3,2	Q_{III}	глина плотная	

Примечание: скважина 11 намечается произвольно, на противоположном берегу, в нижнем правом углу карты на 84 горизонтали рельефа.

Список литературы

1. Гавич И. К., Лучшева А. А., Семенова-Ерофеева С. М. Сборник задач по общей гидрогеологии Уч. пос. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1985, 412 с.
2. Гореев П. В., Шемелина В. А., Шулякова О. К. Руководство к практическим занятиям по гидрогеологии: Уч. пос. для учащихся гидрогеологических специальностей геологоразведочных техникумов. М., Высш. школа, 1981, 152 с.
3. ГОСТ 25584-90. Грунты. Методы лабораторного определения коэффициента фильтрации.
4. ГОСТ 9.602-89. Сооружения подземные. Общие требования к защите от коррозии.
5. Кирюхин В. А., Коротков А. И., Павлов А. Н. Общая гидрогеология: Учебник для вузов. Л.: Недра, 1988, 359 с.
6. Методические разработки для лабораторных и практических работ по курсам «Гидрогеология» и «Инженерная геология» для специальностей 0108; 0101; 0105; и «Гидрогеология с основами инженерной геологии» для специальностей 0209; 0202; 0206. Часть 1. Свердловск, изд. СГИ, 1980, 45 с.
7. Основные положения по составлению серийных легенд государственных гидрогеологических карт масштаба 1:200000 и 1:1000000. М.: МПР РФ, 2001, 15 с.
8. СНиП 2.03.11-85. Защита строительных конструкций от коррозии.

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ

Методическое руководство
по выполнению курсовой работы дисциплины «Экономика и организация геологоразведочных работ» и экономической части ВКР специалиста для студентов геологических и геофизических специальностей

Екатеринбург
2008

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО:
Методической комиссией
инженерно-экономического
факультета
«10» 12 2007 г.
Председатель комиссии
И. А. Тяботов

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ

Методическое руководство

по выполнению курсовой работы дисциплины «Экономика и организация геологоразведочных работ» и экономической части ВКР специалиста для студентов геологических и геофизических специальностей

Издание УГГУ Екатеринбург, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью курсовой работы является практическое применение студентами знаний по курсу «Основы производственного менеджмента» при разработке проектно-сметной документации на производство геологоразведочных работ.

Основу курсовой работы составляют материалы, собранные в период производственной практики.

Проектно-сметная документация на проведение геологоразведочных работ составляется по объектам, на которые выдается геологическое задание.

Подготовка проектной документации заключается в разработке обоснованных методических подходов, технических и технологических решений, обеспечивающих достижение цели регионального геологического изучения недр, геологического изучения недр, включающего поиски и оценку месторождений полезных ископаемых, или разведки месторождений полезных ископаемых и решение поставленных геологических задач, рациональное комплексное использование и охрану недр, а также выполнение требований законодательства Российской Федерации о недрах.

В состав работы включаются следующие разделы:

а) общие сведения об объекте геологического изучения;

б) общая характеристика геологической изученности объекта;

в) методика проведения геологоразведочных работ;

г) мероприятия по охране окружающей среды;

д) сводный перечень проектируемых работ;

е) ожидаемые результаты работ и требования к получаемой геологической информации о недрах;

ж) текстовые и графические приложения;

з) список использованных источников;

и) приводится перечень коэффициентов, учитываемых в сметных расчетах:

1.) коэффициенты к заработной плате:

- районный коэффициент $К_р$;
- коэффициент за высокогорность – $К_в$;
- коэффициент за безводность – $К_б$;

- коэффициент за поиски и разведку радиоактивных полезных ископаемых – $К_{рад}$.

Общий коэффициент к заработной плате определяется по формуле

$$К_{общ} = К_{рад} (К_р + \text{дробная часть } К_в \text{ и } К_б).$$

2) коэффициенты, учитывающие транспортно-заготовительные расходы:

- к статье «Материалы»;
- к статье «Амортизация».

3) коэффициент к основным расходам, учитывающий накладные расходы;

4) коэффициент к основным и накладным расходам, учитывающий плановые накопления.

к) укрупненный расчет стоимости работ по проекту;

л) расчет единичных сметных расценок;

м) расчет сметной стоимости проектирования;

н) основные расходы на расчетную (физическую) единицу работ;

о) основные технико-экономические показатели по объекту:

- сметная стоимость работ;
- продолжительность проведения работ;
- штат сотрудников;
- средняя заработная плата.

1. ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Геологическое задание определяет цели, геологические задачи, ожидаемые результаты и сроки проведения геологоразведочных работ на объекте.

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБЪЕКТЕ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Указывается административное положение района работ.
2. Кратко освещаются природные условия, оказывающие влияние на проектируемые работы: климатические условия, характер рельефа, гидрография, степень обнаженности, залесенность, заболоченность и т. п.
3. Приводится краткая экономическая характеристика района работ, включающая в себя: сведения о наличии топливно-энергетических ресурсов, возможности набора рабочей силы, аренды помещений, наличие транспортных коммуникаций, обеспеченность местными стройматериалами и т. п.

3. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ, ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКАЯ, ГЕОХИМИЧЕСКАЯ И ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЙОНА РАБОТ

Кратко, в целях обоснования методики проведения проектируемых работ, приводятся данные по стратиграфии, тектонике, магматизму, полезным ископаемым, физическим свойствам горных пород и гидрогеологии объекта работ.

Характеризуются условия и глубина залегания полезного ископаемого, приводятся данные о морфологии, мощности рудных тел, пластов, вещественном составе и т. п. Обосновываются возможные геологические осложнения при бурении и проходке горных выработок, категории пород по буримости, категории трудности выполнения отдельных видов работ.

4. МЕТОДИКА ПРОЕКТИРУЕМЫХ РАБОТ

Обосновывается рациональный комплекс работ (исследований) по решению поставленных геологических задач. Выбираются методы, способы, виды работ и определяются их объемы.

Раздел заканчивается перечнем проектируемых работ и соответствующих им объемов, которые оформляются в табличной форме (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Виды и объемы работ

№ п/п	Наименование видов работ	Единицы измерения	Общий объем

5. ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ОРГАНИЗАЦИИ ОТДЕЛЬНЫХ ВИДОВ РАБОТ

5.1. Проектирование

Определяется состав и затраты исполнителей, необходимые для составления проектно-сметной документации, на основе действующих в геологоразведочной организации временных норм и норм ССН 1.1 (табл. 17 23) на сбор, изучение геологических материалов по району работ, написание проекта и составления смет по форме, приведенной в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Затраты труда на проектирование

Виды работ	Ед. изм.	Объем работ	Норма на ед. чел.-дн.	Затраты, труда чел.-дн.					Итого, чел.-дн.
				гл. геолог	геолог 1 кат.	техн. геолог	…	…	
Изучение фондовых материалов … … Составление текста проекта									

ИТОГО:									∑ Т

5.2. Предварительное геологическое дешифрирование материалов космо- и аэрофотосъемок

Предварительное геологическое дешифрирование материалов космо- и аэрофотосъемок выполняется в подготовительный период при геологосъемочных, поисковых и тематических работах.

Расчет затрат времени на предварительное дешифрирование материалов космо- и аэрофотосъемок выполняется в соответствии с ССН вып. 1 табл. 23 25, в зависимости от масштаба работ и категории сложности геологического строения. Нормы основных расходов – СНОР, вып. 1, ч. 1, табл. 3.

5.3.Разведочное бурение

Исходя из конкретных геологических задач и требований к геологической информации, определяется место заложения скважин, траектория, интервалы отбора керна и минимально допустимый процент его выхода по интервалам.

Обосновывается выбор типа бурового станка, времени, способа бурения, конструкции скважины и технологии бурения.

Расчеты затрат времени на бурение

Расчеты затрат времени на бурение скважин и работы, сопутствующие бурению, осуществляется на основе Сборника сметных норм на геологоразведочные работы ССН-93 выпуск 5 «Разведочное бурение».

Они выполняются в следующей последовательности:

1. Составляется геолого-техническая карта по группам скважин. Пример ее составления представлен ниже.

Пример: геолого-техническая карта скважины

На основе геолого-технической карты в последующем определяются средний диаметр скважин, средняя глубина, виды и способы бурения, объемы бурения по категориям пород, объемы крепления, тип породоразрушающего инструмента и др. необходимые для расчета затрат времени условия бурения, табл. 5.2.

2. Для последующего определения норм времени на бурение определяется группа скважин по номинальной глубине (табл. 3 ССН-93 вып. 5) и максимальная и минимальная средняя глубина скважин по данной группе. Например, номинальная глубина 0 – 25 м. Норма времени по данной группе скважин будет определяться для скважин, имеющих среднюю глубину до 37,5 (25 + 25 : 2). Номинальная глубина 0 – 100 м. Норма времени по данной группе скважин будет определяться для скважин со средней глубиной от 37,6 149 м (100+ 100 : 2 -1). Номинальная глубина 0 – 200 м. Норма времени по данной группе скважин будет определяться для скважин, имеющих среднюю глубину от 150 м 249 м (200 + (200-100) : 2 –1), и т. д.

Таблица 5.2

Угол наклона скважины … град. Станок …

Конструкция скважины, мм	Интервал бурения, м	Мощность слоя, м	Категория пород по буримости	Способ бурения	Вид промывочной жидкости	Примечание
151	70	70	II	Бескерновый	Глинистый раствор	Сложные условия выхода керна в интервале 250 280, 300 312, 578 648.
127	110	40	III			
	200	90	IV			
	250	50	V			
	280	30	IV	Колонковое		Сильно трещиноватые породы в интервале 578 – 647 м, в остальных интервалах слаботрещиноватые Применяются бурильные трубы в интервале 0 – 312 м МЗ-50, в интервале 312 – 687 м – ниппельные диаметром 54 мм
112	300	20	V			
89	312	12	V			
76	428	116	VIII	Алмазное	Водоэмульс. р-р	
59	578	150	X			
	648	70	X			

4. На основе пунктов 1 и 2 производится группировка скважин по геолого-техническим условиям бурения в соответствии с табл. 5.3.

Таблица 5.3

Группировка скважин по геолого-техническим условиям бурения

Назначение скважин	Вид бурения	Способ бурения	Группа скважин по номинальной глубине	Средняя глубина скважин, м	Средний диаметр скважин, мм	Угол заложения скважин, град	Количество скважин в группе	Объем бурения, м		Объем крепления, м	Привод станка и источник энергии
								с отбором керна	без отбора керна		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

В гр. 1 указывается назначение скважин: разведочные, сейсморазведочные, гидрогеологические и пр.

В гр. 2 указывается вид бурения: вращательное стационарными или самоходными станками с поверхности земли или из подземных выработок, ударно-канатное.

В гр. 3 указывается способ бурения: колонковое, бескерновое, снарядами ССК, КССК, гидротранспортом керна, медленно-вращательное и т. п.

В гр. 4 указывается группа скважин по номинальной глубине.

В гр. 5 указывается средняя глубина скважин. Отнесение скважин по средней глубине к определенной группе скважин производится с учетом пункта 2 данного пособия.

4. Производится распределение объемов бурения по категориям пород в соответствии с геолого-техническими условиями согласно табл. 5.4.

Таблица 5.4

Распределение объемов бурения по интервалам бурения и категориям пород

Описание горных пород	Категория пород	Группа скважин …			Группа скважин …		
		интервал бурения от…до	объем бурения на одну скв., м	объем бурения на все скв., м	интервал бурения от…до	объем бурения на одну скв., м	объем бурения на все скв., м

5. На основе табл. 5.3 5.4 настоящего учебно- методического пособия производится распределение объемов бурения по категориям пород и условиям бурения в соответствии с табл. 5.5.

6. Определяются объемы работ, сопутствующие бурению скважин в соответствии с табл. 5.6.

7. Определяются затраты времени на бурение скважин. Расчет затрат времени производится раздельно по группам скважин, а внутри каждой группы по способам бурения (с отбором или без отбора керна, с гидротранспортом керна, с ССК, КССК, твердосплавное, алмазное и т. п.) и условиям бурения.

Таблица 5.5

Распределение объемов бурения по категориям пород и условиям бурения

<table>
<tr><td rowspan="3">Условия бурения скважин</td><td colspan="5">Объемы бурения по категориям пород, м</td></tr>
<tr><td colspan="5">категории пород по буримости</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Скважины … группы</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Бурение с отбором керна</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>То же в сложных условиях отбора керна</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Бурение без отбора керна</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Скважины … группы</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Бурение с отбором керна</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>То же в сложных условиях отбора керна</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Бурение без отбора керна</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Таблица 5.6

Объемы вспомогательных и сопутствующих бурению работ

<table>
<tr><td rowspan="3">Виды работ</td><td colspan="4">Объемы вспомогательных и сопутствующих бурению работ по группам скважин</td></tr>
<tr><td colspan="2">группа скважин …</td><td colspan="2">группа скважин …</td></tr>
<tr><td>на одну скважину</td><td>на все скважины группы</td><td>на одну скважину</td><td>на все скважины группы</td></tr>
<tr><td>1. Промывка скважин перед креплением, промывка</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Крепление скважин, м</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Нормы времени на бурение скважин в ССН-93 вып. 5 приведены на нормализованные условия. В случае отклонения фактических условий от нормализованных используются поправочные коэффициенты. В случае, если необходимо применить несколько коэффициентов, общий поправочный коэффициент определяется по формуле

$$К_{общ} = К_1 \cdot К_2 \cdot \; ..... \cdot К_п,$$

где $К_1$, $К_2$, $К_п$ – поправочные коэффициенты на отклонение фактических условий бурения от нормализованных (определяются по соответствующим таблицам ССН-93 вып. 5).

Расчеты затрат времени приводится в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Расчет затрат времени на бурение скважин

Номера таблиц и норм ССН-93 вып. 5	Способ бурения	Диаметр бурения, мм	Категория пород	Объем бурения, м	Норма времени, ст-см/м	Поправочные коэффициенты			Затраты времени на весь объем с учетом поправочных коэф-ов, ст-см
						$К_1$	$К_2$	$К_{общ}$	

8. Определяются затраты времени на работы, сопутствующие бурению скважин, в соответствии с табл. 5.8.

Затраты времени буровых бригад, связанных непосредственно с проведением геофизических исследований в скважинах, определяются по нормам ССН-93 вып. 3 на эти исследования, исходя из запроектированного их объема.

Таблица 5.8

Затраты времени на вспомогательные работы, сопутствующие бурению скважин

Виды работ	Ед-ца изм.	Объем работ	Норма времени в ст-см	Поправочные коэффициенты			Затраты времени на весь объем работ с учетом поправочных коэф-ов	Номера табл. ССН-93 вып. 5
				$К_1$	$К_2$	$К_{общ.}$		
1. Крепление скважин: 1.1. Промывка скважин 1.2. Спуск обсадных труб со ср. диаметром до 132 мм ниппельное соединение: - в скважине	1 промывк. 100 м 100 м	16	0,07	1,1		1,1	1,23	64

в трубах большего диаметра								

9. Производится расчет затрат времени на монтаж, демонтаж и перемещение буровых установок в соответствии с табл. 5.9.

Таблица 5.9

Расчет затрат времени на монтаж, демонтаж и перемещение буровых установок

Наименование работ	Количество перевозок буровых установок, шт.	Норма времени на перевозку, ст-см	Затраты времени на все перевозки, ст-см	Номера таблиц ССН-93 вып. 5
1. Монтаж – демонтаж и перемещение буровых установок (указать условия перевозки) до 1 км: 1.1. Летом 1.2. Зимой (К = …) 2. Перевозка установок на расстояние сверх 1 км: 2.1. Летом 2.2. Зимой (К …)				
Итого:	**Х**		**Х**	

Расчет затрат времени на монтаж, демонтаж и перемещение буровых установок производится раздельно для летнего и зимнего периода при расстоянии перемещения до 1 км и свыше 1 км.

Количество перемещений не всегда совпадает с количеством скважин. При определении их количества необходимо учитывать возможность первичного монтажа буровых установок в начале работы на объекте и окончательного демонтажа при завершении работ на объекте.

Норма времени на одно перемещение зимой определится по формуле

$$Н_{вр.з.} = Н_{вр.табл.} \cdot К,$$

где К поправочный коэффициент на зимние условия, принимаемый для соответствующей температурной зоны по табл. 208 или табл. 209 ССН-93 вып. 5.

Норма времени на одно перемещение буровой установки на расстояние свыше 1 км определяются по формуле

$$Н_{вр.} = Н_{вр.табл}(L - 1),$$

где $Н_{вр.}$ затраты времени на одно перемещение буровой установки на расстояние свыше 1 км; $Н_{вр.табл.}$ – норма времени на одно перемещение буровой установки на каждый последующий километр свыше одного по ССН-93 вып. 5; L расстояние перемещения буровой установки фактическое, км.

10. Определяется количество станко-смен, приходящихся на зимний период, для последующего определения зимнего удорожания производства буровых работ, которое включает в себя дополнительные затраты, связанные с отоплением буровой, обогревом рабочих, расчисткой снега у стеллажей и подъездных площадок у вышек по формуле

$$Т_{зп} = Т_р \frac{Т_з}{Т_к},$$

где $Т_{зп}$ – количество станко-смен, приходящихся на зимний период; $Т_з$ – продолжительность работы в зимний период в месяцах, которая определяется исходя из календарного графика производства работ и начала и окончания зимнего сезона в районе работ (принимается по табл. ССН-93 вып. 5);
$Т_к$ – календарный срок выполнения буровых работ, мес.; $Т_р$ – расчетное количество станко-смен

$$Т_р = Т_б + Т_{всп} + Т_м,$$

где $Т_б$ расчетное количество станко-смен на собственно бурение; $Т_{всп}$ работы вспомогательные, сопутствующие бурению; $Т_м$ монтаж, демонтаж и перемещение буровых установок.

11. Определяется расчетная производительность буровых установок за месяц, для чего:

- определяется число рабочих смен в месяц: $Т_{см} = \frac{Д \cdot Ч}{П_{рсм}}$,

где Д – число рабочих суток в месяц (при непрерывном режиме работы принимается 30 суток); Ч – число часов работы в сутки (при непрерывном режиме работы 24 часа); $П_{рсм}$ – длительность смены в часах (7 час. на дневной поверхности, 6 час. на подземных работах).

При непрерывном режиме работы: $Т_{см} = \frac{30 \cdot 24}{7} = 102{,}9$ см.

- определяется расчетная производительность на бурении скважин:

$$П_{расч.} = \frac{М}{Т_р} Т_{см},$$

где М – объем бурения, м;

- определяется проектная производительность на бурении скважин:

$$П_{проект} = П_{расч.}(\frac{П_{факт.}}{П_{расч.}} + ΔП),\ при\ П_{факт.} > П_{расч.}$$

$$П_{проект} = П_{расч.}(1 + ΔП),\ при\ П_{факт.} < П_{расч.},$$

где $П_{факт.}$ – фактическая производительность, достигнутая при бурении скважин в аналогичных условиях, м/ст-см; ΔП – повышение производительности на бурении скважин за счет внедрения специально разработанных организационно-технических мероприятий (при курсовом проектировании принимать в размере 0,02 – 0,05 (рост производительности 2 5 %).

- определяется количество одновременно работающих станков

$$n = М : П_{проект} \cdot Т_к \cdot К_р,$$

где $К_р$ – коэффициент резерва (1,2 – 1,3); М – объем бурения, м;
$Т_к$ – календарный срок выполнения буровых работ, мес.; $П_{проект}$ проектная производительность на бурении скважин.

12. Определяется тип и состав буровой бригады, продолжительность рабочей смены.

13. При непрерывном режиме работы составляется график выходов буровых бригад на работу.

14. Составляется сводная таблица показателей по буровым работам (табл. 5.10).

Таблица 5.10

Сводная таблица показателей по буровым работам

Показатели	Единица измерения	Группа скважин	
		…	…
1. Средняя глубина бурения	м		
2. Средний диаметр скважин	мм		
3. Средневзвешенная категория пород			
4. Способ бурения			
5. Количество скважин	шт.		
6. Объем бурения всего	м		
7. Удельный вес объемов бурения в сложных условиях	%		
8. Затраты времени на бурение	ст-см		
9. Затраты времени на вспомогательные работы, сопутствующие бурению	ст-см		
10. Затраты времени на монтаж, демонтаж и	ст-см		

перемещение буровых установок			
11. Производительность на бурении скважин (коммерческая скорость)	м/ст-мес.		
12. Проектируемый выход керна	%		

Сметная стоимость буровых работ определяется в сметной части курсовой работы (дипломного проекта) исходя из норм основных расходов на расчетную единицу, приведенных в СНОР-93 вып. 5 с учетом поправочных коэффициентов (ф. СМ-5) и рассчитанных затрат времени.

Сметная стоимость вспомогательных работ, сопутствующих бурению, определяется по нормам основных расходов на расчетную единицу бурения скважин, приведенных в СНОР-93 вып. 5 с учетом поправочных коэффициентов (ф. СМ-5) и рассчитанных затрат времени.

Сметная стоимость монтажа демонтажа и перевозок буровых установок определяется по нормам основных расходов на расчетную единицу, приведенных в СНОР-93 вып. 5, с учетом поправочных коэффициентов (ф. СМ-5) и количества перевозок на расстояние до 1 км и свыше 1 км.

5.4. Горно-разведочные работы

Исходя из конкретных геологических задач и требований, предъявляемых к геологической информации, определяется тип горных выработок, их сечение, места заложения, способы проходки и объемы горно-разведочных работ, а также объемы вспомогательных и сопутствующих работ.

Проектирование горно-разведочных работ производится в следующей последовательности:

1. Приводится перечень горно-разведочных выработок, их параметры (сечение, глубина, вид крепи и т. п.). Дается характеристика горнотехническим условиям проходки (вечная мерзлота, налипание породы на инструмент, капеж и т. п.), определяются объемы работ, а также объемы и условия проведения вспомогательных и сопутствующих работ (водоотлив, вентиляция, шахтный подъем и т. п.).

2. Производится расчет затрат времени на горнопроходческие, вспомогательные и сопутствующие работы (табл. 5.11).

ССН-93 вып. 4 служит для определения норм времени на проходку принятой единицы измерения горных выработок и выполнение принятой единицы измерения вспомогательных и сопутствующих работ ***в часах одним исполнителем основного звена*** рабочих.

Таблица 5.11

Объемы проектируемых работ и горнотехнические условия их проведения

Тип горной выработки, виды работ и способы их выполнения	Параметры горной выработки		Категория пород	Объем работ	Горнотехнические условия выполнения работ
	сечение	глубина			
1. Шурфы					
1.1. Проходка шурфов с рыхлением отбойным молотком и выдачей горной массы в бадьях воротком	0,8 кв. м	0 5	II	50 м	С налипанием породы на инструмент
1.2. Крепление шурфов деревянной венцовой крепью на стойках с затяжкой боков и забутовкой пустот. Шаг венцов 1,2 м	0,8 кв. м	0 5		50 м	
1.3. Засыпка шурфов вручную					Перекидка пород до 3 м
2. Канавы					
2.1. Проходка канав вручную без предварительного рыхления пород		До 3 м	II	200 куб. м	Без налипания породы на инструмент
2.2. Крепление канав сплошное		До 3 м	II	300 кв. м	В сыпучих породах I II категории
2.3. Разборка крепи		До 3 м	II	300 кв. м	В сыпучих породах I II категории
2.4. Засыпка канав бульдозером					Расстояние перемещения грунта до 5 м
…	…	…	…	…	…

Исключение составляют отдельные случаи при проходке шурфов и канав, где нормы времени даны в ***звено-часах*** на принятую единицу измерения работ (см. п. 38 ССН-93 вып. 4), табл. 5.12.

СНОР-93 вып. 4 используется для определения норм основных расходов в ***рублях на работу одного звена в одну смену (звено-смену)*** при производстве большинства горнопроходческих, вспомогательных и сопутствующих работ. Однако по отдельным видам работ в СНОР-93 вып. 4 нормы основных расходов даются в рублях на иные единицы измерения работ (машино-смена, эстакада и т. п.).

Таблица 5.12

Расчет затрат времени на горно-разведочные работы

Тип горной выработки, виды работ и способы их выполнения	Категория пород	Объемы работ	Норма времени, ч/измеритель	Поправочные коэффициенты			Время на весь объем*), звено-смены	Номера табл. ССН-93 вып. 4
				$К_1$	$К_2$	$К_{общ}$		

Примечание.

* Определение стоимости выполнения горно-разведочных работ производится с использованием сборника сметных норм на геологоразведочные работы ССН-93 вып. 4 и сборника норм основных расходов на геологоразведочные работы СНОР-93 вып. 4.

Для пересчета затрат времени, выраженных ***в часах, в звено-сменах*** могут быть использованы следующие формулы:

- норма времени дана в часах работы одного исполнителя основного звена на единицу работы

$$Н_{зв\text{-}см} = Н_ч \cdot К_{чд} : Т,$$

где $Н_{зв\text{-}см}$ – норма времени в звено-сменах; $Н_ч$ – норма времени в часах работы одного исполнителя основного звена на единицу работы (принимается по табл. ССН-93 вып. 4 на соответствующий вид работ); $К_{чд}$ – норма затрат труда на одну смену рабочих основного звена в человеко-днях (принимается по табл. ССН-93 вып. 4 на соответствующий вид работ); Т – продолжительность смены в часах;

- нормы времени даны в звено-часах на принятую единицу измерения работ

$$Н_{зв\text{-}см} = \frac{Н_ч}{Т}.$$

3. При проходке подземных горных выработок определяется необходимое количество машино-смен работы вентиляторных установок, шахтного

подъема, электровозного шахтного транспорта, шахтного водоотлива исходя из объема работ количества и производительности выбранного оборудования.

4. Проектируется организация труда на горно-разведочных работах: обосновывается тип производственных бригад, режим их работы. При работе более чем в одну смену составляется график выходов рабочих на работу. При проектировании подземных горнопроходческих работ рассчитываются графики цикличности.

5. Количество одновременно проходимых выработок, обеспечивающих выполнение геологического задания в срок, определяется по формуле:

$$К_{заб} = Т_н : Т_к \cdot К_{см},$$

где $К_{заб}$ количество одновременно проходимых выработок; $Т_н$ – рассчитанное количество звено-смен; $Т_к$ – срок, отведенный на горно-разведочные работы по проекту в календарных днях; $К_{см}$ – количество рабочих смен в сутки.

6. Рассчитывается скорость (темп) проходки горных выработок, м/мес;

$$А = \frac{М}{Т_р} Т_{см} ,$$

где М – длина горной выработки, м; $Т_р$ – затраты времени на проходку и крепление горной выработки, звено-смен; $Т_{см}$ – количество рабочих смен в месяц, смен.

$$Т_{см} = Д/t \cdot R ,$$

где Д число дней в месяце, дни; t продолжительность смены, час; R – число рабочих часов в сутках, час.

7. Сметная стоимость горно-разведочных работ определяется в сметной части курсовой работы (дипломного проекта) исходя из норм основных расходов на расчетную единицу, приведенных в СНОР-93 вып. 4, с учетом поправочных коэффициентов (ф. СМ-5) и рассчитанных затрат времени.

5.5. Топографо-геодезические работы

Проектирование топографо-геодезических работ осуществляется в соответствии с ССН вып. 9. Для выбора и использования сметных норм и норм затрат труда обосновываются: категория трудности местности; категория трудности рубки леса; категория твердости пород древесины; коэффициент на заболоченность и глубину снежного покрова и др. показатели, отражаемые в табл. 5.13.

Таблица 5.13

Расчет затрат времени на проведение топографо-геодезических работ (ССН, вып. 9)

№ п/п	Вид работ	Категория трудности	Объем работ	Норма времени, отр. см.	Поправочный коэф.	Итого затрат времени, отр. см.	Нормативный документ, табл.
	ИТОГО:						

5.6. Опробование

Проектирование работ по опробованию начинается с характеристики условий их проведения и выделения объемов, выполняемых в ненормализованных условиях, табл. 5.14.

Таблица 5.14

Объемы проектируемых работ и условия их проведения

Виды опробования	Способ работ	Тип выработки	Сечение борозды	Объемы работ по категориям пород			
				II	III	IV	…

Расчет затрат времени на отбор и обработку проб определяется по ССН, вып.1, ч. 5 и сводится в табл. 5.15.

Таблица 5.15

Расчет затрат времени на отбор проб, ССН, вып. 1, ч. 5

№ п/п	Вид работ	Ед. изм.	Категория пород	Объем работ	Норма времени, бр. см.	Всего затрат времени, бр.-см.	Нормативный документ, табл.

Для расчета затрат времени на обработку проб составляется таблица объемов и условий проведения работ, табл. 5.16.

Таблица 5.16

Объемы проектируемых работ и условия обработки проб

Тип установки	Способ работ	Масса пробы, кг	Минимальный размер частиц, мм	Объемы по категориям пород					Стадийность измельчения
				…	…	…	…	…	

На основе данных табл. 5.17 рассчитываются затраты времени на обработку проб (табл. 5.20).

Таблица 5.17

Расчет затрат времени на обработку проб

Вид обработки проб	Способ работ	Начальный вес пробы, кг	Объем	Норма времени	Поправочный коэффициент			Норма с учетом поправочного коэф.	Всего затрат времени, бр.-см.	Нормативный документ, табл.
					K_1	K_2	$K_{общ.}$			

5.7. Геофизические работы

5.7.1. Полевые геофизические работы

При обосновании и описании работ с применением методов электроразведки в проект включаются следующие сведения и данные:

а) сведения об электрических свойствах пород региона, полученные по ранее выполненным исследованиям;

б) обоснование сети наблюдений, типов, схем и размеров установок, условий заземления питающих электродов и числа измеряемых параметров, порядка контроля за качеством с указанием необходимого объема повторных и контрольных измерений.

При обосновании и описании работ с применением методов гравиразведки и магниторазведки в проект включаются следующие сведения и данные:

а) обоснование и описание методики наблюдений на опорных и рядовых пунктах при работе гравиметрами;

б) обоснование системы наблюдений при работе вариометрами и градиентометрами;

в) информация о сгущении сети пунктов наблюдений на участках, требующих детализации;

г) данные об оценке необходимости введения поправки за влияние рельефа местности и информация о выбранном радиусе области учета влияния рельефа;

д) информация о перекрытиях с соседними съемками, информация о проценте независимых контрольных наблюдений, проценте дополнительных пунктов наблюдений для оценки погрешности интерполяции карты, информация об объеме работ в квадратных километрах, координатных пунктах и физических наблюдениях, длине профилей, подлежащих исследованию;

е) сведения о порядке и сроках выполнения работ;

ж) данные об обосновании категории местности и выборе вида транспорта, наиболее обеспечивающего необходимую точность работ;

з) описание работ по определению плотности пород исследуемого района;

и) информация о выборе проектной точности съемки (среднеквадратическая погрешность определения аномалий силы тяжести) в зависимости от интенсивности предполагаемых или исследуемых аномалий, а также от условий работ и заданного масштаба съемки;

к) обоснование густоты сети пунктов наблюдений в зависимости от задач съемки, размеров и интенсивности ожидаемых аномалий и выбранного сечения изоаномал отчетной карты, при этом густота сети должна обеспечивать выявление искомых аномалий силы тяжести и ее производных, для проведения работ по поискам и разведке геологических объектов.

При обосновании и описании аэрогеофизических работ в проект включаются следующие сведения и данные:

а) обоснование и описание работ в предполевой период, связанных с анализом имеющейся геологической информации о недрах и определением участков проведения работ;

б) обоснование и описание выбранного комплекса полевых работ (аэромагнитная съемка, аэрогамма-спектрометрическая съемка, аэроэлектроразведочная съемка, комплексная аэрогеофизическая съемка, радиогедезическая привязка маршрутов, аэрофотопривязка маршрутов или иных методов, предусмотренных проектом);

в) обоснование и описание комплекса камеральных работ, включая обработку полученной геологической информации о недрах и составления картографических и отчетных материалов.

При проектировании полевых геофизических исследований с использованием методов гравиразведки, магниторазведки, электроразведки, радиометрии, а также аэрогеофизических методов производится расчет затрат времени и затрат труда по форме, пример которой показан в табл. 5.18.

Для этого по соответствующим частям ССН находятся нормы времени на единицу объема работ, обосновываются и описываются все условия, в соответствии с которыми выбраны нормы времени (параметры сети, категория трудности, способ передвижения, тип и число приборов, схема установки электродов, расстояние подлета к участку работ и т. д.).

При проведении работ в ненормализованных условиях в соответствии с ССН обосновываются и приводятся поправочные коэффициенты к нормам времени.

При одновременном использовании нескольких коэффициентов, в результате их перемножения, определяется общий поправочный коэффициент.

Суммарные затраты времени определяются путем перемножения объемов работ на норму времени и на поправочные коэффициенты (табл 5.18, гр. 7 = гр. 3 · гр. 5 · гр. 6). К ним добавляются затраты времени для проверки и профилактического обслуживания аппаратуры и оборудования в полевой период. Затраты времени на профилактику зависят от методов геофизических исследований и типа приборов. Нормируются ССН и составляют от одной до трех отрядо-смен на один месяц полевых работ (поправочные коэффициенты к затратам времени составляют соответственно 1,04; 1,085; 1,13).

Затраты труда в человеко-днях определяются путем перемножения норм затрат труда на общее количество отрядо-смен (табл. 5.18, гр.10 = гр.8 × × гр. 9). Нормы затрат труда берутся из соответствующих таблиц ССН.

Таблица 5.18

Расчет затрат времени и затрат труда на геофизические работы

Вид и методика работ, аппаратура, способы и условия производства работ (категория трудности, сеть наблюдений, способ передвижения, период проведения работ и т. д.)	Единицы измерения объема работ	Проектный объем работ по условиям производства	Нормативный документ, номер табл. и нормы	Норма времени на ед-цу объема работ, отрядо-см.	Поправочный коэффициент	Затраты времени в отрядо-сменах		Норма затрат труда	Затраты труда в чел.-днях	Количество координатных точек
						без профилактики	всего, с учетом профилактики			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1. Гравиразведка 1.1. Рядовая гравиметровая съемка по сети 100х50 м с одним наземным термостатированным гравиметром. Передвижение пешее, IV категория трудности, в весенний период	1кв. км	100	ССН, вып. 3, ч. 3, табл.7, норма 138, граф. 6.	3,28	1,06	347,68	377,23	ССН, вып. 3, ч. 3, табл. 12 граф. 5 5,25	1980,46	20000

Окончание табл. 5.21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.2. Разбивка опорной гравиметровой сети 2000х500 м двумя термостатированными гравиметрами. Пердвижение пешее, IV категория трудности, со 100 % повтором, зимний период с температурой до –20 ^{0}С	10 кв. км	10	ССН, вып. 3, ч. 3, табл. 7, норма 195, граф. 6	0,62	1,18 ·2 = = 2,36	14,63	15,87	ССН, вып. 3, ч. 3, табл. 12 граф. 6 6,75	107,12	100
Итого гравиразведка						362,31	393,10		2087,58	20100
2. Магниторазведка Наземная съемка по сети 100х25 м магнитометром типа ММ-60. Пердвижение пешее, IV категория трудности, зимний период с температурой до –20^0 С	1 кв. км	60	ССН, вып. 3, ч. 3, табл. 29, норма 56, гр. 12	1,68	1,18	118,94	129,05	ССН, вып. 3, ч. 3, табл. 32 граф. 3 4,25	548,46	24000
3. Электроразведка и т. д.										

В табл. 5.18 рассчитывается также проектное суммарное количество координатных точек. Для этого объемы работ умножаются на количество координатных точек в единице объема работ (приводятся в соответствующих таблицах норм времени ССН). Общее количество координатных точек необходимо для расчета затрат времени на камеральные работы.

Если отработка площади проектируется по участкам с нескольких баз, то по нормам ССН определяются затраты времени на переезды отряда внутри района работ (перебазировка с одного участка работ на другой), исходя из схемы переездов. При этом необходимо учитывать, что нормы времени на переезды (перебазировку отряда) не включают затраты времени по ежедневной доставке производственного персонала к месту проведения геофизических работ на профиль и обратно. Время на эти цели предусмотрено в укрупненных нормах времени на соответствующие виды геофизических исследований, а расходы учтены в нормах основных расходов (СНОР).

Далее рассматриваются вопросы организации различных видов полевых работ: количество отрядов и их численность, календарные сроки выполнения полевых работ.

Для этого суммарные затраты времени и труда увязываются с продолжительностью полевых работ и штатами производственных подразделений (отряд, партия), выполняющих данные виды работ, по формулам

$$N = \text{Т}_{\text{общ.}} / (t \cdot d \cdot \text{К}_{\text{в.н.}}),$$

где N – количество геофизических отрядов, необходимых для выполнения работ; $\text{Т}_{\text{общ.}}$ – общие затраты времени на геофизические исследования соответствующим методом, отрядо-смены; t – количество месяцев работы по проекту; d – количество смен (дней) в месяце (25,4 – при односменном режиме работы); $\text{К}_{\text{в.н.}}$ – коэффициент выполнения норм выработки, принимаемый от 1,05 до 1,20.

$$\text{Ч} = \text{З}_{\text{т}}/\text{Т}_{\text{ф}}\,\text{К}_{\text{в.н.}}\ ,$$

где Ч – численность трудящихся, занятых на выполнении геофизических исследований; $\text{З}_{\text{т}}$ – суммарные затраты труда, чел.-дни; $\text{Т}_{\text{ф}}$ – фонд времени одного работающего за рассматриваемый период, дни;

$$\text{Т}_{\text{ф}} = (\text{Т}_{\text{к}}\ \ \text{Т}_{\text{пр.}}\ \ \text{Т}_{\text{вых.}}\ \ \text{Т}_{\text{отп.}})0{,}96\ ,$$

где $\text{Т}_{\text{к}}$ – календарные сроки выполнения запланированного объема работ, дни; $\text{Т}_{\text{пр.}}$ – число праздничных дней за рассматриваемый период; $\text{Т}_{\text{вых.}}$ – число выходных дней; $\text{Т}_{\text{отп.}}$ – число дней отпуска (по два дня на один месяц работы); 0,96 – коэффициент, учитывающий невыходы на работу по уважительной причине.

Как правило, по приведенным формулам рассчитываются количество геофизических отрядов и численность трудящихся, исходя из заданных сроков выполнения работ. При этом следует учитывать, что под геофизическим отрядом понимается первичное производственное подразделение, организуемое для выполнения работ одним из геофизических методов с помощью одного прибора, станции или комплекта аппаратуры. Таким образом, при расчете количества отрядов фактически определяется необходимое количество приборов или комплектов аппаратуры для выполнения запроектированного объема работ в заданные сроки. Возможны и обратные расчеты, т. е. уточнение календарных сроков работ, исходя из существующих штатов и имеющейся аппаратуры в геофизической организации.

5.7.2. Геофизические исследования в скважинах

Суммарные затраты времени на геофизические исследования в скважинах ($T_{общ.}$) определяются по ССН, выпуск 3, часть 5 (табл. 5.19) и *складываются из трех основных элементов:*

затраты времени на собственно геофизические исследования в скважинах в отрядо-сменах ($T_{гис.}$);

затраты времени в отрядо-сменах на выезды каротажного отряда ($T_в$);

сверхнормативные затраты времени при выполнении каротажных работ, независящие от каротажного отряда (осложнения в исследованиях из-за технического состояния скважин, неравномерном предъявлении скважин под ГИС, осложнениях с транспортировкой каротажного отряда и т. д.), ($T_н$).

Таблица 5.19

Проектные данные, комплекс и условия выполнения ГИС

Средняя глубина скважин,м	Число скважин	Число выездов		Комплекс общих исследований, М1:500(200)	Комплекс детализационных исследований, М1:50(20)	Интервал детализации, м	Глубина интервала детализации, м
		на 1 скв.	на группу скв.				
1	2	3	4	5	6	7	8

Затраты времени в отрядо-сменах на собственно геофизические исследования определяются исходя из установленных проектом комплекса и объема общих исследований в масштабе 1:500 (1:200), комплекса и объема детализационных исследований в масштабах 1:200, 1:50, 1:20, количества отбираемых образцов пород, средней глубины скважины, среднего числа скважин, с учетом поправок за наклон скважин и температуру.

В тех случаях, когда по комплексу исследований, средней глубине скважин или числу выездов скважины на объекте образуют отдельные группы, затраты времени определяются раздельно для каждой группы и затем суммируются.

В соответствии с назначением скважин, установленными проектом, средними их глубинами, средним числом выездов на скважину определяются затраты времени на выполнение основного комплекса исследований.

К затратам времени по основному комплексу исследований добавляется время на выполнение остальных, предусмотренных проектом видов общих исследований.

Таблица 5.20

Расчет затрат времени на ГИС, отр. см.

Виды исследований и операции	Нормативный документ, номер табл., номер строки	Средняя глубина скважины, м	
1	2	3	4
1. Исследование масштаба: М1:500(200): 1.1. Основной комплекс: - один зонд КС,ГК - число единиц на скважину, м - поправочный коэффициент - число отрядо-смен на 1 скв. 1.2………………………………………. 2. Детализированные исследования М1:50(20): 2.1 Метод МЭП - норма времени - число единиц на скважину, м - поправочный коэффициент - число отрядо-смен на 1 скв. 2.2………………………………………	табл. 13,н.12.3 табл. 1,н,2.1 табл. 16,н.23.4		
Итого затрат времени на 1 скв.			
Итого затрат времени на группу скв.			
Всего затрат времени, отр. см:			

Затраты времени на виды (методы) работ, не вошедшие в основной комплекс, либо входящие в него, но не предусматриваемые проектом, определяются по таблицам нормативов на дополнительные исследования (ССН, вып. 3, часть 5, таблицы № 7 8, 13 14). При этом нормы времени на выполнение основного комплекса соответственно увеличиваются или уменьшаются на величину этих затрат.

Суммарные затраты времени на собственно геофизические исследования ($Т_{гис}$), т. е. на выполнение общих и детализационных исследований в одной скважине средней глубины, умножаются на общее число запроектированных скважин или на число скважин в данной группе, а также на поправочный коэффициент за эталонирование и профилактику аппаратуры, в зависимости от выполняемого комплекса работ: для методов КС, ПС, ГК, ГГК-П, кавернометрия – 1,085, те же и ядерно-физические методы – 1,134, при выполнении одного метода – 1,0.

Затраты времени на выезды ($Т_в$) определяются по нормам табл. 6 в соответствии с предусмотренными проектом средними расстояниями до скважин, средним числом выездов на скважины, видом транспорта и группы дорог. Если по средним расстояниям до скважин, числу выездов или условиям транспортировки скважины на обслуживаемых партией объектах образуют отдельные группы, затраты времени на выезды определяются раздельно для каждой группы и потом суммируются.

Суммарные затраты времени в отрядо-сменах определяются как частное от деления затрат времени на выполнение общих и детализационных исследований в скважинах, а также затрат времени на выезды – на предусмотренный проектом суммарный поправочный коэффициент на отклонение от нормализованных условий $К_н$:

$$Т_{общ.} = \frac{Т_{гис} + Т_в}{К_н}.$$

Коэффициент $К_н$ определяется в соответствии с параметром «а» для одного отряда или «А» для нескольких отрядов по табл. 5 (ССН, вып. 3, часть 5), в зависимости от удельного веса выездов, т. е. отношения $Т_в$ к $Т_{гис}$ + + $Т_в$, %. Значение параметра «а» и «А» рассчитывается как отношение $Т_{гис}$ + + $Т_в$ к календарному (годовому) фонду рабочего времени (305 отр-см.). Параметр «а», рассчитанный для одного отряда, является одновременно и коэффициентом $К_н$. Значение параметра «А» определяется как сумма значений параметра «а» по объектам работ.

Табличные формы исходных данных и пример расчета затрат времени на геофизические исследования в скважинах приведены в главе 3 (ССН, вып. 3, часть 5).

5.7.3 Полевые сейсморазведочные работы

При обосновании и описании методики, технологии и организации *полевых сейсморазведочных работ в проект включаются следующие сведения и данные:*

а) сведения о стратиграфической привязке отражающих горизонтов, структурно-тектонических параметрах площади, верхней части разреза и обобщенной глубинной модели и др. сведения о сейсмогеологических характеристиках площади, типах, параметрах и глубинах залегания перспективных объектов, об условиях выполнения работ на поверхности площади, а также данные о суммарных геолого-геофизических и сейсмических разрезах в случае, если ранее на объекте проводились геологоразведочные работы;

б) обоснование плотности сети профилей (расстояния между профилями), необходимой разрешающей способности метода исследований в конкретных условиях, характеристики посылаемого сейсмического сигнала, системы наблюдений, схемы отработки площади, взаимного расположения на площади пунктов возбуждения и пунктов регистрации, количества активных каналов, схемы расстановки сейсмоприемников, расстояния между ними по линии перпендикулярно линии наблюдения, расстояния между источниками по линии и перпендикулярно линии наблюдения, степени перекрытия (кратности прослеживания) максимального удаления между источником и приемником, расстояния между центрами групп сейсмоприемников, типа группирования сейсмоприемников, интервалов между пунктами возбуждения, длительности и частоты регистрации, дискретности записи, порядка изучения верхней части разреза и учета влияния грунтовых вод, выветривания и ее параметров и другие опытные работы;

в) описание комплекса работ по последовательности и способам обработки и интерпретации полевых материалов, вспомогательных работ по подготовке условий для полевых работ, топографо-геодезического обеспечения, а для работ, выполняемых по государственному контракту или по государственному заданию, также описание порядка организации сейсморазведочной партии со специализированными отрядами;

г) обоснование типов, параметров, вида и количества источников возбуждения упругих колебаний, с необходимым частотным и энергетическими параметрами, числа скважин, схемы их расположения, глубины и диаметра, массы и местоположения зарядов взрывчатых веществ, средств взрывания, взрыв пунктов (в случае применения взрывных работ), типа сейсмостанций, типа и количества регистрирующей аппаратуры, применяемого при проведении работ полевого вычислительного комплекса, приемников, средств передачи данных, систем регистрации, средств управления и контроля за работой аппаратуры, применяемых при проведении работ обрабатывающей техники, метрологического обеспечения, материалов;

д) обоснование и описание видов и объемов сопутствующих работ и услуг топографо-геодезического, транспортного, энергообеспечения, связи, водоснабжения, материально-технического обеспечения (для работ, выполняемых по государственному контракту или по государственному заданию);

е) перечень и описание мероприятий по устранению влияния помех, обусловленных водной средой, сведения о скорости передвижения судов и их позиционирования (в отношении сейсморазведочных работ в море и иных водных объектах).

Затраты времени и затраты труда на сейсморазведочные работы определяются по нормам ССН, вып. 3, часть 1 в той же последовательности, но с некоторыми особенностями.

В качестве нормативной базы по сейсморазведке в ССН приняты нормы выработки в физ. наблюдениях на 1 отрядо-смену, т. е. нормативное количество физических наблюдений, которое один сейсморазведочный отряд отрабатывает за 7-часовой рабочий день в нормализованных технологических и организационно-технических условиях.

При работе в ненормализованных организационно-технических условиях производства к нормам выработки применяются поправочные коэффициенты, приведенные в табл. 3 (ССН, вып. 3, часть 1). В случае частичного распространения ненормализованных условий, поправочный коэффициент рассчитывается как средневзвешенный по объемам работ. При необходимости одновременного использования нескольких поправочных коэффициентов последние перемножаются и полученные произведения (общий поправочный коэффициент) применяются к соответствующим нормам выработки.

Затраты времени в отрядо-сменах на выполнение сейсморазведочных работ определяются путем деления общего количества физических наблюдений (исходя из суммарной длины проектируемых основных и детализационных профилей) на норму выработки, выбранную по ССН в зависимости от типа сейсмостанции и способа возбуждения, категории трудности, количества воздействий, кратности профилирования, расстояния между центрами групп сейсмоприемников, с ежедневной полной размоткой-смоткой или оставлением сейсмокос на профиле.

Кроме того, при проведении сейсморазведочных работ с использованием взрывных источников из скважин необходимо запроектировать буровые работы и рассчитать расход взрывчатых веществ и средств взрывания (электродетонаторов).

Затраты времени и труда на бурение определяются по ССН, вып. 5, глава «Бурение сейсмоскважин», исходя из применяемого типа буровой установки, способа бурения, типа породоразрушаемого инструмента, способа транспортировки по профилю, усредненного геологического разреза и общего метража бурения по категориям пород. Учитываются затраты по монтажу, демонтажу и перевозкам буровой установки на новую точку, а также затраты, связанные с удорожанием работ в зимних условиях.

Расход взрывчатых веществ и средств взрывания обосновывается в зависимости от количества физических наблюдений, среднего веса заряда в кг, условий взрыва (одиночные скважины или группа скважин).

5.7.4. Камеральные работы при геофизических исследованиях

Затраты времени и труда на камеральные работы по геофизическим исследованиям методами сейсморазведки, гравиразведки, магниторазведки, электроразведки, радиометрии, скважинной геофизики и аэрогеофизическим работам нормируются ССН, глава «Камеральные работы».

Продолжительность камерального периода в отрядо-месяцах для различных видов геофизических работ определяется в соответствии с продолжительностью полевых работ, количеством координатных или физических точек за месяц работы отряда, сложностью обработки полевого материала.

Для определения количества точек, выполняемых отрядом за месяц работ, необходимо общее количество физических или координатных точек разделить на расчетную продолжительность работ в месяцах. Продолжительность работ в месяцах рассчитывается путем деления общих затрат времени в отрядо-сменах на данный метод на 25,4 (среднее число смен в месяце).

Нормы ССН на камеральную обработку геофизических исследований не предусматривают затраты на использование ЭВМ. При использовании машинной обработки на камеральных работах в данном разделе необходимо обосновать количество машинного времени в машино-часах, требуемого для обработки полевых материалов.

Затраты на камеральные работы по геофизическим исследованиям в скважинах в ССН не нормируются. Сметная стоимость по ним определяется по сметно-финансовым расчетам.

5.8. Строительство зданий и сооружений

Стоимость строительства зданий и сооружений на объектах геологоразведочных работ определяется по форме СМ2С исходя из объемов строительных работ и основных расходов на их производство. Основные расходы на единицу строительных работ определяются по ССН-92, вып. 11, часть 2 (табл. 5.21).

На обустройство баз геолого- и нефтегазоразведочных организаций составляется самостоятельная проектно-сметная документация. Целесообразность работ по обустройству баз определяется заказчиком.

Таблица 5.21

Расчет основных расходов строительства зданий и сооружений

Наименование зданий, сооружений, видов работ	Единица	Объем работ	Основные расходы на единицу работ, руб.	Основные расходы на собственно строительные работы, руб.
Здание № 1				
Здание № 2				

Итого по строительству				
Зимнее удорожание				
Всего по расчету				

5.9. Расчет штата на полевой период

Рассчитываются общие затраты труда в чел.-днях по всем видам работ в соответствии с нормами соответствующих ССН, табл. 5.22.

Определяется фонд времени одного работающего за календарный период выполнения работ:

$$T_{ф} = (T_{к} - T_{пр} - T_{вых} - T_{отп})\cdot 0{,}96,$$

где $T_{Ф}$ фонд времени одного работающего за рассматриваемый период, дней; $T_{к}$ сроки выполнения запланированного объема работ, дней; $T_{пр}$ число праздничных дней за рассматриваемый период, дней; $T_{вых}$ число выходных дней, дней; $T_{отп}$ число дней отпуска, дней; 0,96 коэффициент, учитывающий невыходы на работу по уважительным причинам.

При делении суммарных затрат труда в чел.-днях на фонд рабочего времени получаем численность трудящихся на полевой период.

Таблица 5.22

Затраты труда на геологоразведочные работы, чел.-дней

Виды работ	Кол-во расч. единиц	Затраты труда на 1 расч. ед.	Общие затраты труда, чел.-дн.

После определения общей численности работающих производится их распределение по категориям трудящихся согласно штатного расписания и норм обслуживания. При этом может быть небольшое несовпадение по общей численности.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ И СОСТАВЛЕНИЕ СМЕТ НА ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЕ РАБОТЫ

6.1. Общие положения

Смета составляется на весь объем геологоразведочных работ и затрат, предусмотренных проектом.

Сметная стоимость геологоразведочных работ слагается из основных расходов, накладных расходов, плановых накоплений, компенсируемых затрат, подрядных работ и резерва на непредвиденные расходы.

Общая сметная стоимость геологоразведочных работ сводится по следующей номенклатуре работ и затрат с подразделением каждой позиции по видам, методам, способам, масштабам и т. п. (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Укрупненный расчет стоимости работ по проекту

Наименование работ и затрат	Ед-ца	Объем работ	Стоимость единицы работ	Общая стоимость работ, руб.
1	2	3	4	5
I. ОСНОВНЫЕ ЗАТРАТЫ				
А. Собственно геологоразведочные работы				
1. Предполевые работы и проектирование				
2. Полевые работы – всего: **том числе по видам, методам, способам,масштабам и т. д.:** 2.1. Работы геологического содержания Работы общего назначения Съемки геологического содержания и общие поиски полезных ископаемых Геохимические работы при поисках и разведке полезных ископаемых Гидрогеологические и связанные с ними работы Опробование твердых полезных ископаемых				

Продолжение табл. 6.1

1	2	3	4	5
2.2. Геоэкологические работы				
2.3. Геофизические работы Сейсморазведка Электроразведка Гравиразведка, магниторазведка (наземная) Аэрогеофизические работы Геофизические исследования в скважинах Скважинная геофизика Радиометрические работы				
2.4. Горнопроходческие работы				
2.5. Буровые работы				
2.7. Топографо-геодезические и маркшейдерские работы				
2.8. Прочие полевые работы				
3. Организация и ликвидация полевых работ				
3.1. Организация полевых работ 3.2. Ликвидация полевых работ				
4. Лабораторные и технологические исследования				
5. Камеральные, картосоставительские, издательские, тематические и опытно-методические работы				
6. Прочие собственно геологоразведочные работы и затраты				
Б. Сопутствующие работы и затраты				
7. Временное строительство на участке полевых работ				
8. Транспортировка грузов и персонала				
II.КОСВЕННЫЕ ЗАТРАТЫ				
III. ПРИБЫЛЬ				
IV. КОМПЕНСИРУЕМЫЕ ЗАТРАТЫ 9.1. Производственные командировки 9.2. Полевое довольствие 9.3. Доплаты и компенсации 9.4. Возмещение убытков, причиненных изъятием или временным занятием земельных участков 9.5. Рекультивация земель и лесных угодий 9.6. Попенная оплата 9.7. Ликвидация последствий взрывов 9.8. Экспертизы в сфере недропользования, включая:				

Окончание табл. 6.1

9.8.1. Экспертиза проектной документации на проведение работ по геологическому изучению недр и разведке месторождений полезных ископаемых 9.8.2. Государственная экспертиза запасов полезных ископаемых, геологической, экономической и экологической информации о предоставляемых в пользование участках недр 9.9. Иные обязательные экспертизы, включая: 9.9.1. Экспертиза промышленной безопасности 9.9.2. Экологическая экспертиза 9.10. Рецензия 9.11. Аренда и лизинг, включая: 9.11.1. Аренда зданий и сооружений 9.11.2. Аренда транспортных средств 9.11.3. Аренда технических средств и оборудования 9.11.4. Лизинговый платеж за исключением выкупной цены предмета лизинга 9.12. Налоги и иные обязательные платежи, включая: 9.12.1 Налог на имущество 9.12.2. Налог на транспорт 9.12.3. Налог на землю 9.12.4. Регулярные платежи за пользование недрами 9.12.5. Сбор/ государственная пошлина за выдачу лицензии на пользование участком недр				
V. ПОДРЯДНЫЕ РАБОТЫ				
VI. РЕЗЕРВ НА НЕПРЕДВИДЕННЫЕ РАБОТЫ И ЗАТРАТЫ				
VII. НАЛОГ НА ДОБАВЛЕННУЮ СТОИМОСТЬ				
ВСЕГО ПО ОБЪЕКТУ:				

Стоимость всех видов работ, предусмотренных укрупненным расчетом стоимости работ по проекту, определяется по утвержденным исполнителем по государственному контракту единичным расценкам.

Единичные расценки рассчитываются исходя:

из укрупненных норм времени в станко-сменах, бригадо-сменах и др. расчетных единицах на натуральную единицу объема работ;

норм затрат труда (по должностям инженерно-технических работников и профессиям рабочих в человеко- днях на одну расчетную единицу);

норм производственного транспорта (в машино-сменах или иных величинах) на одну расчетную единицу;

норм основных расходов на одну расчетную единицу.

Укрупненные нормы времени разрабатываются на базе действующих в организации-исполнителе по государственному контракту локальных норм, применяемых для расчета с рабочими, или для определения производственных заданий исполнителю по государственному контракту.

Для разработки локальных норм могут быть использованы:

фотохронометражные наблюдения, проводимые в соответствии с положениями по нормированию труда работников;

опытно-статистические данные о затратах времени на производство нормируемого вида геологоразведочных работ (по круглогодичным работам за последний календарный год работы, по сезонным работам за два последних полевых сезона);

расчетные данные, определяемые исходя из технической характеристики применяемых механизмов и технологии выполнения нормируемого вида работ.

Затраты труда инженерно-технических работников и рабочих рассчитываются исходя из трудоемкости работ, установленных норм времени на их производство и продолжительности рабочего дня. Состав производственного коллектива обосновывается составом работы каждого его члена.

В труднодоступных районах (резко пересеченный рельеф, труднопроходимая тайга, заболоченная лесотундра, арктическая тундра, сыпучие пески) нормы производственного транспорта могут приниматься по фактическим данным.

Единичные расценки по статьям основных расходов составляются по следующей номенклатуре статей:

затраты труда, человеко-день;

основная заработная плата;

дополнительная заработная плата;

отчисления на социальные нужды;
материалы;
электроэнергия;
сжатый воздух;
лесоматериалы;
амортизация;
износ;
услуги;
транспорт.

Единичные расценки рассчитываются, исходя из средней продолжительности рабочего месяца 25,4 дня, что соответствует при 40-часовой рабочей неделе 168,9 часам, при 36 часовой рабочей неделе 152,5 часам.

Единичные расценки по основной заработной плате определяются на основе затрат труда инженерно-технических работников и рабочих в человеко-днях и дневных ставок соответствующих категорий работников, принятых в организации-исполнителе. Затраты по дополнительной заработной плате определяются в процентах от основной заработной платы.

Затраты по отчислениям в страховые фонды принимаются в соответствии с действующим законодательством.

Расход материалов, электроэнергии, сжатого воздуха, лесоматериалов и технологической воды во вспомогательных производствах, обслуживающих производство геологоразведочных работ инструментами, приспособлениями, запасными частями и пр. услугами, а также осуществляющих ремонт оборудования, включается в статью «Услуги».

Расход материалов принимается:
по производственным нормам, действующим в организации;
отчетным данным (фактический расход);
расчетным данным.

Стоимость единицы измерения материалов принимается по ценам приобретения.

Основные расходы по электроэнергии определяются исходя из норм расхода электроэнергии в кВт/часах и стоимости 1 кВт/часа электроэнергии, вырабатываемой собственными электростанциями, или стоимости 1 кВт/часа электроэнергии, отпускаемой сторонними энергосистемами и электростанциями.

Основные расходы по сжатому воздуху определяются исходя из норм расхода сжатого воздуха в м^3 и стоимости 1 м^3.

В расчете затрат по этой статье «Амортизация» указывается:

перечень принятого оборудования с указанием его цены (балансовая, завода изготовителя или иная);

коэффициент сезонности работы (при наличии обоснования);

размер транспортно-заготовительных расходов (при наличии обоснования).

Единичные расценки по износу малоценных и быстроизнашивающихся предметов определяются исходя из первоначальной стоимости инструмента, инвентаря и снаряжения, годовых норм износа и времени, в течение которого они используются в производственном процессе. Перечень и нормы износа инструмента, приборов, малоценного инвентаря и снаряжения могут быть приняты по производственным нормам или исходя из отчетных данных, или на основании расчетных материалов.

Первоначальная стоимость малоценных и быстроизнашивающихся предметов определяется по ценам приобретения.

В услуги собственных подсобно-вспомогательных производств геологических организаций включаются в основном затраты на проведение малого и среднего ремонта оборудования, транспортных средств, инструмента и приборов, применяемых при производстве геологоразведочных работ.

Затраты по статье «Услуги» определяются расчетным способом, при этом к расчету прилагается обоснование затрат по заработной плате и материалам.

Услуги, оказываемые третьими лицами, принимаются по ценам, утвержденным привлекаемыми третьими лицами без начисления на них косвенных затрат и прибыли исполнителя по государственному контракту.

Единичные расценки по статье «Транспорт» определяются исходя из нормативной потребности в производственном транспорте, включая гужевой, и стоимости единицы транспорта (машино-смены, коне-дня или иной). Стоимость 1 машино-смены, 1 коне-дня или иной принимается по нормам основных расходов, а в случае использования наемного транспорта в соответствии с действующими тарифами.

При определении единичных расценок к статьям «Материалы», (за исключением сжатого воздуха), «Лесоматериалы», «Амортизация», «Износ» и к затратам по материалам в статьях «Услуги» и «Транспорт» применяется коэффициент, учитывающий транспортно-заготовительные расходы геологической организации (при наличии обоснования).

В тех случаях, когда единичные расценки по статьям «Материалы», «Амортизация», «Износ», «Услуги» устанавливаются на основании фактических данных за следующий период:

по круглогодичным работам за последний календарный год;

по сезонным работам за два последних сезона.

В Единичных расценках расход материалов, электроэнергии, сжатого воздуха приводится только в денежном выражении.

Расчет Единичных расценок осуществляется по табл. 6.2 – 6.5.

Таблица 6.2

Укрупненные нормы времени на единицу работ в расчетных единицах

Условия производства работ (глубина скважины или выработки в метрах, сечение выработок (м^2), способ проходки и другие)	Категории пород (трудности), количество пунктов взрыва и другие			Источник принятой нормы
	I	II	III	
1	2	3	4	5

Таблица 6.3

Наименование должностей инженерно-технических работников (ИТР) и профессий рабочих	Затраты труда в чел-днях Условия производства работ (категория трудности, сечение выработки, способ бурения и др.)	Источник принятой нормы
1	2	3
ИТР		

Рабочие		

Таблица 6.4

Нормы производственного транспорта на одну расчетную единицу

Вид транспорта	Единица измерения	Нормы транспорта Условия производства работ (категория трудности, проходимость района и другие)	Источник принятой нормы
	машино-смена		

Таблица 6.5

Единичные расценки по статьям основных расходов на вид работ

Статья расхода	Сметная стоимость	Источник принятой нормы
1	2	3
Затраты труда, чел.-день		
Основная заработная плата		
Дополнительная зарплата ИТР и рабочих		
Отчисления на социальные нужды		
Материалы		
Электроэнергия		
Сжатый воздух		
Лесоматериалы		
Амортизация		
Износ		
Услуги		
Транспорт		
ВСЕГО:		

Единичные расценки исполнителя по государственному контракту утверждаются директором или иным уполномоченным представителем исполнителя по государственному контракту и заверяются в порядке, предусмотренном законодательством Российской Федерации, исполнителя по государственному контракту.

При включении в Укрупненный расчет стоимости работ по проекту косвенных затрат и прибыли не допускается установление величины косвенных затрат более 20 % от общей стоимости основных расходов и величины нормы прибыли – более 10 % от общей стоимости основных затрат и косвенных затрат. К косвенным затратам, подлежащим включению в Укрупненный расчет стоимости работ, относятся затраты, не относимые к основным, определяемые в процентном отношении от основных затрат.

При расчете косвенных затрат не учитываются компенсируемые затраты и затраты по подрядным работам.

При включении в Укрупненный расчет стоимости работ по проекту расходов на резерв, величина указанных расходов не должна превышать:

12 % от общей стоимости работ по проекту за исключением лабораторных, камеральных и тематических работ – для проектной документации на проведение работ по бурению глубоких скважин различных категорий, включая опорные, параметрические на нефть и газ, в том числе – 10 % на ликвидацию возникающих в процессе бурения, крепления и испытания скважин геологических осложнений и 2 % на иные непредвиденные расходы;

6 % от общей стоимости работ по проекту – для иных геологоразведочных работ.

Календарный план выполнения работ по проекту включает сведения и данные об основных видах геологоразведочных работ, предусмотренных проектной документацией, их объемах и сроках проведения.

Общий срок проведения работ по стадии геологического изучения недр, включающего поиски и оценку месторождений полезных ископаемых, не может превышать срок пользования недрами для геологического изучения, определяемый в соответствии со статьей 10 Закона Российской Федерации «О недрах».

Рекомендуемый образец Календарного плана выполнения работ по проекту приведен в табл. 6.6

Календарный план выполнения работ по проекту утверждается пользователем недр, подведомственным учреждением или исполнителем по государственному контракту.

Таблица 6.6

Календарный план работ общегеологического и минерагенического направления (для твердых полезных ископаемых)

Основные виды геологоразведочных работ	Единица измерения	Объемы работ, всего	Объемы выполнения работ с указанием периода проведения работ			
			с…по…	с…по…	с…по…	с…по…
Аэрогеофизические работы	кв. км					
Наземные геофизические работы, всего	кв. км или пог. км					
в том числе: 1)<…>; 2)<…> и др.						
Геохимические съемки, всего	кв. км					
в том числе: 1)<…>; 2)<…> и др.						
Бурение скважин, всего	пог. м					
в том числе: 1)<…>; 2)<…> и др.						
Открытые горные работы, всего	кв. м или пог. м					
в том числе: 1)<…>; 2)<…> и др.						
Подземные горные работы, всего	кв. м или пог. м					
в том числе: 1)<…>; 2)<…> и др.						
Опытно-промышленная разработка	тыс. т или тыс. куб. м.					

В случае подготовки проектной документации на этап геологоразведочных работ в проектную документацию включается как Календарный план выполнения работ по проектируемому этапу, так и Календарный план выполнения работ по программе выполнения работ по всей стадии геологоразведочных работ на объекте.

6.2. Основные затраты

К основным затратам относятся затраты на производство отдельных видов геологоразведочных и связанных с ними работ, которые могут быть отнесены на конкретный объект работ.

Основные затраты определяются по сборникам сметных норм (ССН-92) или сборникам норм основных расходов (СНОР-93) на геологоразведочные работы, вып.1-11, а по видам работ, отсутствующим в указанных сборниках, – по сметно-финансовым расчетам, табл. 6.7.

Таблица 6.7

Р А С Ч Е Т

сметной стоимости____

(наименование вида работ)

Объем работ_______________(м, км и др.)_______________(станко-, отрядо-смена и др.)

Продолжительность работ____месяцев

Поправочные коэффициенты:

К затратам на оплату труда:

индекс____, районный______, высокогорность_____, безводность ______, общий_______

К материальным затратам: индекс_____________, ТЗР______________, общий______

К амортизации: индекс_____________, ТЗР______________, общий______

Статья расхода	Сметная стоимость, руб.	
	расчетной единицы	объем работ с учетом поправочных коэффициентов
1	2	3
1. Основная заработная плата: 1.1. ИТР 1.2. Рабочих		
2. Дополнительная заработная плата (_______%)		
3. Отчисления на социальные нужды (_______%)		
4. Материалы		
5. Амортизация		
6. Износ		
7. Услуги – всего, в том числе: 1.1. Затраты на оплату труда 1.2. Отчисления на социальные нужды		

1.3. Материальные затраты 1.4. Амортизация		

Окончание табл. 6.7

1	2	3
8. ИТОГО ОСНОВНЫЕ ЗАТРАТЫ, в том числе: 8.1. Затраты на оплату труда 8.2. Отчисления на социальные нужды 8.3. Материальные затраты 8.4. Амортизация		
9. Косвенные затраты (_______%)		
10. Итого основные и косвенные затраты		
11. Прибыль (________%)		
12. ВСЕГО ПО РАСЧЕТУ		
13. Сметная стоимость натуральной единицы работ (м, км и др.)		

При поисках, разведке и исследованиях радиоактивных руд в соответствии с перечнем работников, имеющих право на повышение заработной платы, применяется коэффициент 1,2.

Дополнительная заработная плата принимается в соответствии с утвержденным в законодательном порядке процентом от суммы основной заработной платы.

Отчисления на социальные нужды (в Фонд социального страхования РФ, Пенсионный фонд РФ, на обязательное медицинское страхование работников) принимаются в установленном законодательством проценте от суммы основной и дополнительной заработной платы.

Основные расходы по статье «Материалы» определяются исходя из норм расхода материалов, электроэнергии и сжатого воздуха и стоимости их единицы, принимаемой по ценам их приобретения (без учета НДС) с учетом действующих на предприятии транспортно-заготовительных расходов (ТЗР).

В случае выработки электроэнергии и сжатого воздуха собственными силами стоимость единицы принимается по калькуляции 1 кВт · ч электроэнергии и 1 куб. м сжатого воздуха.

Основные расходы по статье «Амортизация» определяются исходя из обоснованного в проекте вида, типа, марки оборудования, транспортных средств, аппаратуры и приборов, их стоимости, нормативного коэффициента на резерв, действующих норм амортизационных отчислений на полное восстановление основных фондов и годового фонда рабочего времени.

Стоимость оборудования принимается по цене приобретения (без учета НДС) с начислением транспортно-заготовительных расходов.

При выполнении сезонных геологоразведочных работ годовая сумма амортизации начисляется независимо от продолжительности полевого сезона с учетом сменности проводимых работ и графика использования оборудования на различных объектах. В этом случае при расчете затрат по амортизации годовой фонд рабочего времени принимается равным продолжительности работы оборудования, которая обосновывается проектом.

В основные затраты по статье «Услуги» включаются затраты:

на проведение технического обслуживания № 2 и 3 и текущих ремонтов оборудования;

на проведение капитального ремонта оборудования;

производственного транспорта, занятого обслуживанием геологоразведочных работ внутри участка (независимо от его размеров);

на чертежные, машинописные, копировальные, оформительские и т. п. работы.

Затраты на проведение технического обслуживания и текущих ремонтов, а также капитального ремонта оборудования определяются исходя из балансовой стоимости оборудования, годового фонда рабочего времени и нормативного коэффициента затрат на техническое обслуживание, текущий и капитальный ремонт. При этом в общих расходах рекомендуемое распределение долей: затраты на оплату труда 29 %, отчисления на социальные нужды – 11 %, материальные затраты – 60 %.

В случае выполнения капитального ремонта сторонними организациями все расходы на его проведение относятся к материальным затратам.

Нормативные коэффициенты на техническое обслуживание и текущий ремонт, а также на капитальный ремонт, принимаются в размерах, действующих на предприятии-подрядчике.

Затраты производственного транспорта, учитываемые по статье «Услуги», определяются исходя из нормативной потребности транспорта на единицу геологоразведочных работ (с учетом погрузочно-разгрузочных работ), рассчитанной по нормам и нормативам ССН-92, вып. 10.

На проектно-сметных, камеральных и опытно-методических работах в статье «Услуги» предусматриваются затраты на чертежные, машинописные, копировальные, оформительские, фотографические и т. п. работы по нормам и расценкам организаций, оказывающих эти услуги.

По маршрутным работам (геолого-съемочным, геохимическим, гидрогеологическим и др.) затраты производственного транспорта, включая передвижение по маршруту, в статью "Услуги" не включаются, а предусматриваются в полевых работах как самостоятельный вид работ.

Указанные затраты определяются исходя из объема маршрутных работ, видов применяемого транспорта, норм длительности переходов и переездов по ССН-92, вып. 1 и стоимости единицы транспорта, рассчитанной по нормам и нормативам ССН-2, вып. 10.

6.3. Расчет основных затрат по СНОР-93

Для упрощения расчетов сметной стоимости могут использоваться СНОР-93, в которых приведены нормы основных затрат по четырем показателям – «Затраты на оплату труда», «Отчисления на социальные нужды», «Материальные затраты» и «Амортизация», рассчитанные на основе норм и нормативов ССН-92.

Расходы по основной заработной плате в СНОР-93 рассчитаны по дневным ставкам, определенным исходя из минимальной заработной платы.

Дополнительная заработная плата учтена в следующих размерах (в процентах от суммы основной заработной платы): для работников, занятых на поверхностных работах, включая морские и аэрогеофизические работы 7,9; для работников, занятых на подземных работах, 14,3; для работников, занятых на открытых горных работах, 9,6.

Затраты по отчислениям на социальные нужды приняты в размере 36,5 % от суммы основной и дополнительной заработной платы (с учетом всех поправочных коэффициентов).

Приведенные в СНОР-93 нормы по показателям «Амортизация» учитывают продолжительность полевых работ за один год. При выполнении сезонных геологоразведочных работ этот показатель корректируется на коэффициент сезонности, определяемый как отношение 12 к продолжительности полевых работ в месяцах.

Расчет основных затрат производится по форме СМ-5, табл. 6.8.

Таблица 6.8

Основные затраты на расчетную (физическую) единицу работ

____

(вид работ)

по СНОР-93, выпуск

Поправочные коэффициенты:

К затратам на оплату труда:
индекс____, районный 1,15, высокогорность_____, безводность ______, общий_______

К материальным затратам: индекс_____________, ТЗР 1,063, общий______

К амортизации: индекс_____________, ТЗР 1,026 , общий______

Показатели норм	Сбор информации (способ работ) табл.___1___стр.__1_____		Бурение скважины III гр. (способ работ) табл._2_____стр._2_____	
	норма СНОР-93	с учетом коэффиц.	норма СНОР-93	с учетом коэффиц.
Затраты на оплату труда	15635	17980	1746	2007,9
Отчисления на социальные нужды	6098	7013	689	792,3
Материальные затраты	103	109,5	4311	4582,6
Амортизация			897	889,5
Итого основные затраты	21836	25102	7613	8272,4
Итого чел. см., ст. см.		988,3		

6.4. Косвенные затраты

К косвенным затратам относятся включаемые в себестоимость издержки производства, связанные с обеспечением геологоразведочных работ, организацией управления ими (кроме затрат, относимых к основным расходам).

Косвенные затраты начисляются по нормам, утвержденным в установленном порядке, на сумму основных расходов собственно геологоразведочных работ и сопутствующих работ и затрат, выполняемых собственными силами.

Косвенные затраты подразделяются на две группы:

общепроизводственные расходы геологических организаций;

общехозяйственные расходы геологических организаций.

К общепроизводственным относятся расходы, связанные с обеспечением условий для нормальной и бесперебойной деятельности геологической организации.

В эту группу включаются следующие статьи расходов:

охрана труда и техника безопасности;

подготовка и повышение квалификации кадров;

организация общественного питания;

прочие общепроизводственные расходы.

К общехозяйственным относятся расходы, связанные с управлением и обеспечением деятельности предприятия. Они включают расходы на содержание аппарата управления предприятием и его структурными подразделениями и прочие общехозяйственные расходы.

6.5. Прибыль (плановые накопления)

Прибыль (плановые накопления) – нормативная прибыль геологического предприятия, предусматриваемая в стоимости (цене) геологоразведочных работ (услуг) для осуществления налоговых платежей и выплат, относимых на прибыль, осуществления пр. платежей, предусмотренных действующим законодательством, а также для обеспечения развития производственной социально-бытовой сферы предприятия.

Прибыль начисляется на сумму основных и косвенных затрат.

При включении в Укрупненный расчет стоимости работ по проекту косвенных затрат и прибыли **не допускается** установление величины косвенных затрат более **20 %** от общей стоимости основных затрат, и величины нормы прибыли – более **10 %** от общей стоимости основных и косвенных затрат.

6.6. Компенсируемые затраты

К компенсируемым затратам относятся независящие от предприятий, предусмотренные законодательством затраты, возмещаемые исполнителям работ по фактически производственным расходам.

В компенсируемые затраты включаются:

производственные командировки;

полевое довольствие;

возмещение убытков, причиненных изъятием или временным занятием земельных участков;

затраты по рекультивации земель и лесных угодий;

попенная оплата;

затраты по ликвидации взрывов при проведении сейсморазведочных работ;

затраты на согласование мест проведения геологоразведочных работ;

другие затраты, включаемые в себестоимость работ вследствие введения законодательных актов и постановлений властей, обязательных к исполнению предприятием.

6.7. Подрядные работы

К подрядным работам относятся:

работы, выполняемые сторонними организациями по объекту геологического задания в целом с выдачей окончательного отчета;

работы, выполняемые организациями-соискателями по локальной проектно-сметной документации, входящей отдельной строкой в состав сметы.

Стоимость работ, предусмотренных ССН-92 и выполняемых сторонними организациями, определяется по форме СМ-1 с учетом организационно-технических условий, накладных расходов и плановых накоплений этих организаций.

При выполнении сторонними организациями работ, не предусмотренных ССН-92 и финансируемых за счет средств госбюджета, стоимость этих работ определяется по расценкам сторонних организаций.

Все подрядные работы оформляются договорами.

6.8. Резерв на непредвиденные работы и затраты

Резерв на непредвиденные работы и затраты предназначен для возмещения расходов, необходимость в которых выявилась в процессе производства работ и не могла быть учтена при составлении проектно-сметной документации. При включении в Укрупненный расчет стоимости работ по проекту расходов на резерв, величина указанных расходов не должна превышать:

- 12% от общей стоимости работ по проекту за исключением стоимости лабораторных, камеральных и тематических работ – для проектной документации на проведение работ по бурению глубоких скважин различных категорий, включая опорные. Параметрические на нефть и газ, в том числе – 10 % - на ликвидацию возникающих в процессе бурения, крепления и испытания скважин геологических осложнений и 2 5 – на иные непредвиденные расходы;

- 6 % от общей стоимости работ по проекту – для иных геологоразведочных работ.

6.9. Расчет единичных сметных расценок

Единичная сметная расценка определяется путем умножения нормы времени на единицу работы и сметной стоимости расчетной единицы (табл. 6.10).

Таблица 6.10

Расчет единичных сметных расценок

Номер расчета	Виды работ	Единица измерения	Норма времени на единицу работ	Коэффициент на ненормализованные условия	Сметная стоимость расчетной единицы, руб.(Ф. СМ-5)	Единичная сметная расценка, руб.	Номер единичных расчетов СМ-5-№
1	2	3	4	5	6	7	8/
1 1.1	Предполевые работы и проектирование: сбор информации посредством выписок текста	100 с.	1,08		988,3	1067,4	СМ-5-1
1.2	Систематизация сведений	100 карт.	3,02				СМ-5-2
3 3.1	Геофизические исследования в скважинах Основной комплекс	М1:500					
	- один зонд КС, ГК	1000 м					СМ-5
	инклинометрия	1000 м					СМ-5
3.2	Детализация	М1:50					
5	Бурение скважин 3 гр. с отбором керна	Категория пород					
		2	0,06	1,1	8272,4	546,0	СМ-5
		7	0,16	1,1	8272,4	1455,9	СМ-5
		8	0,17	1,1	8272,4	1546,9	СМ-5
		9	0,18	1,1	8272,4	1637,9	СМ-5
		9	0,18	1,1*1,3	8272,4	2129,3	СМ-5
		10	0,25	1,1	8272,4	2774,9	СМ-5

6.10. Особенности определения сметной стоимости по видам работ и затрат

6.10.1. Предполевые работы и проектирование

Расходы по оказанию сторонними организациями справочно-информационных услуг определяются по расценкам указанных организаций.

В затраты на рекогносцировку включаются трудозатраты специалистов, проводящих рекогносцировку, и затраты транспорта (авиационного, автомобильного и др.).

Затраты на приобретение картографических материалов определяются по ценам предприятий, предоставляющих указанные материалы.

По геолого-съемочным, поисковым и морским геологоразведочным работам затраты на составление проектов и смет определяются по нормам соответствующих выпусков ССН-92.

Затраты на производственную и экологическую экспертизу проектно-сметной документации определяются по расценкам организаций, проводящих экспертизу.

По остальным работам затраты на их составление определяются сметно-финансовым расчетом или по временным проектно-сметным нормативам.

Основные затраты на проектно-сметные работы слагаются:

из основной заработной платы ИТР, занятых проектированием и составлением смет; состав ИТР и сроки проектирования определяются в проекте;

дополнительной заработной платы в размере 7,9 % от основной заработной платы;

отчислений на социальные нужды от основной и дополнительной заработной платы (принимается в размере в соответствии с действующим законодательством);

- стоимости материалов в размере 5 % от основной, дополнительной заработной платы и отчислений на социальные нужды без учета районного коэффициента, с начислением транспортно-заготовительных расходов;

- стоимости услуг подсобно-вспомогательного производства и со стороны в размере 15 % от основной, дополнительной заработной платы и отчислений на социальные нужды с учетом районного коэффициента.

На величину основных затрат начисляются косвенные затраты; на сумму основных и косвенных затрат – прибыль (плановые накопления).

6.10.2. Полевые работы

Подлеты самолетов и вертолетов к участкам работ, связанные с проведением съемочных полетов и аэровизуальных наблюдений, независимо от расстояний подлетов, относятся к производственному транспорту. Затраты на подлеты сверх предусмотренных ССН-92 включаются в полевые работы дополнительно.

При выполнении аэрогеофизических работ непосредственно в воздухе с самолета или вертолета в сумму заработной платы ИТР, входящих в состав экипажей самолетов и вертолетов, включается сумма почасовой оплаты бортовых операторов (бортовых наблюдателей), исчисляемая от соответствующих часовых ставок для оплаты труда командира воздушного судна за выполнение летной работы, кроме аэрофотосъемочной, бортовому наблюдателю – 60 %, первому бортовому оператору – 50 %, второму бортовому оператору – 35 %.

За полеты к съемочным участкам (пунктам наблюдения) без выполнения аэрогеофизических работ, а также при проведении глубинного сейсмического зондирования и гравиметрической съемки с применением самолетов и вертолетов, в сумму заработной платы бортовых операторов (бортовых наблюдателей) включается дополнительная оплата труда в размере 35 % от соответствующих ставок для оплаты труда командира воздушного судна.

6.10.3. Организация и ликвидация полевых работ

К организации полевых работ относятся: комплектование партий работниками необходимой квалификации; ожидание транспортировки персонала к месту работы; получение со складов необходимых инструментов, материалов, спецодежды и др. полевого снаряжения; амортизация основных средств за период организации; проверка исправности оборудования, аппаратуры и инструментов; получение необходимых транспортных средств; упаковка, отправка оборудования, снаряжения и материалов к месту работы; организация основных и перевалочных баз, обеспечивающих нормальную деятельность партии.

К ликвидации полевых работ относятся: подготовка оборудования и снаряжения к отправке на базу после окончания полевых работ; амортизация основных средств за период ликвидации; разборка, демонтаж машин, оборудования, сооружений в период ликвидации; консервация материальных ценностей; ожидание обратной транспортировки персонала; сдача на склады товаро-материальных ценностей; составление и сдача материального, финансового и информационного отчетов о результатах ликвидации полевых работ.

Затраты на организацию и ликвидацию полевых работ определяются прямым расчетом исходя из опыта работ или по проценту от сметной стоимости полевых работ. В последнем случае рекомендуются следующие нормативы в зависимости от специфики геологоразведочных работ, табл. 6.11.

Таблица 6.11

Нормативы отчислений на организацию и ликвидацию ГРР

Наименование партий (экспедиций)	Нормы в % от сметной стоимости полевых работ	
	на организацию	на ликвидацию
Геологоразведочные, осуществляющие разведку полезных ископаемых, включая воду (кроме торфа)	1,0	0,8
Геолого-съемочные, геолого-поисковые, поисково-съемочные, геофизические, включая каротажные, гидрогеологические, инженерно-геологические, геологоразведочные на торф и др.	1,5	1,2

Для объектов, расположенных в районах Крайнего Севера и местностях, приравненных к ним, нормы на организацию и ликвидацию полевых работ увеличиваются в два раза.

При общей (исключая сезонные перерывы) продолжительности полевых работ по проекту свыше 12 месяцев к нормам на организацию и ликвидацию полевых работ (за исключением сейсморазведочных работ, проводимых в таежных болотистых условиях, а также геологоразведочных работ, проводимых в районах Крайнего Севера и местностях, приравненных к ним) применяются следующие коэффициенты, в зависимости от продолжительности полевых работ:

от 13 до 18 месяцев – 0,8;

от 19 до 24 месяцев – 0,6;

от 25 до 36 месяцев – 0,5;

свыше 36 месяцев – 0,4.

В случае, когда проектно-сметная документация составляется на работы, продолжающиеся на той же площади, или по новому объекту на сопредельной площади без перебазировки партии (отряда), к нормам на организацию применяется коэффициент 0,25.

6.10.4. Транспортировка грузов и персонала партии и экспедиции

К виду работ «Транспортировка грузов и персонала партий и экспедиций» относятся затраты по доставке материалов и оборудования, упаковке, износу тары, а также погрузке и разгрузке по пути следования от склада предприятия, склада экспедиции или от прирельсового (пристань, порт) склада партии до базы (склада) партии (участка работ) и обратно.

В затраты по транспортировке грузов и персонала партий и экспедиций включается стоимость:

перевозки оборудования, аппаратуры, материалов, ГСМ, инструмента, инвентаря и снаряжения (в том числе и для подсобно-вспомогательных производств);

перевозки фуража, геологических проб, воды в безводных районах для производственных и бытовых нужд;

доставки продуктов, топлива и кухонного инвентаря при котловом питании от ближайших торговых точек к местам производства геологоразведочных работ;

доставки топлива для производственных нужд, а также для культурно-бытовых нужд в районах Крайнего Севера и местностях, приравненных к районам Крайнего Севера, которые не имеют своей топливной базы и куда топливо завозится со стороны;

перегона самоходных и передвижных буровых установок, геофизических станций, автомашин, тракторов, вездеходов, транспортеров, лошадей, оленей, вагон-домиков;

перевозки продовольственных и промышленных товаров для работников партий и членов их семей, проживающих в районах Крайнего Севера и местностях, приравненных к районам Крайнего Севера, включая пункты, обслуживаемые ОРСами (УРСами), а также для остальных районов, не обслуживаемых торговой сетью ОРСов (УРСов).

К затратам по транспортировке относятся также:

- расходы по доставке местных материалов на базу (склад) партии или участок работ непосредственно от поставщика, минуя склады предприятия, экспедиции или прирельсовый (пристань, порт) склад партии;
- расходы по переезду производственного персонала партии, экспедиции к месту производства работ и обратно, включая заработную плату за время переезда;
- услуги ледокольного флота для сопровождения судов, определяемые исходя из продолжительности проводки и действующих ставок сборов.

Стоимость перевозки грузов собственным автотранспортом по бездорожью, тракторами, гусеничными тягачами и транспортерами, речным и гужевым транспортом определяется по ССН-92, вып. 10.

Стоимость перевозки грузов и персонала транспортом общего пользования определяется исходя из объема перевозок, оптимальных транспортных схем и договорных цен.

Для упрощения расчетов сметные затраты на транспортировку грузов и персонала партий и экспедиций могут определяться в процентах от стоимости полевых геологоразведочных работ и строительства зданий и сооружений. Указанные проценты устанавливаются на базе сложившихся в данной партии, экспедиции соотношения упомянутых расходов за последние 2 3 года.

6.10.5. Компенсируемые затраты (затраты, возмещаемые по фактическим расходам)

Сметные затраты на командировки по сбору материалов для проектирования геологоразведочных работ и выполнения тематических работ, для защиты геологических отчетов и проектно-сметной документации, а также на др. командировки, связанные с производством геологоразведочных работ, определяются сметно-финансовым расчетом исходя из количества и продолжительности командировок, пунктов назначения, стоимости проезда и установленного размера командировочных расходов.

Сметные затраты по полевому довольствию всего персонала партии, экспедиции определяются прямым счетом или в процентах от сметной стоимости работ, выполняемых собственными силами.

К доплатам и компенсациям, учитываемых в сметах, **относятся:**

- единовременное вознаграждение за выслугу лет, надбавки и компенсации за работу в районах Крайнего Севера и местностях, приравненных к районам Крайнего Севера;
- расходы на бесплатное полярное и лечебно-профилактическое питание, предусмотренное законодательством, исходя из затрат работников в человеко-днях и установленной стоимости дневного питания;
- надбавки, выплачиваемые в установленном порядке работникам геологических организаций, ежедневно выезжающим на объекты полевых геологоразведочных работ, расположенные на значительном расстоянии от базирования этих организаций, и не получающим полевое довольствие.

Сметные затраты на доплаты и компенсации определяются прямым расчетом или в процентах от сметной стоимости работ по объекту, выполняемому собственными силами.

При прямом счете сметных затрат на доплаты, надбавки и компенсации начисляются дополнительная заработная плата и отчисления на социальное страхование по установленным нормам.

Сумма затрат по возмещению колхозам, совхозам и др. землепользователям (включая фермеров и арендаторов) убытков, причиненных изъятием или временным занятием земельных участков, определяются по сметно-финансовому расчету в соответствии с действующим на данной территории порядком возмещения землепользователем убытков, причиненных изъятием или временным занятием земельных участков по расценкам, утвержденным в установленном порядке.

Предприятия, осуществляющие геологоразведочные работы, связанные с нарушением почвенного покрова на земельных участках, предоставленных без изъятия у землепользователей, обязаны за свой счет приводить изымаемые земельные участки в состояние, пригодное для использования по восстановлению нарушенных земель.

Условия приведения земельных участков, нарушенных при производстве геологоразведочных работ, в состояние, пригодное для дальнейшего использования по назначению, определяются органами, предоставляющими земельные участки в пользование.

В соответствии с этими условиями разрабатывается проект восстановления (рекультивации) нарушенных земель с привлечением в необходимых случаях на договорных началах проектных организаций.

Затраты по рекультивации сельскохозяйственных земель или лесных угодий, почвенный покров которых был нарушен при проведении геологоразведочных работ, по восстановлению плодородия рекультивируемых земель, по хранению и нанесению плодородного слоя почвы на рекультивируемые земли, определяются по сметно-финансовым расчетам на основании проектов восстановления (рекультивации) нарушенных земель.

Расходы по пенной оплате определяются сметно-финансовым расчетом с учетом установленных в законодательном порядке лесхозами тарифов на попенную оплату.

Затраты на согласование мест проведения геологоразведочных работ (мест заложения буровых скважин и горных выработок) с местными органами и соответствующими инстанциями и получение разрешений на их производство от колхозов, совхозов и местных Советов народных депутатов определяются сметно-финансовым расчетом с учетом установленных перечисленными организациями расценок.

При расчете сметной стоимости с использованием СНОР-93 уровень компенсируемых затрат должен быть приведен к ценам и условиям, изложенным в СНОР-93.

Это может быть достигнуто:

1. Индексированием сметной стоимости собственно геологоразведочных работ и сопутствующих работ и затрат на момент утверждения сметы. Затем определяется процент компенсируемых затрат от стоимости собствен-

но геологоразведочных и сопутствующих им работ и затрат и по этому проценту рассчитывается размер компенсируемых затрат в условиях СНОР-93.

2. Расчетом компенсируемых затрат в условиях, принятых в СНОР-93.

6.10.6. Прочие работы и затраты

Сметная стоимость работ по составлению технико-экономических соображений (ТЭС), технико-экономических докладов (ТЭД) и технико-экономических обоснований (ТЭО) кондиций определяется сметно-финансовым расчетом.

Затраты по утверждению отчетов с подсчетом запасов в ГКЗ, ТКЗ (ЦКЗ) определяются по действующим нормам и расценкам, утвержденным в установленном порядке.

Сметная стоимость консультаций, экспертизы и рецензий отчетов определяется по расценкам организаций, предоставляющим указанные услуги.

Сметные затраты по осуществлению мероприятий по охране недр и окружающей среды в процессе проведения геологоразведочных работ на объекте, предусмотренном проектом, определяются по сметно-финансовым расчетам.

В прочие работы и затраты включаются отдельными строками ниже перечисленные затраты, определяемые сметно-финансовыми расчетами по форме СМ-6:

- затраты на монтаж и пуско-наладочные работы оборудования, не входящего в сметы строек, в том числе установка и монтаж оборудования вычислительных комплексов, включая дополнительное периферийное и вспомогательное оборудование;
- работы по замене горно-шахтного оборудования;
- отладка и проверка внутренних связей машин и оборудования;
- другие пуско-наладочные работы;
- оборудование транспортных средств для безопасной перевозки людей и взрывчатых материалов;
- затраты по хранению и реализации продовольственных и промышленных товаров на участках работ.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сборники норм основных расходов* (СНОР) (выпуски 1 11). М., 1994.
2. *Сборники сметных норм* (ССН) (выпуски 1 11). М., ВИЭМС, 1992.
3. *Приказ Министерства природных ресурсов и экологии РФ № 352 от 14.06.2016 г.* «Об утверждении Правил подготовки проектной документации на проведение геологического изучения недр и разведки месторождений полезных ископаемых по видам полезных ископаемых».

Алексей Владимирович Душин,
Виктор Глебович Жуков

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ

*Методические рекомендации
по выполнению курсовой работы
студентов специальности
21.05.03 - «Технология геологической разведки»*

Редактор изд-ва ...
Компьютерная верстка …

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат 60 x 84 1/16. Гарнитура Times New Roman.
Печать на ризографе. Печ. л.… Уч.-изд. л. … Тираж 50. Заказ

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

А. В. Душин, В. Г. Жуков

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ

***Методические рекомендации
по выполнению курсовой работы
студентов специальности
21.05.03 - «Технология геологической
разведки»***

**Екатеринбург
2020**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ФИЗИКА ГОРНЫХ ПОРОД»

специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Земцов Н.С. к.г.-м.н.

Екатеринбург
2020

Петрофизика-это одна из наук о Земле, изучающая физичекие свойства минералов, горных пород и руд. Целью изучения
петрофизических характеристик является установление состава,
структуры и состояния пород, особенностей дифференциации физических свойств горных пород, околорудных зон и полезных ископаемых
при решении задач поисков и разведки МШИ, геологического картирования, геотектоники, геодинамики, инженерной геологии геологии.

Петрофизические исследования позволяют обосновать возможность применения отдельных геофизических методов и комплекса геофизических исследований. Наряду с этим петрофизика позволяет решать широкий класс задач прикладного и теоретического характера,
от изучения состава и генезиса рудных и акцессорных минералов
(магнитная минералогия, петрофизика полупроводниковых минералов)
до опробования полезных ископаемых (скважинная и шахтная геофизика), от стратиграфии осадочных комплексов (палеомагнитология)
до прогнозирования состояния вещества в глубинных частях Земли
(экспериментальная и теоретическая петрофизика).

Современная петрофизика изучает широкий спектр Физических
свойств минералов, горных пород и полезных ископаемых:
коллекторские (пористость, проницаемость, влажность, влагоемкость, нефте - и газонасышенность), плотностные, магнитные (магнитная восприимчивость, остаточная намагниченность, температура
Кюри), электрические (Удельное сопротивление, диэлектрическая
проницаемость, вызванная поляризация, диффузионно-адсорбционная
активность, терма—ЭДС), тепловые (теплоемкость, теплопровод—
ность), ядернофизические (естественная радиоактивность, сечения
взаимодействия и параметры переноса излучений), упругие (упругие
модули, скорости распространения упругих волн).

Малый
объем часов (около 40 лекционных) не позволяет подробно изложить
все традиционные разделы петрофизики, обычно рассматриваемые в
учебниках. Поэтому автор рассматривает физические свойства, лежащие в
основе гравиразведки, магниторазведки, электроразведки,

сейсморазведки. Главное внимание уделяется факторам, определяющим петрофизические характеристики горных пород, связям физических свойств с петрографическими характеристиками. Петрофизические модели месторождений полезных ископаемых рассмотрены на отдельных примерах, методики и аппаратура петрофизических исследований вынесены на лабораторный практикум и учебно-методическую практику,

1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Когда ставится задача изучения каких—либо физических свойств

(например, плотности или магнитной восприимчивости) массива магматических или определенного горизонта осадочных горных пород, то из этих объектов (обнажении, горных выработок, керна буровых скважин) отбирается некоторое количество образцов, у которых измеряются соответствующие Физические характеристики. При этом оказывается, что измеренные значения у разных образцов различны.

Эти различия не связаны с погрешностями измерений, а есть результат вариаций физических свойств изученных образцов, т.е. следствие неоднородности объекта исследования. Дело в том, что формирование горных пород (и соответственно их физических свойств) происходит под воздействием большого числа факторов внутренних и внешних. Например, при образовании массивов магматических пород состав и структура будет определятся такими главными факторами:

1.Изменением глубины кристаллизации расплава.
2.Неоднородностью распределения давления и температуры в пределах магматического тела.
3.Фракционной и гравитационной дифференциацией.
4.Перемешиванием расплава.
5.Вааимодействием магмы с вмещающими породами различного состава.

Каждый из перечисленных факторов в свою очередь является сложной функцией от координат и времени. Результатом будет неоднородность состава, размера зерен, структуры и текстуры в пределах массива и как следствие, неоднородность физических свойств. Многообразие действующих факторов, их неопределенность во времени и пространстве позволяют рассматривать их как случайные события, а физические свойства — как случайные величины, к которым может быть применен аппарат математической статистики.

При образовании осадочных (например, обломочных) пород главными факторами являются:

1. Вещественный состав пород источника сноса, характер и степень их выветривания

2.Удаленность бассейна осадконакопления, глубина его, гидродинамические характеристики.

3.Химический состав и степень минерализации вод, окислительно-восстановительный потенциал, PH и т.д.

В процессе Формирования породы эти факторы изменяются в связи с изменениями источников сноса, глубин, гидродинамических и гидрохимических условий, что приводит к изменениям состава обломков, размеров и степени отсортированности зерен, количества и типа цемента и т.д. Возникает первичная неоднородность физических свойств.

На первичную неоднородность может накладываться вторичная, связанная с процессами преобразования: выветриванием, трещиноватостью, метаморфизмом, привносом и выносом вещества и т.д.

Учитывая, что студентам будет читаться специальный курс "Теоретические основы обработки результатов геофизических измерений", ниже приводятся только самые элементарные сведения по статистической обработке результатов изучения физических свойств горных пород, необходимые для понимания последующих разделов.

Предположим, что мы имеем М измерений некоторого физического параметра X, среди которых присутствуют максимальное X_{max} и минимальное X_{min} значения. Разобьем весь диапазон измеренных значений на п интервалов с шириной каждого АХ:

$\Delta X = (X_{max} - X_{min})/n$, (1.1)

Количество интервалов т связано с объемом выборки N и обычно определяется формулой Старджеса:

$$n = 3.3 * lgN + 1$$

где n округляется до целого числа.

Подсчитаем N_i -число измерений, параметр X которых попадает в 1-й интервал (1=1,2...n). Строится график зависимости N_i или $(N_i/N)*100^2$ от X. В каждом интервале рассчитанное значение изображается в виде отрезка горизонтальной линии (гистограмма). На рисунке 1.1 приведен пример гистограммы для N=40, n=5.

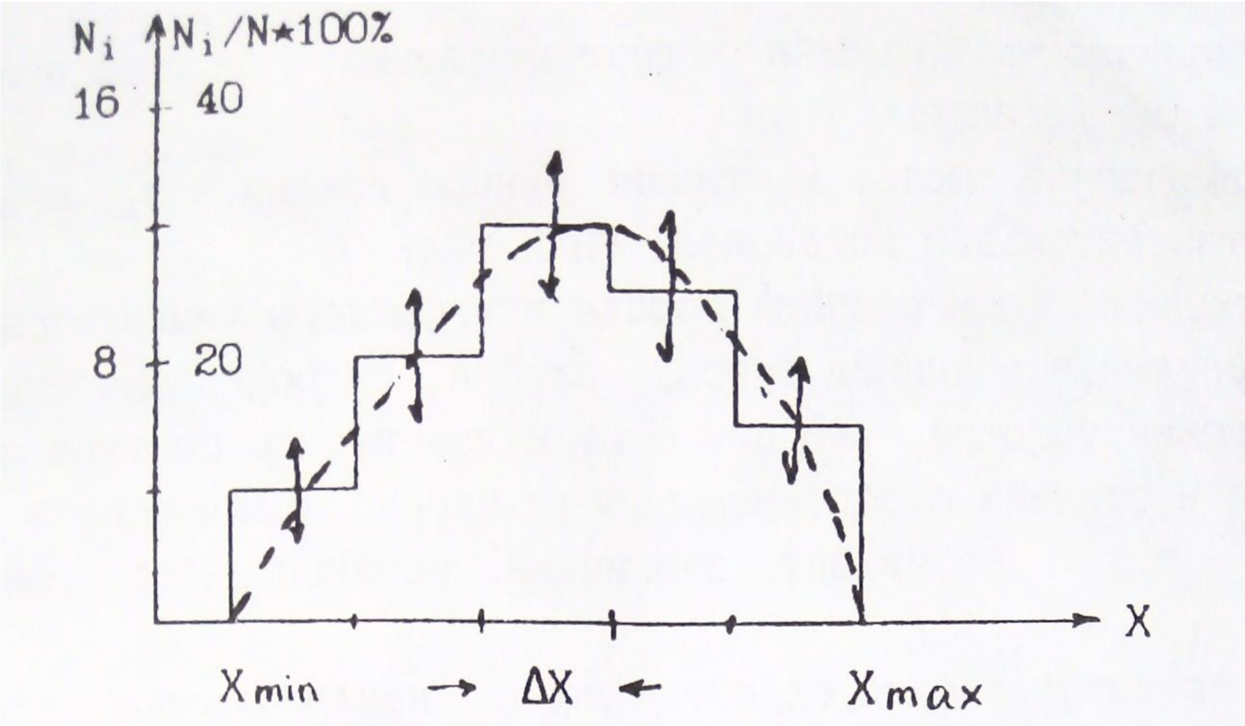


Рис.1.1. Гистограмма распределения параметра X

Гистограмма содержит в себе все статистические характеристики объекта исследования. В частности, величина $(N_i/N)*100\%$
представляет вероятность (в %) для данного объекта существования
значении параметра X в пределах 1-го интервала. При построении
реальных гистограмм не следует абсолютизировать полученный результат. Дело в том, что мы всегда имеем дело с ограниченными выборками и каждое значение N_i получено с погрешностью, вероятное
значение которой приближенно оценивается как $\pm\sqrt{N_i}$ (на рис. показано стрелками).

При неограниченном возрастании объема выборки ($N \to \sim$), число
интервалов (n) также стремится к бесконечности, а ширина интервала (ΔX) к нулю и мы получаем непрерывную кривую распределения,
КОТОРУЮ часто называют вариационной кривой. Приближенно вариационную кривую можно получить путем визуального сглаживания гистограммы таким образом, чтобы площади между осью абсцисс и гистограммой и осью абсцисс и вариационной кривой были равны (изображено пунктирной линией).

Опыт Изучения физических свойств показывает, что часто распределения их подчиняется двум законам: нормальному и логнормальному — ПРИ нормальном законе кривая распределения P(X) описывается выражением:

$$\mathrm{F}(X) = \frac{\exp[-\frac{(X_K - MX)^2}{2\sigma^2}]}{\sigma\sqrt{2\pi}}, (1.2)$$

где MX—мода параметра или значение его в максимуме распределения (для нормального закона совпадает со средним значением параметра: $MX = \bar{X} = \frac{\sum X_k}{N}$ k=(1,2...N).

σ-среднеквадратичное отклонение (σ^2—называют стандартом). Нормальному закону подчиняется обычно распределение плотности, пористости, скорости продольных волн. На рис.1.2 приведен пример нормального распределения с двумя различными значениями стандарта.

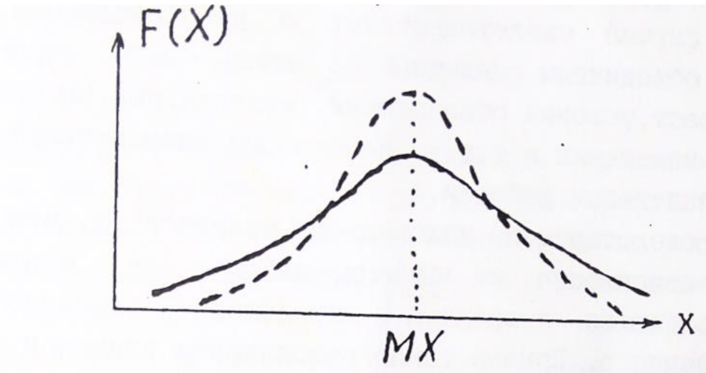


Рис.1.2. Нормальное распределение параметра X

Кривая характеризуется симметрией относительно моды и полностью определяется двумя величинами MX и σ. Логнормальныи закон соответствует случаю, когда нормальному закону подчиняется логарифм параметра (logX). Этому закону обычно подчиняется распределение магнитной восприимчивости, удельного электрического сопротивления, нефтенасыщенности. Для практического построения гистограмм или вариационных кривых в предположении существования лог-нормального закона измеренным значениям $X_к$ вычисляются значения $\log X_к$, которые обрабатываются способом, описанным выше.

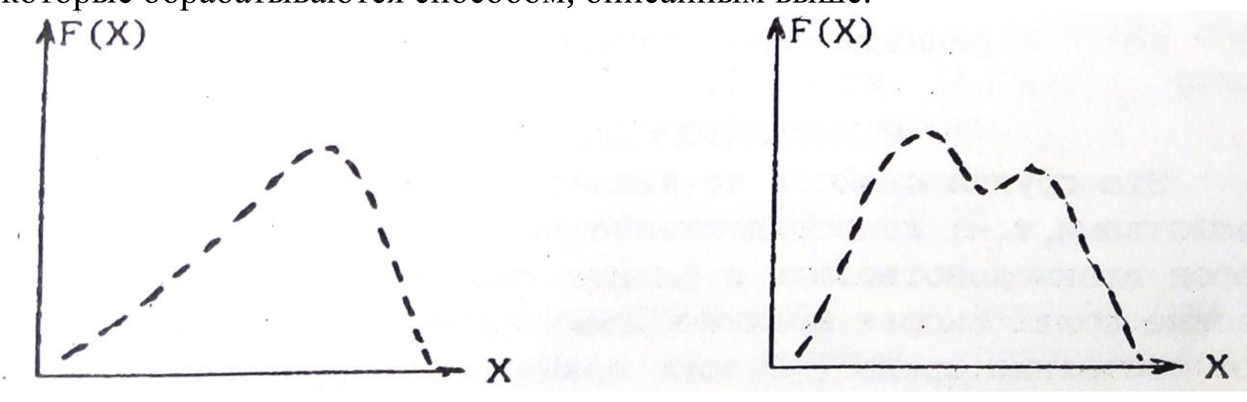


Рис.1.3.Примеры реальных кривых распределения

Реальные кривые распределения часто отличаются от теоретических
Они могут быть асимметричными и даже иметь два и более максимумов (рис. 1.3).

В первому случае появляются новые характеристики распределения (одна или более), например параметр асимметрии. В любом случае выборки считаются статистически одинаковыми если все (!) статистические параметры их одинаковы. Асимметрия обычно связана со
вторичными процессами изменения физических свойств в результате выветривания, регионального или локального метаморфизма и т.д.

Второй случай свидетельствует о неоднородности выборки; в
одну группу объединены различные по каким—либо характеристикам
породы (возраст, условия образования, минеральный состав, структура, степень изменения и т.д.). Необходимы дополнительные исследования для разделения выборки.

Важным следствием из изложенного является то, что все петрофизические зависимости не функциональные, а статистические,
то есть выполняются в среднем с определенной вероятностью отклонения от среднего. Пример такой зависимости приведен на рис.1.4.

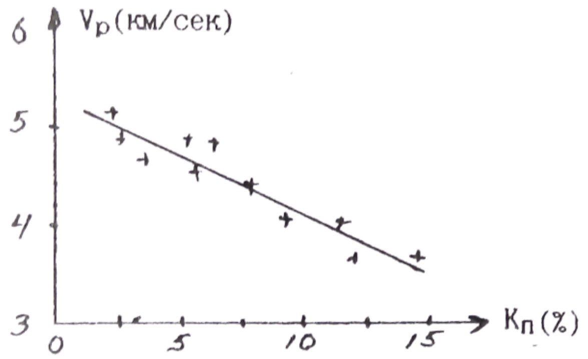


Рис.1.4. Зависимость скорости продольных волн (Vp)
от коэффициента пористости ($К_п$)(+ - экспериментальные значения)
2.КОЛЛЕКТОРСКИЕ СВОЙСТВА
Эта группа свойств не является в строгом смысле физическими
свойствами, т.к. непосредственно не определяет способности горных

пород взаимодействовать с физическими полями или создавать физические поля. Скорее коллекторские свойства характеризуют физическое состояние среды. В тоже время коллекторские свойства влияют
на другие Физические свойства (плотностные, электрические. Упругие) и определяют корреляционные связи между ними. С другой стороны,

коллекторские свойства, такие как пористость, проницаемость.
водо-, нефте- и газонасщденность. это важнейшие характеристики решенных месторождений углеводородов и подземных вод, определяющие запасы и условия эксплуатации этих месторождений сведения 0 коллекторских свойствах могут быть получены через плотностные, электрические и упругие свойства. Поэтому коллекторские
свойства рассматриваются во всех учебниках и курсах петрофизики.

2. 1. ПОРИСТОСТЬ

Пористостью называется совокупность пространства в горной
породе, не занятого твердой фазой. Оно заполнено газами, жидкостями (вода, нефть) или их смесями. Количественно пористость выражают через коэффициенты пористости К: отношение объема пор (Vпор) к
объему горной породы (Vг.п.) в процентах. Общий объем горной по-
роды равен сумме объемов пор и твердой фазы ($V_{\text{г.п.}} = V_{\text{пор}} + V_{\text{т.ф}}$). При
всем этом выделяют:

а) Коэффициент общей пористости ($К_{п}$) — отношение объема всех
пор (Vпор) к объему породы:

$$К_{п} = (V_{\text{пор}}/V_{\text{г.п.}}) * 100\%, (2.1)$$

6) Коэффициент открытой пористости ($К_{п.о}$) .- отношение объема
открытых пор (Vo.пор) к объему породы:

$$К_{п.о.} = (V_{\text{о.пор}}/V_{\text{г.п.}}) * 100\%. (2.2)$$

Открытыми порами называются поры, сообщающиеся между собой.
в) Коэффициент динамической пористости ($К_{п.д}$) - отношение

объема динамических пор ($V_{\text{д,пор}}$) к объему породы.

$$К_{п.д} = (V_{\text{д.пор}}/V_{\text{г.п.}}) * 100\%. (2. 3)$$

динамическими порами называются поры, по которым происходит движение жидкостей или газов при наличии градиента-давления. Часть открытых пор может быть представлена тупиковыми порами или водой, прочно связанной с поверхностью твердой фазы, и не участвует в переносе жидкостей или газов. Очевидно, что Кп > Кп.о) Кп.д.

2.1.1. Классификация пор.

1) По происхождению поры подразделяются на первичные и вторичные. Первичные возникают при образовании породы и представлены структурными порами — промежутками между частицами обломочных „о-род (грубообломочных, песчанистых, алевритовых, глинистых), межкристаллическими промежутками магматических и метаморфических пород и т. д. При уплотнении цементации, перекристаллизации, метаморфизме форма и размеры первичных пор могут меняться. Вторичные поры образуются при последующих воздействиях на породы процессов выветривания, выщелачивания, кристаллизации, тектонических нагрузок и т.д.

2) По форме поры могут быть близкими к **ромбоздальным** (рыхлые отсортированные обломочные осадочные породы), близкими к **тетраэдрическим** (те же, но уплотненные породы), **щелевидным** (порода состоит из пластинчатых минералов: слюды, глины), в виде **канальцев** переменного сечения (плохо отсортированные обломочные породы), **трещеновидные** (магматические, метаморфические, плотные осадочные породы, испытавшие воздействие сильных тектонических нагрузок), **каверновидные** (карбонатные породы, подвергшиеся процессам растворения и выщелачивания), **пузырчатые** (магматические породы), **ячеистые** (известковые и кремнистые туфы), **каналовидные** (лёссы).

3) По размерам выделяют а) **сверхкапиллярные** - эффективный (средний) диаметр сечения пор $d_{э.ф.}$ более 0,1 мм. (грубообломочные породы типа галечников и гравия, крупно— и среднезернистые пески, оолитовые известняки, выщелоченные карбонаты). В сверхкапиллярных порах доля воды, связанной с поверхностью твердой фазы, не велика, вода в основном свободная и перемещается по законам гидродинамики. б) Капиллярные - эффективный диаметр пор $d_{э.ф.}1*10^{-4}-1*10^{-1}$ мм. (мелкозернистые, менее отсортированные, сцементированные пороли: мелкозернистые пески и песчаники, некоторые карбонатные породы)-

В **Капиллярных** порах более высокое содержание связанной воды И возможен ее подъем в силу поверхностного натяжения. в) **Субкапиллярные** - $d_{э.ф.}$<1*10^{-4} мм. (глины, микрокристаллические известняки, туфы). Практически вся вода перового пространства связана на поверхности твердой фазы, перемещения воды почти нет.

2.1.2. ПОРИСТОСТЬ ОБЛОМОЧНЫХ ОСАДОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

Основными факторами определяющими пористость обломочных пород являются: 1) форма и размер обломков, 2) степень отсортированности 3) степень уплотнения и цементации.

1) Влияние Формы и размера частиц иллюстрируется таблицей, в которой приведены значения Кп (%) для искусственных пород:

Таблица 1

Размер частиц (мм.)	Кварц окатанный	Кварц остроуг.	Ортоклаз остроуг.	Слюда
2-1	33	38	45	80
0.5-0.25	33	41	49	72
0.1-0.06	39	45	52	68

Отмечается малое влияние размера частиц и существенно большее формы (пористость возрастает в 2-2.5 раза при переходе от изометричных зерен к пластинчатым).

2) Степень отсортированности характеризует распределение обломков по размерам и количественно выражается через коэффициент отсортированности G_f:

$$G_f = \frac{d_{\text{ср}} - \sum V_i \delta d_i}{d_{\text{ср}}}, (2.4)$$

где $V_i -$ объемное содержание частиц диаметра d_i в породе,

δd_i—отклонение от среднего диаметра 1-й группы, '

$d_{\text{ср}}$- средний диаметр частиц.

Коэффициент отсортированности меняется от 1 (хорошо отсортированная порода, все частицы одного размере) до 0 (плохо отсортированная порода. размеры частиц равномерно распределен от о до d_{max}).
присутствие в породе частиц разного размера приводит к тому, что
мелкие частицы заполняют промежутки между крупными и уменьшение коэффициента G_f (ухудшение отсортированности) ведет к уменьшению коэффициента пористости.

На рис.2.1 приведен пример такой зависимости.

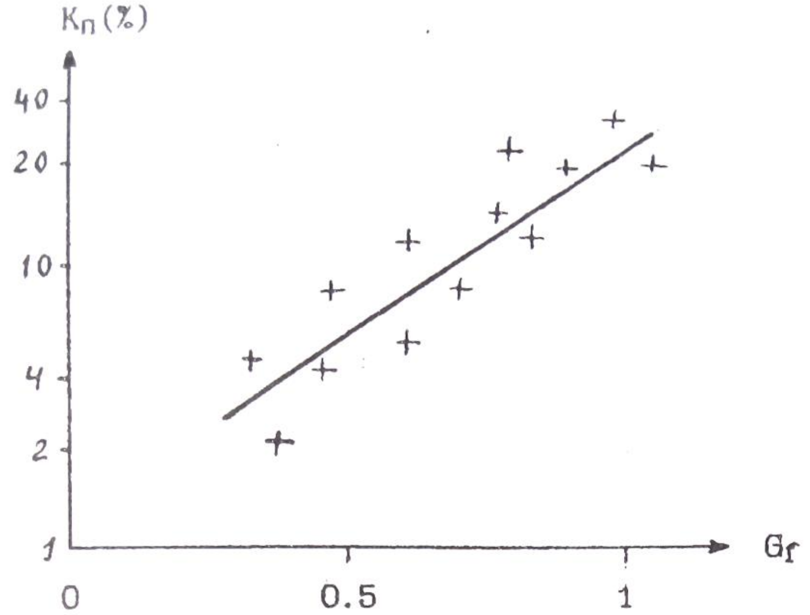


Рис.2.1. Зависимость коэффициента пористости от
коэффициента отсортированности песчаников
и алевролитов Туймазинской площади

Изменение отсортированности может приводить к изменение пористости на порядок. В связи с этим интересно рассмотреть изменение пористости песчано—глинистых образований в зависимости от
состава (рис.2,2). . '

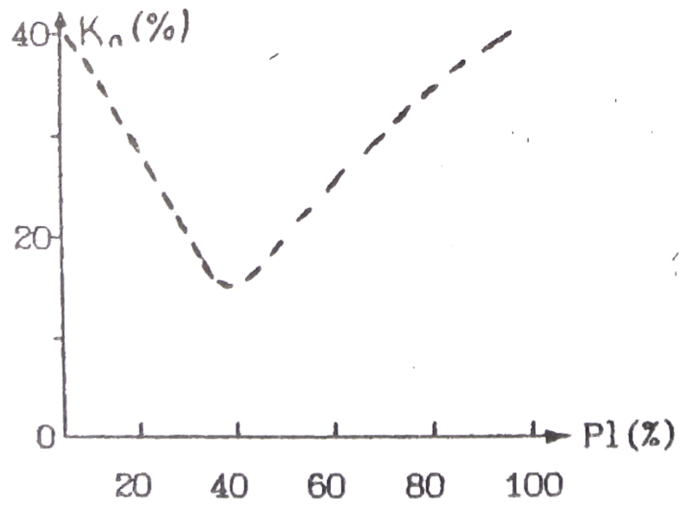


Рис.2.2. Зависимость коэффициента пористости от глинистости (Р1) песчано—глинистых отложении (теоретическая зависимость)

Положим, что песчаная и глинистая фракции представлены однородными по размерам частицами каждая (песчаная крупными, глинистая мелкими). Коэффициенты пористости каждой фракции около
40%. При увеличении глинистости (Р1) в породе будет происходить уменьшение пористости в результате частичного заполнения глинистыми частицами промежутков между крупным песчинками. При достижении 40% глинистости все эти промежутки (поры) будут заполнены
глинистым материалом (минимальная отсортированность), а Кп равен 0.4*0.4=0.16 (16%). При дальнейшем увеличении глинистости отсортированность и коэффициент пористости будут возрастать.

3) Под действием нагрузки вышележащих пород первичные рыхлые осадки уплотняются, что приводит к уменьшению их пористости. В начале уплотнение связано с перемещением отдельных частиц и более компактным их взаимным расположением. Затем происходит частичное разрушение и сшивание обломков (ухудшение отсортированности). Этот процесс идет при нагрузках, превышающих несколько тысяч кг/см2. Наиболее сильно уплотняются глины, коэффициент пористости которых под нагрузкой может меняться от 50%. до 5%. В результате для многих районов, сложенных обломочными породами, наблюдается корреляционная связь Кп и глубины залегания породы:

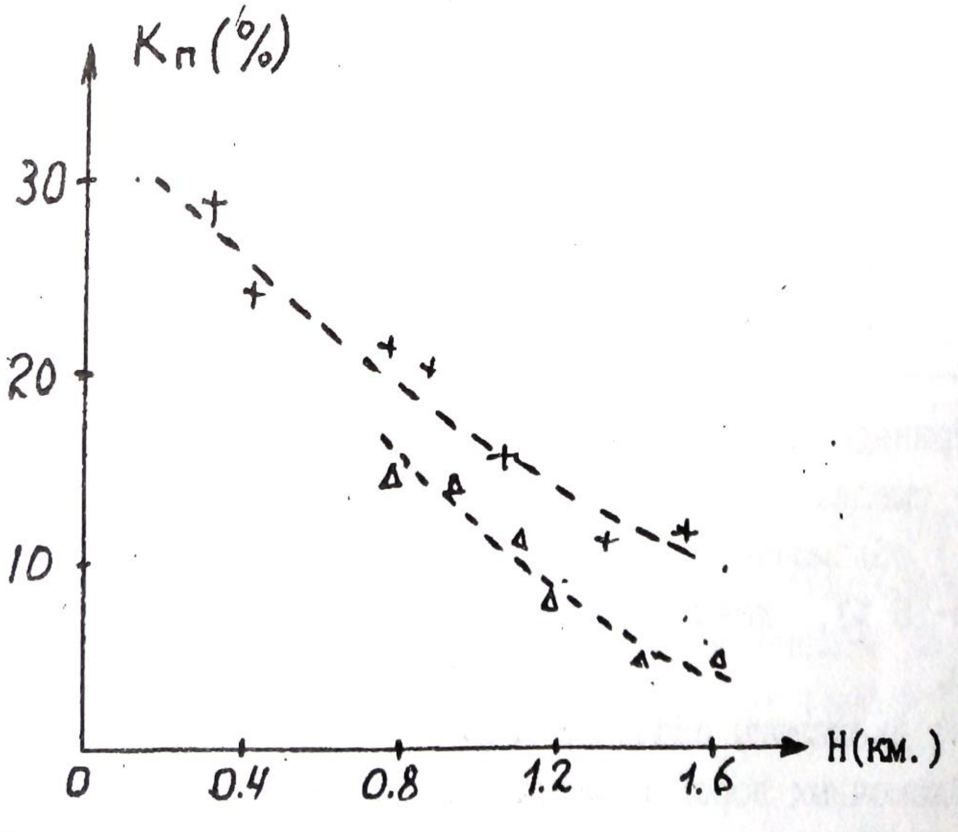


Рис.2,3. Зависимость Кп от глубины залегания Н;
+-глины, Δ- алевролиты

$К_п(H) = К_п(0) * \exp(-\beta H)$, (2.5)

где $К_п$ (0) — коэффициент пористости вблизи поверхности,
β - константа, зависящая от типа отложений (β=0.05).
Уравнения типа (2.5) позволяют прогнозировать изменения пористости с глубиной, что очень важно при интерпретации результатов геофизических съемок, т.к. величина пористости определяет ряд других физических свойств: плотность, удельное электрическое сопротивление, скорость упругих волн.

Процесс цементации заключается в выпадении вторичных минералов (карбонаты, опал, глинистые минералы и т.д.) в поровом пространстве из поровых вод. В результате пористость уменьшается вплоть до нескольких процентов.

В заключение приведем данные по пористости некоторых типов обломочных пород.

Таблица 2

Порода	Кп(%)	
	Пределы	Наиболее вероятные

Пески	5-55	20-35
Песчаники	0.5-40	5-30
Лессы	40-55	40-55
Алевролиты	1-40	3-25
Глины	1-75	20-50
Аргиллиты	1-30	1.5-15

Приведенные в таблице данные позволяют сделать следующие основные выводы:

1) обломочные породы обычно характеризуются средней (Кп=10-15 %), повышенной (Кп=15-20 %) и высокой (Кп>20 %) пористостью.

2) диапазоны значений коэффициентов пористости различных типов обломочных пород в значительной степени перекрываются. Следует подчеркнуть, что данные таб.2 обобщают сведения о пористости пород всей страны в целом. В конкретных районах, у конкретных пластов диапазон колебания Кп может быть существенно уже. Например,

пласты – коллекторы AB_{2-5} одного из нефтяных районов Тюменской области имеют Кп=20-30 %

2.1.3. ПОРИСТОСТЬ КАРБОНАТНЫХ ОСАДОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

первичные карбонатные осадки (известковые и доломитовые илы) имеют высокую пористость (Кп=60-80 %). По мере их уплотнения пористость резко уменьшается (Кп=0.5—15 %). В дальнейшем появляется вторичная пористость, обусловленная перекристаллизацией, трещиноватостью и выщелачиванием карбонатных пород. Характерная особенность карбонатных пород - неравномерность распределения пористости в пространстве. Поэтому. при изучение карбонатных коллекторов необходимо отбирать - большое количество образцов с различных интервалов по глубине и площади. Значения пористости основных типов карбонатных пород приведены в таблице 3.

Таблица 3

Порода	Кп(%)	
	пределы	Наиболее вероятные
Известковый ил	65-85	-

Известняки	0.5-48	1.5-15
Известковый туф	20-30	-
Мел	10-55	40-50
Доломиты	0.1-37	3-20

2. 1.4 ПОРИСТОСТЬ ГИДРОХИМИЧЕСКИХ ОСАДОЧННХ ГОРНЫХ ПОРОД.

В отличие от двух предыдущих групп пород, гидрохимические

осадки характеризуются пониженными и низкими значениями коэффициентов пористости. Так у ангидритов Кп=0.2—15 % у гипсов 1-25 %,

У каменной соли 0-5 %.

2.1.5 ПОРИТОСТЬ МАГМАТИЧЕСКИХ И МЕТАМОРФИЧЕСКИХ ГОРНЫХ ПОРОД

Для этой категории пород характерна низкая пористость. Исключение составляют кайнотипные эффузивы, которые в силу особенности образования (быстрое остывание, не полный отход летучих
компонент), могут иметь повышенную и высокую пористость. Таблица 4 иллюстрирует значения коэффициента общей пористости магматических и метаморфических пород.

Таблица 4

Порода	Кп(%)
	Пределы
Граниты	0.3-4
Габбро	0.3-3
Пироксенит	0.2-2
Базальт	0.5-40
Диабаз	0.2-3
Порфирит	0.4-6
Гнейс	0.2-6

Сланец хлорит.	0.2-1
Амфиболит	0.1-6

данные относятся к невыветрелым породам. В процессе выветривания пористость возрастает (образование вторичной пористости)
и может достигать 20 - 40 %.

Другая особенность данной группы пород состоит в существенном преобладании закрытой пористости над открытой.

2.1.6 ПОРИСТОСТЬ ГИДРОТЕРМАЛЬНО ИЗМЕНЕННЫХ ПОРОД

К гидротермально измененным породам приурочены месторождения
рудных полезных ископаемых. Многочисленные исследования показали.
что зоны развития этих пород характеризуются повышенными значениями пористости по сравнению с неизмененными ,породами. Вероятно
это связано с тем, что гидротермальные растворы могут перемешаться в средах с повышенной пористостью и проницаемостью. Таким образом, зоны повышенной пористости являются своеобразным индикатором

гидротермальных процессов и, косвенно, признаком оруденения.
На рисунке 2.4 приведен пример распределения пористости в районе медноколчеданного оруденения.

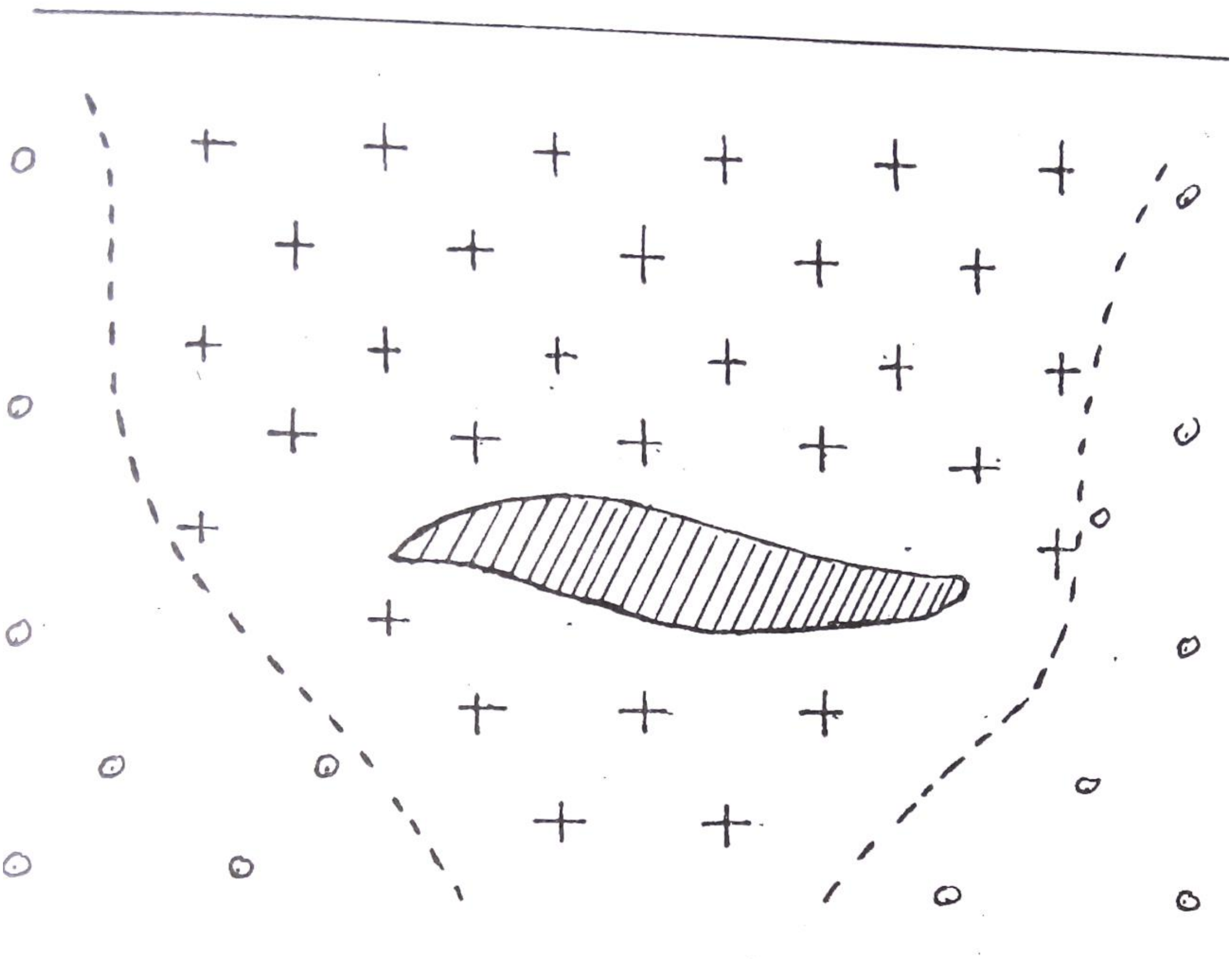


Рис.2.4. Распределение коэффициента открытой пористости
на месторождении Абеи-Саз (Башкирия)
-рудное тело
-Кп.о=0.5-3 %
-Кп.о<0.2%

2.2. ВЛАЖНОСТЬ. ВЛАГОЕМКОСТЬ

Влажность определяется, как количество воды в горной породе,
а **влагоемкость**, как способность горной породы удерживать воду. Вода в горных породах может присутствовать в различных видах:

а) **Прочно связанная вода** - слои воды толщиной в несколько молекул. непосредственно примыкающий к стенке перового канала. Эта
вода силами Ван-дер—Ваальса прочно связана с твердой фазой породы,
Не может перемешаться, обладает аномальными физическими свойствами

(плотность до 2 г/см3, температура замерзания до -78 С^{o}, повышенная вязкость, плохая растворимость солей).

б) **Рыхло связанная вода** - непосредственно примыкает к слою прочно связанной воды, менее прочно связана с твердой фазой. В частности, образуется в углах пор в силу поверхностного натяжения (стыковая вода). Толщина слоя рыхло связанной воды составляет десятки и более молекул, она имеет повышенную плотность и пониженную температуру замерзания.

в) **Свободная вода** - обычная вода, которая свободно перемещается в поровом пространстве по законам гидродинамики.

Выделяют несколько типов влагоемкости:

а) **Машинальная гигроскопическая влагоемкость** ($W_{мг}$) - максимальное количество парообразной влаги (в процентах к весу абсолютно сухой породы), которое способна поглотить порода из воздуха влажностью 94%. Эта влагоемкость включает в себя прочно связанную и часть рыхло связанной воды.

б) **Капиллярная влагоемкость** — полное количество воды, которое присутствует в породе в силу явления капиллярного подъема.

в) **Полная влагоемкость** - максимальное количество связанной и свободной воды, которое может присутствовать в горной породе.

Соотношение между связанной и свободной водой при полном заполнении перового пространства определяется сечением поровых каналов и составом твердой фазы породы. Относительное количество свободной воды уменьшается с уменьшением сечения пор и увеличением содержания глинистых минералов. В случае чистых глин в норах присутствует только связанная вода, а в грубообломочных породы (галечники, крупнозернистые пески) почти вся вода представлена свободной.
Двойной электрический слой.
Поверхность твердой фазы перового пространства адсорбирует ионы одного знака из поровых растворов. Эти ионы удерживаются на ней силами Ван—дер—Ваальса, создавая слой не компенсированных зарядов (слой потенциал-определяющих ионов). В результате электростатического взаимодействия из перового раствора к нему будут притягиваться ионы противоположного знака (слой противоинов).
что в совокупности создает двойной электрический слой. Противоионы образуют сложную пространственную структуру. На расстоянии порядка размера молекулы противоионы прочно удерживается силами электростатического взаимодействия и не могут перемещаться, образуя плотную часть двойного слоя. Дальше от поверхности твердой

фазы их концентрация убывает и они не столь сильно связаны с потенциал-определяющим слоем. Эта область называется диффузионной частью двойного слоя и может перемещаться при движении жидкости в поровом пространстве примерная структура двойного слоя приведена на рис. 2.5.

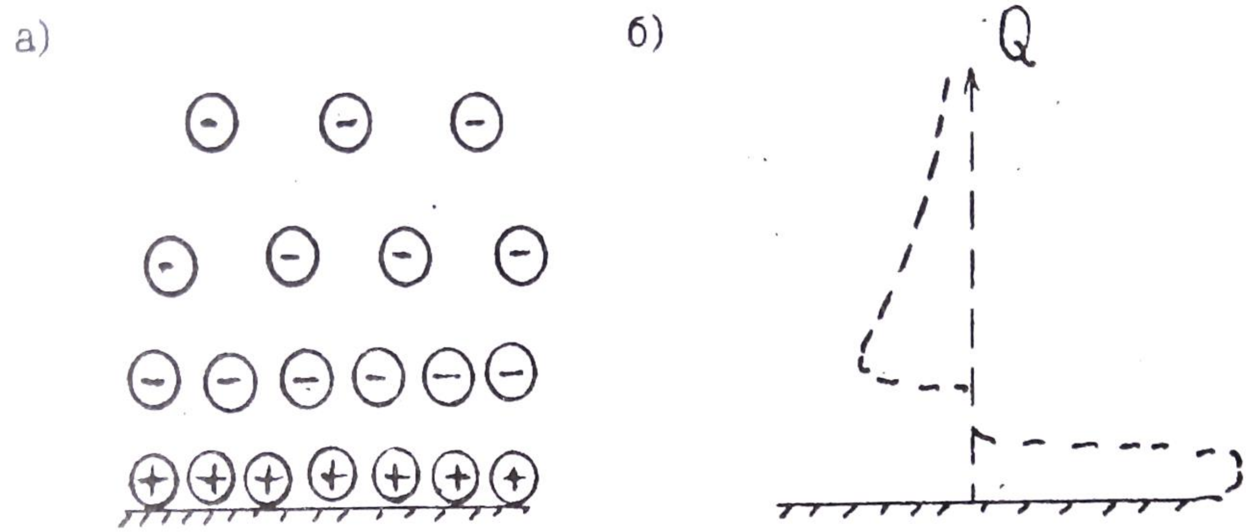


Рис.2.5. Строение двойного электрического слоя (а)
и распределение заряда Q в пределах двойного слоя (б)

Область, занятая двойным слоем, примерно соответствует или несколько больше слоя прочно и рыхло связанной воды.

2. 3. ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Проницаемостью называется способность горной породы пропускать жидкости, газы или их смеси при наличии градиента давления.
Выделяют физическую или абсолютную и фазовую проницаемости.

2.3. 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРОНИПАШОСТЬ

Это способность горных пород пропускать **однородные** жидкости или газы. Представим себе трубку, в которую помещен образец цилиндрической формы (Рис.2.б). На верхней грани образца давление P_1 на нижней P_2. Градиент давления равен $\frac{\Delta P}{L}$, где $\Delta = P_1 - P_2$, L-длина образца. Через нижнюю границу будет вытекать жидкость. раскол которой равен Q (см^3/сек). Обозначим площадь поперечного сечения образца через S и введем удельный расход V=Q/S (расход через единицу площади поперечного сечения). Соотношение между этими величинами описываются законом Дарси: V прямо пропорционален градиенту давления и обратно пропорционален вязкости (μ).

$$V = К_{пр}\frac{\frac{P_1-P_2}{L}}{\mu}(2,6)$$

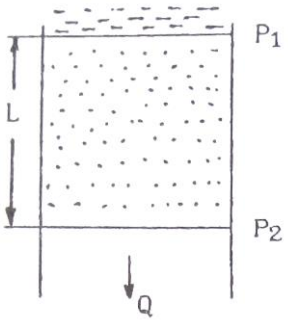


Рис.2.6. К определению коэффициента проницаемости

Коэффициент пропорциональности в этом уравнении (кпд) называется коэффициентом проницаемости, он является количественно характеристикой физической проницаемости. Единицей Кпр в системе СИ служит мг. Существует вне системная единица - Дарси, которая соответствет проницаемости породы, у которой удельный расход води равен 1 смз/сек при градиенте давления 1 атм/см. $1м^2 \approx 1 * 10^{12}$ Д или $1Д \approx 1 * 10^{-12}$ м^2 = 1 мкм^2.

Дарси крупная единица, обычно для характеристики проницаемости горных пород используют тысячную долю Дарси – 1мД, 1 мД=1 фм^2

2.3.2. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЗИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОРИСТОСТИ И СТРУКТУРОЙ ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Для простейшей модели строения перового пространства в виде трубчатых капилляров (рис.2.7) выведено простое соотношение -

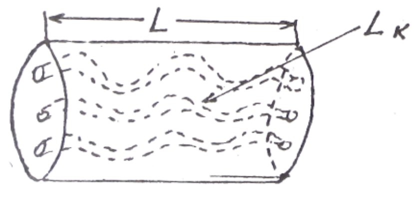


Рис.2.7. К пояснению формулы Козени—Кармана

формула Козени-Кармана

$К_{пр} = \frac{К_{пд}^3}{S_ф^2 * T^2 * f}$, (2.7)

Где $К_{пд}$ – коэффициент динамической пористости.

$S_ф$ – удельная поверхность порового пространства (площадь поверхности пор в единице объема горной породы.

$T=L_к/L$ -удельная извилистость поровых каналов (отношение средней длины перового канала Lк в пределах образца, к длине образца L. .

f - некоторый параметр, зависящий от формы сечения порового канала (лежит в пределах от 2 до 3).

(**Предупреждение**. В литературе в формулах типа 2.7 часто используют обозначение Кп или термин пористость вместо динамической пористости необходимо представлять, что движение флюидов возможно только по динамическим порам.)

Из формулы 2.7 следует сильная зависимость коэффициента проницаемости от коэффициента пористости (третья степень) и структуры перового пространства, которая для данной модели определяется величинами T и $S_ф$. На рис. 2.8 приведены примеры зависимости $К_{пр}$ от $К_{пд}$ (экспериментальные данные)

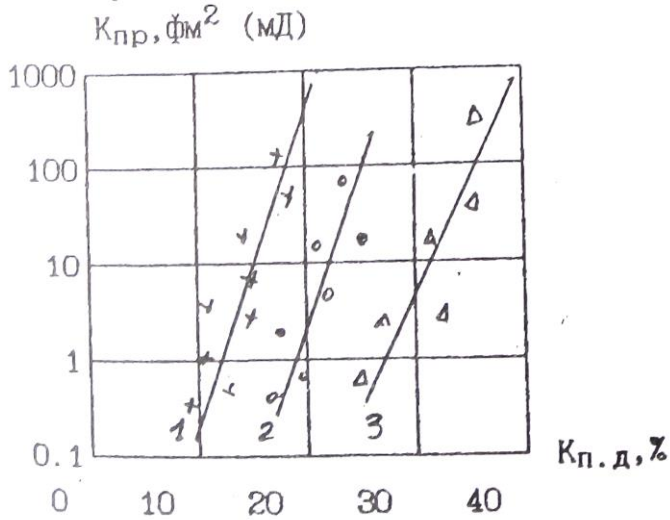


Рис.2.8. Зависимость коэффициента проницаемости от коэффициента динамической пористости 1 - песчаник, нижний вилькокс, 2 – песчаник слабо сцементированный, 3 - песчаник тонкозернистый

Линейный вид зависимостей в полулогарифмическом масштабе и угол наклона подтверждают зависимость $К_{пр}$ от третьей степени $К_{пд}$- Смещение линий в горизонтальном направлении обусловлено влиянием структуры порового пространства. Величина удельной по-

нием поровых каналов, и возрастает с уменьшением сечения. У обломочных пород сечение каналов связано с размером зерен. Например в случае отсортированной породы с изометричными обломками со сред-
ним диаметром d:

$$S_{ф} \approx 3.6/d \quad (2.8)$$

Таким образом, уменьшение размера верен приводит к уменьшению проницаемости. Это объясняет непроницаемость глин (тонкодисперсные породы), хотя коэффициент пористости у них составляет десятки процентов. Рис. 2.9 иллюстрирует подобную зависимость.

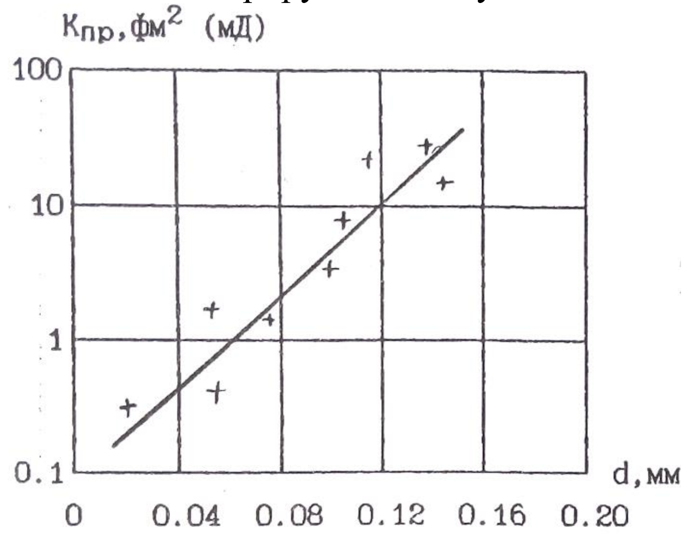


Рис. 2.9, Зависимость коэффициента проницаемости от среднего диаметра и зерен песчано—алевритово—глинистых пород

В случае трещинной пористости проницаемость определяется приближенным выражением:

$$К_{пр} \approx 8.45\, b^2 \quad (2.9)$$

где b — средний размер поперечного сечения трещин (раскрытость трещин) в мкм,
Кпт - коэффициент трещиной пористости в %.
По величине коэффициента проницаемости все породы подразделяются на три группы:

1. **Проницаемые** — грубообломочные породы (галечники, гравии), хорошо отсортированные, слабо сцементированные песчано—алевритовые породы, кавернозные и трещиноватые карбонатные породы, трещиноватые магматические породы, Это породы с высоким коэффициентом пористости (20-40%). сверхкапиллярными и капиллярными порами, существенным преобладанием свободной воды в поровом пространстве, Коэффициент проницаемости их лежит в пределах 10 - 10^6 фм^2 (мД).

2.**Полупроницаемые** — менее отсортированные песчано-алевритово-глинистые породы, мелкотрещинные меловидные карбонатные породы. поровое пространство представлено субкапиллярными порами, преобладает связанная вода. Кпр в пределах 0,1-10 фм^2 (мД).

3. **Практически непроницаемые** - глины, аргиллиты, сильно сцементированные песчаники и алевролиты, невыветрелые кристаллические карбонатные и магматические породы. Кпр < 0_1 фм^2 (мД).

2. 3. 3. ФАЗОВАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Это способность горной породы, насыщенной неоднородной жидкостью или смесью жидкостей и газов, пропускать ту или иную фазу при наличии градиента давления. Для обычных в горных породах фаз (вода, нефть, газ) количественно фазовая проницаемость характеризуется коэффициентами Фазовой проницаемости для воды (Кпр.в), нефти (Кпр.н) и газа (Кпр.г), которые являются коэффициентами пропорциональности в аналогах уравнения Дарси:

$$V_B = К_{\text{пр.в}} \frac{\frac{\Delta P}{L}}{\mu_{\text{н}}} \qquad V_{\text{Н}} = К_{\text{пр.н}} \frac{\frac{\Delta P}{L}}{\mu_{\text{н}}} \qquad V_{\Gamma} = К_{\text{пр.г}} \frac{\frac{\Delta P}{L}}{\mu_{\text{н}}}, (2.10)$$

где V_B, $V_{\text{Н}}$, V_{Γ} - удельные расходы воды, нефти и газа соответственно.

Часто используют коэффициенты **относительной** фазовой проницаемости, которые определяют как отношение коэффициента фазовой проницаемости к коэффициенту абсолютной проницаемости в процентах. Например, коэффициент относительной Фазовой проницаемости воды ($\overline{К}_{\text{пр.в}}$) запишется: $\overline{К}_{\text{пр.в}} = (\frac{К_{\text{пр.в}}}{К_{\text{пр}}})$ 100 %.

Фазовая проницаемость отличается рядом особенностей, которые мы проиллюстрируем примером двухфазной смеси вода-нефть (Рис.2.10). На рис. Представлены зависимости коэффициентов относительной фазовой проницаемости ($\overline{К}_{\text{пр.в}}, \overline{К}_{\text{пр.н}}$) от соотношения фаз.
Последнее выражено через коэффициент вод насыщенности порового пространства ($К_В$) — отношение объема воды в поровом пространстве к объему пор. Полагаем, что все поровое пространство заполнено смесью вода—нефть, следовательно коэффициент нефтенасыщенности $К_Н$=1 -$К_В$. Отметим:

1) Графики зависимостей имеют в целом вогнутость вниз, т.е.

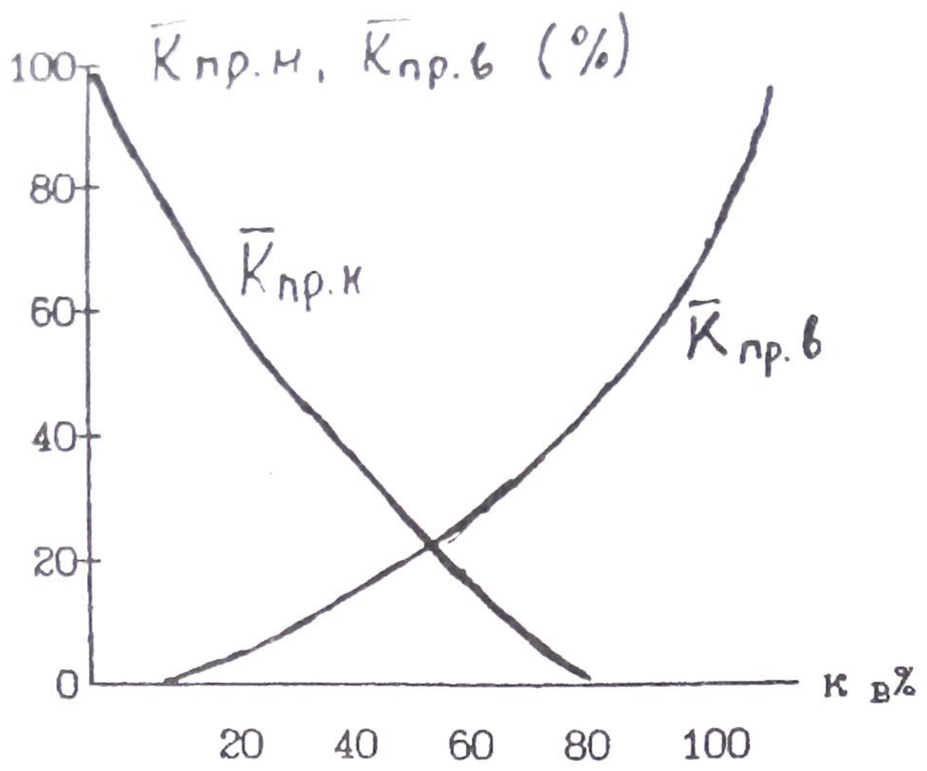


Рис.2.10. Зависимость коэффициентов относительной
проницаемости по воде (Кпр.в) и нефти (Кпр.н) от
соотношения фаз в смеси вода нефть

сумма Кпр.в+кПр.н<100. Смеси фильтруются хуже, чем однородные жидкости.

2) При определенном соотношении фаз возможен расход какой-либо одной фазы (при K_B < 20% вода не фильтруется через породу, а при K_B > 80%; не Фильтруется нефть).

3. ПЛОТНОСТННЕ СВОЙСТВА

Эта группа свойств определяет возможность применения ряда геофизических методов. Например, гравиразведки для изучения геологических структур, поисков и разведки полезных ископаемых, ядерно-геофизическиих методов (гамма—гамма-каротаж) для расчленения разрезов скважин.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЁДШНИЯ

Плотность - это масса единицы объема вещества. **Удельный вес** - вес единицы объема вещества. По определению плотность (δ):

$$\delta = \frac{m}{V}, (3.1)$$

Удельный вес (Δ):

$$\Delta = \frac{P}{V}, \qquad (3.2)$$

где m, P, V - соответственно масса, вес и объем вещества. Так как P=mg (g- ускорение силы тяжести), то плотность это константа а удельный вес зависит от силы тяжести. В системе си единицей плотности является кг/м^3 удельного веса - Н/м^3. В системе СГС единица массы — грамм (г), внесистемная единица веса граммсила (Г) единицы объема - см^3. Плотности в системе СГС (г/см^3) и удельный вес во внесистемных единицах (Г/см^3) численно совпадают на поверхности Земли с точностью до 0.2-0.4% (изменения удельного веса связаны с изменениями ускорения силы тяжести по поверхности Земли).

Понятия плотность и удельный вес, строго говоря, применимы для однородных сред. Для неоднородных сред вводятся усредненные характеристики — объемная плотность (δ) и объемный вес (d), которые определяются также по Формулам (3.1 и 3.2). Следует иметь в виду, что при определении объемных параметров размер изучаемого объекта должен быть много больше размеров неоднородностей. Соотношение между единицами в различных системах:

1г/см^3 =1000 кг/м^3, 1Г/см =9810 Н/^{м3}.

Используют так же понятие **минеральная плотность** (δ_M) — масса единицы объема твердой фазы минерала или горной породы. Следует отметить, что наряду с системой СИ в литературе при описании плотностных свойств широко используется и система СГС, которую мы будем использовать при дальнейшем изложении материала. Кроме того общепринятым является использование терминов плотность и удельный вес вместо объемная плотность и объемный вес.

3. 2 ПЛОТНОСТЬ МИНЕРАЛОВ

Плотность минералов определяется химическим составом, строением электронных оболочек атомов, составляющих различные минералы. а также условиями их образования. Эти факторы определяют соотношение в минералах атомов с различными атомными массами, характер кристаллической связи, конституцию кристаллов. Большая часть породообразующих минералов имеет ионную или ковалентную

форму кристаллической связи, состоят из атомов с низкими средними атомными массами и имеют плотность порядка 2.2 – 3.5 г/см^3,
Среди рудных минералов преобладает ионно-металлическая и ковалетно-металлическая форма связи, часто присутствуют элементы с высокими атомными массами, ЧТО обуславливает повышение плотности до 3.5 — 7.5г/см^3.

Средняя атомная масса основных породообразующим минералов (кварц, полевые шпаты, плагиоклазы, карбонаты) почти постоянна и несколько повышается в пироксенах и железистых оливинах. В связи с этим главным фактором определяющим плотность этих минералов является плотность упаковки атомов в кристаллической решетке. Например каркасные структуры силикатов (кварц, полевые шпаты, плагиоклазы) обуславливают низкую плотность. У цепочечных силикатов (пироксены) плотность выше. Еще выше плотность минералов с островной структурой (оливины). Для породообразующих минералов характерны явления **изоморфизма** и **полиморфизма**. Изоморфизм это изменение состава без изменения структуры кристаллической решетки. Целые группы минералов магматических и метаморфических пород (плагиоклазы, амфиболы, пироксены, оливины, гранаты) образуют
непрерывные изоморфные ряды. Например плагиоклазовый ряд начинается с альбита ($NaAl_2Si_3O_8$) с плотностью 2.61г/см^3 и заканчивается анортитом ($CaAlSi_2O_8$) с плотностью 2.76г/см. Соотношение между NA и Ca в ряду может быть любым, при этом образуется непрерывный ряд минералов (олигоклаз, андезин, лабрадор, битовнит) с промежуточными значениями плотности. Увеличение плотности от альбита канортиту связано с более высокой атомной массой Ca (40) по сравнению с Na (23). В тоже время при замещении Na в альбите на K имеем минерал ортоклаз (КА151308) с меньшей плотностью (2.57), хотя атомная масса K (39) выше, чем Na. Это связано с большим ионным радиусом K, что обуславливает менее плотную пространственную епаковку атомов. Полиморфизм - это изменение структуры кристаллической решетки без изменения состава. Классическим примером полиморфизма являются минералы графит (плотность 2.2) И алмаз (плотность 3.52). Оба минерала имеют одинаковый состав (C), но графит имеет рыхлую слоистую структуру кристаллической решетки, а алмаз кубическую центрогранную. Полиморфизм особенно характерен для минералов метаморфических горных пород.

Плотность некоторых минералов приведена в таблице 5.

Таблица 5

Минерал	Состав	$\delta\ (\frac{г}{см^3})$
Кварц	SiO_2	2.65
Альбит	$Na[AlSi_3O_8]$	2.61
Анортит	$Ca[Al_2Si_2O_8]$	2.76
Ортоклаз	$K[AlSi_3O_8]$	2.57
Нефелин	$Na[AlSiO_4]$	2.62
Роговая обманка	$NaCa_2(Mg,Fe)_4(Fe,Al)*(OH,F)_2Al_2Si_6O_{22}$	3.25
Пироксены:		
Авгит	$Ca(Mg,Fe,Al)[(Si,Al)_2O_6]$	3.4
Геденбергит	$CaFe[Si_2O_6]$	3.55
Эгирин	$NaFe[Si_2O_6]$	3.53
Оливин	$(Mg,Fe)_2SiO_4$	3.35
Мусковит	$KAl_2[AlSi_3O_{10}][OH]_2$	2.85
Биотит	$K(Mg,Fe)_3[Si_3AlO_{10}][OH,F]_2$	3.05
Серпентенит	$Mg_6[Si_4O_{10}][OH]_8$	2.55
Кальцит	$CaCO_3$	2.715
Магнезит	$MgCO_3$	2.96
Доломит	$CaMg[CO3]_2$	2.87
Барит	$BaSO_4$	4.5
Гипс	$CaSO_4*2H_2O$	2.3
Ангидрит	$CaSO_4$	2.96
Магнетит	Fe_3O_4	5.11
Ильменит	$FeTiO_3$	4.79
Хромит	$FeCr_2O_4$	4.2
Пирит	FeS_2	5.1
Халькопирит	$CuFeS_2$	4.2
Сфалерит	ZnS	3.95
Галенит	PbS	7.57
Циркон	$ZrSiO_4$	4.68

Приведены средние значения плотности наиболее чистых разновидностей минералов. Можно сделать следующие выводы:

1)Плотности основных породообразующих минералов ниже плотности рудных.

2) Темноцветные породообразующие минералы (пироксены, оливины. роговые обманки) имеют более высокую плотность по сравнению со светлыми минералами (кварц, полевые шпаты, плагиоклазы)

3.3 ПЛОТНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

Общее выражение для плотности горной породы можно записать в виде:

$$\delta = \frac{m_T + m_ж + m_г}{V_Т + V_Ж + V_г}, (3.3)$$

где $m_Т$— масса твердой фазы, $m_Ж$— масса жидкой фазы. $m_Г$- масса газовой фазы породы, $V_Т$,$V_Ж$,$V_Г$— объемы твердой, жидкой и газовой фаз. Сумма объемов жидкой и газовой фаз равна объему порового пространства. Масса твердой фазы равна сумме масс слагающих породу минералов, а массы жидкой и газовой фаз сосредоточены в поровом пространстве. Тогда выражение (3.3) можно преобразовать к ВИДУ:

$$\delta = (1 - К_п) \sum \delta_i V_i + \sum К_П К_{жк} \delta_{жк} + \delta_г \delta_г \qquad (3.4)$$

где $К_П$ коэффициент пористости, δ_i и V_i - минеральная плотность и объемное содержание в твердой фазе i—го минерала, $\delta_{жк}$ плотность к—й жидкости. $К_{ЖК}$—объемное содержание к—й жидкости в поровом пространстве, $\delta_Г$- плотность газа, $К_Г$- объемное содержание газа в поровом пространстве. Из 3.4 следует, что плотность горной породы зависит от минерального состава. заполнения порового пространства. Факторов может быть различной.

3.3.1 МАГМАТИЧЕСКИЕ ПОРОДЫ

Общим для магматических пород является их образование путем остывания магматического расплава. Классификация этих пород основана на двух основных признаках: а) условия образования, б) состав. По условиям образования выделяют; 1) **интрузивные** -породы, образовавшиеся при медленном остывании расплава на значительной глубине при низком теплообмене с вмещающими породами. При этом первичный расплав теряет большую часть летучих компонентов (жидкая и газовая фазы). Формируются низкопористые полнокристаллические породы (см. Таб №4). 2) **Эффузивные –** породы, образовавшиеся при быстром остывании расплава в приповерхностных условиях (на поверхности, под водой, на малых глубинах). Расплав не успевает терять значительную часть летучих. Формируются пористые породы со стекловатой или частично кристаллической структурой. Среди эффузивов выделяют **кайнотипные** – сравнительно молодые породы в значительной степени сохранившие свой первичный облик и **палеотипные** – древние породы, подвергшиеся значительным изменениям (широко известно зеленокаменное изменение эффузивов) минерального состава и структуры. В частности типичными является уменьшение пористости с образованием миндалекаменных структур.

Состав определяется содержанием SiO_2 и номером плагиоклазов (соотношение Ca и Na). Нормальный (щелочноземельный) ряд магматических пород представлен всеми разновидностями от кислых (содержание SiO_2 около 70%), до ультраосновных (содержание SiO_2 около 40%). Щелочной ряд представлен ограниченным набором пород типа сионитов с составом, соответствующим средним -основным породам.

Таблица 6

Порода	$\delta\ (\frac{г}{см^3})$	Порода	$\delta\ (\frac{г}{см^3})$
Гранит фанерозоевский	2.57	Сиенит	2.62
Гранит докембрийский	2.59	Сиенит нефелиновый	2.66
Гранодиорит	2.69	Липарит	2.35
Диорит кварцевый	2.75	Кварцевый порфир	2.60
Диорит	2.81	Андезит	2.49
Габбро	2.95	Андезит-й порфирит	2.73
Пироксенит	3.2	Базальт	2.54
Перидотит	3.2	Диабаз	2.79

В таб. 6 приведены средние значения плотности основных типов магматических пород. По этим данным составлена диаграмма (рис. 3.1) зависимости средней плотности от состава магматических пород. Состав выражен через содержание SiO_2. В нижней части диаграммы приведены названия интрузивных, кайнотипных эффузивных и палеотипных эффузивных пород соответствующего состава.

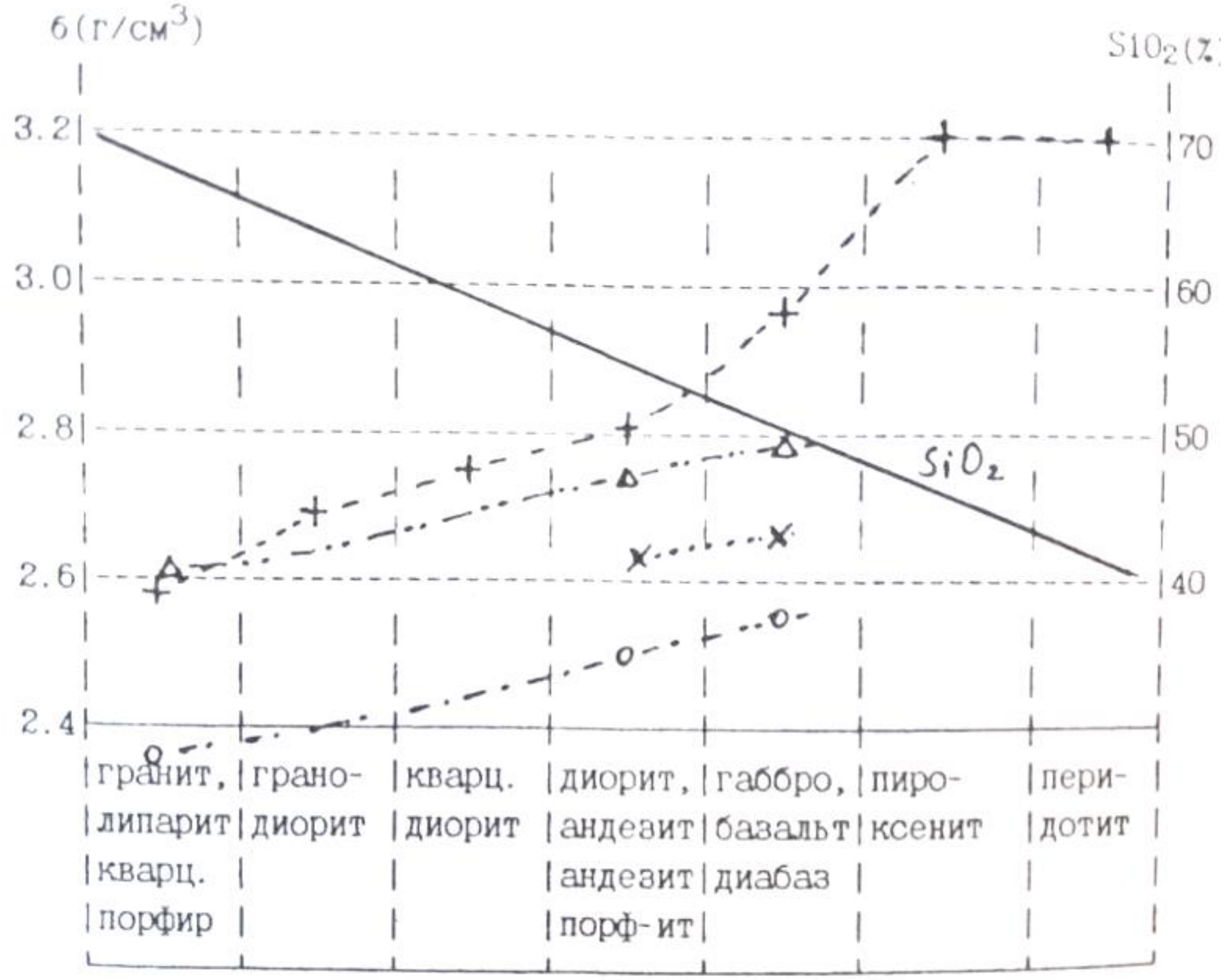


Рис.3.1. Зависимость средней меткости магматических пород от состава. (+ интрузивнне породы щелочноземельного ряда, х интрузивные породы щелочного ряда, о кайнотипные эффузивы, Δ палеотипные эффузивы).

Сделаем основные вывод:

1.Из таблицы и диаграммы следует закономерное возрастание плотности по мере увеличения основности (уменьшения содержания SiO_2), что обусловлено возрастанием количества плотных темноцветных минералов.

2. Разница в средних плотностях между соседними группами по основности составляет около ± 0.1 г/см^3. т.е. является **значимой** (например, позволяет разделять эти породы по уровню гравитационного поля над ними).

3.Графики зависимости плотности от состава интрузивных и палеотиных эффузивных пород практически совпадают. Причина этого – близость составов и пористости. Исключение составляют породы основного ионного состава. причины этого будут рассмотрены ниже.

4. Бросается в глаза существенно меньшие плотности кайнотипных зффузивов. Причина — высокая пористость.

Вероятные отклонения от средних значений в каждой группе интрузивных и палеотипных зффузивных пород составляют 0.1Г/см^3, у кайнотипных зффузивов 0.15г/см^3. Эти отклонения связаны с влиянием двух основных факторов;

1. В каждой петрографической группе объединены по сути различные породы. Например. среди гранитов выделяют аляскитовые, мусковитовые, двуслюдяные, роговообманковые и т.д. Таким образом, в пределах группы возможны вариации состава породообразующих, минералов и, следовательно, плотности. Так, среди пород типа габбро есть и анортозиты (состоят на 90-95%. из плагиоклаза — лабрадора) с плотностью 2.69 г/см^3, и оливиновое габбро (плагиоклаз и до 20 % оливина) с плотностью 3.07г/см^3.

2.Любая порода, кроме породообразующих, содержит и акцессорные (второстепенные) минералы. В кислых породах это апатит ($\delta = 3.19$), циркон ($\delta = 4.7$), магнетит ($\delta = 5.1$), ильменит ($\delta = 4.79$). В породах основного состава это магнетит, титаномагнетит ($\delta = 4.72$), сульфиды ($\delta = 4.7 - 4.9$). В ультраосновных - магнетит, титаномагнетит. Количество акцессорных минералов может меняться от тысячных долей процента до нескольких процентов, что и приводит к вариациям плотности для ряда районов установлено увеличение содержания акцессорных минералов в рудоносных магматических комплексах, что может служить поисковым признаком.

Процессы автометаморфизма (серпентинизация, амфиболизация) Оказывают существенное влияние на плотность магматических пород. При серпентинизации массивов ультраосновных пород пироксены и оливин преобразуются в серпентин — минерал, содержащий гидроксильную группу. с плотностью 2.55 г/см^3. На рис. 3.2 представлен график зависимости плотности от степени серпентинизации. Нацело серпентинизированные породы имеют плотность, соответствуют кислым магматическим породам, это обстоятельство приходится учитывать при интерпретации данных гравиразведки. дальнейший процесс метаморфизма связан с карбонатизацией, при которой плотность возрастает.

Амфиболизация характерна для пород основного состава и проявляется в преобразовании пироксена в амфиболы и плагиоклазы с выделением хлорита, эпидота, серицита — минералов с меньшей плотностью.

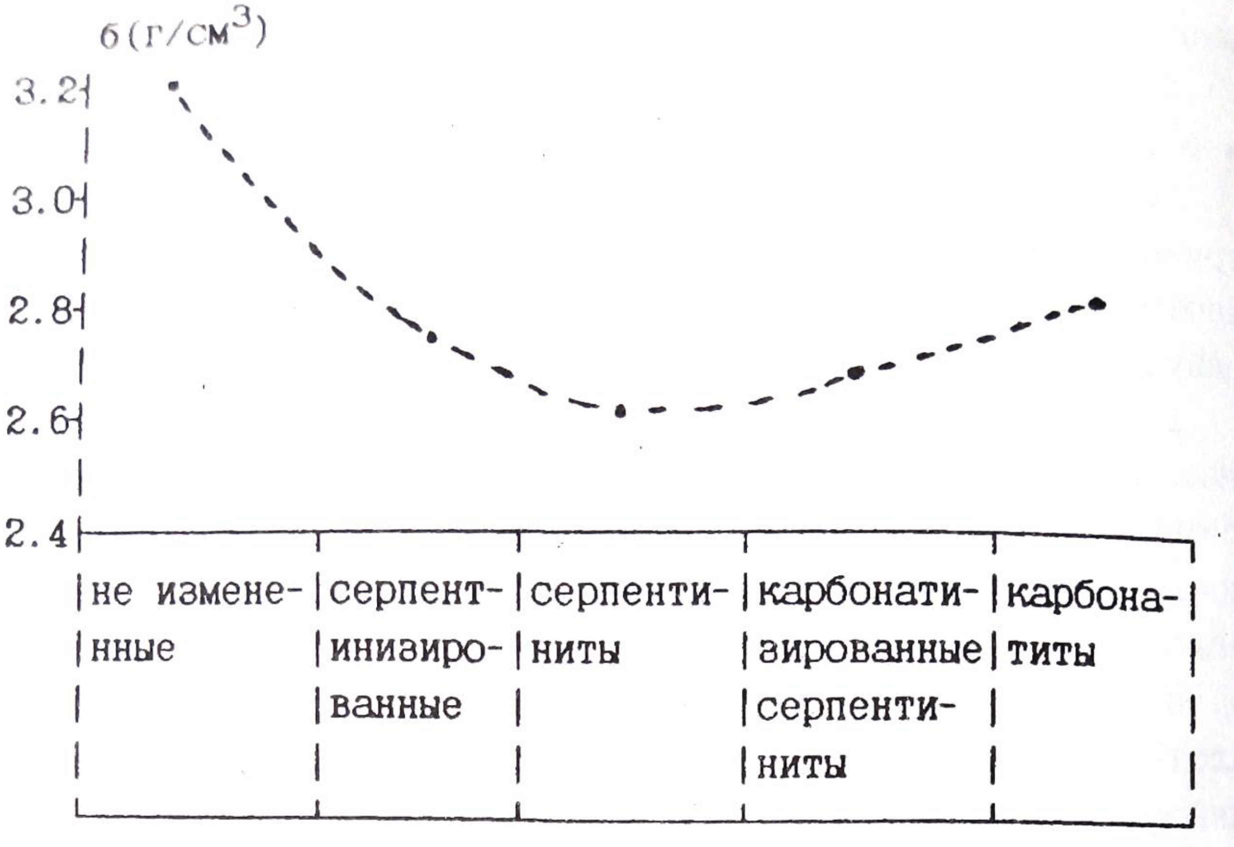


Рис 3.2. Изменение плотности ультраосновных перед
пород в процессе серпентинизации и карбонатизации

Таким образом, амфиболизация сопровождается уменьшением плотности. Обратите внимание, что на рис. 3.1 плотность диапазон меньше плотности их интрузивного аналога — габбро. Диабаз это порода, претерпевшая метаморфические изменения, и её плотность соответствует амфиболизированному габбро. Процессы локального метаморфизма (метасоматоза) могут сопровождаться как уменьшением, так и увеличением плотности. В таблице 7 приведены данные по изменению плотности для типичных процессов.

Таблица 7

Порода	$\delta\ \left(\frac{г}{см^3}\right)$ измененных	Процесс	$\delta\ (\frac{г}{см^3})$ не измененных
Гранодиорит	2.65	Серицитизация	2.55
Гранодиорит	2.67	Хлоритизация	2.61
Порфирит	2.76	Окварцевание	2.65
Диорит	2.8	Альбитизация	2.63
Гранит	2.6	Грейзенизация	2.77
Порфирит	2.7	Эпидотизация	2.85

Локальные изменения плотности используются как поисковый признак, так как процессы рудообразования сопровождаются локальным метасоматозом.

3.3.2. ОСАДОЧННЕ ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

ОБЛОМОЧНЫЕ ОСАДОЧНЫЕ ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

В таблице 8 приведены значения минеральной плотности (плотность твердой Фаза) основных типов обломочных пород.

Порода	$\delta_{\text{ср}}\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$	$\delta_{min}\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$	$\delta_{max}\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$
Песчаник	2.67	2.58	2.76
Алевролит	2.69	2.62	2.76
Аргилит	2.68	2.69	2.78
Глина	2.68	2.58	2.78

Отметим близкие значения бар, из чего следует зависимость плотности в основном от пористости и характера заполнения порового пространства. Для водонасыщенных и газонасыщенных пород плотность ($\delta_{\text{В}}, \delta_{\text{Г}}$) соответственно равна:

$$\delta_{\text{В}} = (1 - \text{К}_{\text{П}})\delta_{\text{Т}} + \text{К}_{\text{П}}\ \delta_{\text{Т}} \quad (3.5)$$

$$\delta_{\text{Г}} = (1 - \text{К}_{\text{П}})\delta_{\text{Т}} \quad (3.6)$$

где $\text{К}_{\text{П}}$ - коэффициент пористости, $\delta_{\text{Т}}$- плотность твердой фазы, плотность воды. Учитывая постоянство минеральной плотности, в Обоих случаях имеем линейную зависимость плотности от пористости. На рис. 3.3 приведены зависимости, рассчитанные для $\delta_{\text{Т}}$=2.68г/см^3 и результаты изучения плотности реальных пород. Расчетные и экспериментальные данные достаточно близки. Изменение пористости на 1% приводит к изменению плотности на на 0.03 и 0.02 г/см^3, соответственно для газонасыщенных и водонасыщенных пород. Эти цифры полезно запомнить поскольку они определяют требования к точности измерения плотности геофизическими методами (гамма—гамма каротаж, акустический каротаж) с целью оценки пористости коллекторов.

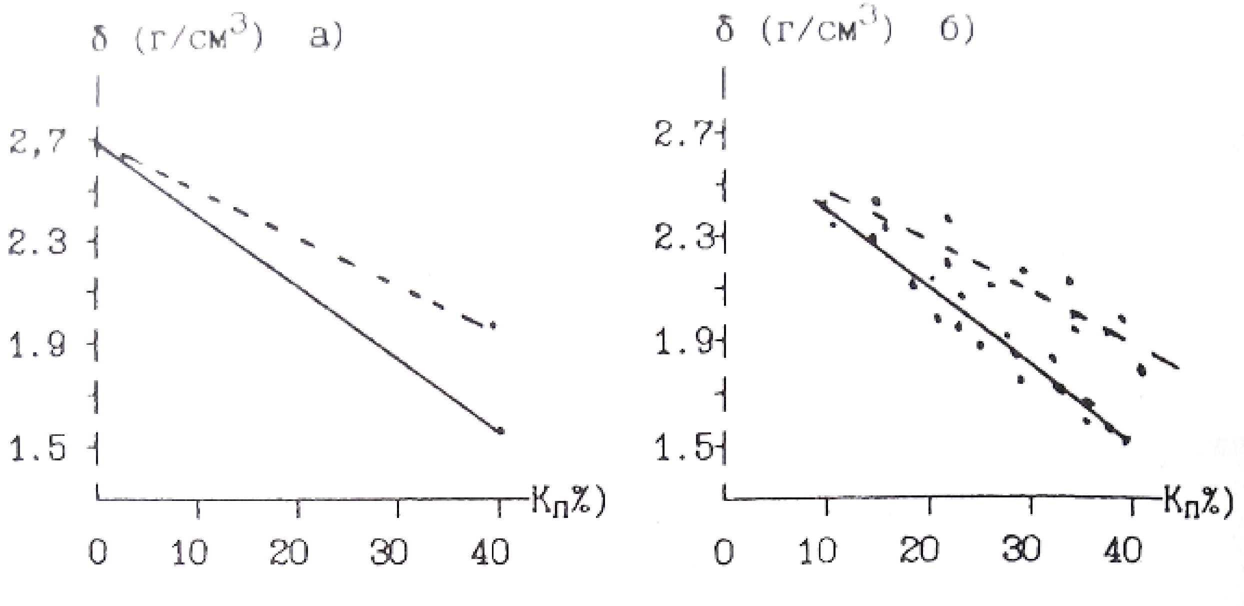


Рис. 3.3. Зависимость плотности обломочных осадочных пород от пористости, а) расчет, б) экспериментальные данные для песчано-глинистых отложении. - водонасыщенные - газонасыщенные

Как отмечалось ранее, в результате уплотнения под нагрузкой вышележащих слоев происходит закономерное уменьшение пористости обломочных пород. Если в выражении 3.5 и 3.6 подставить значения пористости из 2.5, то получим зависимость плотности от глубины залегания:

$$\delta_{\Gamma}(H) = \delta_{\text{Т}}(1 - \text{К}_{\Pi}(0) * \exp(-0.45\,H)) \qquad (3.7)$$
$$\delta_{\text{В}}(H) = \delta_{\text{Т}} + \text{К}_{\Pi}(0) * (1 - \delta_{\text{Т}}) * \exp(-0.45\,H) \qquad (3.8)$$

где $\text{К}_{\Pi}(0)$ - пористость на поверхности, Н — глубина в км.

Таблица 9

Порода	$\delta\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$ пределы	$\delta\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$ наиб. вероят.
Глины	1.20-2.40	-
Аргилиты	1.70-2.90	2.30-2.40
Пески	1.30-2.00	1.50-1.70
Песчаники	2.00-2.90	2.50-2.65
Алевролиты	1.80-2.80	2.30-2.50
Конгломераты	2.10-3.00	-

В таблице 9 приведены значения плотности обломочных осадочных пород.
Основные выводы:

1) Плотность обломочных осадочных горных пород (вероятные значения) ниже плотности магматических пород.
2) Плотность меняется в широких пределах. что связано с широким диапазоном возможных значении пористости.
3) Интервалы плотности основных типов обломочных пород в значительной степени перекрываются.

КАРБОНАТНЫЕ ОСАДОЧННЕ ПОРОДЫ

В таб.10 приведены значения минеральной плотности карбонатных пород.

Таблица 10

Порода	$\delta_{\text{ср}}\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$	$\delta_{min}\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$	$\delta_{max}\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$
Мел	2.69	2.56	2.80
Известняк	2.72	2.62	2.80
Доломит	2.80	2.76	2.88
Мергель	2.70	2.58	2.80

Отмечаются значимые различия средних плотностей. Поэтому плотность карбонатных пород будет определяться минеральным составом, пористостью и характером заполнения перового пространства. Представления о плотности этих пород иллюстрируются таб. 11.

Таблица. 11

Порода	$\delta\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$ пределы	$\delta\ \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$ наиб. вероят.
Известняки	1.80-2.90	2.60-2.70
Доломиты	1.90-3.00	2.60-2.80
Мергели	1.50-2.80	2.20-2.40

Для этой группы пород остаются справедливым пункты 2 и 3 выводов, которые получены для обломочных пород. Дополнительно отметим более высокую плотность известняков и доломитов, которая близка к плотности кислых и средних магматических пород.

ГИДРОХИМИЧЕСКИЕ ОСАДОЧНЫЕ ПОРОДЫ ,

Для этих пород характерна низкая пористость, и их плотность в основном определяется минеральным составом. Плотность гипсов лежит в пределах 2.10 — 2.50 г/см^3, ангидритов 2.50—2.90 г/см^3, каменной соли 2.15 — 2.30 г/см^3. Приведем пример соотношения плотностей осадочных комплексов с вытекающими из этого особенностями геофизических полей. Среди структур, вмещающих углеводородное сырье. существуют так называемые диапировые структуры или структуры протыкания. Они образуются в результате выжимания ("Всплывания") соляных куполов сквозь толщ обломочных осадочных пород. Соотношение плотностей приведено на рис. 3.4 а).

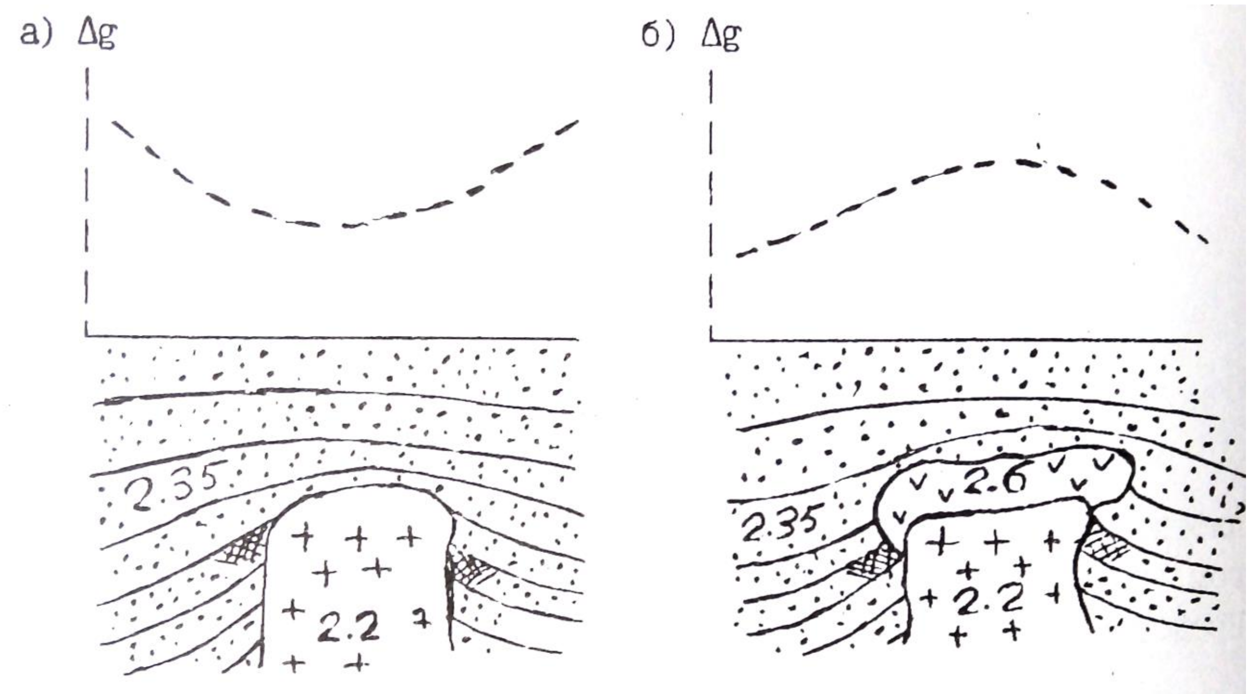


Рис. 3.4. Характер распределения плотности и ускорение силы тяжести над соляно-купольными структурами (песчано-глинистые отложения, + - каменная соль, — ангидритн, - приращениеускорения силы тяжести, - нефтеносность)

Плотность каменной соли (2.20 г/см^3) меньше плотности песчано-глинистых отложении (2.35 г/см^3). Это обуславливает недостаток масс соляного куполам над структурой наблюдается Уменьшение силы тяжести (Кривая Δg,рис.3.4. а)). Однако, возможно и более сложное строение соляных куполов (рис.3.4. б)). В верхней части купола образуется покрышка сложенная ангидритами ("каменная шляпа") с плотностью 2.60 г/см^3.

Избыток масс покрышки может превосходить действие недостатка масс соляного купола, и над структурой наблюдается увеличение силы тяжести. Возможно ситуация баланса этих двух факторов, и над структурой существенного изменения гравитационного поля не будет.

3.3.3. МЕТАМОРФИЧЕСКИЕ ПОРОДЫ

Метаморфические породы образуются в результате регионального (охватывающего значительные площади и объемы пород) преобразования магматических и осадочных пород под действием высокой температуры и давления. В основу классификации метаморфических пород положены условия (фация) метаморфизма, структурно-текстурные особенности и состав породы. В порядке возрастания термодинамических условии выделяют следующие фации: зеленых сланцев. эпидот-амфиболитовую, амфиболитовую, гранулитовую, эклогитовую. В начальный этап регионального метаморфизма происходит уплотнение первичных осадочных пород в результате уменьшения пористости под действием давления (катагенеза). В фацию зеленых сланцев наблюдается некоторое разуплотнение исходных магматических и подвергнутых катагенезу осадочных пород в результате образования минералов, содержащих кристаллизационную и конституционную воду. Дальнейший метаморфизм сопровождается увеличением плотности за счет полиморфных преобразовании минералов. Образуются новые минералы с уплотненными кристаллическими решетками. данные о плотности метаморфических пород Приведены в таблице 12. При общем закономерном возрастании плотности с увеличением степени метаморфизма, в пределах каждой отмечаются существенные колебания плотности, что отражает влияние минерального состава пород. Интересно отметить, что при так называемом ультраметаморфизме (протекает в условиях относительно пониженного давления и высоких температур, сопровождается полной перекристаллизацией и частичным расплавлением пород) отмечаются существенное уменьшение плотности. Так амфиболиты (3.0 г/см^3) преобразуются в метасоматические граниты (2.6 г/см^3). Процесс гранитизации сопровождается кремний-калиевым метасоматозом с преобразованием плотных минералов (амфиболы, гранаты, биотит) в менее плотные (кварц, микроклин).

Таблица 12

Фация	Порода	$\delta_{ср}\left(\frac{г}{см^3}\right)$	$\delta_{min}\left(\frac{г}{см^3}\right)$	$\delta_{max}\left(\frac{г}{см^3}\right)$
Зеленых сланцев	Филит Сланец: Кварцево-серицитовый Кремнистый Хлоритовый Слюдистый	2.45 2.57 2.60 2.76 2.65	2.40 2.50 2.58 2.72 2.60	2.70 2.64 2.62 2.80 2.75
Эпидот-амфиболитовая	Сланец кристаллический: Биотитовый Роговообманковый Кварцит Мрамор	 2.63 2.77 2.64 2.70	 2.62 2.75 2.62 2.68	 2.63 2.80 2.65 2.72
Амфиболитовая	Гнейс: Биотитовый Амфиболовый Амфиболит: Полевошпатовый Гранатовый	 2.63 2.78 2.87 3.10	 2.60 2.75 2.80 3.00	 2.68 2.82 2.95 3.20
Гранулитовая	Гранулит гиперстеновый Сланец	2.72 3.05	2.60 2.90	2.85 3.25
Эклогитовая	Эклогит	-	3.20	3.40

3.3.4. ВЛИЯНИЕ ВЫВЕТРИВАНИЯ НА ПЛОТНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД.

Процессы гипергенеза в результате химического и механического выветривания приводят к существенному изменению состава и состояния пород. Образуется вторичная пористость в результате растрескивания и выщелачивания, которая достигает 20-30%.

Образующиеся коры выветривания глинисто-слюдистого и хлорито-гюдрослюдистого состава с гидроокислами железа, обломками кварца, микроклина, биотита имеют пониженную плотность порядка 2.1-2.5 г/см^3.

Вопросы для самопроверки:

1. *Какие причины создают неоднородность физический свойств горных пород?*
2. *Как строятся гистограммы распределения физический свойств горных пород?*
3. *Типы пористости.*
4. *Какие факторы определяют пористость обломочных пород?*
5. *Назовите группы пород с низкой и повышенной пористостью.*
6. *Как изменяется пористость с глубиной?*
7. *Что такое влажность и влагоемкость?*
8. *В каком виде присутствует вода в горных породах?*
9. *Какими особенностями обладает связанная вода?*
10. *Что такое проницаемость?*
11. *Отличие физической проницаемости от фазовой?*
12. *Как классифицируются породы по проницаемости?*
13. *Как образуется двойной электрический слой?*
14. *Каким параметром характеризуется нефтенасыщенность?*
15. *Что такое плотность и минеральная плотность?*
16. *От чего зависит плотность минералов?*
17. *Назовите основные факторы, определяющие плотность магматических (инрузивных и эффузивных) и осадочных (обломочных, карбонатных и гидрохимических) пород.*
18. *Рассчитайте плотность водонасыщенного и газонасыщенного печсчаника с коэффициентом пористости 25%.*

Литература:

1. В.М. Добрынин, В.Ю. Вендельштейн, Д.А. Кожевников. Петрофизика: Учебник для вузов. -М: Недра, 1991.
2. В.Н. Кобранова. Петрофизика: Учебник для вузов -М: Недра, 1986.

Оглавление

Игорь Иванович Бреднев

ПЕТРОФИЗИКА

Часть 1. Коллекторские и плотностные свойства горных пород

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Петрофизика» для студентов профилизации «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» (РФ)направления 650200 «Технологии геологической разведки»

Конспект лекций

Корректура кафедры геофизики

Подписано в печать 09.09.2004г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60х84 1/16.Печать на ризографе.
Печ.л. 2,8. Уч-изд. л. 2,39. Тираж 100 экз. Заказ №130.

Издательство УГГГА
620144. г. Екатеринбург. УЛ- Куйбышева 30
Уральская государственная горно-геологическая академия
Лаборатория множительной техники

МИНОБРНАУКИ РФ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный университет»

В.Н. Калашников, Г.А. Усов,

Л.И. Кралина, Ф.П. Сердюков

Методические указания по выполнению контрольной работы «*Техника разведки*»

для студентов специальности

21.05.03 Технология геологической разведки

очного и заочного обучения

Екатеринбург

2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Успех разведочного бурения во многом зависит от правильного выбора конструкции скважины, которая должна обеспечить ее безаварийную проходку при соответствующем качестве буровых работ.

При бурении разведочных скважин применяется различный породоразрушающий инструмент: твердосплавные и алмазные коронки. При бескерновом бурении – лопастные, шарошечные и алмазные долота. При канатно-ударном бурении – плоские, двутавровые, крестовые и округляющие долота. Применение того или иного вида породоразрушающего инструмента зависит от физико-механических свойств горных пород и назначения скважины. Рациональный выбор породоразрушающего инструмента и параметров режима бурения определяют производительность бурения и его экономическую эффективность.

Занятие 1

РАЗРАБОТКА КОНСТРУКЦИИ СКВАЖИНЫ

Задание: Разработать конструкцию скважины согласно геологического разреза, приведенного в приложении 1, и дать спецификацию бурового инструмента для спуска обсадных труб.

Цель занятия: изучить типы обсадных труб и буровой инструмент для спуска их в скважину. Освоить методику составления конструкции скважины.

1.1. Назначение обсадных труб.

Обсадные трубы служат для крепления стенок скважин в следующих случаях:

1) для закрепления устья скважины с целью предохранения его от размыва и отвода промывочной жидкости;
2) для закрепления (кондуктором) залегающих сверху наносов и других неустойчивых пород;
3) для перекрытия зон разрушенных и раздробленных пород, которые не закрепляются глинистым раствором, а после проходки не могут быть затампонированы быстросхватывающими смесями;
4) для перекрытия зон интенсивных и катастрофических поглощений промывочных жидкостей;
5) перед пересечением полезного ископаемого (рыхлые руды, бокситы), над которыми залегают неустойчивые породы, дающие осыпи;
6) перед переходом с промывки глинистым раствором на промывку технической водой.

1.2. Требования к конструкции скважины.

Конструкция скважины – это схема изменения диаметров бурения, обсадных труб и их глубин, обеспечивающих безаварийную проходку скважины и выполнение геофизических и гидрогеологических исследований при соответствующем качестве бурения.

Конструкция скважины должна быть наиболее простой – малоступенчатой. В этом случае облегчается бурение, сокращается набор бурового инструмента и расход обсадных труб, снижается стоимость работ. Простота конструкции достигается правильным применением качественных промывочных жидкостей и закреплением маломощных зон осложнений без применения обсадных труб. Конструкция скважины должна обеспечивать получение диаметра керна в соответствии с геологическими требованиями и применения форсированных режимов бурения.

1.3. Выбор конструкции скважины

В основу составления конструкции скважины положены следующие факторы: конечный диаметр бурения, определяемый целевым назначением скважины (диаметр бурения по полезному ископаемому, диаметр фильтра для скважины на нефть и газ), устойчивостью пород геологического разреза и необходимостью их закрепления обсадными трубами (смотри пункт 1.1).

Поэтому конструкция скважины составляется по методу снизу вверх. Вначале определяется конечный диаметр скважины, исходя из требований минимально допустимого диаметра керна по полезному ископаемому (см. приложение 2). Дальше диаметр скважины будет определяться устойчивостью выше залегающих пород и необходимостью их закрепления обсадными трубами.

Для обеспечения нормального спуска обсадных колонн, перекрывающих валунно–галечные отложения или значительные мощности песчано-глинистых пород, а также колонн, подлежащих цементированию, необходимо предусмотреть диаметр скважины на один диаметр больше диаметра колонны. После разработки конструкции скважины приводится ее описание сверху вниз с обоснованием смены диаметра и установки обсадных колонн.

Конструкция скважины выполняется графически с соблюдением вертикального масштаба. Прилагается спецификация бурового инструмента для спуска обсадных труб в скважину.

<u>Занятие 2</u>

ВЫБОР ТИПА ПОРОДОРАЗРУШАЮЩЕГО ИНСТРУМЕНТА И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМА ВРАЩАТЕЛЬНОГО БУРЕНИЯ

Задание. Выбрать тип породоразрушающего инструмента для вращательного бурения в соответствии с физико-механическими свойствами горных пород (приложение 3), подобрать состав бурового снаряда (компановка колонкового набора, тип и диаметр бурильных труб) и определить параметры режима бурения.

Цель занятия: изучить типы твердосплавных, алмазных коронок и долот для бескернового бурения, а также технологический буровой инструмент: бурильные и утяжеленные трубы, колонковые трубы, переходники, расширители, кернорватели; освоить методику выбора параметров режима бурения.

2.1 Породоразрушающий инструмент для бурения разведочных скважин вращательным способом и область его применения.

Тип породоразрушающего инструмента выбирается с учетом физико-механических свойств горных пород и целевого назначения скважины.

Твердосплавные коронки применяются для бурения горных пород от I до VIII категории по буримости и по конструктивному исполнению подразделяются на ребристые, резцовые и самозатачивающиеся.

Таблица 1

Область применения твердосплавных коронок

Группа коронок	Тип коронок	Категория пород по буримости								Характеристика пород
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
Ребристые	М1, М2, М5	х	х	х	х					Мягкие с прослоями пород средней твердости
Резцовые	СМ-4					х	х	х		Монолитные и перемежающиеся породы. Монолитные и трещиноватые
	СМ-5					х	х			
	СМ-6						х	х		
	СТ-2				х	х	х			
Самозатачивающиеся	СА1						х	х	х	Плотные, тонко и мелкозернистые. Слаботрещиноватые. Перемежающиеся по твердости
	СА2						х	х	х	
	СА4						х	х	х	
	СА5						х	х	х	
	СА6						х	х	х	

Алмазные коронки применяются для бурения твердых и крепких абразивных пород VI-XII категории по буримости.

В настоящее время в зависимости от расположения объемных алмазов выпускаются следующие коронки:

а) однослойные – с расположением объемных алмазов в один слой;

б) импрегнированные – объемные алмазы расположены без определенного порядка, т.е. перемешаны с материалом матрицы;

в) зубчатые – режущая кромка зуба армируется по поверхности крупными полированными алмазами, кроме того, вершина каждого зуба армирована по всему объему импрегнированными алмазами с зернистостью 120-200 шт./карат.

Зубчатые алмазные коронки целесообразно использовать в породах VI-VII категории по буримости.

Однослойные коронки дают наилучшие результаты в плотных, монолитных малоабразивных породах VIII-IX категории по буримости.

Импрегнированные коронки рекомендуют использовать в твердых, трещиноватых и абразивных породах X-XII категории по буримости.

Бурение скважин сплошным забоем осуществляется при детальной разведке, по хорошо изученным вмещающим породам. Для бурения применяются лопастные, шарошечные и алмазные долота.

Таблица 2

Область применения долот при бескерновом бурении

Тип долота	Категория пород по буримости									Характеристика пород
	I-IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
Лопастные долота	х									Мягкие и пластичные породы
2Д	х									
3Л	х									
ИР		х	х	х						
ИРГ		х	х							
Пикобуры	х	х								
Шарошечные										Мягкие с пропластками пород средней твердости. Средней твердости. Твердые породы
МС	х									
С		х	х	х						
Т				х	х	х				
ТК						х	х			С пропластками крепких пород. Крепкие. Весьма крепкие. Малоабразивные твердые
К							х	х		
ОК								х	х	
ДДА				х	х	х				
Дисковое долото		х	х							Средней твердости
Алмазные долота										Плотные, монолитные породы. Крепкие, абразивные породы
08А3 и										
09А3				х	х	х				
08И3							х	х	х	

Шарошечные долота имеют различную конструкцию. Конструктивные особенности долота указываются в его шифре. Первые цифры в шифре долота указывают количество шарошек (I, II, III), после дефиса указывается диаметр, тип долота, а после второго дефиса – система промывки (Ц – центральная, Г – гидромониторная) и тип опоры (А – с двумя подшипниками скольжения, В – с подшипником качения).

Например, долото II-132 М-ГВ

Долото двухшарошечное, диаметр 132 мм, тип М, с гидромониторной промывкой, опора на подшипнике качения.

2.2. Компоновка бурового снаряда

Колонковый набор – часть бурового снаряда, предназначенная для разрушения горной породы, приема и сохранения керна. Простейший колонковый набор состоит из породоразрушающего инструмента, колонковой трубы и переходника. В колонковый набор могут также входить расширитель (при алмазном бурении), кернорватель и шламовая труба.

При бурении сплошным забоем в зависимости от диаметра бурения могут применяться различные компоновки бурового снаряда. При бурении скважин небольшого диаметра (76-112 мм) компоновка бурового снаряда состоит из долота, утяжеленных бурильных труб (УБТ) и бурильных труб. При бурении скважин диаметром более 151 мм в состав бурового снаряда включают долото, направляющую трубу, УБТ. При бурении хрупких пород большим диаметром буровой снаряд состоит из долота, шламовой трубы закрытого типа, УБТ. Шламовая труба служит для сбора шлама, который не может быть вынесен потоком промывочной жидкости на поверхность.

2.3. Проектирование параметров режима бурения.

При вращательном бурении параметрами режима бурения являются: осевая нагрузка на породоразрушающий инструмент, частота вращения и расход промывочной жидкости.

2.3.1. Твердосплавное бурение

Осевую нагрузку на твердосплавную коронку определяют, исходя из рекомендуемой нагрузки на один резец (объемный), обеспечивающий объемный процесс разрушения породы, и рассчитывают по формуле

$$P = p_0 * m \qquad (2.1)$$

где P – осевая нагрузка на коронку, даН;
p_0 – рекомендуемая нагрузка на один основной резец, даН;
m – число основных резцов в коронке, шт;

При бурении трещиноватых или переслаивающихся пород с резким различием по твердости следует уменьшать рекомендуемую нагрузку на 30-50%.

Частота вращения коронки рассчитывается: исходя из рекомендуемых значений окружной скорости вращения коронки, которые применяются тем больше, чем меньше диаметр коронки.

Частота вращения коронки в об/мин рассчитывается по формуле

$$n = \frac{v_0 * 60}{\pi * D_{ср}} \qquad (2.2)$$

где v_0 – окружная скорость коронки, м/с;
$D_{ср}$ – средний диаметр коронки, м;

$$D_{ср} = \frac{D_н + D_{вн}}{2}$$

где $D_н$ – наружный диаметр коронки, м;
$D_{вн}$ – внутренний диаметр коронки, м.

Рекомендуемые окружные скорости для твердосплавных коронок приведены ниже:

Коронки	Ребристые	Резцовые	Самозатачивающиеся
v_0, м/с	0,7-1,5	1-2,5	0,7-1,5

При бурении трещиноватых пород и неоднородных по твердости рекомендуется снижать частоту вращения коронки на 20-30%. При увеличении глубины скважины частота вращения должна уменьшаться, так как возрастают затраты мощности на холостое вращение бурового снаряда.

Количество промывочной жидкости выбирается в зависимости от физико-механических свойств горных пород, диаметра бурения. Расход промывочной жидкости можно определить по формуле

$$Q = k * D \qquad (2.3)$$

где Q – расход промывочной жидкости, $м^3/с$

k – удельный расход промывочной жидкости на 1 м диаметра коронки, $м^3/с$

D – наружный диаметр коронки, м

2.3.2. Алмазное бурение

Экспериментальными исследованиями установлено и практикой бурения доказано, что наибольшее влияние на механическую скорость алмазного бурения оказывает частота вращения. В связи с этим алмазное бурение целесообразно вести при возможно высокой частоте вращения коронки, допускаемой состоянием бурового снаряда, а также характером разбуриваемых пород и при отсутствии вибрации или возможном ее снижении.

Осевая нагрузка на коронку определяется с учетом физико-механических свойств горных пород и заданной частоты вращения коронки. Оптимальная осевая нагрузка может быть рассчитана на основании значений удельной нагрузки на 1 м рабочей площади торца алмазной коронки рекомендуемой для различных категорий пород по формуле

$$P = p_0 * S \qquad (2.4)$$

где P – осевая нагрузка на коронку, даН;

p_0 – удельная нагрузка на 1 $м^2$ площади торца коронки, $даН/м^2$;

S – площадь торца алмазной коронки (за вычетом площади промывочных каналов), $м^2$;

Частота вращения коронки рассчитывается по формуле (2.2)

Рекомендуемые значения окружной скорости коронки, м/с

Для пород VIII-IX категории	3-4
Для пород X-XI категории	2-3
Для пород XII категории	1,5-2

Расход промывочной жидкости можно определить по формуле (2.3). Рекомендуемые значения удельного расхода промывочной жидкости для различных типов алмазных коронок приведены в приложении 9.

2.3.3. Бескерновое бурение

Осевая нагрузка при бурении сплошным забоем оказывает существенное влияние на механическую скорость бурения. При увеличении диаметра бурения и крепости пород осевую нагрузку необходимо повышать. Осевую нагрузку на долото можно рассчитать по формуле

$$P = p_0 * D \qquad (2.5)$$

где P – осевая нагрузка на долото, даН;

p_0 – удельная нагрузка на 1 м диаметра долота, даН;

D – диаметр долота, м;

При больших значениях осевой нагрузки, рассчитанной по формуле (2.5), могут использоваться УБТ, которые передают большую часть осевой нагрузки на долото за счет своего веса, создают направление скважине и улучшают условия работы бурильных труб. В данном случае длина УБТ рассчитывается по формуле

$$L = \frac{k*P}{q*g\left(1-\frac{\gamma_р}{\gamma}\right)*Cos\theta} \qquad (2.6)$$

где L – длина УБТ, м;

k – коэффициент увеличения веса УБТ относительно осевой нагрузки (принимается);

g – ускорение силы тяжести, $м/с^2$;

q – вес 1 метра УБТ, даН;

γ - удельный вес материала УБТ, $кг/м^3$;

$\gamma_р$ – удельный вес промывочной жидкости, $кг/м^3$;

θ – зенитный угол, …°

Число труб в колонне УБТ определяется по формуле

$$n = \frac{L}{l}$$

где L – длина УБТ, м;

l – длина одной трубы, м;

Частоту вращения долота (в об/мин.) можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{60v_0}{\pi D} \quad (2.7)$$

где v_0 – окружная скорость долота, м/с;

D – диаметр долота, м.

Расход промывочной жидкости определяется, исходя из скорости восходящего потока промывочной жидкости и площади кольцевого пространства скважины

$$Q = 0{,}785 * (D^2 - d^2) * v \quad (2.8)$$

где Q – расход промывочной жидкости, $м^3/с$;

D – диаметр долота, м;

d – наружный диаметр бурильных труб, м;

v – скорость восходящего потока промывочной жидкости, м/с;

При оформлении задания дать обоснование выбора типа породоразрушающего инструмента, типа колонкового набора и колонны бурильных труб. Дать эскиз компоновки бурового снаряда, с указанием назначения каждого из его элементов.

Занятие 3

ВЫБОР ТИПА ПОРОДОРАЗРУШАЮЩЕГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ КАНАТНО-УДАРНОГО БУРЕНИЯ И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМА БУРЕНИЯ

Задание. Выбрать тип долота и состав бурового снаряда для канатно-ударного бурения в соответствии с физико-механическими свойствами горных пород и рассчитать параметры режима бурения.

Цель задания – изучить типы долот для канатно-ударного бурения и область их применения, а также состав и конструкцию бурового снаряда. Освоить методику расчета параметров режима бурения.

3.1. Область применения канатно-ударного бурения

Канатно-ударное бурение применяется при:

1) сооружении разведочных и эксплуатационных скважин на воду;
2) разведке россыпных месторождений и мелковкрапленных руд;
3) бурение технических скважин: для замораживания водоносных пород, водопонижения, вентиляции подземных выработок и т.д.;
4) бурение взрывных скважин при разработке месторождений полезных ископаемых открытым способом.

Буровой снаряд при канатно-ударном бурении состоит из долота, ударной штанги, раздвижной штанги, канатного замка. Для чистки скважины от шлама применяют желонки.

При бурении скважин применяют плоские долота, двутавровые, округляющие и крестовые долота. В зависимости от крепости пород угол заострения лезвия долота меняется от 70 до 130° (чем тверже порода, тем больше должен быть этот угол).

Плоские долота служат для бурения в мягких породах. Двутавровые долота применяют при бурении в вязких породах средней твердости. Округляющие долота используют для бурения в твердых породах, а также в трещиноватых породах и валунно-галечных отложениях. Крестовыми долотами бурят в трещиноватых породах.

3.2. Расчет параметров режима бурения

Производительность ударно-канатного бурения зависит от правильно подобранных параметров режима бурения: массы ударного снаряда, высоты его подъема над забоем или высоты сбрасывания, частоты ударов и количества подливаемой воды в скважину.

Вес рабочей части снаряда (в даН) определяется по формуле

$$M_p = D * m_o \qquad (3.1.)$$

где D – длина лезвия долота, см;

m_o – относительный вес (даН/см), приходящийся на 1 см лезвия долота, даН/см;

Величина относительного веса бурового снаряда выбирается, исходя из крепости горных пород:

1) по мягким породам (I-III категории по буримости) 15-25 даН/см;
2) по породам средней твердости (IV-V категории буримости) 30-40 даН/см;
3) по твердым породам (VI категории буримости) 40-50 даН/см;
4) по весьма твердым породам (VIII категории буримости) 60-80 даН/см.

Необходимый вес ударной штанги определяется по формулам:

$$M_2 = M_{\text{р}} - (M_1 + 0{,}5M_3), \text{ даН} \qquad (3.2)$$

при работе без раздвижной штанги

$$M_2 = M_{\text{р}} - (M_1 + M_4), \text{ даН} \qquad (3.3)$$

где M_1 – вес долота, даН;

M_2 – вес ударной штанги, даН;

M_3 – вес раздвижной штанги, даН;

M_4 – вес канатного замка, даН

Современные буровые станки канатно-ударного бурения обеспечивают высоту подъема снаряда над забоем на 0,35 – 1 м и частоту ударов от 40 до 60 в 1 мин. В зависимости от характера пород и глубины скважины задаются высотой сбрасывания снарядов, после чего определяют частоту ударов (уд/мин)

$$n_y = 21\sqrt{\frac{b}{S}} \qquad (3.4)$$

где b – ускорение падения снаряда в шламовой среде, м/с^2;

S – высота сбрасывания снаряда, м.

При бурении по глинистым породам принимают b=4,5-5 м/с^2, по твердым породам b=6-6,5 м/с^2.

Высота сбрасывания снаряда увеличивается при бурении по твердым монолитным породам, а частота ударов снижается. При бурении пород сильно - трещиноватых или слоистых, перемежающихся по твердости следует увеличивать частоту ударов, уменьшать высоту сбрасывания снаряда. С ростом глубины бурения высоту сбрасывания снаряда нужно увеличивать, а частоту ударов снижать.

При бурении мягких пород рекомендуется на каждый рейс подливать в скважину 35-40 л. воды, а при бурении твердых пород – 10-15 л.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков А.С., Долгов Б.П. Вращательное бурение разведочных скважин.-М.: Недра, 1988, 318с.
2. Волков А.С., Буровой геологоразведочный инструмент.-М.: Недра, 1979, 285с.
3. Володин Ю.И. Руководство к практическим занятиям и сборник задач по бурению скважин.-М.: Недра, 1987, 204с.
4. Михайлова Н.Д. Техническое проектирование колонкового бурения.-М.: Недра, 1985, 197с.
5. Шамшев Ф.А., Тараканов С.Н., Кудряшов Б.В. Технология и техника разведочного бурения.-М.: Недра, 1983, 564 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица П.1.1

Исходные данные для составления конструкции скважины

Геологический разрез	Категория пород	Номера вариантов и мощность слоя, м									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Почвенно-растительный слой	II	2	3	1	1,5	4	2,5	3,5	5	4,5	5
		3	4	2	5	6	4,5	5,5	6	5,5	7
Суглинки	III	5	6	7	8	10	15	20	30	40	50
		8	10	9	12	15	20	30	40	50	60
Песок среднезернистый	II	3	4	5	6	8	9	10	12	14	16
		4	6	7	9	10	12	14	16	18	20
Известняк трещиноватый (зона поглощения)	V	10	15	20	30	40	50	60	70	25	35
		20	30	40	50	60	70	80	90	45	45
Мергель	VI	30	50	60	80	40	25	15	35	45	70
		40	60	70	90	50	30	25	55	60	65
Песок разнозернистый	I	15	40	35	50	45	30	25	55	18	42
		20	25	45	35	60	50	55	65	28	65
Глины плотные	IV	40	50	60	70	65	70	65	75	80	85
		25	35	45	50	60	30	45	55	90	100
Бокситы	VI	1	2	3	2,5	3,5	5	5,5	2,6	2	1,5
		2	3	4	3,5	4,5	6	6,5	3	2,5	4
Глины углистые	IV	1	1,5	2	1,4	1,8	3,4	4,2	2	1,4	2,5
		2,2	2,5	3	1,6	2,2	4,4	5,2	1,8	3	1,6

Таблица П.1.2

Исходные данные для составления конструкции скважины

Геологический разрез	Категория пород	Номера вариантов и мощность слоя, м											
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
		33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Суглинок	III	3	5	4	2	3,5	4,6	5	6	7	8	9	5
		4	6	8	3	5,5	7	9	5,5	4	6	7	9
Кварцево-хлоритовый сланец, трещиноватый	V	10	15	20	30	40	25	35	45	50	60	70	80
		15	20	25	23	37	48	52	65	49	86	67	58
Серпентинит сильно трещиноватый	VI	30	40	60	35	55	65	75	35	45	40	38	28
		40	50	70	45	65	80	36	58	26	46	68	84
Метасоматит хлористокарбонатный	VIII	60	80	58	65	76	48	34	28	62	54	58	86
		48	54	68	52	78	86	46	34	62	78	96	100
Туфопесчаник	IX	50	70	80	65	45	38	26	48	54	66	87	96
		34	65	82	54	86	68	76	56	42	75	62	96
Медный колчедан	VII	2	4	3	6	8	10	5	12	8	14	16	3
		3	5	2,5	7	6	8	4	9	4	6	4	2
Альбитофир	XI	4	1	5	6	8	12	14	5	7	9	4	15
		6	12	15	4	10	8	6	4	11	18	6	8

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

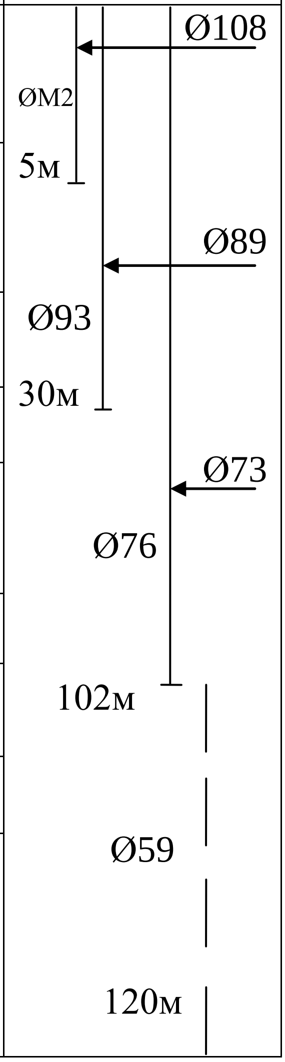
Рекомендуемый диаметр керна по полезному ископаемому

Тип полезного ископаемого	Минимальный диаметр керна, мм	Диаметр скважины, мм
Железный кварцит	32	46
Титаномагнетит	32	46
Медно-никелевые руды	32	46
Медно-колчеданные руды	32	46
Медистый песчаник	22	36
Медно-порфировые руды		59
Бокситы	32-42	46-59
Свинцово-цинковые руды	22-42	46-59
Вольфрамо-молибденовые руды	32-42	46-76
Золотоносные шляпы	32	46
Оловянные руды	32-42	46-59
Редкометальные	42-60	59-76
Уголь	60	76

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Графическое оформление конструкции скважины

Геологический разрез	Можность слоя, м	Конструкция скважины
Почвенно-растительный слой	3	
Суглинки	10	
Песок среднезернистый	16	
Глины плотные	20	
Мергель сильнотрещиноватый (поглощение)	30	
Песок	10	
Глины	20	
Бокситы	5	
Глины углистые	6	



Примечание: ∅ - обозначение диаметра;
Вертикальный масштаб
М 1:10 или М 1:20

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Значения рекомендуемых нагрузок на один основной резец твердосплавной коронки (даН)

Группа и тип коронки	Категория пород по буримости				
	I-II	III-IV	V	VI	VII-VIII
Ребристые					
М1	30-50	50-60	-	-	-
М2	-	60-80	-	-	-
М5	-	40-60	-	-	-
Резцовые					
СМ3	-	40-50	50-80	80-100	-
СМ4	-	-	50-60	60-80	-
СМ5	-	-	40-50	50-60	-
СМ6	-	-	-	-	60-70
СТ2	-	40-60	60-80	80-100	-
Самозатачивающиеся					
СА-1	-	-	30-50	40-80	50-100
СА-2	-	-	-	40-60	50-80
СА-4	-	-	-	40-60	50-80
СА-5	-	-	-	40-60	50-80
СА-6	-	-	-	40-60	50-80

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Удельный расход промывочной жидкости (10^{-3} м^3/с) на 1м диаметра коронки

Группа коронок	Категория пород по буримости				
	I-II	III-IV	V	VI	VII-VIII
Ребристые	17-20	20-27	-	-	-
Резцовые	-	-	20-23	17-20	15-17
Самозатачивающиеся	-	-	-	17-20	15-17

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Рекомендуемые значения удельной осевой нагрузки для алмазных коронок, 10^{-4} даН/м^2

Тип коронки	Категория пород по буримости			
	VII	VIII-IX	IX-X	XI-XII
Однослойные	60	60-75	-	-
Импрегнированные	-	-	75-90	100-170

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Значения удельных нагрузок, окружной скорости вращения долота и скорости восходящего потока промывочной жидкости для бескернового бурения

Тип долота	$P * 10^3$ даН/м	v_0, м/с	v, м/с
Лопастные			
2Л	6-7,5	0,8-2,0	0,6-1
3Л	8-12	0,8-1,5	
ИР	8-15	0,8-1,2	
Пикобуры	4,5-9,5	0,8-1,4	
Шарошечные долота			
М	15-25	0,8-1,2	0,6-1 (вода)
С	20-35	0,8-1,4	0,4-0,8 (гл.раствор)
Т	20-40	0,6-1,2	
ТК	20-45	0,6-1,0	
К и ОК	20-30	0,6-0,8	
Дисковые долота	20-30	1,0-1,6	
ДДА	30-40	0,75-1,5	
Алмазные долота			
08А3 и 09А3	24-32	0,8-1,7	0,5-0,8 (вода)
08И3	25-35	1,0-2,0	0,4-0,8 (гл.раствор)

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Исходные данные для расчета режимных параметров канатно-ударного бурения

№ задания		Глубина бурения, м		Описание пород	Диаметр скважины, мм	
				Дресьва III категории	495	445
3	4	80	120	Известняк IV категории	345	148
5	6	100	150	Конгломерат V -"-	248	198
7	8	90	200	Мрамор IV -"-	298	148
9	10	60	150	Мергель IV -"-	395	198
11	12	30	50	Суглинок II -"-	495	445
13	14	10	30	Глина III -"-	345	395
15	16	180	250	Опока IV -"-	198	148
17	18	120	190	Сланец глинистый V -"-	248	148
19	20	250	300	Порфирит VI -"-	198	148
21	22	200	280	Туф VII -"-	248	198
23	24	40	50	Сланец кремнистый V -"-	345	445
25	26	80	100	Серпентинит V -"-	248	198
27	28	50	60	Порфирит VI -"-	345	298
29	30	25	45	Глина III -"-	248	445
31	32	160	280	Песчаник VI -"-	198	148
33	34	100	120	Альбит IV -"-	298	198
35	36	30	40	Галечно-щебенистые отложения IV -"-	495	445
37	38	10	20	Галечник крупный V -"-	345	298
39	40	20	35	Гранит выветренный IV -"-	298	248
41	42	80	120	Гнейс VI -"-	248	148
43	44	110	150	Гранит VII -"-	198	148
45	46	150	230	Диабаз VI -"-	248	198
47	48	200	300	Габбро VI -"-	198	148
49	50	60	130	Песчаник трещиноватый IV категории	298	345

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Удельный расход промывочной жидкости при алмазном бурении ($10^{-3} м^3/с$)

Коронки	Характеристика горных пород	Удельный расход жидкости, $10^{-3} м^3/с$
Однослойные	Малоабразивные	12-17
	Абразивные	13-20
Импрегнированные	Малоабразивные	5-10
	Абразивные	8-13

МИНОБРНАУКИ РФ

ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Л. И. Кралина, Г. А. Усов, Ф. П. Сердюков

Исследование процессов разрушения и физико-механических свойств горных пород

Методическое пособие
к комплексу практических занятий
по дисциплине

«Техника разведки»

для студентов специальности
21.05.03 Технология геологической разведки
Очного и заочного обучения

Часть 1

Екатеринбург
2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для выполнения лабораторных работ по профилирующим дисциплинам для студентов специальности 21.05.02 Прикладная геология. Предложенные в учебно-методическом пособии лабораторные работы выполняются с целью закрепления теоретических знаний, приобретения практических навыков в выполнении работ лабораторного характера, в том числе с элементами НИРС, расчетов, необходимых при изучении студентами профилирующих дисциплин, курсовом и дипломном проектировании. При выполнении работ используются справочные материалы, приведенные в приложении. Большинство работ рассчитано на выполнение и оформление непосредственно на занятиях. Если работа не закончена, то с разрешения преподавателя она может быть оформлена и сдана к следующему занятию.

Структурно, в зависимости от теоретического характера лабораторных исследований, учебно-методическое пособие состоит из трех частей:

Часть 1. Исследование процессов разрушения и физико-механических свойств горных пород;

Часть 2. Исследование буровых промывочных жидкостей и тампонажных растворов;

Часть 3. Методика обработки результатов исследования при выполнении лабораторных работ и справочные материалы.

Список литературы, использованной при написании учебно-методического пособия, приведен в конце каждой части.

Предлагаемые в настоящем методическом пособии лабораторные работы студентами выполняются побригадно по 2-3 человека. Объем данных работ рассчитан в основном на 2-4 часа, реже - на 6-8 часов в случае проведения студентами комплексных исследований повышенной сложности и детальности.

Полученные результаты лабораторных исследований оформляются студентами в виде отчета, содержащего следующие данные и разделы:

1. Полное наименование работы.
2. Состав исполнителей.
3. Руководитель работы.
4. Задание, дата.
5. Исходные данные.
6. Порядок выполнения работы.
7. Выводы и рекомендации по результатам исследований.

Лабораторная работа № 1

Определение абразивности образцов горной породы методом Барона

Настоящие методики определения абразивности горных пород разработаны в Институте горного дела им. А. А. Скочинского, Л. И. Бароном и А. В. Кузнецовым. Сущность ее заключается в истирании о поверхность образца горной породы торца вращающегося стержня из незакаленной стали -серебрянки с последующим определением весового износа стержня во время опыта. За критерий абразивности принимается суммарная потеря в весе стержня за стандартное время опыта 10 минут. Опытное потирание стержня производится при осевой нагрузке 150 Н и скорости вращения 400 об/мин.

Испытания производятся на установке, выполненной на базе обычного сверлильного станка типа НС - 1 2 А.

Образец горной породы устанавливается в зажимном приспособлении таким образом, чтобы истираемая поверхность была перпендикулярна шпинделю станка. В патроне станка закрепляется эталонный стержень из инструментальной калиброванной стали-серебрянки У8А диаметром 8 мм. Изготовление стержней производится на токарном станке, где пруток разрезается на части длиной 70 мм. В одном из торцов каждого стержня высверливается центральное отверстие диаметром 4 мм и глубиной 12 мм.

Определение абразивности породы производят сверлением образца породы эталонным стержнем, предварительно взвешенным на аналитических весах с точностью до 0,1 мг. Исследования производят по схеме парных опытов: сначала сверление осуществляется в течение 10 мин одним концом стержня, затем в течение 10 мин – другим.

После опыта стержень очищается и снова взвешивается на аналитических весах с точностью до 0,1 мг.

Коэффициент абразивности породы вычисляется на основании результатов исследований по формуле

$$A = \frac{\sum q_i}{2n_{\text{п}}}, \qquad (1.1)$$

где A - коэффициент абразивности, мг,

q_i - потеря массы эталонного стержня за каждый парный опыт, мг;

$n_{\text{п}}$ - число парных опытов.

На каждом образце горной породы проводится 3-5 парных опытов, а в целом по пробе необходимо провести 9-15 таких опытов

Необходимое число единичных опытов определяется с учетом коэффициента вариации, зависящего от структуры горных пород, на основании величины отношения

$$a = \frac{K_{\text{доп}}}{K_{\text{вар}}} \qquad (1.2)$$

где $K_{\text{доп}}$- допускаемое отклонение точности определения коэффициента абразивности;

$K_{\text{вар}}$ - коэффициент вариации, принимаемый согласно табл. 1.1.

Согласно абсолютной величине *a*, необходимо определить минимальное число единичных опытов, руководствуясь табл. 1.2.

Таблица 1.1

Определение коэффициента вариации $K_{вар}$

Структура пород	Размер зерен, мм	$K_{вар}$, %
Крупнозернистая	5	30
Среднезернистая	3-5	22
Мелкозернистая	0,3-0,2	19
Тонкозернистая с включениями	0,2	34

Таблица 1.2

Определение минимального числа единичных опытов

a	2,0	0,98	0,69	0,57	0,49	0,48
n	1	4	8	12	16	20

Запись результатов измерений и вычислений производится в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Определение абразивности горных пород

№ п.п	Порода		Номер образца опыта	Масса стержня. $G_{1,2}$, мг		Потеря массы, мг	Абразивность A, мг				Примечание
	шифр	название		до опыта	после опыта		по опыту	по образцу	среднее по пробе	коэф. вариац, %	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Построение графиков и выводы результатов работы

Построение графиков по результатам измерений и вычислений настоящей лабораторной работы. УП1, УП2 - предварительные усилители;

Количественный и качественный анализ зависимостей

$A = f\left(\frac{H_{м,\max}}{H_{м,\min}}\right)$ и $A = f\left(H_{м,\max}\right)$, а также степени зернистости

(крупно-, средне-, мелко-, микрозернистости) исследуемых образцов горных пород.

Обосновать практическое значение полученных результатов лабораторных исследований и дать практические рекомендации.

Лабораторная работа № 2.

Определение физико-механических параметров скальных горных пород

Для оценки прочностных свойств горных пород определяются коэффициент динамической прочности (крепости и дробимости) $F_д$, а для оценки абразивных свойств - коэффициент абразивности $К_{абр}$.

Методика разработана в ЦНИГРИ под руководством Н. И. Любимова и рекомендована для исследований ФМС скальных горных пород.

Отбор н подготовка образцов горных пород

Отбор образцов горных пород производится, как правило, из керна. Можно также отбирать образцы произвольной формы соответствующего размера.

Размеры образцов из керна: длина 20-25 см при бурении коронками диаметром 46-59 мм и 15-18 см при бурении коронками диаметром 76-92 мм.

Подготовка проб из образцов осуществляется в следующем порядке:

- исследуемый образец породы разбивается на куски изометрической формы без острых углов размером 1,5-2,0 см в поперечнике;
- набираются две пробы: каждая проба состоит из 25 кусков и разделяется на пять частей по пять кусков.

Оборудование и материалы, необходимые для исследований

При определении прочностных и абразивных свойств горных пород по методике ЦНИГРИ применяются:

- прибор ПОК для определения динамической прочности (крепости) горных пород;
- прибор ПОАП-2М для определения абразивности горных пород;
- весы типа ВЛКТ-100 г / 5-3.

Прибор ПОК состоит из трубчатой ступы (рис. 2.1, а) и объемомера (рис. 2.1, б). Составными частями трубчатой ступы являются: загрузочный стакан *1*, направляющая труба *2*, удерживающий шплинт *3*, гиря *4*, упор *5*, шнур *6* и рукоятка *7*.

Объемомер состоит из стакана *1* и поршня со шкалой *2*.

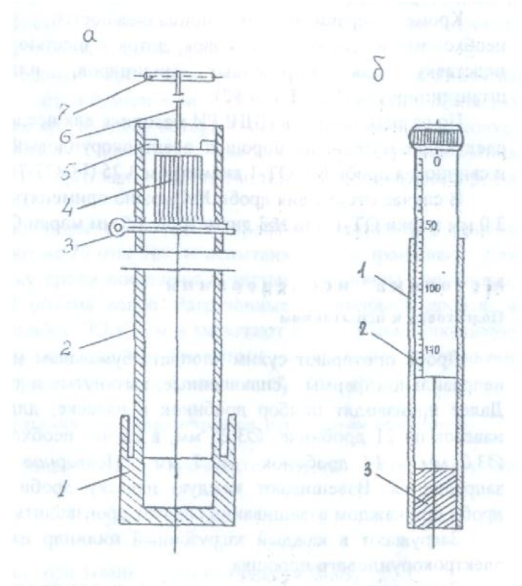


Рис. 2.1. Прибор ПОК для определения динамической прочности горных пород:

а – трубчатая ступа: *1* – загрузочный стакан; *2* – направляющая труба; *3* – шплинт удерживающий; *4* – гиря; *5* – упор; *6* – шнур; *7* – рукоятка; *б* – объемомер: *1* – стакан; *2* – поршень со шкалой; *3* – дно

Прибор ПОАП-2м, схема которого приведена на рис. 2.2, состоит из электродвигателя АОЛБ 22-4 мощностью 0,18 кВт с числом оборотов 1420 об/мин, двух рабочих органов с загрузочными камерами и пульта управления со счетчиком оборотов двигателя.

В приборе ПОАП-2м рабочий орган представляет собой жесткое сварное соединение *8* трех загрузочных камер *4*, шатуна *7* и эксцентрикового вала *2*, совершающего колебательно-вращательное движение в шариковых подшипниках *10*.

Опорой рабочего органа служат маятниковые шатуны *3*, которые с помощью шариковых подшипников *6* шарнирно связывают рабочий орган с плитой прибора.

Загрузочные цилиндры вставляются в камеры *4* прямоугольной формы и закрываются крышками *5* при помощи натяжных замков.

Привод рабочего органа прибора осуществляется от электродвигателя *1* через эксцентриковый вал *2* с насаженным на него маховиком *9*. При помощи вала 2 загрузочные камеры совершают возвратно-поступательное движение, обеспечивающее интенсивное перемешивание помещенного в них материала.

Механический редуктор-счетчик оборотов *12,* который присоединяется к валу электромотора при помощи двух шкивов и приводного ремня, позволяет контролировать число колебаний рабочего органа.

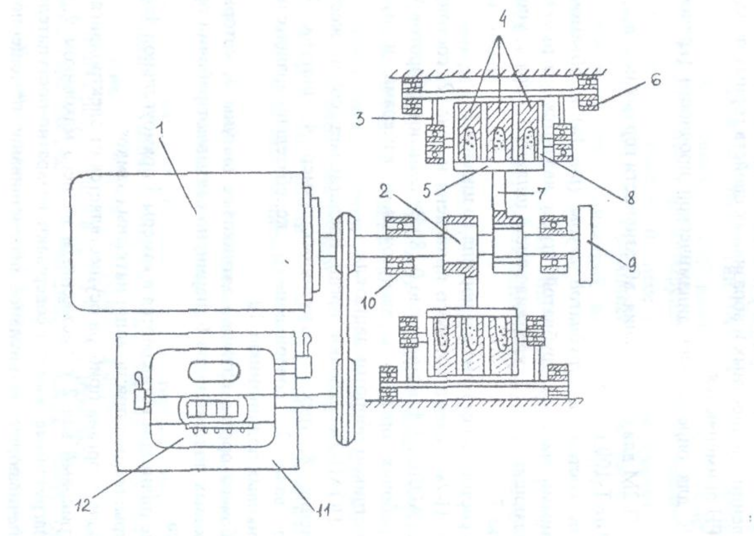


Рис. 2.2. Схема прибора ПОАП-2М для определения абразивности горных пород:
1 – электродвигатель; *2* – эксцентриковый вал; *3* – шатуны; *4* – загрузочные цилиндры; *5* – крышка; *6* – опоры; *7* – шатун; *8* – рабочие органы; *9* – маховик; *10* – подшипники; *11* – пульт управления; *12* – счетчик.

Весы типа ВЛКТ-100 г/5-3 предназначены для определения потери веса эталонного материала при определении абразивности пород с требуемой точностью

Для исследований на приборах ПОК и ПОАП-2м используются:

- загрузочные цилиндры из стекла органического СОЛ (ГОСТ 15809-70) - 18 шт. (6 - для проведения опыта, 6 - для промывки дроби после опыта, 6 - запасные);
- сито из сетки №5 (ГОСТ 3826-66);
- мерка емкостью l $см^3$.

Кроме перечисленных принадлежностей, учтенных в ОСТе, необходимо иметь молоток, совок, лоток с шестью
ячейками для дроби, подставку для загрузочных цилиндров, пластинку, лопаточку, штангенциркуль (ГОСТ 166-80).
По разработанной в ЦНИГРИ методике для исследований необходимы следующие материалы: порошок электрокорундовый №12 (ГОСТ 3647-80) и свинцовая дробь №4 ОТ-1 диаметром 3.25 (ГОСТ 7837-76).

В случае отсутствия дроби №4 можно применять дробь №5 диаметром 3,0 мм марки ОТ-1 или №3 диаметром 3,5 мм марки ОТ-П.

Методика исследований
Подготовка к испытаниям

Дробь протирают сухим хлопчатобумажным материалом. Дробинки неправильной формы (сплющенные, вытянутые и т. п.) отбраковываются. Далее производят подбор дробинок в навеске, для чего заготовляют 6 навесок по 21 дробинке Ø 3,25 мм; в случае необходимости 26 дробинок Ø 3,0 мм и 14 дробинок Ø 3,5 мм. Повторное использование дроби запрещается. Взвешивают каждую навеску дроби. Определение массы дроби при каждом взвешивании следует производить с точностью до 5 мг.

Загружают в каждый загрузочный цилиндр навеску дроби и 1 см электрокорундового порошка.

Загрузочные цилиндры с дробью и электрокорундовым порошком помещают в прибор и включают его на 20 минут. При этом электродвигатель должен совершить 28 тыс. оборотов, которые контролируются счетчиком прибора.

Каждую навеску дроби после указанного опыта помещают в сосуд с водой и после перемешивания (всполаскивания) извлекают и протирают насухо чистым хлопчатобумажным материалом.

Промытую дробь взвешивают. Потеря массы дроби в каждой пробирке должна быть 200±10 мг. В случае отклонения потери массы дроби от указанного необходимо изменить количество дробинок в навеске и повторить тарировочные работы вновь.

Проведение испытаний

Каждую часть пробы, состоящую из 5 кусков, помещают в стакан прибора ПОК и производят 10 сбрасываний гири массой 2,4 кг с высоты 600 мм (груз поднимается до упора). Продукт разрушения всех пяти частей каждой пробы породы просеивается через сито с размером стороны ячейки а свету 0,5 мм. Прошедшую через сито фракцию 0,5 мм и менее ссыпают в трубу объемомера (рис. 4.2). В трубу свободно вставляют до упора цилиндр и снимают отсчет "h" по шкале цилиндра в миллиметрах.

Раздробленную горную породу фракции 0,5 мм и менее высыпают из объемомера на лист чистой бумаги в виде конуса, затем конус с помощью пластинки развертывают в диск, который снова пересыпают в конус. Процесс перемешивания повторяют 2 - 3 раза для получения однородной среды. Из противоположных частей диска отбирают пробы объемом 1 см^3 каждая.

Загрузочные цилиндры с дробью и пробами помещают в прибор ПОАП-2м и включают на 20 мин. После испытания дробь промывают. Для этого каждую навеску дроби помещают в чистые загрузочные цилиндры, заполненные на 2/3 объема водой. Загрузочные цилиндры с дробью и водой помещают в прибор ПОАП-2м и включают его на 3 мин. Промытую дробь протирают сухим хлопчатобумажным материалом, взвешивают каждую навеску и определяют потерю массы дроби ΔQ (мг).

Определение физико-механических параметров по результатам испытаний

Коэффициент динамической прочности породы определяет по формуле:

$$F_{д} = \frac{20n}{h} = \frac{200}{h}, \qquad (2.1)$$

где n=10 - число сбрасываний гири на приборе ПОК;

h - отсчет по шкале цилиндра объемомера, мм.

Коэффициент абразивности исследуемой породы определяют по формуле:

$$K_{\text{абр}} = \frac{\Delta Q}{100}\ , \tag{2.2}$$

где ΔQ - потеря массы дроби, мг.

Коэффициенты динамической прочности и абразивности определяются по двум пробам.

За средние значения $F_{\text{д}}$ или $K_{\text{абр}}$ принимаются среднеарифметические двух определений при условии:

$$Z = \frac{X_1 - X_2}{(X_1 + X_2)/2} \cdot 100 \langle 25\ \%, \tag{2.3}$$

где X_1 и X_2 - значения двух определений $F_{\text{д}}$ и $K_{\text{абр}}$.

В случае отклонения от приведенного условия проводятся дополнительные определения. Из полученных значений $F_{\text{д}}$ и $K_{\text{абр}}$ выбираются те два, для которых выполняется условие (2.3).

На основании определенных опытным путем значений динамической прочности $F_{\text{д}}$ и коэффициента абразивности $K_{\text{абр}}$ можно определить объединенный комплексный показатель бурности $\rho_{\text{м}}$ по формуле:

$$\rho_{\text{м}} = 3F_{\text{д}}^{0.8} \cdot K_{\text{абр}} \tag{2.4}$$

Лабораторная работа № 3.
Определение энергоемкости процесса распиловки горных пород алмазным диском

Распиловка является начальной операцией в обработке каменного сырья. Для распиловки горных пород используют несколько типов алмазных пил и станков, конструкция которых зависит от размеров камней и конкретной цели распиловки.

Процесс распиловки можно контролировать по показаниям электроприборов, которые устанавливаются в системе электропривода для измерения силы тока, напряжения и потребляемой мощности.

Оценка процесса распиловки возможна по удельным затратам электроэнергии на единицу площади распиливания, которая зависит от ФМС горных пород, параметров режущего инструмента и технологических параметров распиливания.

Задачей исследования является определение энергоемкости процесса распиливания горных пород с различными ФМС на камнерезном станке.

Технические средства для определения энергоемкости процесса распиловки

В качестве распиловочного механизма используется серийный камнерезный станок ПТ-44, оснащенный алмазным отрезным диском:

Техническая характеристика камнерезного полуавтомата ПТ-44

Наибольшая высота обрабатываемой заготовки, мм ….	150
Наибольшая длина обрабатываемой заготовки, мм …..	160
Частота вращения шпинделя, об/мин …………………..	1500
Инструмент: круг отрезной, 2726-0272 ГОСТ 10110-78	1000
диаметр, мм ………………………………………	450
толщина, мм………………………………………	2,4
Скорость подачи (продольное перемещение салазок), мм/мин	
при модуле червячной передачи m = 1…………..	5,4-31,5
m = 2…………..	10,8-63
Питающая эл. сеть:	
род тока……………………………………………….	Переменный
частота тока, Гц………………………………………	50
напряжение, В………………………………………..	220, 380
Электродвигатель	
Тип………………………………………………….	4А80В (АИР90В)
мощность, кВт………………………………………..	1,5 (2,2)
частота вращения, об/мин…………………………..	1500
габариты, мм, не более………………………………	1240 890 940
масса, кг, не более…………………………………..	350

Принцип работы камнерезного полуавтомата ПТ-44

Привод станка осуществляется от электродвигателя *1* (рис. 3.1) Вращение от двигателя передается через клиноременную передачу на шпиндель *2*, на котором закреплен алмазный круг *10*. Вращение шпинделя двухскоростное, так как шкив шпинделя имеет два ручья с разными диаметрами.

При распиловке заготовок продольная подача заготовки *11* производится механически от двигателя *1* через клиноременную передачу, червячную передачу *7*, передачу "винт-гайка", гайка *8* которой является разъемной. При разомкнутом положении гайки механическая подача на заготовку не происходит. Заготовка при распиловке надежно закрепляется в зажимном устройстве *9*, которое имеет возможность продольного перемещения по направляющим *4*. Скорость продольной подачи во время распиловки регулируется бесступенчатым вариатором *6*. При переводе рычага влево подача замедляется, вправо - ускоряется

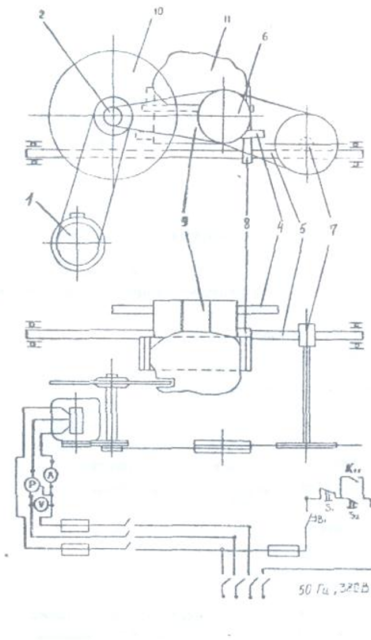


Рис. 3.1. Электромеханическая схема ПТ-44

Приборы для контроля процесса распиловки

Для контроля процесса распиловки камнерезный полуавтомат ПТ-44 имеет электрический щит, оборудованный вольтметром с ценой деления 20 В в диапазоне 500 В, амперметром с ценой деления 0,5 А в диапазоне ЮЛ и ваттметром с ценой деления 0,5 кВт в диапазоне 1,4 кВт.

Для проведения исследований необходимо иметь секундомер.

Методика определения процесса распиловки
Подготовка образцов для распиловки

Для распиловки используются образцы скальных горных пород произвольной формы. Размеры образца следует подбирать из расчета затрат времени на отрезание одной пластины в пределах 4-6 мин. и возможности получения из образца двух пластин толщиной 30 мм и длиной не менее 100 мм. Каждый образец должен быть промаркирован. Полученные при распиловке пластины используются в следующей лабораторной работе.

Подготовка камнерезного полуавтомата ПТ-44

Исследуемый образец закрепляется в зажимном устройстве станка. Для распиловки следует использовать червячное колесо с модулем m=1. Рычагом вариатора устанавливается нужная скорость резания. Рекомендуемая скорость резания при распиловке твердых пород (яшма) -23,4 мм/мин., при распиловке мягких пород (змеевик) – 33,4 мм/мин.

Организация наблюдений за процессом распиловки

В процессе исследований по показаниям ваттметра измеряется потребляемая мощность на холостое вращение алмазного диска и суммарная потребляемая мощность в процессе распиловки. Потребляемая мощность на распиливание определяется по формуле:

$$P_p = \sum P - P_{\text{хх}} \tag{3.1}$$

где P_p - потребляемая мощность на распиливание, Вт;

$\sum P$ - суммарная потребляемая мощность, Вт;

$P_{\text{хх}}$ - потребляемая мощность на холостое вращение алмазного диска, Вт.

Для получения достоверной информации необходимо провести 3 опыта - параллельные распиловки образца, обеспечивающие получение двух пластин.

Каждый опыт начинается с регистрации потребляемой суммарной мощности в момент начала распиловки. Затем суммарная потребляемая мощность регистрируется с помощью секундомера через каждые 30 с до окончания распиловки.

Результаты наблюдений и обработки заносятся в таблицу.

Регистрация результатов наблюдения и расчетов

Номер парал. набл.	$P_{\text{хх}}$	Суммарная потребляемая Мощность ΣP, Вт										Площадь распила S,м^2	Работа A, Втс	Удельная энергоемкость W, Вт·с/м^2
		0	30	60	90	120	150	180	210	240	270			
Образец №1														
1														
2														
3														
Образец №2														
1														
2														
3														

На основании наблюдений при распиловке каждого образца строятся графики, характеризующие изменение $P_{\text{Р}}$ во времени. Форма графика приведена на рис. 3.2.

Определение произведенной работы для распиливания образца

Работа распиливания характеризуется площадью фигуры 5 (рис. 3.2), ограниченной кривой, характеризующей изменение суммарной потребляемой мощности $\sum P$ во времени, и линией, ограничивающей мощность холостого вращения $P_{\text{хх}}$.

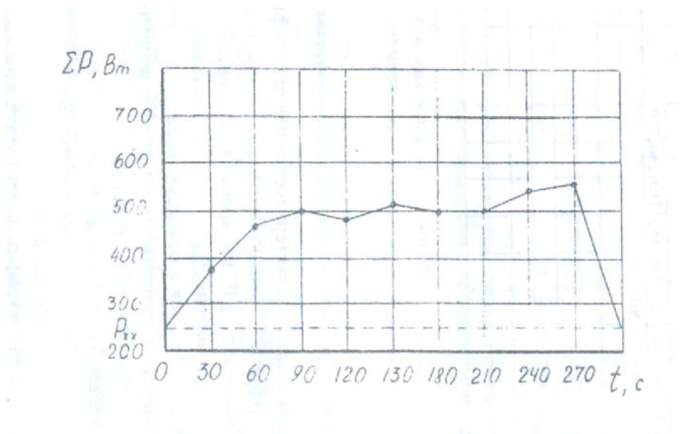


Рис. 3.2. График изменения потребляемой мощности во времени при распиловке яшмы технической.

Площадь S определяется с помощью палетки. Масштаб одной клетки палетки определяется в соответствии с масштабом координат графика:

$$M = P_p t_н, \tag{3.2}$$

где M - масштаб одной клетки, Вт·с;

P_p - масштаб мощности на графике, Вт;

$t_н$ - масштаб времени, с. Приведенный на рис. 4.6 график имеет следующий масштаб:

$M = 100 \cdot 30 = 3000$, Вт·с.

Тогда работа распиливания образца определяется из условия, Вт/с:

$$A = Mm, \tag{3.3}$$

где M - масштаб одной клетки, 3000 Вт·с;

m - количество расчетных клеток палетки в пределах площади, ограниченной кривой изменения P_P во времени, шт.

Для определения количества расчетных клеток под кривой методом палетки подсчитывается количество полных клеток n_1 и количество неполных клеток n_2. Затем приближенно определяется общее количество расчетных клеток из условия:

$$M=(n_1+n_2)/2. \tag{3.4}$$

Определение площади распила

Площадь поверхности распила образца горной породы определяется также по палетке. В качестве палетки может быть использован лист миллиметровки или разлинованный в клетку тетрадный лист. На палетку накладывается распиленный образец горной породы, и фиксируется площадь распила. Масштаб палетки принимается

$$M= 1\ см^2 =0{,}0001\ м^2.$$

Площадь распила рассчитывается из условия:

$$S=Mm, \tag{3.5}$$

где S - площадь распила, $м^2$;

M - масштаб палетки, $м^2$;

m - количество расчетных клеток палетки, шт.

Определение удельной энергоемкости процесса распиливания

Удельная энергоемкость распиливания на единицу площади горной породы рассчитывается по формуле:

$$W = \frac{A}{S}. \tag{3.6}$$

где W - удельная энергоемкость распиливания, Вт·с/м^2;

A - работа, Вт·с;

S - площадь распила, м^2.

Методика статистической обработки результатов наблюдений

Обобщающими результатами наблюдений, характеризующих энергоемкость процесса распиловки, являются удельные затраты мощности на единицу площади распиловки W_1, W_2, W_3, …, W_n, которые получены при проведении параллельных опытов при распиловке образца определенной горной породы.

Энергоемкость процесса распиловки образца горной породы характеризуется удельными затратами мощности, которые определяются как среднее арифметическое значение удельных затрат мощности при проведении параллельных опытов по формуле:

$$\overline{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \quad . \tag{3.7}$$

Дисперсия удельных затрат мощности параллельных опытов, характеризующих степень разброса вокруг среднего значения, рассчитывается по формуле:

$$D = \frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(W_i - \overline{W})^2 \; . \tag{3.8}$$

Среднее квадратическое отклонение результата каждого опыта как абсолютный показатель изменчивости удельных затрат мощности определяется из выражения:

$$S = \sqrt{\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(W_i - \overline{W})^2} \; . \tag{3.9}$$

Отдельным показателем изменчивости удельных затрат мощности параллельных опытов является коэффициент вариации, который рассчитывается по формуле:

$$K_{\text{вар}} = \frac{S}{W} 100 \ \% \tag{3.10}$$

Лабораторная работа № 4.

Исследование акустического спектра резания горной породы алмазным диском

Отбор и подготовка образцов

Для исследований необходимо использовать образцы горных пород с известными параметрами динамической прочности, абразивности и модуля продольной упругости. Образец должен иметь форму пластины толщиной 30 мм. Рекомендуется использовать пластины, полученные при выполнении лабораторной работы № 3 данного раздела. Каждый образец должен иметь свою маркировку.

Технические средства для регистрации акустического спектра

Для исследования акустического спектра резания горных пород алмазным диском используется анализатор спектра АС-1.

Акустический спектр регистрируется анализатором спектра АС-1 в пределах звуковых колебаний 16 Гц – 20 кГц при распиловке образца горной породы на камнерезном станке ПТ-44, оснащенном алмазным отрезным диском АС-50 315/250 50 М. Для контроля процесса резания станок оснащен ваттметром, вольтметром и амперметром.

Техническая характеристика анализатора спектра АС-1

Прибор состоит из измерительного блока и двух микрофонов МД 52. Измерительный блок предназначен:

- для усиления сигналов, поступающих от микрофонов;
- выделения из шумового спектра основных гармонических составляющих;
- измерения частоты звуковых колебаний в трех диапазонах (I–20-200 Гц, II - 200-2000 Гц, III - 2-16 кГц);
- измерения уровня звукового давления акустического спектра с помощью микроамперметра.

Функциональная схема АС-1 представлена на рис. 4.2. На схеме показаны:

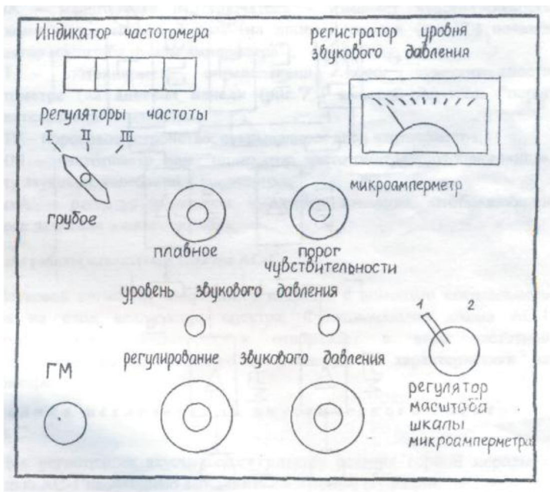


Рис. 4.1. Схема лицевой панели АС-1

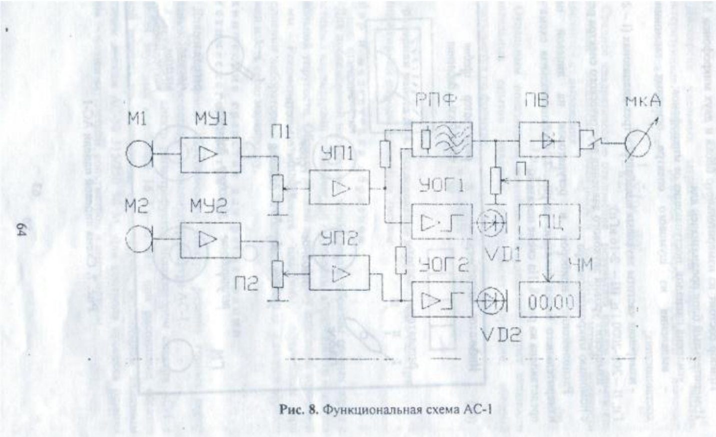


Рис. 4.2. Функциональная схема АС-1

МУ1, МУ2 -микрофонные усилители 1 и 2 каналов;
П1, П2 - потенциометры установки уровня сигналов с микрофонных усилителей (ручки потенциометров П1 и П2 выведены на лицевую панель (см. рис. 4.2) и обозначены "регулирование звукового давления 1-й канал и 2-й канал");

УОГ1, УОГ2 - усилители-ограничители шумового сигнала с выходом на светоиды VD1, VD2 (на лицевой панели (см. рис. 4.2) светоиды обозначены "уровень звукового давления");

РПФ - режекторный полосовой фильтр с высокой добротностью, (перестройка частоты фильтра осуществляется ручками (см. рис. 4.2) "регуляторы частоты грубое, плавное", расположенными на лицевой панели);

ПВ - прецезионный выпрямитель выделяет положительную полуволну первой гармоники шумового сигнала;

SA - масштабный переключатель - изменяет чувствительность микроамперметра мкА в 2 раза (на лицевой панели (см. рис. 4.2) показан "регулятор масштаба шкалы амперметра");

П - потенциометр, определяющий порог чувствительности частотометра (на лицевой панели (см. рис. 4.2) имеется указатель "порог чувствительности");

ПУ - пороговое устройство, открывающее вход частотометра;

ЧМ - частотометр или "индикатор частотометра", отображающий частоту звуковых колебаний в килогерцах;

мкА - регистратор уровня звукового давления, отображающий звуковое давление в микроамперах.

Принцип работы анализатора спектра АС-1

Звуковой сигнал от микрофонов подается с помощью специального кабеля на вход анализатора спектра. Функциональная схема АС-1 усиливает сигнал, фильтрует и отображает в виде частотной характеристики на частотометре и амплитудной характеристики на амперметре.

Методика исследования акустического спектра на АС-1

Для регистрации акустического спектра резания горной породы с помощью АС-1 необходимо выполнить следующие операции:
Расположение приборов и регуляторов на лицевой панели измерительного блока показано на рис. 4.1,

1. Установить микрофоны в непосредственной близости от режущего инструмента, обеспечив условия предотвращения попадания влаги на микрофоны.
2. Подключить микрофоны к гнезду ГМ прибора.
3. Подключить прибор к сети 220 В.

4. Установить ручки управления прибора в положение, соответствующее готовности прибора к работе. Для этого необходимо выполнить следующие операции.

4.1. Ручки потенциометров "регулирование звукового давления" (П1 и П2) установить в крайнее левое положение (повернуть против часовой стрелки до упора).

4.2. Переключатель "регуляторы частоты грубое, плавное" установить в крайнее левое положение.

4.3. Ручку "порог чувствительности" установить в крайнее левое положение, при этом индикатор частотометра должен показывать 00.00.

4.4. Переключатель ЗА "регулятор масштаба шкалы микроамперметра" установить в крайнее левое положение, при этом стрелочный индикатор мкА должен быть на нуле.

5. Включить камнерезный станок, установить режим подачи с помощью вариатора в зависимости от физико-механических свойств распиливаемого образца и обеспечить работу станка в установившемся режиме резания горной породы.

6. Медленно поворачивать ручки потенциометров П1 и П2 "регулирование звукового давления" по часовой стрелке до включения светоидов УВ1 и УО2. После включения светоидов повернуть ручки П1 и П2 против часовой стрелки, стараясь уловить положение регуляторов уровня сигнала, соответствующее моменту затухания светоидов.

7. Произвести измерения параметров акустического спектра, выполняя последовательно следующие операции.

7.1. Поворачивая ручку "регуляторы частоты плавное" по часовой стрелке, установить по микроамперметру на положение ручки, соответствующее максимальному уровню сигнала в выбранном частотном диапазоне. Точнее можно найти положение ручки, поворачивая ее по или против часовой стрелки.

7.2. Повернуть ручку "порог чувствительности" до включения частотометра в режим счета частоты. Рекомендуется поворачивать ручку не плавно, а дискретно, изменяя угол поворота в связи с некоторым запаздыванием включения счетного устройства.

7.3. Показания частотометра и стрелочного индикатора занести в таблицу. При необходимости взять еще 1-2 отсчета на этом же частотном диапазоне, стремясь отыскать локальный максимум.

7.4. Повернуть ручку "порог чувствительности" против часовой стрелки до сброса показаний индикатора частотометра (до установки 00.00).

7.5. Повернуть ручку "регуляторы частоты плавное" в крайнее левое положение и перейти на следующий частотный диапазон, переключив переключатель «регуляторы частоты грубое» по часовой стрелке в следующее положение.

7.6. Повторить измерения на вновь избранном диапазоне частоты, выполнив пункты 7.1-7.3 Результаты измерений занести в таблицу.

7.7. Выполнив пункты 7.4 и 7.5, перейти на третий диапазон частот, установив переключатель "регуляторы частоты грубое" в положение III (крайнее правое).

7.8. Повторить измерения на III диапазоне частот, выполнив пункты 7.1. - 7.3. Результаты измерений занести в таблицу.

Результаты измерений исследования акустического спектра резания горной породы алмазным диском

Диапазон	I			II			III		
Уровень звукового давления, мкА									
Частота звуковых колебаний, кГц									

Примечания.

1. После выполнения пункта 7.3 положение ручки "регулирование звукового давления" нельзя изменять до окончания работы, в противном случае достоверность характера спектрограммы будет нарушена.

2. В некоторых случаях на одном или двух диапазонах частот могут отсутствовать ярко выраженные основные максимумы, в этом случае рекомендуется ограничиться регистрацией локальных максимумов, стараясь как можно точнее устанавливать порог чувствительности порогового устройства частотомера ручкой "порог чувствительности".

3. Если при измерении локальных максимумов показания стрелочного измерительного прибора весьма малы и отсчет взять затруднительно, можно перевести переключатель SA "регулятор масштаба шкалы микроамперметра" в крайнее правое положение. В этом случае в таблицу следует заносить численное значение, равное 1/2 от показания прибора.

Методика обработки результатов наблюдения

Графическое построение измеренных спектров производится на полулогарифмической бумаге, для того, чтобы весь диапазон измеряемых частот умещался в размерах одного листа формата А4 и при этом масштаб был бы читаемым. Построение спектрограммы (рис. 4.3), характеризующей процесс резания, производится по следующей методике.

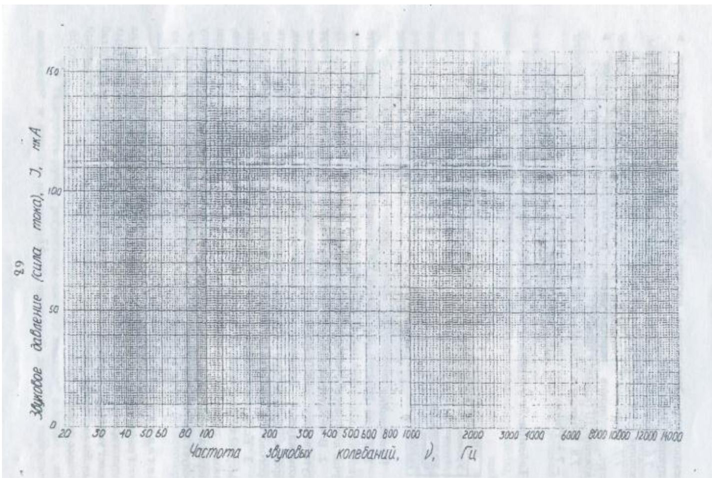


Рис. 4.3. Спектрограмма звуковых колебаний процесса резания

1. На логарифмической шкале абсцисс, соответствующей трем диапазонам АС-1, откладываются частоты в герцах, на линейной шкале ординат – уровни звукового давления акустического спектра резания в микроамперах.
2. На спектрограмме находится уровень звукового давления, соответствующий зарегистрированному максимуму длины полуволны акустического спектра.

Библиографический список

1. Инструкция по применению прибора ПСХ-4 для определения удельной поверхности измельченных материалов/ Госкомитет по промышленности строительных материалов при Госстрое СССР. – М.: 1964. - 14 с.
2. Ржевский В. В., Новик Г. Я. Основы физики горных пород: учебник для вузов. – 5-е изд, перераб. и доп. – М.: Недра, 1989. - 359 с.

3. Спивак А. И., Попов А. Н. Разрушение горных пород при бурении скважин: учебник для вузов. – 4-е изд. Перераб. и доп. – М.: Недра, 1986. - 208 с.
4. Ямщиков В. С. Методы и средства исследования и контроля горных пород и процессов. – М.: Недра, 1982.

ФГБОУ ВО
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Кафедра технологии и техники разведки МПИ

Усов Г.А.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ МЕХАНИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ БУРОВЫМ ПОРОДОРАЗРУШАЮЩИМ ИНСТРУМЕНТОМ

Учебно-методическое пособие по дисциплине
"Техника разведки"
по самостоятельной работе для студентов
специальности

21.05.03 Технология геологической разведки

Екатеринбург, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ЗАКОНОМЕРНОСТИ МЕХАНИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

1.1. Общая характеристика механических способов разрушения горных пород при бурении скважин

Вращательное бурение резцовым твердосплавным инструментом (лопастными долотами, твердосплавными коронками).

Данный способ и инструменты предназначены для бурения мягких и средних по твердости горных пород как при роторном (с вращением бурильной колонны) бурении, так и бурении забойными двигателями – турбо-, электробурами, винтовыми забойными двигателями.

Реализуются резание и скалывание под действием: $P_{ос}$ – осевого усилия и $F_р$ – усилия резания (рис. 1.1).

Параметры резца: α – угол приострения резца; $\gamma_п$ -передний угол резца; $\gamma_з$ – задний угол резца; $\beta_р$ – угол резания.

Основные формы резцов: I – с положительным передним углом; II – с отрицательным передним углом; III – самозатачивающийся резец.

Вращательное бурение буровым инструментом с резцами из композиционных алмазосодержащих материалов и поликристаллических алмазов. Применяется для бурения мягких, горных пород средней твердости с пропластками твердых при роторном бурении и бурении турбо -, электробурами, винтовыми забойными двигателями.

Элементом вооружения являются вставки из композиционного материала славутич или алмазно-твердосплавные пластины *PDC (policristalline diamont cutters) Stratapax* (*General Electric*, США*), Sindit* (*De Beers*, ЮАР), алмазно-твердосплавные пластины – АТП (ИСМ и ВНИИалмаз).

Пластинами *PDC* оснащают резцы бурового инструмента, предназначенные в основном для бурения мягких пород и пород средней твердости. Передний угол резцов с *PDC* $\gamma_п$ изменяется от –5 до –25^о (рис.1.2).

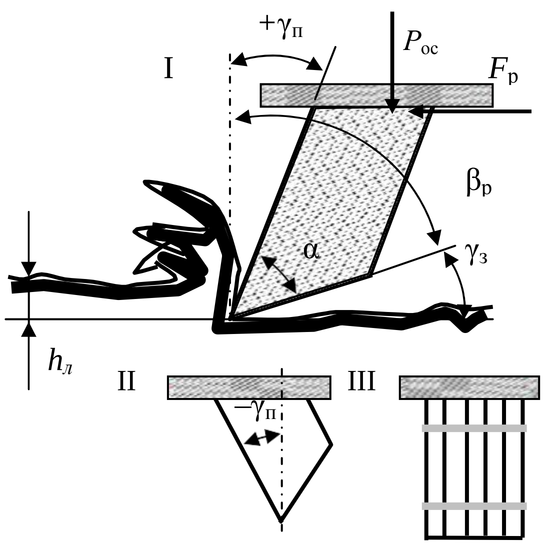


Рис. 1.1. Схема параметров вооружения твердосплавного инструмента

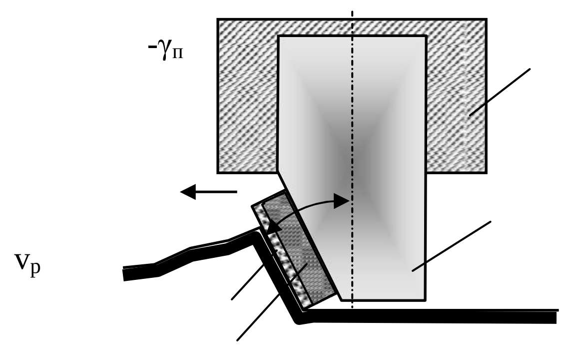


Рис. 1.2. Резец с пластиной PDC: 1 – слой поликристаллических алмазов; 2 – подложка из твердого сплава; 3 – твердосплавная опора; 4 – корпус коронки

При бурении пластично-хрупких пород разрушение осуществляется вдавливанием, резанием и сдвигом. При бурении хрупких пород (твердых) наблюдается раздавливание и скалывание породы алмазными резцами пластинки.

Вращательное бурение алмазным однослойным инструментом (алмазные долота, головки, коронки). Применяется для бурения горных пород средней твердости и твердых.

При бурении алмазным инструментом реализуются смятие, раздавливание, резание, скалывание породы.

Основная форма резцов:

- дробленый (необработанный) алмаз (по мере износа приобретает овальную форму);
- округлый – овализованный алмаз;
- округлый – полированный алмаз.

Размер резцов определяется зернистостью используемых алмазов. Зернистость алмазов изменяется в основном от 5–10 до 150–200 шт. на карат (1 карат = 0,2 г). Соответственно размер зерен от 3–2,5 мм до 0,8 и менее.

Овализованные и полированные алмазы реализуют в основном раздавливание, необработанные алмазы с острыми гранями резание-скалывание. Для повышения эффективности разрушения алмазы в коронках могут устанавливаться ориентированно наиболее твердыми гранями в направлении резания-скалывания.

При повышении размера алмаза процесс разрушения видоизменяется от резания к скалыванию, далее к раздавливанию и к упругому деформированию.

Более крупные и дробленые алмазы применяют для бурения менее твердых горных пород, более мелкие, овализованные и полированные, для бурения твердых и крепких горных пород.

Алмазный резец закреплен в твердосплавной матрице (WC+Co) и для эффективного разрушения может выступать из матрицы на высоту, в основном, не превышающую ⅓ диаметра алмаза.

Алмазный инструмент характеризуется разновысотностью резцов ($h_1 \neq h_2 \neq h_3$ на рис. 1.3), которая максимальна на начальном этапе бурения – приработке инструмента.

Для повышения эффективности разрушения горных пород алмазный инструмент изготавливают с заданным выступанием алмазов из матрицы.

Для эффективного разрушения горной породы необходимы высокие значения частоты вращения инструмента (800–1 000 мин$^{-1}$).

Вращательное бурение алмазными импрегнированными коронками. Бурение твердых и очень твердых горных пород. При бурении реализуется истирание, микрорезание.

Для эффективного разрушения горной породы необходимы высокие значения частоты вращения инструмента (1 000 мин$^{-1}$и более).

Для изготовления инструмента применяют природные и искусственные алмазы минимальных размеров. Размер зерна 0,9–0,5 мм (зернистость 150 и более шт./кар.).

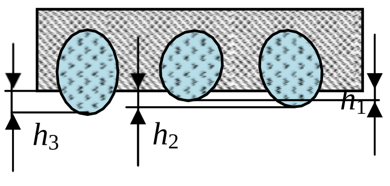


Рис. 1.3. Овализованные алмазы в матрице коронки.

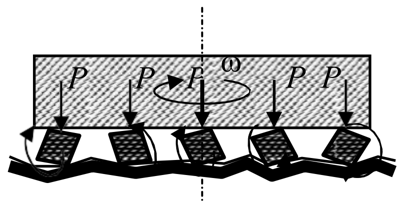


Рис.1.4. Схема работы дробовой коронки

Вращательное бурение дробовыми коронками (дробью). Бурение твердых и очень твердых горных пород (рис. 1.4). Реализуется смятие, раздавливание, скалывание.Дробовое бурение в значительном объеме применялось до периода широкого использования алмазного инструмента.

Вращательное бурение шарошечными долотами. Инструмент дробящее-скалывающего действия показан на рисунке 1.5.

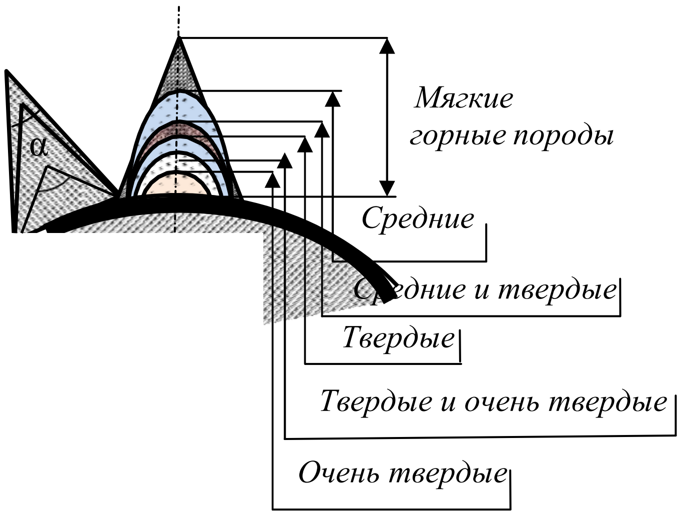


Рис.1.5. Геометрические размеры породоразрушающих элементов шарошечных долот для бурения различных по твердости горных пород

Способ предназначен для бурения горных пород как мягких, так и средней твердости, твердых и самых твердых. При бурении реализуются раздавливание, дробление, скалывание, резание породы при проскальзывании шарошек.

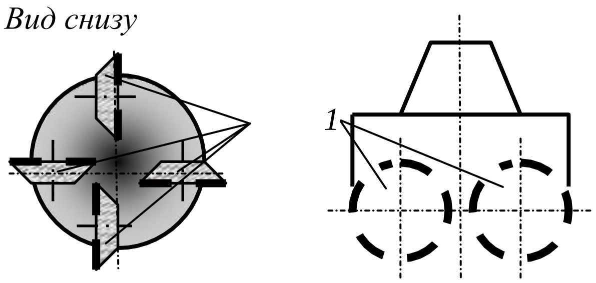
Этапы разрушающего действия:

- косой удар – скалывание породы под действием усилия P_y;
- раздавливание породы иуглубление лунки под действием усилия P_z;
- скалывание и подрезание породы при проскальзывании в направлении вращения шарошки.

По мере увеличения твердости горных пород от мягких до средних угол приострения α клиновидных зубьев увеличивается от 30–40 до 80–90^o, а размер породоразрушающих зубьев и вставок уменьшается (рис. 1.5). Для бурения твердых и очень твердых пород используются овальные и шарообразные твердосплавные вставки.

Инструмент безударного раздавливающего действия. При бурении дисковые долота, вращаясь, перекатываются по забою и острыми ребрами шарошек раздавливают породу под действием осевого усилия и развиваемых в породе контактных напряжений.

Инструмент с зубчато-дисковыми шарошками. Реализует разрушение мягких и средней твердости горных пород резанием-скалыванием зубьями дисковых шарошек *1*, установленных в радиальном направлении относительно корпуса долота (рис. 1.6, 1.7). Вращение и перекатывание шарошек по забою происходит за счет зацепления зубьев с образовавшейся криволинейной поверхностью у стенки скважины.



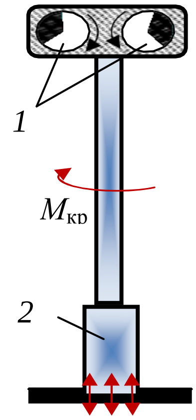


Рис. 1.6. Схема долота с зубчато-дисковыми шарошками

Рис. 1.7. Схема вибрационного бурения

Ударное бурение. Реализуется дробление и скалывание упругохрупких горных пород под действием удара.

Для бурения используются ударные способы разрушения горных пород под действием энергии сбрасываемого с определенной высоты бурового снаряда, например ударно-канатное бурение (способ применялся для бурения нефтяных скважин до 1900 г.) или забивной способ с помощью устройства ударного действия.

Комбинированное (с вращательным) механическое разрушение горных пород. Ударно-вращательный способ бурения. Реализуется разрушение за счет удара высокого уровня энергии, а вращение инструмента носит вспомогательный характер, определяя схему поражения забоя породоразрушающими вставками долота или коронки. Для бурения используются гидро-, пневмоударники и буровой инструмент с резцами в основном клиновидной и шарообразной формы. Способ успешно применяется для бурения горных пород самой различной твердости и при сооружении скважин различного назначения – взрывных, гидрогеологических, инженерно-геологических, геологоразведочных и др., диаметра и глубины.

Вращательно-ударный способ бурения. Способ применяется для бурения твердых горных пород алмазным инструментом при сооружении в основном геологоразведочных скважин.

При бурении реализуется разрушение породы за счет действия осевой силы и усилия резания. Ударное воздействие на породу с высокой частотой, но малой энергией дополняет породоразрушающее воздействие на породу основных факторов, характеризующих вращательное бурение – осевая нагрузка и частота вращения. Для бурения используются алмазный однослойный буровой инструмент или шарошечные долота и высокочастотные гидроударники.

Гидромеханический способ бурения. Реализуется при вращательном способе бурения скважин, при котором горные породы разрушаются под воздействием стационарных высоконапорных тонких струй промывочной жидкости (воды или бурового раствора) и механических породоразрушающих элементов (резец, шарошка).

Струями воды формируются щели в породе, а механическим инструментом производится скалывание ослабленных межщелевых блоков. При гидромеханическом разрушении осуществляется непрерывное динамическое и статическое воздействие на забой. Давление жидкости, необходимое для гидромеханического разрушения рыхлых пород, 20–50 МПа, мягких и средней твердости – 70–100, очень твердых – более 150 МПа. Рациональные окружные скорости перемещения насадок 10–40 см/с.

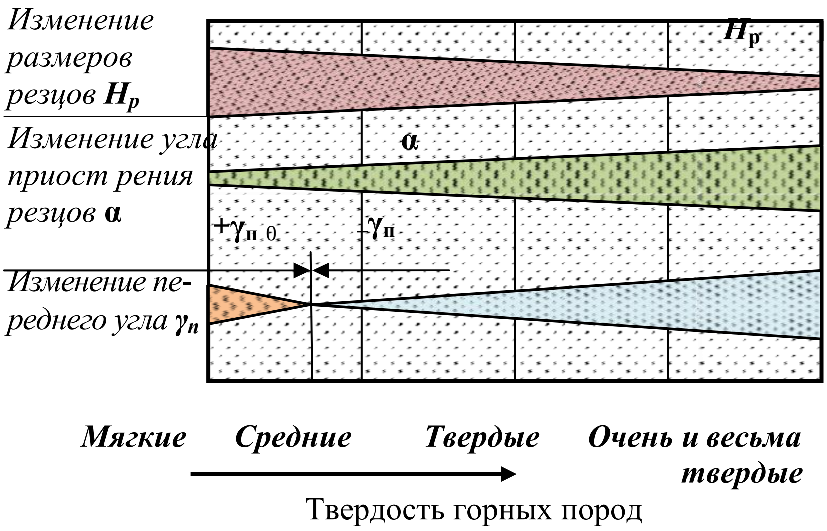
Термомеханический способ бурения. Вращательный способ бурения горных пород твердосплавным или алмазным буровым инструментом с одновременным нагреванием до высокой температуры торца инструмента и горной породы на забое.

Нагревание породы снижает ее твердость и упругость, повышает пластичность.

Вибрационное бурение. При вибрационном бурении используются приостренные наконечники (грунтоносы), которые соединяются через бурильные трубы с вибратором (рис. 1.7). Применяется для бурения преимущественно несвязных горных пород (пески). Углубление скважины происходит практически без разрушения горной породы за счет разуплотнения вследствие уменьшения сил трения между слабосвязанными частицами породы.

Компания *Sonic Samp Drill* разработала технику бурения на основе ударного бурения и высокочастотных вибраций для бурения самых прочных пород. Применение вибрационной установки колонкового бурения (рис. 1.7) позволяет в 1,5–2 раза увеличить производительность по сравнению с традиционными видами бурения. В зависимости от модели буровой установки колонкового бурения вибрационная мощность импульса составляет до 350 кН. В основе системы *Sonic* заключены два эксцентрика *1*, которые приводятся в движение двумя высокоскоростными (12 000 мин$^{-1}$) гидромоторами. Гидромоторы генерируют высокочастотные (до 180 Гц) вибрации, которые непосредственно передаются на буровой башмак *2* и вызывают активное разупрочнение и разрушение горной породы.

На рис. 1.8 приведены схемы, поясняющие связь основных параметров резцов буровых инструментов, таких как размер, угол приострения и передний угол, с твердостью горных пород.



Схема, обозначающая параметры резцов $H_р$, α, $\gamma_п$.

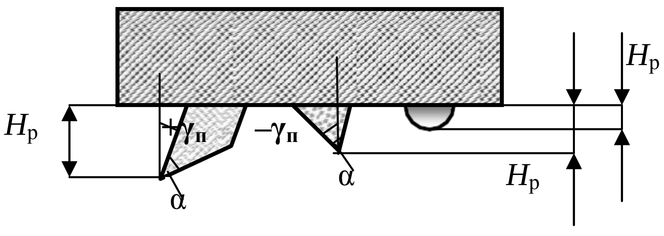


Рис. 1.8. Схемы, показывающие связь размеров резцов *H*, угла их приострения α и переднего угла $\gamma_п$ с твердостью горных пород.

Как следует из схемы на рис. 1.8, с увеличением твердости горных пород размеры резцов $H_р$ уменьшаются, угол приострения α возрастает, передний угол $\gamma_п$ из положительного становится отрицательным, а его отрицательное значение увеличивается по мере повышения твердости горных пород.

Наиболее производительным из механических способов бурения скважин в твердых породах является процесс бурения забойными пневмоударниками в режиме ударно-вращательного бурения при высоком значении давления подаваемого воздуха (механическая скорость более 20 м/ч по самым твердым породам).

Вращательное и вращательно-ударное бурение алмазным инструментом, шарошечными долотами твердых пород значительно уступают по производительности пневмоударному бурению.

При соударении шаров с твердой горной породой со скоростью порядка нескольких десятков метров в секунду она разрушается. Продукты разрушения частично циркулируют с инжектируемой жидкостью, измельчаются и выносятся из скважины восходящим потоком промывочной жидкости.

При бурении скважин на нефть и газ в настоящее время основными инструментами остаются шарошечные долота, реализующие дробяще-скалывающее воздействие на горную породу и долота режуще- скалывающего действия с резцами типа *PDC*. Если для современных шарошечных долот проходка на долото может составлять 100–200 и даже несколько сотен метров при скорости бурения 10–20 м/ч, то до- лота с резцами *PDC* показывают выдаю щиеся результаты при разрушении мягких и горных пород средней твердости: проходка может достигать 1 000 и более мет- ров, а механическая скорость 20–40 м/ч.

Например, в Эвенкии в июле 2012 г. успешно произведена отработка матричного *PDC* долота 215,9 мм серии *Tornado* производства компании *DDI*, США (рис. 1.9). Бурение осуществлялось ротором и винтовым гидродвигателем. Проходка на долото составила 1 150 м до первой реставрации при средней скорости бурения 20 м/ч, максимальная скорость достигала 40 м/ч.

Рис. 1.9. Долото PDC Tornado после проходки 1150 м.

1.2. Формирование зоны предразрушения при механическом разрушении горных пород

При механических способах бурения одновременно с отделением от массива продуктов разрушения горной породы в призабойном пространстве формируется особый слой породы, который ослаблен развитой системой микротрещин. Академик П. А. Ребиндер назвал этот слой породы зоной предразрушения [22].

Зона предразрушения горной породы имеет распространение по поверхности забоя, ствола скважины и керна. С точки зрения интенсификации процесса бурения и снижения энергоемкости разрушения горной породы наиболее продуктивна зона предразрушения забоя скважины.

Причинами появления зоны предразрушения являются напряжения и деформации горной породы, которые распространяются равномерно во все стороны от точек приложения разрушающих усилий со стороны породоразрушающих резцов и вставок бурового инструмента.

Таким образом, образование зоны предразрушения – закономерность процесса механического разрушения горных пород, проявляющаяся при всех механических способах бурения.

Закономерности формирования зоны предразрушения исследовались с применением метода люминесцентной дефектоскопии. Зона предразрушения изучалась в призабойных участках пробуренных алмазным импрегнированным инструментом стволов скважин. Бурение осуществляли при различных осевых нагрузках и фиксировали углубление за один оборот инструмента на забое. После бурения производилась обработка призабойной зоны ствола люминесцентными жидкостями, обладающими высокой смачивающей и проникающей способностью. Полученные срезы призабойной зоны в дальнейшем исследовались на люминесцентном дефектоскопе. По свечению люминесцентной жидкости определяли область распространения трещин зоны предразрушения.

Результаты замеров глубины развития зон предразрушения, образовавшихся при бурении гранит-порфира, габбро и кварцито-песчаника, приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Результаты исследования зоны предразрушения

Порода	Показатели	Осевая нагрузка, даН				
		250	500	750	1 000	1 250
Гранит-порфир	Глубина зоны предразрушения $h_з$, мм;	1,8	2,5	2,85	3,0	3,1
	Углубление за оборот h, мм;	0,024	0,039	0,051	0,056	
	$h_з/h$	75	64	56	53	
Габбро	Глубина зоны предразрушения $h_з$, мм;	0,18	0,35	0,4	0,51	0,55
	Углубление за оборот h, мм;	0,0175	0,0335	0,039	0,055	0,0645
	$h_з/h$	10,2	10,4	10,2	9,2	8,5
Кварцито-песчаник	Глубина зоны предразрушения $h_з$, мм;	1,2	1,65	1,87	2,1	2,1
	Углубление за оборот h, мм;	0,0075	0,0125	0,0185	0,0215	0,024
	$h_з/h$	160	132	101	97	87

Как следует из полученных данных, зона предразрушения по своей глубине значительно превышает величину проходки за один оборот инструмента на забое (рис. 1.10). Это соотношение особенно велико в хрупких горных породах, а минимально у более пластичного габбро. С ростом осевого усилия в диапазоне 250–750 даН величина зоны предразрушения возрастает, а при дальнейшем повышении осевого усилия глубина развития зоны предразрушения увеличивается незначительно.

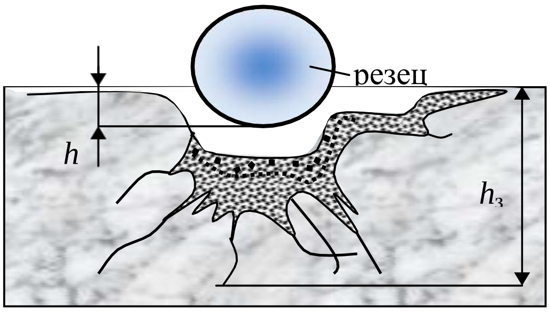


Рис. 1.10. Борозда разрушения и зона предразрушения, образовавшиеся при разрушении гранита резцом.

Исследование зоны предразрушения в тех же горных породах после бурения твердосплавными резцами показало, что наблюдаются выявленные при алмазном бурении закономерности, но глубина развития зоны предразрушения в сравнении с глубиной разрушения породы резцом значительно уменьшилась, особенно у габбро, что связано со значительным увеличением размеров резцов, снижением удельных контактных напряжений на породу и размеров ядра сжатия породы в сравнении с глубиной внедрения резцов.

Таким образом, в результате экспериментов удалось установить:

- при взаимодействии бурового инструмента с породой помимо зоны разрушения формируется образованная системой микротрещин зона предразрушения;
- зона предразрушения образуется при всех рассмотренных видах взаимодействия инструмента с породой – резании, резании-скалывании, раздавливании и смятии;
- зона предразрушения способствует разрушению горной породы при дальнейших циклах нагружения;
- глубина развития зоны предразрушения при разных способах бурения и применяемых инструментах различна, но при этом сохраняются общие закономерности развития образующих зону предразрушения трещин;
- в пластичных горных породах и мягких минералах зона предразрушения не образуется.

Зона предразрушения в упруго-хрупком долерите и упругопластичном анизотропном спекшемся туфе изучалась визуально в процессе экспериментальных работ.

Из образцов забоев скважин, полученных после разбуривания блоков пород, были изготовлены шлифы для изучения в отраженном свете под микроскопом *Polam C-111*.

Для изготовления шлифов использованы штуфы забойных зон долерита и спекшегося туфа, полученные при бурении алмазным однослойным инструментом с водой и водным раствором 0,3 % сульфонола.

В процессе изучения шлифов под микроскопом сделаны фотографические снимки зон предразрушения горных пород.

С учетом вычисленных значений увеличения микроскопом и фотографическим аппаратом рассчитаны приближенные значения мощностей зон предразрушения горных пород.

На рис. 1.11 представлен фотографический снимок зоны предразрушения в образце долерита. На снимке показано, что зона предразрушения в твердой породе, в данном случае долерите, состоит из двух областей (границы областей на рис. 1.11 обозначены пунктирными линиями): чрезвычайно разрушенной и ослабленной трещинами. При этом мощность первой составляет 0,17 мм, а мощность второй 1,7 мм (см. рис. 1.11). Можно отметить, что форма зоны предразрушения практически повторяет форму забоя.

В спекшемся туфе, упругопластичной анизотропной породе зона предразрушения представлена также двумя областями (рис. 1.12): чрезвычайно разрушенной и пластических деформаций. Область чрезвычайно разрушенной (смятой, разрыхленной) породы расположена на глубине 0,12 мм от забоя породы. Область пластических деформаций охватывает призабойную область и область стенки скважины. Примерная мощность данной области – 0,42 мм.

Образец, фотографический снимок которого приведен на рис. 1.12, получен при бурении с осевым усилием – 600 даН, частотой вращения – 150 мин$^{-1}$ с применением эмульсионного промывочного агента.

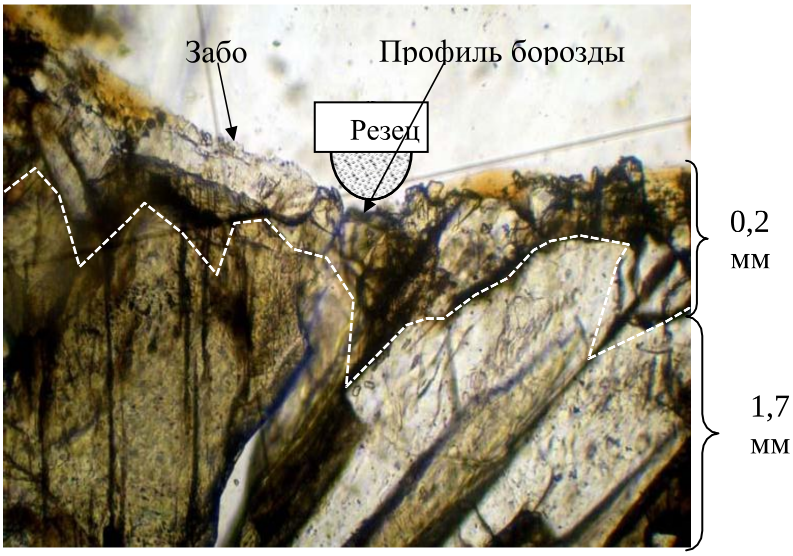


Рис. 1.11. Фотографический снимок зоны предразрушения в образце долерита с указанием областей, составляющих зону предразрушения: 0,2 мм – чрезвычайно разрушенной породы; 1,7 мм – ослабленной трещинами

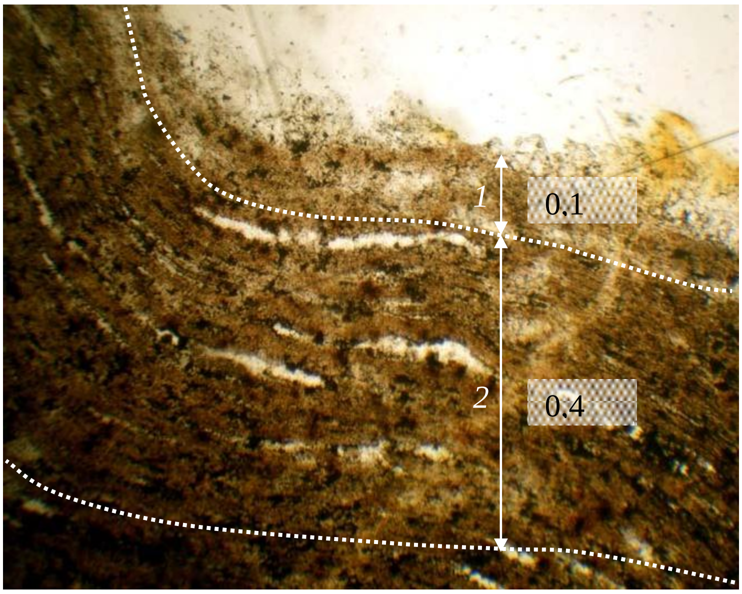


Рис. 1.12. Фотографический снимок зоны предразрушения в образце спекшегося туфа с указанием размеров областей, составляющих зону предразрушения: *1* – разрушенной породы; *2* – пластических деформаций.

По результатам проведенного исследования на данной стадии работ можно сделать следующие выводы:

- размеры зоны предразрушения увеличиваются при повышении осевого усилия и несколько снижаются с ростом частоты вращения бурового инструмента;
- зона предразрушения в упруго-хрупком долерите представлена чрезвычайно разбитой трещинами породы, при этом трещины развиваются, как правило, между минеральными зернами, разрушению также подвергаются более хрупкие кристаллы;
- в породах более пластичных (спекшийся туф) зона предразрушения развивается в виде «разрыхленной», смятой породы без образования явных трещин;
- трещины зоны предразрушения анизотропных пород развиваются преимущественно вдоль плоскостей слоистости, сланцеватости или флюидальности.

Зона предразрушения горной породы при бурении является объектом технологического воздействия с целью интенсификации процессов разрушения, например за счет адсорбционного понижения прочности.

Цель подобного воздействия – развитие зоны предразрушения, ослабление поверхностного слоя забоя скважины и снижение энергоемкости разрушения горных пород при бурении.

1.3. Экономическая оценка эффективности разрушения горных пород при бурении

Экономическая оценка эффективности бурения оценивается стоимостью метра пробуренной скважины. Зависимость для расчета стоимости метра имеет следующий вид:

$$C_{м} = \frac{C_{ст}}{T}\left(\frac{1}{v_{м}} + \frac{T - T_{б}}{l_{р}}\right) + \frac{Ц}{L}, \qquad (1.1)$$

где: $C_{т}$ - стоимость станко-смены, руб.; T – длительность станко-смены, ч;

$T_{б}$ - время, затраченное непосредственно на углубление ствола скважины, ч;

Ц – стоимость бурового инструмента, руб.;

$v_{м}$ – механическая скорость бурения, м/ч;

$l_{р}$ – длина рейсовой проходки, м; L – проходка буровым инструментом (ресурс инструмента), м.

При бескерновом бурении длина рейсовой проходки равняется проходке буровым инструментом.

При колонковом бурении длина рейса ограничивается длиной керноприемной трубы, что при бурении снарядом со съемным керноприемником требует прекращения углубки ствола, подъема и последующего спуска керноприемника, что несколько снижает время, затрачиваемое непосредственно на углубление ствола скважины. Бурение снарядом без съемного керноприемника требует подъема всей бурильной колонны из скважины для извлечения керна, что еще более снижает долю времени $T_{б}$.

Из зависимости (1.1) следует, что стоимость метра бурения определяется такими параметрами, как механическая скорость бурения, стоимость бурового инструмента и его ресурс.

Анализ зависимости показывает, что на стоимость метра пробуренной скважины наиболее значительно влияет ресурс инструмента, а повышение механической скорости бурения будет оправдано при условии сохранения эффективного ресурса бурового инструмента.

На рис. 1.13 приведена кривая, равная стоимости 1 м проходки скважины, в координатах проходки на буровой инструмент и механической скорости бурения, по данным И. Ф. Вовчановского, для долот типа ИСМ. Из приведенных зависимостей следует, что одинаковую стоимость 1 м бурения скважины можно получить как путем увеличения механической скорости бурения, уменьшив при этом стойкость бурового инструмента, так и в результате повышения стойкости инструмента, но снижения механической скорости бурения. Выбор оптимального варианта сочетания стойкости бурового инструмента и механической скорости бурения следует производить с учетом глубины скважины.

При возрастающей глубине скважины более важной характеристикой будет большая стойкость инструмента, что позволит повысить время, затраченное на углубление скважины в балансе общих затрат времени на производство работ.

При бурении неглубоких скважин, когда спуско-подъемные операции занимают сравнительно малую долю в общем балансе производительного времени, можно допустить вариант форсированного бурения на высоких механических скоростях, но с несколько ограниченным ресурсом инструмента.

Поиск оптимальных условий производства буровых работ, параметров режима бурения, ориентированных на минимальную стоимость метра пробуренной скважины, является типичной задачей оптимизации.

При решении этой задачи опытным путем можно получить зависимости, отражающие влияние параметров режима бурения на ресурс бурового инструмента и значения механической скорости бурения при определенных постоянных значениях глубины скважины, горно-геологических условиях бурения и применяемых типах бурового инструмента. Полученные данные позволяют рассчитать стоимость метра проходки для каждого варианта сочетания параметров режима бурения и выбрать, таким образом, оптимальные параметры режима бурения для определенных условий производства работ.

На рис. 1.14 приведены подобные кривые, отражающие многосложную связь условий и параметров, определяющих себестоимость бурения шарошечными долотами большого диаметра. Как следует из графиков, по минимуму стоимость метра проходки следует выбрать из следующих параметров режима бурения: частота вращения долота 400 мин$^{-1}$, осевая нагрузка около 180 кН, так как повышение частоты вращения долота приводит к снижению проходки на долото и повышению стоимости метра бурения.

Оптимальные параметры режима бурения, выбор которых осуществляется по минимуму стоимости метра проходки, как правило, соответствуют наиболее эффективному процессу разрушения горных пород, характери- зующимся минимальными затратами энергии на разрушение, высокими значениями механических скоростей бурения и эффективным ресурсом бурового инструмента.

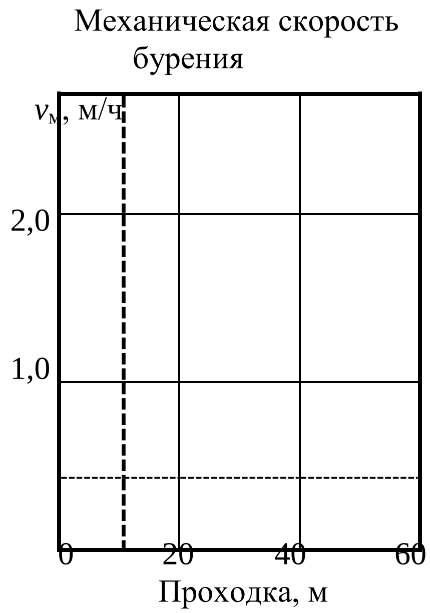


Рис. 1.13. Зависимость стоимости 1 м бурения от проходки и механической скорости бурения

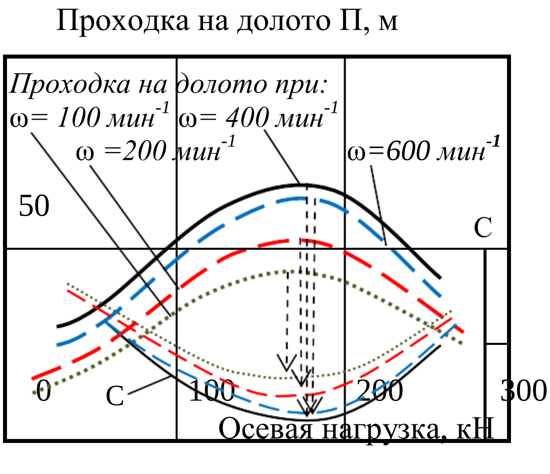


Рис. 1.14. Зависимости проходки на долото П и стоимости метра проходки на долото С от параметров режима бурения

Пример 1. При бурении на месторождении используются двухшарошечные долота типа ДДА-59 и трехшарошечные долота типа 3Ш-59К- ЦА. При равной стоимости – 3 000 рублей за долото, эти долота показывают различную механическую скорость – 12 и 9 метров в час и ресурс – 9 и 12 м соответственно. Стоимость станкосмены продолжительностью 8 ч – 32 000 руб. Время бурения в общем балансе затрат времени на производство работ – 50 %.

Рассчитаем стоимость метра бурения долотом ДДА-59:

$$C = \frac{32\,000}{\ }\left(1 + \frac{8-4}{\ }\right) + \frac{3\,000}{\ } = 2\,52$$

Аналогично рассчитаем стоимость метра бурения трехшарошечными долотами. В этом случае стоимость метра бурения составит 2 010 руб.

Для повышения эффективности бурения долотами ДДА произведена их модернизация путем размещения двух гидромониторных насадок (работы выполнены Иркутским отделением ВИТР). Стоимость долот, получив- ших обозначение ДДА-С, повысилась до 3 500 руб. Испытания показали, что достигнут рост механической скорости на 20 % – (14 м/ч) и проходки на долото на 40 % – (12 м).

Стоимость метра бурения долотом ДДА-С составила 1 897 руб., что подтвердило эффективность модернизации долот в сравнении со стандартным инструментом.

Пример 2. При бурении на месторождении применяют снаряд со съемным керноприемником (КССК). Длина керноприемника 4,5 м, что задает значение рейсовой проходки $l_{\text{р}}$ = 4,5 м. Ресурс буровой коронки 50 м, её стоимость 5 000 руб. Механическая скорость бурения 4,5 м/ч. При стоимости станко-смены 32 000 руб., длительности смены 8 ч и затратах времени непосредственно на бурение 6 часов стоимость метра скважины будет равна:

$$C_{\text{м}} = \frac{32\,000}{8}\left(\frac{1}{4{,}5} + \frac{8-6}{4{,}5}\right) + \frac{5\,000}{50} = 2\,740 \text{ руб.}$$

Ограничение длины рейсовой проходки до 2,5 м в связи с заклиниванием и истиранием керна при бурении трещиноватых пород привело к повышению непроизводительных затрат и снижению времени, затрачиваемого на бурение до 5 ч, ресурса инструмента до 40 м и механической скорости бурения до 4 м/ч, что следующим образом отразилось на повышении стоимости метра:

$$C_{\text{м}} = \frac{32\,000}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{8-5}{2{,}5}\right) + \frac{5\,000}{40} = 5\,925 \text{ руб.}$$

Таким образом, влияние рейсовой проходки и ресурса бурового ин- струмента наиболее значительно при формировании затрат на бурение.

При бурении скважины буровым снарядом без съемного керноприемника произойдет рост затрат времени на проведение спуско-подъемных операций (СПО) и