(стороны прямоугольника) должен иметь указательный знак, мм?

Какой цвет имеет квадрат, помещенный внутри указательного знака?

Какой размер имеет внешний диаметр круга запрещающего знака № 5, наносимого на производственное оборудование и тару?

3. Составить отчет. Отчет должен включать:

- цель практической работы;
- ответы на вопросы задания;
- зарисовку формы знаков (запрещающего, предупреждающего, предписывающего, указательного) с указанием цвета поля, символов, надпи- сей.

4. Показать отчет преподавателю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 12.4.026–01. Цвета сигнальные, знаки безопасности и разметка сигнальная. Назначение, правила применения. Общие технические требования и реко- мендации. Методы испытания [Электронный ресурс]. – Доступ из справ.-поисковой системы «Техэксперт».

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.
РАССЛЕДОВАНИЕ И УЧЕТ НЕСЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Цель задания - ознакомиться с понятием и причинами возникновения несчастных случаев, порядком их расследования и учет на производстве, также с методами анализа травматизма.

Порядок выполнения задания:

а) изучить и законспектировать общие сведения по пункту 1;

б) изучить методы анализа и рассчитать по вариантам показатели травматизма по пункту 2 (см контр. вопросы к пунктам 1 и 2);

в)изучить «Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях» и законспектировать ответы на контрольные вопросы к пункту 3.

Общие сведения о несчастных случаях.

Несчастным случаем на производстве называют случай воздействия на работающего опасного производственного фактора при выполнении работающим трудовых обязанностей или заданий руководителя работы [1].

Повреждение здоровья в результате несчастного случая называют **травмой**. Травма, полученная работающим на производстве, называется **производственной**.

Опасным называют производственный фактор, воздействие которого при определенных условиях на работающего приводит к травме или другому внезапному ухудшению здоровья.

Вредным называют производственный фактор, воздействие которого на работающего приводит к заболеваниям или снижению его трудоспособности. В зависимости от уровня и продолжительности воздействия вредный производственный фактор может стать опасным.

Опасные и вредные производственные факторы (ОВПФ) по природе действия подразделяют на 4 группы: физические, химические, биологические и психофизиологические.

Производственные травмы в зависимости от характера воздействующих факторов подразделяются на:

а) механические повреждения (ушибы, ранения, вывихи, переломы, сотрясения мозга);

б) поражение электрическим током (электроудар, электротравма);

в) термические повреждения (ожоги пламенем, нагретыми частями оборудования, горячей водой и пр.);

г) химические повреждения (ожоги, острые отравления);

д) комбинированные повреждения (сочетание нескольких опасных факторов).

Производственные травмы по тяжести подразделяются на 6 категорий:

- микротравма (после оказания помощи можно продолжать работу).
- легкая травма (потеря трудоспособности на 1 или несколько дней).
- травма средней тяжести (многодневная потеря трудоспособности);
- тяжелая травма (когда требуется длительное лечение);
- травма, приводящая к инвалидности (частичная или полная утрата трудоспособно-сти);
- смертельная травма.

Причины возникновения производственных травм:

- организационные (нарушение технологического процесса и требований техники безопасности (ТБ), неправильная организация рабочего места и режима труда);
- технические (техническое несовершенство оборудования, неисправность механизмов, отсутствие или не использование защитных средств);
- санитарно-гигиенические (несоответствие условий труда требованиям КЗоТ, системе стандартов по безопасности труда (ССБТ), санитарным нормам(СН), строительным нормам и правилам (СНиП) и др.

- психофизиологические (неудовлетворительное состояние здоровья, переутомление, стресс, опьянение и др.).

Методы анализа показателей травматизма

Разработке мероприятий по улучшению условий труда предшествует необходимый этап - исследование и анализ причин травматизма. Для анализа состояния производственного травматизма применяют методы: статистический, экономический, монографический и топографический.

Статистический метод позволяет количественно оценить повторяемость несчастных случаев по ряду относительных коэффициентов. В результате сравнения полученных коэффициентов за отчетный период с предшествующим периодом можно оценить эффективность профилактических мер. Обычно при этом методе анализа несчастные случаи группируются по однородным признакам: профессиям, видам работ, возрасту, стажу работ, причинам, вызвавшим травму. Простота и наглядность являются несомненным достоинством этого метода. Однако у него есть и недостаток - он не выявляет опасные произ-водственные факторы. Среди основных показателей травматизма, используемых при статистическом методе анализа, являются:

а) коэффициент частоты травматизма - число пострадавших при несчастных случаях за отчетный период на 1ООО работающих, определяется по формуле:

$$K_ч = T_x \cdot \frac{1000}{P_c},$$

где Кч - коэффициент частоты травматизма; Т - число учтенных травм с потерей трудоспособности; Рс - среднесписочное число работающих за отчетный период.

б) коэффициент тяжести травматизма - число человеко-дней нетрудоспособно-сти, которое приходится на один несчастный случай и определяется по формуле:

$$К_Т = \frac{Д}{Т},$$

где Кт - коэффициент тяжести травматизма; Д - общее количество дней нетрудоспособности за отчетный период; Т - количество учтенных травм.

в) коэффициент календарной повторяемости несчастных случаев

- показывает через сколько рабочих дней в среднем повторяются несчастные случаи и оп-ределяется по формуле:

$$В = 22{,}5 \cdot \frac{12}{Т},$$

где В - календарная повторяемость несчастных случаев; Т - число несчастных случаев за отчетный период.

г) коэффициент средней повторяемости - показывает на сколько человекодней приходится один несчастный случай, определяется по формуле:

$$B_{ср} = 22{,}5 \cdot 12 \cdot \frac{P_c}{T},$$

где Вср - коэффициент средней повторяемости несчастных случаев; Рс - среднесписочное число работающих за отчетный период; Т - число несчастных случаев за отчетный период.

д) коэффициент опасности работ - характеризуется тяжестью и частотой несчастных случаев, определяется по формуле:

$$О_р = К_Т \cdot Т_х \cdot \frac{100}{Р_с \cdot М \cdot 22{,}5},$$

где Ор - коэффициент опасности работ; Кт - коэффициент тяжести травматизма ; Т - количество учтенных несчастных случаев; Рс - среднесписочное число работающих; М - число месяцев в отчетном периоде.

Таблица 5.0

Исходные данные для расчета показателей травматизма

Показатели	Варианты									
										0
Отчетный период, мес. (М)				2				2		

Число несчастных случаев (Т)				0				1		
Число дней нетрудоспособности (Д)	80	00	80	20	00	50	70	20	60	00
Среднесписочное числоработающих (Рс)	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00

Экономический метод анализа производственного травматизма позволяет оценить эффективность финансовых затрат на профилактику травматизма с расходами на органи-зационные и технические мероприятия. Для более полной и глубокой характеристики травматизма экономический метод часто используют в сочетании с монографическим методом.

Монографический метод анализа травматизма состоит в углубленном и всестороннем изучении отдельного производства, цеха или участка. Он включает описание технологического процесса, оборудования и особенностей технологического регламента, описание опасных зон на рабочих местах, также санитарно-гигиенические условия труда. При этом обращается внимание на наличие защитных приспособлений, ограждений и травмоопасных ситуаций

Монографический метод анализа травматизма характеризуется полнотой, но трудоемок. Этот метод позволяет выявить потенциальную опасность не только в действующих производствах, но и на этапе проектирования, тем самым исключить причины травматизма.

Топографический метод анализа травматизма проводится по месту происшествия. При этом все несчастные случаи условными знаками наносятся на план производственного участка или схему механизма в тех местах, где они произошли. В результате этого выявляются опасные зоны, требующие соответствующих защитных мер и особого внимания.

Контрольные вопросы к пунктам 1 и 2

1. Что такое несчастный случай?

2. Что такое опасный производственный фактор?

3. Что такое вредный производственный фактор?

4. На какие группы подразделяются опасные и вредные производственные факторы?

5. Какие различают разновидности производственных травм?

6. Какие выделяют категории производственных травм?

7. Каковы основные причины возникновения производственных травм?

8. Какие существуют методы анализа производственного травматизма ?

9. В чем заключается статистический метод анализа производственного травматизма?

10. Как определяется коэффициент частоты травматизма?

11. Как определяется коэффициент тяжести травматизма?

12. Как определяется коэффициент календарной повторяемости несчастных случаев?

13. Как определяется коэффициент средней повторяемости несчастных случаев?

14. Как определяется коэффициент опасности работ?

15. В чем заключается экономический метод анализа производственного травматизма?

16. В чем заключается монографический метод анализа производственного травматизма?

17. В чем заключается топографический метод анализа производственного травматизма?

Положение об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях

Расследование и учет несчастных случаев на производстве проводят в соответствии с “Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях”, утвержденного

Постановлением Министерства труда и социального раз-вития Российской Федерации от 24 октября 2002г. №73, а также статьями 227-231 Трудового кодекса РФ (ТК РФ).

Несчастный случай на производстве - это случай, происшедший с работающим вследствие воздействия опасного производственного фактора (для застрахованного – это страховой случай).

Несчастные случаи в зависимости от причин, места и времени происшествия делятся на две группы: несчастные случаи, связанные с работой и несчастные случаи, не связанные с работой (бытовые травмы).

Несчастные случаи, не связанные с производством, но происшедшие на производстве - это несчастные случаи, происшедшие при изготовлении предметов в личных целях, самовольном использовании транспорта предприятия, участии в спортивных мероприятиях на территории предприятия, при хищении имущества предприятия.

Бытовые несчастные случаи - это несчастные случаи, происшедшие в быту (дома) или при нахождении на предприятии вне рабочего времени.

Расследование несчастных случаев на производстве выполняется в соответствии с Трудовым кодексом РФ и «Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях», утверждённым постановлением Минтруда России № 73 от 24 октября 2002 года. Этим же постановлением утверждены формы документов, необходимых для расследования и учёта несчастных случаев на производстве.

Расследование несчастного случая может быть достаточно сложным процессом, поскольку интересы пострадавшего и работодателя часто не совпадают.

Действие нормативных актов по расследованию и учёту несчастных случаев на производстве распространяется на:

- работодателей - физических лиц, вступивших в трудовые отношения с работниками;
- уполномоченных работодателем лиц (представители работодателя);

- физических лиц, осуществляющих руководство организацией (руководители организации);
- физических лиц, состоящих в трудовых отношениях с работодателем;
- других лиц, участвующих с ведома работодателя в его производственной деятельности своим личным трудом, правоотношения которых не предполагают заключения трудовых договоров.

Расследованию подлежат травмы, в том числе причиненные другими лицами, включая:

- тепловой удар, ожог, обморожение;
- утопление; поражение электрическим током или молнией;
- укусы, нанесенные животными и насекомыми;
- повреждения, полученные в результате взрывов, аварий и т.п.

Расследованию и учёту подлежат несчастные случаи происшедшие:

- при исполнении трудовых обязанностей, в том числе во время коман-дировки, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций;
- на территории организации, в течение рабочего времени, в том числе во время следования на работу и с работы, а также в течение вре-мени, необходимого для приведения в порядок рабочего места;
- при следовании на работу или с работы на транспортном средстве работодателя, а также на личном транспортном средстве при использовании его в производственных целях;
- во время служебных поездок на общественном транспорте, а также при следовании по заданию работодателя к месту выполнения работ и обратно, в том числе пешком;
- при следовании к месту служебной командировки и обратно;
- при следовании на транспортном средстве в качестве сменщика во время междусменного отдыха;
- во время междусменного отдыха при работе вахтовым методом;
- при привлечении к участию в ликвидации последствий

чрезвычайных ситуаций.

Работники организации обязаны незамедлительно извещать руководство о каждом происшедшем несчастном случае, об ухудшении состояния своего здоровья в связи с проявлениями признаков острого заболевания.

О каждом страховом случае работодатель в течение суток обязан сообщить страховщику (фонд социального страхования).

О групповом несчастном случае (пострадало два и более человек), тяжёлом несчастном случае или несчастном случае со смертельным исходом, работодатель в течение суток обязан направить извещение соответственно:

1) о несчастном случае, происшедшем в организации:

- в соответствующую государственную инспекцию труда;
- в прокуратуру по месту происшествия несчастного случая;
- в федеральный орган исполнительной власти по ведомственной принадлежности;
- в орган исполнительной власти субъекта Российской Федерации;
- в организацию, направившую работника, с которым произошел несчастный случай;
- в территориальные объединения организаций профсоюзов;
- в территориальный орган государственного надзора, если несчастный случай произошел в организации (объекте), подконтрольной этому органу;
- страховщику.

2) о несчастном случае, происшедшем у работодателя - физического лица:

- в соответствующую государственную инспекцию труда;
- в прокуратуру по месту нахождения работодателя - физического лица;
- в орган исполнительной власти субъекта Российской Федерации;
- в территориальный орган государственного надзора, если

несчастный случай произошел на объекте, подконтрольном этому органу;

- страховщику.

О групповых несчастных случаях, тяжелых несчастных случаях и несчастных случаях со смертельным исходом также информируется Федеральная инспекция труда Минтруда России.

Если указанные несчастные случаи, произошли в организациях, эксплуатирующих опасные производственные объекты, то соответствующим образом информируются специально уполномоченные органы государственного надзора.

Для расследования несчастного случая на производстве в организации работодатель незамедлительно создает комиссию в составе не менее трех человек. Во всех случаях состав комиссии должен состоять из нечетного числа членов.

В состав комиссии включаются специалист по охране труда организации, представители работодателя, представители профсоюзного органа (коллектива), уполномоченный (доверенный) по охране труда. Комиссию возглавляет работодатель или уполномоченный им представитель. Состав комиссии утверждается приказом работодателя. Руководитель, непосредственно отвечающий за безопасность труда на участке, где произошел несчастный случай, в состав комиссии не включается.

В расследовании несчастного случая на производстве у работодателя - физического лица принимают участие указанный работодатель или уполномоченный его представитель, доверенное лицо пострадавшего, специалист по охране труда, который может привлекаться к расследованию несчастного случая и на договорной основе.

Несчастный случай на производстве, происшедший с лицом, направленным для выполнения работ к другому работодателю, расследуется комиссией, образованной работодателем, у которого произошел несчастный случай. В состав данной комиссии входит уполномоченный представитель работодателя, направившего это лицо.

Несчастные случаи, происшедшие на территории организации с работниками сторонних организаций при исполнении ими задания направившего их работодателя, расследуются комиссией, формируемой этим работодателем.

Несчастные случаи, происшедшие с работниками при выполнении работы по совместительству, расследуются комиссией, формируемой работодателем, у которого фактически производилась работа по совместительству.

Расследование несчастных случаев со студентами, проходящими произ-водственную практику (выполняющими работу под руководством работодателя), проводится комиссиями, формируемыми и возглавляемыми этим работодателем. В состав комиссии включаются представители образовательного учреждения.

Для расследования группового несчастного случая, тяжёлого несчастного случая и несчастного случая со смертельным исходом в комиссию дополнительно включаются:

- государственный инспектор труда, представители органа исполнительной власти субъекта РФ или органа местного самоуправления (по согласованию), представитель территориального объединения профсоюзов. Возглавляет комиссию государственный инспектор труда;
- по требованию пострадавшего (или его родственников) в расследовании несчастного случая может принимать участие его доверенное лицо;
- в случае острого отравления или радиационного воздействия, превысившего установленные нормы, в состав комиссии включается также представитель территориального центра государственного санитарно-эпидемиологического надзора;
- при несчастном случае, происшедшем в организациях на объектах, подконтрольных территориальным органам Федерального горного и промышленного надзора России, состав комиссии утверждается руководителем

соответствующего территориального органа и возглавляет комиссию представитель этого органа;

- при групповом несчастном случае с числом погибших 5 и более человек в состав комиссии включаются также представители Федеральной инспекции труда, федерального органа исполнительной власти по ведомственной принадлежности и общероссийского объединения профсоюзов. Председателем комиссии является главный государственный инспектор труда по субъекту Российской Федерации, а на объектах, подконтрольных территориальному органу Федерального горного и промышленного надзора России, - руководитель этого территориального органа.

При крупных авариях с человеческими жертвами 15 и более человек расследование проводится комиссией, назначаемой Правительством России.

Расследование несчастных случаев (в том числе групповых), в результате которых пострадавшие получили повреждения, отнесенные в соответствии с установленными квалифицирующими признаками к категории легких, проводится в течение трех дней.

Расследование иных несчастных случаев проводится в течение 15 дней. В некоторых случаях председатель комиссии может продлить срок расследования, но не более чем на 15 дней. Несчастные случаи, о которых не было своевременно сообщено работодателю или в результате которых нетрудоспособность наступила не сразу, расследуются по заявлению пострадавшего в течение месяца.

Тяжелые несчастные случаи и несчастные случаи со смертельным исходом, происшедшие с лицами, выполнявшими работу на основе договора гражданско-правового характера, расследуются в установленном порядке государственными инспекторами труда на основании заявления пострадавшего (доверенного лица, членов его семьи).

В ходе расследования несчастного случая комиссия производит осмотр места происшествия, выявляет и опрашивает очевидцев несчастного случая и должностных лиц, знакомится с действующими в организации нормативными и распорядительными документами, по возможности получает объяснения от пострадавшего.

Расследуются в установленном порядке и по решению комиссии могут квалифицироваться как не связанные с производством:

- смерть вследствие общего заболевания или самоубийства;
- смерть или иное повреждение здоровья, единственной причиной которых явилось алкогольное, наркотическое или иное токсическое опьянение (отравление) работника;
- несчастный случай, происшедший при совершении пострадавшим действий, квалифицированных правоохранительными органами как уголовное правонарушение.

При поступлении жалобы пострадавшего, выявлении сокрытого несчастного случая, установления нарушений порядка расследования и в некоторых иных случаях, государственный инспектор труда, независимо от срока давности несчастного случая, проводит дополнительное расследование.

Несчастные случаи, квалифицированные, как несчастные случаи на производстве, подлежат оформлению актом о несчастном случае на производстве по форме Н-1*.

Акт формы Н-1 составляется комиссией в двух экземплярах. При несчастном случае на производстве с застрахованным работником составляется дополнительный экземпляр акта формы Н-1.

При групповом несчастном случае на производстве акты формы Н-1 составляются на каждого пострадавшего отдельно.

В случае установления факта грубой неосторожности застрахованного работника, содействовавшей возникновению или увеличению размера вреда, причиненного его здоровью, в акте расследования указывается степень его вины в процентах, с учетом заключения профсоюзного или иного уполномоченного застрахованным представительного органа данной организации (не более 25%).

По результатам расследования каждого группового несчастного случая, тяжелого несчастного случая или несчастного случая со смертельным исхо-дом составляется соответствующий акт в двух экземплярах.

Работодатель в трехдневный срок после завершения расследования несчастного случая на производстве обязан выдать пострадавшему один экземпляр утвержденного им и заверенного печатью акта формы Н-1. Вторые экземпляры акта с копиями материалов расследования хранятся в течение 45 лет работодателем.

При страховых случаях третий экземпляр утвержденного и заверенного печатью акта формы Н-1 работодатель направляет страховщику.

Каждый оформленный в установленном порядке несчастный случай на производстве регистрируются работодателем в журнале регистрации несчастных случаев на производстве и включаются в годовую форму федерального государственного статистического наблюдения за травматизмом на производстве.

В случае ликвидации организации или прекращения работодателем - физическим лицом предпринимательской деятельности оригиналы актов о расследовании несчастных случаев на производстве подлежат передаче на хранение правопреемнику, а при его отсутствии - соответствующему государственному органу.

Государственный надзор и контроль за соблюдением установленного порядка расследования, оформления и учета несчастных случаев на производстве осуществляется органами Федеральной инспекции труда.

Контрольные вопросы к пункту 3

1. Какие несчастные случаи считаются связанными с производством и подлежат расследованию и учету?
2. На кого распространяется действие Положения о порядке расследования и учета несчастных случаев?
3. Как должен действовать работодатель при возникновении несчастного случая на предприятии?
4. Что необходимо сделать сразу же после свершения несчастного

случая на произ-водстве?

5. Куда должен сообщить работодатель и в какие сроки о групповом несчастном случае или несчастном случае со смертельным исходом?

6. Кто несет ответственность за организацию и своевременное расследование и уче-та несчастных случаев?

7. Кто входит в комиссию по расследованию несчастных случаев, каковы ее обязанности?

8. В какие сроки должно быть проведено расследование несчастного случая?

9. Какие несчастные случаи квалифицируются как не связанные с производством?

10. Что делают при установлении грубой неосторожности пострадавшего?

11. В какие сроки и комиссией какого состава расследуются групповые несчастные случаи или со смертельным исходом?

12. Какие условия должен обеспечить работодатель для работы комиссии, проводя-щей расследование несчастного случая?

13. Каким документом оформляются несчастные случаи на производстве?

14. Какой организацией учитывается акт о несчастном случае?

15. В какие сроки и куда должны быть отправлены материалы расследования групповых несчастных случаев?

16. Какие организации и должностные лица разбирают разногласия при оформлении актов по форме Н - 1 ?

17. Каковы полномочия государственного инспектора по охране труда в случае нарушения порядка расследования несчастного случая?

Форма Н-1

Один экземпляр направляется
пострадавшему или его
доверенному лицу

УТВЕРЖДАЮ

____
(подпись, фамилия, инициалы
работодателя
(его представителя))
"__" ______________ 200_ г.

Печать

АКТ N ____
О НЕСЧАСТНОМ СЛУЧАЕ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

1. Дата и время несчастного случая _______________________________
____
(число, месяц, год и время происшествия
несчастного случая,
____
количество полных часов от начала работы)
2. Организация (работодатель), работником которой является
(являлся) пострадавший ____
(наименование, место нахождения,
юридический адрес, ведомственная
и отраслевая
____
принадлежность (ОКОНХ основного вида деятельности);
фамилия, инициалы работодателя -
____
физического лица)
Наименование структурного подразделения __________________________
____
3. Организация, направившая работника ____________________________
____
(наименование, место нахождения, юридический адрес,
отраслевая принадлежность)
4. Лица, проводившие расследование несчастного случая:
____
(фамилия, инициалы, должности и место работы)
____
5. Сведения о пострадавшем:
фамилия, имя, отчество ____
пол (мужской, женский) ____
дата рождения ____
профессиональный статус ____
профессия (должность) ____
стаж работы, при выполнении которой произошел несчастный случай
____,
(число полных лет и месяцев)
в том числе в данной организации _________________________________
(число полных лет и месяцев)
6. Сведения о проведении инструктажей и обучения по охране труда
Вводный инструктаж ____
(число, месяц, год)
Инструктаж на рабочем месте (первичный, повторный, внеплановый,

------------------------------ -------
(нужное подчеркнуть)
целевой)

по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай ____
(число, месяц, год)
Стажировка: с "__" ____________ 200_ г. по "__" __________ 200_ г.
____
(если не проводилась - указать)
Обучение по охране труда по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай: с "__" ___________ 200_ г. по "__" ___________ 200_ г. ______________________________
(если не проводилось - указать)
Проверка знаний по охране труда по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай ___________________
(число, месяц, год, N протокола)

7. Краткая характеристика места (объекта), где произошел несчастный случай
____
(краткое описание места происшествия с указанием опасных и (или) вредных производственных
____
факторов со ссылкой на сведения, содержащиеся в протоколе осмотра места несчастного случая)
____
Оборудование, использование которого привело к несчастному случаю
____
(наименование, тип, марка, год выпуска, организация - изготовитель)

8. Обстоятельства несчастного случая
____
(краткое изложение обстоятельств, предшествовавших несчастному случаю, описание событий
____
и действий пострадавшего и других лиц, связанных с несчастным случаем, и другие сведения,
____
установленные в ходе расследования)
____
____
____

8.1. Вид происшествия ____
____

8.2. Характер полученных повреждений и орган, подвергшийся повреждению, медицинское заключение о тяжести повреждения здоровья
____

8.3. Нахождение пострадавшего в состоянии алкогольного или наркотического опьянения ______________________________________
(нет, да - указать состояние и степень опьянения в соответствии с заключением по
____
результатам освидетельствования, проведенного в установленном порядке)

8.4. Очевидцы несчастного случая _________________________________
____
(фамилия, инициалы, постоянное место жительства,

домашний телефон)
9. Причины несчастного случая ___________________________________
(указать основную
и сопутствующие причины
____
несчастного случая со ссылками на нарушенные требования
законодательных и иных
____
нормативных правовых актов, локальных нормативных актов)
____
____
____
____
10. Лица, допустившие нарушение требований охраны труда:
____
(фамилия, инициалы, должность (профессия) с указанием
требований законодательных,
____
иных нормативных правовых и локальных нормативных актов,
предусматривающих их
____
ответственность за нарушения, явившиеся причинами
несчастного случая, указанными в п. 9
____
настоящего акта; при установлении факта грубой
неосторожности пострадавшего указать
____
степень его вины в процентах)
____
Организация (работодатель), работниками которой являются данные
лица
____
(наименование, адрес)
11. Мероприятия по устранению причин несчастного случая, сроки
____
____
____
____
____
____

Подписи лиц, проводивших
расследование несчастного случая ___________________________
(фамилии, инициалы, дата)
____

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 12.О.ОО2 - 8О. Термины и определения.

2. Положение об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях

3. И.М.Чижевский, Г.Б.Куликов, Ю.А.Сидорин. Охран труда в полиграфии. М., 1988.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7. СРЕДСТВА ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЗАЩИТЫ ОРГАНОВ ДЫХАНИЯ

Цель работы – ознакомиться со средствами защиты органов ды- хания и получить практические навыки их использования.

Теоретические положения

Средства индивидуальной защиты (СИЗ) предназначены для защиты человека от попадания внутрь организма, на кожные покровы и повседневную одежду радиоактивных веществ (РВ), отравляющих веществ (ОВ) и бактериальных средств (БС).

По принципу применения средства индивидуальной защиты делятся:

– на средства защиты повседневного применения (промышленные СИЗ);

– средства защиты эпизодического применения (СИЗ для аварийных работ и пострадавших в очагах ЧС).

По объектам защиты средства индивидуальной защиты делятся:

– на средства защиты органов дыхания;

– средства защиты кожи.

По принципу действия средства индивидуальной защиты делятся:

– на фильтрующие (принцип фильтрации состоит в том, что воздух, необходимый для поддержания жизнедеятельности организма человека, очищается от вредных примесей при прохождении через средство защиты);

– изолирующие (средства защиты изолирующего типа полностью изолируют организм человека от окружающей среды с помощью материалов, непроницаемых для воздуха и вредных примесей).

По способу подачи воздуха различают средства индивидуальной защиты делятся:

– с принудительной подачей воздуха;

– самовсасывающие.

По кратности использования средства индивидуальной защиты

- на СИЗ многократного использования;

- СИЗ однократного использования.

По способу изготовления средства индивидуальной защиты делятся:

- на средства, изготовленные промышленностью;

- простейшие средства, изготовленные из подручных материалов. Кроме средств индивидуальной защиты существуют медицинские средства защиты [1].

Средства защиты органов дыхания.

Фильтрующий противогаз.

Фильтрующий противогаз предназначен для защиты органов дыхания, глаз, кожи лица от воздействия ОВ, РВ, БС, (АХОВ), а также различных вредных примесей, присутствующих в воздухе.

В настоящее время имеются фильтрующие гражданские противогазы различной модификации и промышленные противогазы.

Для защиты населения наибольшее распространение получили фильтрующие противогазы: для взрослого населения – ГП-5 (ГП-5М), ГП-7 (ГП-7В); для детей – ПДФ-Ш, ПДФ-Д, ПДФ-2Ш, ПДФ-2Д, КЗД.

Гражданский противогаз (ГП-5). В состав комплекта входят два основных элемента: фильтрующе-поглощающая коробка ГП-5 и лицевая часть ШМ-62у. Шлем-маска имеет 5 ростов (0, 1, 2, 3, 4). Кроме того, противогаз комплектуется сумкой, наружными утеплительными манжетами (НМУ-1) и коробкой с незапотевающими пленками (рис. 9.1) [2]. У него нет соединительной трубки.

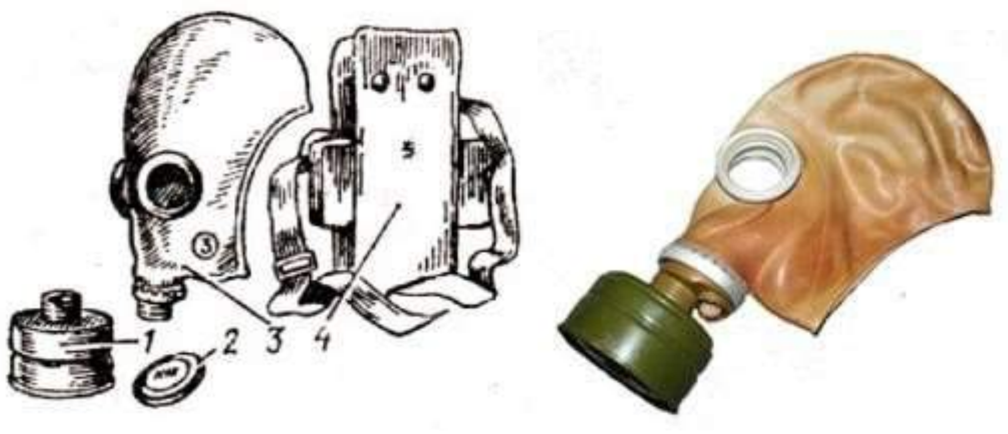


Рис. 7.1 Гражданский фильтрующий противогаз (ГП-5):
1 – фильтрующе-поглощающая коробка ГП-5; 2 - коробка с незапотевающими пленками; 3 – лицевая часть ШМ-62у; 4 – сумка

Внутри фильтрующе-поглощающей коробки ГП-5 расположены противоаэрозольный фильтр и шихта. Лицевая часть ШМ-62у представляет собой шлем-маску, изготовленную на основе резины из натурального или синтетического каучука. В шлем-маску вмонтированы очковый узел и клапанная коробка. Клапанная коробка имеет один вдыхательный и два выдыхательных клапана и служит для распределения потоков воздуха. Незапотевающие пленки изготавливаются из целлюлозы и бывают односторонние (НП) и двусторонние (НПН). Они устанавливаются с внутренней стороны стекол противогаза желатиновым покрытием к глазам и фиксируются прижимными кольцами. Желатин равномерно впитывает конденсированную влагу, тем самым сохраняя прозрачность пленки.

Комплект из 6 пленок упакован в металлическую коробку. Утеплительные манжеты используются только зимой при температуре ниже – 10 ºC. Манжета надевается на обойму очков с внешней стороны. Пространство между стеклами манжет и очков предохраняет очки шлем- маски от замерзания.

Гражданский противогаз (ГП-5М). В комплект противогаза входит шлем-маска (ШМ-66Му) с мембранной коробкой для переговорного устройства. В лицевой части сделаны сквозные вырезы для ушных раковин, что обеспечивает нормальную слышимость.

Подгонка противогаза начинается с определения требуемого роста лицевой части. Рост лицевой части типа ШМ-62у, ШМ-66Му определяется по величине вертикального обхвата головы путем ее измерения по замкнутой линии, проходящей через макушку, щеки и подбородок. Измерения округляют до 0,5 см. До 63 см берут нулевой рост, от 63,5 до 65,5 см – первый, от 66 до 68 см – второй, от 68,5 до 70,5 см – третий, от 71 см и более – четвертый.

Перед применением противогаз следует проверить на исправность и герметичность. Осматривая лицевую часть, следует определить ее целостность, обратив внимание на стекла очкового узла. После этого нуж- но проверить клапанную коробку, состояние клапанов. Они не должны быть покороблены, засорены или порваны. На фильтрующе-поглощающей коробке не должно быть вмятин, проколов, в горловине – повреждений. Обращается внимание на то, чтобы в коробке не пересыпались зерна поглотителя.

Наиболее совершенными в настоящее время являются противогазы ГП-7 и ГП-7В. Их основными отличиями являются: более совершенная конструкция и форма шлем-маски, обеспечивающая возможность безопасного приема воды, жидких лекарств, других жидкостей в зараженной зоне без снятия маски. Наличие в комплекте фильтрующе-поглощающих коробок обеспечивает защиту от конкретных видов твердых химических веществ (ТХВ), а также увеличенные сроки работоспособности. Ростовка лицевой части предусматривает три размера. Как и другие типы противогазов, они состоят из фильтрующе- поглощающей коробки и лицевой части.

Гражданский противогаз (ГП-7). В комплект противогаза входят фильтрующе-поглощающая коробка ГП-7к, лицевая часть в виде маски МГП, сумка, защитный трикотажный чехол, коробка с незапотевающими пленками, утеплительные манжеты. Его масса в комплекте без сумки – около 900 г (фильтрующе-поглощающая коробка – 250 г, лицевая часть – 600 г).

Фильтрующе-поглощающая коробка ГП-7к по конструкции аналогична коробке ГП-5, но с улучшенными характеристиками, уменьшено ее сопротивление, что облегчает дыхание. Лицевая часть МГП представляет собой маску объемного типа с «независимым» обтюратором, с наголовником (предназначен для закрепления лицевой части) в виде резиновой пластины с пятью лямками (лобная, две височные, две щечные), с очковым узлом, переговорным устройством (мембраной), узлами клапана вдоха и выдоха, прижимными кольцами для закрепления незапотевающих пленок (рис. 9.2) [2]. «Независимый» обтюратор представляет собой полосу тонкой резины и служит для создания надежной герметизации лицевой части на голове. При этом механическое воздействие лицевой части на голову очень незначительно. На каждой лямке с интервалом в 1 см нанесены упоры ступенчатого типа, которые предназначены для надежного закрепления их в пряжках. У каждого упора имеется цифра, указывающая его порядковый номер. Это позволяет точно фиксировать нужное положение лямок при подгонке маски. Нумерация цифр идет от свободного конца лямки к затылочной пластине. Гидрофобный трикотажный чехол надевается на фильтрующе-поглощающую коробку и предохраняет ее от заражения, снега, пыли и влаги.

Рис. 7.2. Противогаз ГП-7:

1 – лицевая часть; *2* – фильтрующе-поглощающая коробка; *3* – сумка; *4* – коробка с незапотевающими пленками; *5* – трикотажный чехол; *6* – утеплительные манжеты

Гражданский фильтрующий противогаз (ГП-7, ГП-7В, ГП-7ВМ) – это одна из самых последних и совершенных моделей противогазов для населения. В реальных условиях он обеспечивают высокую защиту от паров отравляющих веществ нервнопаралитического действия (типа зарин, зоман и др.), общеядовитого действия (хлорциан, синильная кислота и др.), радиоактивных веществ (радионуклидов йода и его органических соедине- ний (типа йодистый метил и др.)); от капель отравляющих веществ кожно- нарывного действия (иприт и др.), бактериальных, аварийных химически опасных веществ (АХОВ). ГП-7 имеет малое сопротивление дыханию, обеспечивает надежную герметизацию и небольшое давление лицевой час- ти на голову. Благодаря этому им могут пользоваться люди старше 60 лет и больные с легочными и сердечно-сосудистыми заболеваниями. Подбор лицевой части необходимого типоразмера ГП-7 осуществляется на основа- нии результатов измерения мягкой сантиметровой лентой горизонтального и вертикального обхвата головы.

Правила определения размера противогаза.

Для определения размера противогаза нужно знать горизонталь- ный и вертикальный обхват головы. Горизонтальный обхват измеряется по замкнутой линии, которая проходит спереди по надбровным дугам, сбоку чуть выше (на 2–3 см) ушной раковины и сзади по наиболее выступающей части головы. А вертикальный обхват можно определить посредством из- мерения длины вертикальной линии, проходящей через подбородок, щеки и макушку. Полученные измерения следует округлить так, чтобы послед- няя цифра была 0 или 5. Затем нужно сложить оба результата и посмот- реть, какой размер противогаза вам нужен [3]:

- менее 1190 мм – первый размер;
- от 1195 до 1210 мм – второй размер;
- от 1215 до 1235 мм – третий размер;
- от 1240 до 1260 мм – четвертый размер;
- от 1265 до 1285 мм – пятый размер;

- от 1290 до 1310 мм – шестой размер.

Надевается противогаз после сигнала «Химическая тревога» по команде «Газы», либо по своей инициативе. Вынув противогаз из специальной сумки, следует взять шлем-маску за его нижнюю часть так, чтобы большие пальцы рук находились снаружи, а остальные были внутри. Далее нужно приложить нижнюю часть шлема-маски под подбородок и натянуть его на голову резким движением рук вверх.

Учитывая то, что операции, которые описаны выше, придется проводить вслепую, нужно достаточно долго тренироваться. Хотя все зависит от человека и степени его обучаемости. Хорошо попрактиковавшись, можно приблизиться к армейским нормативам на надевание противогаза – около 7–10 с. Наличие у противогаза переговорного устройства (мембра- ны) обеспечивает четкое понимание передаваемой речи, значительно облегчает пользование средствами связи (телефон, радио).

Гражданские противогазы ГП-7В, ГП-7ВМ, УЗС-ВК, КЗД-6, фильтр ДОТ, фильтр ВК, ДПГ-3 (рис. 7.3). ГП-7В отличается от ГП-7 тем, что в нем лицевая часть МГП-В имеет устройство для приема воды, пред- ставляющее собой резиновую трубку с мундштуком и ниппелем.

ГП-7ВМ отличается от ГП-7В тем, что маска М-80 имеет очковый узел в виде трапециевидных изогнутых стекол, обеспечивающих возможность работы с оптическими приборами.

Гражданский фильтрующий противогаз ГП-7 обеспечивает защиту органов дыхания, глаз и кожи лица человека от вредных веществ и приме- сей, находящихся в воздухе. Это проверенная временем и надежная модель противогаза для гражданского населения.

а б в г

д е ж

Рис. 7.3. Гражданские противогазы:
а – ГП-7(В, ВМ); *б* – УЗС-ВК; *в* – ПДФ-2; г – КЗД-6; *д* – фильтр ДОТ; *е* – фильтр ВК; *ж* – ДПГ-3;

Подбор лицевой части необходимого типоразмера ГП-7 осуществляется на основании результатов измерения мягкой сантиметровой лентой горизонтального и вертикального обхвата головы. Горизонтальный обхват определяется измерением головы по замкнутой линии, проходящей спереди по надбровным дугам, сбоку на 2–3 см выше края ушной раковины и сзади через наиболее выступающую точку головы. Вертикальный обхват определяется измерением головы по замкнутой линии, проходящей через макушку, щеки и подбородок. Измерения округляются с точностью до 5 мм. По сумме двух измерений устанавливают нужный типоразмер (табл. 7.0). [4].

Правильно подобранная шлем-маска (маска) должна плотно прилегать к лицу и исключать возможность проникновения наружного воздуха в органы дыхания, минуя фильтрующе-поглощающую коробку.

Таблица 7.0

Типоразмеры противогазов

Рост лицевой части		1		2		3		
Положение упоров лямок	ГП-7, ГП-7В	4-8-8	3-7-8	3-7-8	3-6-7	3-6-7	3-5-6	3-4-5
	ГП-7ВМ	4-8-6	3-7-6	3-7-6	3-6-5	3-6-5	3-5-4	3-4-3
Сумма горизонтального и вертикального обхвата головы		До 1185	1190–1210	121–1235	1240–1260	1265–1285	1290–1310	1310 и более

*Примечание. П*оложение лямок наголовника устанавливают при подгонке противогаза.

Противогаз УЗС-ВК – аварийно-спасательное средство многоразового действия, применяется для защиты органов дыхания человека от вредных веществ, может использоваться во всех климатических зонах.

Противогаз ПДФ-2 предназначен для защиты органов дыхания, зрения и лица детей (старше 1,5 года) от отравляющих веществ (ОВ), опасных биологических веществ (ОБВ), радиоактивной пыли (РП).

Камера защитная детская (КЗД-6) предназначена для защиты детей в возрасте до 1,5 года от отравляющих веществ, радиоактивной пыли и бактериальных средств. Детская защитная камера похожа на обычную сумку, поэтому переносить ребенка в ней очень удобно.

Дополнительный патрон (ДПГ-3) предназначен для использования в комплекте с ГП-7, ГП-7В и детскими противогазами, для защиты органов дыхания, кожи лица и глаз человека от сильнодействующих ядовитых веществ: аммиака, диметиламина, нитробензола.

Фильтр ДОТ соответствует новым ГОСТам, гармонизированным с европейскими стандартами EN141, EN143. Он значительно эффективнее по сравнению с противогазовыми коробками, выпускаемыми по старым ГОСТа, за счет уникальных поглотителей от отравляющих веществ, опас- ных биологических веществ, радиоактивной пыли, сильнодействующих ядовитых веществ.

Фильтр ВК предназначен для очистки вдыхаемого воздуха от органических газов и паров с температурой кипения выше 65 °С (циклогек- сан, бензол, ксилол, толуол, бензин, керосин, галоидоорганические соеди- нения (хлорпикрин, хлорацетофенон и т. п.), нитросоединения бензола).

Промышленные противогазы. Существует несколько марок промышленных фильтрующих противогазов, которые являются индивидуальным средством защиты органов дыхания и зрения рабочих различных отраслей промышленности, сельского хозяйства от воздействия вредных веществ (газы, пары, пыль, дым и туман), присутствующих в воздухе.

Запрещается применять промышленные противогазы при недостатке кислорода в воздухе (менее 18 %), например при работах в емкостях, цистернах, колодцах и других изолированных помещениях.

Не допускается применение промышленных противогазов для защиты от низкокипящих жидкостей, плохо сорбирующихся органических веществ, например метана, этилена, ацетилена. Не рекомендуется работать в таких противогазах, если состав газов и паров вредных веществ неизвестен (Рис. 7.4).

ППФМ-92 ПФМГ-96 ПФСГ-98 ППФ-95

Рис. 7.4. Промышленные противогазы

Противогазы ППФМ-92, ПФМГ-96, ПФСГ-98 предназначены для защиты органов дыхания, глаз и лица человека от вредных газо- и парооб- разных веществ и аэрозолей, присутствующих в воздухе рабочей зоны. ППФ-95 предназначены для защиты органов дыхания, зрения и лица рабо- чих различных отраслей промышленности и сельского хозяйства от воз- действия вредных газов, паров, пыли, дыма и тумана, присутствующих в воздухе. Фильтрующие противогазы надежны в атмосфере, содержащей не менее 18 % кислорода.

Промышленный противогаз состоит из снаряженной коробки, лицевой части (шлем-маски) с соединительной трубкой и сумки. Фильтрующая коробка служит для очистки воздуха, вдыхаемого человеком, от ядовитых веществ и вредных примесей. В зависимости от состава этих примесей она может содержать один или несколько специальных поглотителей или сочетание поглотителя с аэрозольным фильтром. При этом коробки строго специализированы по составу поглотителей, а поэтому отличаются друг от друга окраской и маркировкой. Шлем-маски промышленных противогазов изготавливаются пяти ростов – 0, 1, 2, 3, 4. Чтобы подобрать шлем-маску, надо мягкой сантиметровой линейкой произвести два измерения головы. Вначале определить длину круговой линии, проходящей по подбородку, щекам и через высшую точку головы (макушку). Затем измерить длину полуокружности, проходящей от отверстия одного уха к отверстию другого по лбу через надбровные дуги. Результаты двух обмеров суммируют и находят требуемый рост шлем-маски.

При сумме до 93 см размер нулевой, от 93 до 95 см – первый, от 95 до 99 см – второй, от 99 до 103 см – третий, от 103 и выше – четвертый [4].

Противогазы комплектуют коробками двух размеров (большая и малая) и трех типов: без аэрозольного фильтра, с аэрозольным фильтром (на коробке белая вертикальная полоса), без аэрозольного фильтра с уменьшенным сопротивлением дыханию (имеет индекс 8 в маркировке). В зависимости от вида вредного вещества выпускают коробки следующих марок: А, В, Г, Е, КД, СО, М (табл. 9.2) [5].

Коробки марок А, В, Г, Е, КД изготавливаются как с аэрозольными фильтрами, так и без них; коробка БКФ – только с аэрозольными фильтрами; коробки СО и М – без аэрозольных фильтров. Белая вертикальная полоса на коробке означает, что она оснащена аэрозольным фильтром.

Таблица 7.1

Характеристика промышленных противогазов

Марка противогаза	Маркировка и окраска	Соединения, от которых защищают ПП
А	Коричневая	Пары органических соединений (бензин, керосин, ацетон, бензол, толуол, ксилол, сероуглерод, спирты, эфиры, галоидоорганические соединения, нитросоединения бензола и его гомологи, тетроэтилсвинец, фосфор- и хлорорганические ядохимикаты)

Продолжение табл. 7.1

Марка противогаза	Маркировка и окраска	Соединения, от которых защищают ПП
В	Желтая	Кислые газы и пары (диоксида серы, гидрид серы, хлор, циан гидрида, окислы азота, хлориды водорода, фосген), фосфор- и хлорорганические ядохимикаты
Г	Черн о- желта я	Пары ртути и ртутьорганическе ядохимикаты на основе этилмеркурхлорида
Е	Черная	Гидрид мышьяка и гидрид фосфора
К	Зеленая	Аммиак, а также пыль, дым, туман
КД	Серая, с бе- лой поло- сой	Аммиак и сероводород
БКФ	Защитная, с белой полосой	Кислые газы и пары, пары органических веществ, гидрид мышьяка, гидрид фосфора, пыль, дым, туман
СО	Белая	Оксид углерода
М	Красная	Оксид углерода в присутствии паров органических ве- ществ, кислые газы, аммиак, гидрид мышьяка, гидрид фосфора, пары органических соединений (бензин, керо- син, ацетон, бензол, ксилол, сероуглерод, толуол, спирты, эфиры, анилин, соединения бензола и его гомологи)
П-2У	Красная с белой поло- сой	Пары карбонилов никеля и железа, оксид углерода и со- путствующие аэрозоли
Б	Синяя	Бороводороды: диборан, пентаборан, этилентаборан, ди- этилдекаборан и их аэрозоли
УМ	Защитная	Пары и аэрозоли гептила, амил, самин, нитромеланж, амидол
ГФ	Голубая	Газообразный гексафторид урана, фтор, фтористый водо- род, радиоактивные аэрозоли

Пользование противогазом. Подобрав шлем-маску, ее обязательно примеряют. Новую лицевую часть предварительно необходимо протереть снаружи и внутри чистой тряпочкой или тампоном ваты, смоченным в воде, а клапаны выдоха продуть. Шлем-маску, бывшую в употреблении, следует отсоединить от коробки, протереть двухпроцентным раствором формалина или промыть водой с мылом и просушить.

При сборке противогаза шлем-маску берут в левую руку за клапанную коробку, а правой рукой ввинчивают до отказа фильтрующе- поглощающую коробку навинтованной горловиной в патрубок клапанной коробки шлем-маски.

При переводе противогаза в «боевое» положение необходимо:

– снять головной убор и зажать его между коленями или положить рядом;

– убрать волосы со лба и висков, женщинам следует гладко

– зачесать волосы назад, заколки и украшения снять (их попадание под обтюратор приведет к нарушению герметичности);

– вынуть шлем-маску из сумки, взять ее обеими руками за утолщенные края у нижней части так, чтобы большие пальцы рук были с наружной стороны, а остальные – внутри. Подвести шлем-маску к подбородку и резким движением рук вверх и назад натянуть ее на голову так, чтобы не было складок, а очки пришлись против глаз (ГП-5, ГП-5М);

– для правильного надевания ГП-7 надо взять лицевую часть обеими руками за щечные лямки так, чтобы большие пальцы захватывали их изнутри. Задержать дыхание, закрыть глаза. Затем зафиксировать подбородок в нижнем углублении обтюратора и движением рук вверх и назад натянуть наголовник на голову и подтянуть до упора щечные лямки;

– сделать полный выдох (для удаления зараженного воздуха из-под шлем-маски, если он туда попал в момент надевания), открыть глаза и возобновить дыхание;

– надеть головной убор, застегнуть сумку и закрепить ее на туловище.

Дополнительные патроны

В результате развития химической и нефтехимической промышленности в производстве увеличено применение химических веществ. Многие из них по своим свойствам вредны для здоровья людей. Их называют сильнодействующими ядовитыми веществами (СДЯВ).

С целью расширения возможностей гражданских противогазов по защите от СДЯВ для них введены дополнительные патроны (ДПГ-1 и ДПГ-3).

ДПГ-1 в комплекте с противогазом защищает от двуокиси азота, метила хлористого, окиси углерода и окиси этилена. ДПГ-3 в комплекте с противогазом защищает от аммиака, хлора, диметиламина, нитробензола, сероводорода, сероуглерода, синильной кислоты, тетраэтилсвинца, фенола, фурфурола, хлористого водорода.

Внутри патрона ДПГ-1 два слоя шихты – специальный поглотитель и гопкалит. В ДПГ-3 только один слой поглотителя. Чтобы защитить шихту от увлажнения при хранении, горловины должны быть постоянно закрытыми: наружная – с навинченным колпачком с прокладкой, внутренняя – с ввернутой заглушкой [6].

Изолирующие противогазы. Изолирующие противогазы (ИП) являются специальными средствами защиты органов дыхания, глаз и кожи лица от любых вредных примесей, находящихся в воздухе независимо от их свойств и концентраций. Они используются также в тех случаях, когда невозможно применение фильтрующих противогазов, например при наличии в воздухе очень высоких концентраций отравляющих веществ или любой вредной примеси, кислорода менее 16 %, а также при работе под водой на небольшой глубине. Виды противогазов представлены на Рис. 7.5.

ИП-4М ИП-6 ПДА-3М

Рис. 9.5. Изолирующие противогазы

Изолирующие противогазы используют в случае, когда фильтрующие противогазы не обеспечивают должной степени защиты, или когда в воздухе недостаточно кислорода. Источником кислорода в таком противогазе служит патрон, снаряженный специальным веществом. Для нужд населения выпускают ИП-4М, ИП-4МК, ИП-5, ИП-6, ИП-7, ПДА- 3М.

Действие изолирующих противогазов основано на использовании химически связанного кислорода. Они имеют замкнутую маятниковую схему дыхания: выдыхаемый воздух попадает в регенеративный патрон, вещество которое содержится в нем поглощает углекислый газ и влагу, а взамен выделяет необходимый для дыхания кислород. Затем дыхательная смесь попадает в дыхательный мешок. При вдохе газовая смесь из дыхательного мешка снова проходит через регенеративный патрон, дополнительно очищается и поступает для дыхания. Материалы, из которых изготовлены противогазы, не оказывают отрицательного воздействия на организм. Применение незапотевающих пленок, а при отрицательных температурах и утеплительных манжет сохраняет прозрачность стекол в течение всего времени работы в противогазе при любой физической нагрузке. Грантируется высокая эксплуатационная безопасность.

ИП-4М, ИП-4МК используют при авариях, стихийных бедствиях. ИП-5, ИП-6 предназначены для защиты органов дыхания, кожи лица и глаз человека в непригодной для дыхания атмосфере независимо от состава и концентрации вредных веществ в воздухе, а также при недостатке или отсутствии кислорода. Портативный дыхательный аппарат (ПДА-3М) предназначен для экстренной защиты органов дыхания, зрения и кожи лица человека в непригодной для дыхания атмосфере при эвакуации из опасной зоны, выполнении аварийных работ, а также в ожидании помощи [5].

По принципу действия изолирующие противогазы делятся на две

группы: ИП-5); КИП-8).

- противогазы на основе химически связанного кислорода (ИП-4,

- противогазы на основе сжатого кислорода или воздуха (КИП-7, Исходя из принципа защитного действия, основанного на полной изоляции органов дыхания от окружающей среды, время пребывания в изолирующем противогазе зависит не от физико-химических свойств ОВ,РВ, БС и их концентраций, а от запаса кислорода и характера выполняемой работы.

Противогазы шланговые изолирующие презназначены для защиты органов дыхания, глаз и кожи человека от любых вредных примесей в воздухе независимо от их концентрации, а также для работы в условиях недостатка кислорода в воздухе рабочей зоны. Комплектуются возду- хоподводящим шлангом длиной 10 или 20 м на барабане или в сумке.

Респираторы.

Респираторы представляют собой облегченное средство защиты органов дыхания от вредных газов, паров, аэрозолей и пыли (рис. 7.6).

Респираторы делятся на два типа. Первый – это респираторы, у которых полумаска и фильтрующий элемент одновременно служат и лицевой частью. Второй – это респираторы, которые очищают вдыхаемый воздух в фильтрующих патронах, присоединяемых к полумаске.

Рис. 7.6. Респираторы:

а – «Кама»; б – «Снежок»; в – У-2к; г – РП-КМ; д – Ф-62Ш; е – «Ас- тра 2»; ж – РПГ-67; з – РУ-6 Ом

Респираторы по назначению делят на следующие виды [5]:

противоаэрозольные – для защиты органов дыхания от пыли, дыма, тумана, содержащих токсичные, бактериальные и другие опасные элементы, за счет пропускания вдыхаемого воздуха через фильтр из специального материала (респираторы «Лепесток», «Кама», «Снежок-П», У-2к, «Астра-2», Ф-62ш, РПА-1 и др.). Для фильтров в таких респираторах ис- пользуют материалы типа ФП (фильтр Петрянова), обладающие высокой эластичностью, механической прочностью, большой пылеемкостью, стой- костью к химическим агрессивным веществам и прекрасными фильтрую- щими свойствами;

противогазовые – для защиты от паров и газов за счет фильтрования вдыхаемого воздуха через фильтрпатроны различных марок, различающихся составом адсорбирующего материала. При этом фильтр-патрон каждой марки защищает от газов только определенного вида (РПГ-67);

универсальные – одновременно защищают от аэрозолей и отдель- ных видов газов и паров. Респираторы имеют противоаэрозольный фильтр и сменные противогазовые патроны разных марок (РУ-60м) или противо- газовые фильтры из ионообменного волокнистого материала («Снежок- ГП», «Лепесток-Г»).

По конструктивному оформлению различают респираторы двух типов:

фильтрующие маски – их фильтрующий элемент одновременно служит лицевой частью;

патронные – самостоятельно выполненные лицевая часть и фильтрующий элемент.

По характеру вентилирования подмасочного пространства респи- раторы делят на бесклапанные (вдыхаемый и выдыхаемый воздух прохо- дит через фильтрующий элемент) и клапанные (вдыхаемый и выдыхаемый воздух движется по различным каналам благодаря системе клапанов вдоха и выдоха).

В зависимости от срока службы различают респираторы одноразо- вого (типа «Лепесток», «Кама», У-2к и т. п.) и многоразового пользования, в которых предусмотрена возможность замены фильтров или их много- кратная регенерация (Ф-62ш, «Астра-2», РУ-60м и др.).

Респираторы ШБ-1, «Лепесток-5», «Лепесток-40» и «Лепесток-200» одинаковы и представляют собой сплошную легкую полумаску- фильтр из материала ФПП (фильтрующее полотно Петрянова). В нерабо- чем состоянии респиратор имеет вид круга. Каркасность его в рабочем со- стоянии обеспечивают пластмассовая распорка и алюминиевая пластина. Плотное прилегание респиратора к лицу достигается при помощи резино- вого шнура, вшитого в периметр круга, а также благодаря электростатиче- скому заряду материала ФПП, который образует полосу обтюрации. На го- лове респиратор крепят четырьмя шнурами.

Противоаэрозольные респираторы. В качестве фильтров в респираторах используют тонковолокнистые фильтровальные материалы. Наибольшее распространение получили полимерные фильтровальные материалы типа ФП (фильтр Петрянова) благодаря их хорошей эластичности, большой пылеемкости, а главное, высоким фильтрующим свойствам. Важной отличительной особенностью материалов ФП, изготовленных из перхлорвинила и других полимеров, обладающих изоляционными свойствами, является то, что они несут электростатические заряды, которые резко повышают эффективность улавливания аэрозолей и пыли.

Респиратор противопылевый У-2К (в гражданской обороне Р-2) обеспечивает защиту органов дыхания от силикатной, металлургической, горнорудной, угольной, радиоактивной и другой пыли, от некоторых бактериальных средств, дустов и порошкообразных удобрений, не выделяющих токсичные газы и пары. Использовать респиратор целесообразно при кратковременных работах небольшой интенсивности и запыленности воздуха. Не рекомендуется применять, когда в атмосфере сильная влага.

Респиратор представляет собой фильтрующую полумаску, наружный фильтр которой изготовлен из полиуретанового поропласта зеленого цвета, а внутренняя его часть – из тонкой воздухонепроницаемой полиэтиленовой пленки, в которую вмонтированы два клапана вдоха (рис. 9.7). Клапан выдоха размещен в передней части полумаски и защищен экраном. Между поропластом и полиэтиленовой пленкой расположен второй фильтрующий слой из материала ФП. Для плотного прилегания респиратора к лицу в области переносицы имеется носовой зажим – фигурная алюминиевая пластина. Респиратор крепится при помощи регулируемого оголовья.

Рис. 7.7. Респираторы У-2К (Р-2)

Респираторы У-2К изготавливаются трех ростов, которые обозначаются на внутренней подбородочной части полумаски. Определение роста производится путем измерения высоты лица человека, т. е. расстояния между точкой наибольшего углубления переносицы и самой нижней точкой подбородка. При величине измерения от 99 до 109 мм берут первый рост, от 109 до 119 мм – второй, от 119 и выше – третий.

Принцип действия респиратора основан на том, что при вдохе воздух последовательно проходит через фильтрующий полиуретановый слой маски, где очищается от грубодисперсной пыли, а затем через фильтрующий полимерный материал (ФП), в котором происходит очистка воздуха от тонкодисперсной пыли. После очистки вдыхаемый воздух через клапаны вдоха попадает в подмасочное пространство и в органы дыхания.

При выдохе воздух из подмасочного пространства выходит через клапан выдоха наружу.

Чтобы подогнать респиратор У-2К (Р-2), нужно:

- вынуть его из полиэтиленового мешочка и проверить его исправность, надеть полумаску на лицо так, чтобы подбородок и нос разместились внутри нее, одна нерастягивающаяся тесьма оголовья располагалась бы на теменной части головы, а другая – на затылочной;
- с помощью пряжек, имеющихся на тесемках, отрегулировать их длину (для чего следует снять полумаску) таким образом, чтобы надетая полумаска плотно прилегала к лицу;
- на подогнанной надетой полумаске прижать концы носового зажима к носу.

Для проверки плотности прилегания респиратора к лицу необходимо плотно закрыть отверстия предохранительного экрана клапана выдоха ладо- нью и сделать легкий выдох. Если при этом по линии прилегания полумаски к лицу воздух не выходит, а лишь несколько раздувает респиратор, значит, он надет герметично. Если воздух проходит в области носа, то надо плотнее прижать концы носового зажима.

После снятия респиратора необходимо удалить пыль с наружной части полумаски с помощью щетки или вытряхиванием. Внутреннюю поверхность необходимо протереть и просушить, после чего респиратор необходимо вложить в полиэтиленовый пакет, который закрывается кольцом. Противоаэрозольный респиратор Ф-62Ш (однопатронный) – это средство индивидуальной защиты органов дыхания человека от различных видов промышленных пылей, он не защищает от газов, паров вредных ве- ществ, аэрозолей органических соединений. Предназначен для защиты от силикатной, металлургической, горнорудной, угольной, табачной пыли, пыли порошкообразных удобрений и интоксицидов, а также других видов пыли, не выделяющих токсичных газов. Широко применяется шахтерами. Респиратор противоаэрозольный ФА-2002 предназначен для защиты лица, глаз, органов дыхания от аэрозолей различной природы (пыль, дым, туман) при их суммарной концентрации не более 15 ПДК и при концентрации кислорода не менее 17 % (Рис. 7.8).

Ф-62Ш

ФА-2002

Рис. 7.8. Респираторы противоаэрозольные Ф-62Ш и ФА-2002

Универсальные респираторы

Газопылезащитные респираторы занимают как бы промежуточное положение между респираторами противопылевыми и противогазами. Они легче, проще и удобнее в использовании, чем противогаз. Однако защищают только органы дыхания при концентрации вредных веществ не более 10–15 ПДК. Глаза, лицо остаются открытыми. Вместе с тем такие респираторы во многих случаях довольно надежно предохраняют человека в газовой и пылегазовой среде.

Респиратор газопылезащитный РУ-60М (рис. 7.9) защищает органы дыхания от воздействия вредных веществ, присутствующих в воздухе одновременно в виде паров, газов и аэрозолей (пыли, дыма, тумана).

Рис. 7.9. Респиратор газопылезащитный (РУ-60М)

Запрещается применять эти респираторы для защиты от высокотоксичных веществ типа синильной кислоты, мышьяковистого, фосфористого, цианистого водорода, тетраэтилсвинца, низкомолекулярных углеводородов (метан, этан), а также от веществ, которые в парогазообразном состоянии могут проникнуть в организм через неповрежденную

кожу. Респиратор РУ-60М состоит из резиновой полумаски, обтюратора, поглощающих патронов (марки А, В, КД, Г), пластмассовых манжет с клапанами вдоха, клапана выдоха с предохранительным экраном и оголовья. С этими респираторами разрешается работать в средах, где концентрация пыли не более 100 мг/м^3.

Противогазовые респираторы. Респиратор противогазовый (РПГ-

67) – это средство индивидуальной защиты, применяется на предприятиях химической, металлургической и в других отраслях производства при концентрациях вредных веществ, не превышаю-

щих 10–15 ПДК.

Газодымозащитный комплект. Статистика показывает, что пожары с большим количеством человеческих жертв чаще всего встречаются в гостиницах, театрах, универсамах, ресторанах, вечерних клубах, учебных заведениях, на предприятиях, использующих легковоспламеняю- щиеся материалы.

Помещения быстро заполняются окисью углерода и другими токсическими газами. Люди гибнут от отравлений. Чтобы защитить органы дыхания и глаза от ядовитых газов, а голову человека от огня при выходе из горящего помещения, создан специальный газодымозащитный комплект (Рис. 9.10).

Рис. 9.10 Газодымозащитный комплект

Газодымозащитный комплект (ГДЗК) состоит из огнестойкого капюшона с прозрачной смотровой пленкой. В нижней части расположена эластичная манжета.

Внутри капюшона находится резиновая полумаска, в которой закреплен фильтрующе-сорбирующий патрон с клапаном вдоха. ГДЗК имеет регулируемое оголовье. При надевании следует широко растянуть эластичную манжету и накинуть капюшон на голову так, чтобы

манжета плотно облегала шею, при этом длинные волосы заправляются под капюшон. Очки можно не снимать. ГДЗК обеспечивает защиту от окиси углерода и цианистого водорода не менее 15 мин. Сопротивление при вдохе при 30 л/мин – не более 149 Па (15 мм вод. ст). Масса 800 г. Комплект хранится в картонной коробке в пакете из трехслойной полиэтиленовой пленки.

Капюшон «Феникс» предназначен для самостоятельной эвакуации из мест возможного отравления химически опасными и вредными вещест- вами. Защищает от продуктов горения, аэрозолей, паров и газов, опасных химических веществ, образующихся при аварийных ситуациях (Рис. 9.11).

Самоспасатели СИП-1, СПИ-20, СПФ, «Экстремал ПРО» (Рис. 9.11) предназначены для индивидуальной защиты органов дыхания и зрения человека от вредного воздействия непригодной для дыхания, токсичной и задымленной газовой среды. Применяются при экстренной эвакуации людей в случае террористических актов, а также с мест пожара в общественных зданиях, на транспорте, из жилых домов и т. п.




а *б* *в* *г*

Рис. 9.11. Самоспасатели:
а – СИП-1; б – СПИ-20; в – СПФ; г – капюшон «Феникс»; д – «Экстремал ПРО».

Самоспасатель противопожарный СИП-1 предназначен для защиты органов дыхания, зрения и головы при самостоятельной эвакуации из помещений (гостиниц, высотных зданий, вагонов) во время пожара или при других аварийных ситуациях, от любых вредных веществ независимо от их концентрации и при недостатке кислорода в воздухе.

Порядок выполнения работы

1. Записать название и цель работы.
2. Законспектировать виды и назначение противогазов в виде табл. 7.3.

Таблица 7.3

Виды и назначение противогазов

Наименование и марка	Назначение, вид веществ, от которых защищает	Комплектация	Примечание*
Фильтрующие противогазы			
Гражданские			
ГП-5			
…			

… т. д.			

*В примечании указать, для каких возрастных групп предназначен, особенности мар- ки и т. п.

3. Указать правила пользования противогазами.

4. Измерить при помощи гибкого сантиметра лицевую часть головы и подобрать для себя размер противогаза ГП-5 (ГП-7) по росту.

5. Измерить при помощи гибкого сантиметра высоту своего лица и подобрать размер респиратора У-2К.

6. Показать отчет преподавателю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безопасность жизнедеятельности : учеб. для вузов / С. В. Белов [и др.] ; под общ. ред. С. В. Белова. – М.: Высш. шк., 2009. – 616 с.

2. Безопасность жизнедеятельности. Безопасность в чрезвычайных ситуациях природного и техногенного характера : учеб. пособие для вузов / В. А. Акимов [и др.]. – М. : Высш. шк., 2008. – 592 с.

3. Безопасность жизнедеятельности. Защита населения и территорий в чрез- вычайных ситуациях : учеб. пособие для вузов / Я. Д. Вишняков [и др.]. – М. : Академия, 2008. – 304 с.

4. Емельянов В. М., Коханов В. Н., Некрасов П. А. Защита населения и территорий в чрезвычайных ситуациях : учеб. пособие для вузов. – М. : Академический проект : Трикста, 2005. – 480 с.

5. Вознесенский В. В. Средства защиты органов дыхания и кожи. Противога- зы, респираторы и защитная одежда, основы их эксплуатации : учеб. пособие. – М. : Воен. знания, 2010. – 80 с.

6. Семенов С. Н., Лысенко В. П. Проведение занятий по гражданской обороне : метод. пособие. – М. : Высш. шк., 1990. – 96 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8. ИНЖЕНЕРНАЯ И ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ЗАЩИТА. ВИДЫ ЗАЩИТНЫХ СООРУЖЕНИЙ И ПРАВИЛА ПОВЕДЕНИЯ В НИХ

Наименование работы: Действия населения при ЧС военного характера.

Цель: изучить действия населения при ЧС военного характера при угрозе применения радиационного, химического или биологического оружия, определить применяемые средства индивидуальной защиты, обосновать выбор защитных сооружений.

Время: 4 часа

Материально-техническое обеспечение: инструкционная карта, ручка, противогаз, респиратор, ватно-марлевая повязка

Методика выполнения

Задание:

1. Изучить индивидуальные средства защиты населения.

2. Изучить виды укрытий и правила поведения в убежищах и укрытиях.

3. Изучить применение СИЗ при угрозе применения химического и биологического оружия.

4. Отчет о работе оформить в виде плана-конспекта.

5. Заполнить таблицу.

№	**ЧС**	**Опасность**	**Поражающие факторы**	**Основные средства защиты**

Ядерное оружие – самое страшное оружие современности. Поражение людей при его применении зависит от того, где они находились в момент ядерного взрыва. Наиболее эффективным средством защиты от всех поражающих факторов ядерного оружия являются убежища (укрытия). Находясь в убежищах (укрытиях), необходимо постоянно держать в готовности к немедленному использованию средства индивидуальной защиты. Средства индивидуальной защиты подразделяют на средства индивидуальной защиты органов дыхания (СИЗОД), средства индивидуальной защиты глаз (СИЗГ), средства индивидуальной защиты кожи (СИЗК). К средствам защиты органов дыхания человека относятся противогазы (фильтрующие (рис.8.1.) и изолирующие (рис.2.)) и респираторы (рис.3.), а также простейшие средства защиты – противопыльные тканевые маски (ПТМ-1) (рис.4.) и ватно-марлевые повязки (рис.5.), изготовляемые обычно силами самого населения.

Рис. 8.1 Фильтрующий противогаз

1-фильтрующе-поглощающая коробка; 2-лицевая часть противогаза; 3-очковой узел; 4-шихга (обеспечивает поглощение паров и газов, и токсичных в-в); 5-ПАФ (противоаэрозольный фильтр); 6-клапанная коробка.

Рис.8.2. Изолирующий противогаз

1-лицевая часть, 2-очковый узел, 3-соеденительная трубка, 4-регенераторный патрон, 5-пусковое устройство патрона, 6-дыхательный мешок, 7-каркас, 8-устройство для переговоров.

Порядок надевания противогаза:

1. По команде «Газы!» задержите дыхание, не вдыхая воздух.

2. Закрыть глаза.

3. Достать противогаз из противогазной сумки, левой рукой доставая противогаз, а правой держа сумку снизу.

4. Вынуть пробку-заглушку из противогазной коробки.

5. Перед надеванием противогаза расположить большие пальцы рук снаружи, а остальные внутри.

6. Приложить нижнюю часть шлем-маски на подбородок.

7. Резко натянуть противогаз на голову снизу-вверх.

8. Выдохнуть.

9. Необходимо, чтобы после не образовалось складок, очковый узел должен быть расположен на уровне глаз.

10. Перевести сумку на бок.

Снятие:

1. По команде «Отбой!» брать за фильтровальную коробку и, потянув сверху-вниз, снять его.

2. Убрать противогаз в противогазную сумку.

3. Застегнуть пуговицы.

Таблица 8.0

Подбор размера противогаза

Обхват головы	**Размер противогаза**
До 63	0
63,5-65,5	1
66-68	2
68,5-70,5	3
71 и более	4

В качестве защиты органов дыхания от радиоактивной пыли и различных вредных аэрозолей могут быть использованы респираторы. Они просты в применении, малогабаритны и рассчитаны на массовое применение. Широко используются при выполнении работ, связанных с пылеобразованием.

Респиратор представляет собой фильтрующую полумаску, снабженную двумя клапанами вдоха, клапаном выхода (с предохранительным экраном), оголовьем, состоящим из эластичных растягивающихся (и не растягивающихся) тесемок, и носовым зажимом. Работать в нем можно до 12 ч

Респираторы Р-2 изготовляются трех ростов -1,2 и 3-го, которые обозначаются внутренней подбородочной части полумаски.

Простейшими средствами защиты органов дыхания человека от радиоактивной пыли и биологических средств (при действиях во вторичном облаке) являются противопыльная тканевая маска ПТМ-1 (рис.8.3).

Рис.8.3. Противопыльная тканевая маска

1-корпус маски, 2-смотровые отверстия, 3-крепления, 4-резиновая тесьма, 5-поперечная резинка, 6-завязки.

И ватно-марлевая повязка (рис.8.4.) От ОВ (отравляющих веществ) они не защищают. Их изготавливает преимущественно само население. Маска состоит из корпуса и крепления. Корпус шьется из двух одинаковых по форме тканевых фильтрующих половинок, собранных на 4-5 слоев. На нем имеются смотровые отверстия со вставленными стеклами. Крепится маска на голове при помощи вставленной резинки и двух завязок.

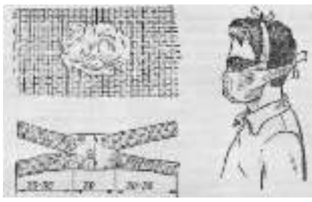


Рис.8.4. Ватно-марлевая повязка

Ватно-марлевая повязка изготовляется из куска марли размером 100 х50 см и ваты. На марлю накладывают слой ваты толщиной 2-3 см, длинной 30 см, шириной 20 см. Марлю с обеих сторон загибают и накладывают на вату. Концы марли разрезают на 30-35 см с каждой стороны, чтобы образовались две пары завязок. Марлевые повязки делают из 10-12 слоев марли. Они шьются также в виде маски, закрывающей лицо или только подбородок, нос и рот. Для защиты глаз используются противопыльные очки.

Рис.8.5.Защитные очки

К средствам индивидуальной защиты глаз (СИЗГ), в первую очередь, относятся защитные очки, предохраняющие от пыли, твердых частиц, химически неагрессивных жидкостей и газов, от слепящего яркого света, ультрафиолетового, инфракрасного излучения и от сочетания излучений указанных видов с воздействия летящих твердых частиц, а так же очкизащищающие от лазерного излучения и других опасных факторов.

К **средствам индивидуальной защиты кожи (СИЗК)** относят защитную одежду фильтрующего и изолирующего типа. К изолирующим средствам защиты кожи относятся общевойсковой комплексный защитный костюм (ОКЗК), общевойсковой защитный комплекс (ОЗК) (рис.8.6.), легкий защитный костюм (Л-1) , защитный комбинезон или костюм.

Рис. 8.6 Защитный костюм

Общевойсковой комплексный защитный костюм (ОЗК) предназначен для комплексной защиты от светового излучения и радиоактивной пыли, паров и аэрозолей ОВ и биологических аэрозолей. Он состоит из пропитанных специальным составом куртки, брюк, защитного белья, головного убора, подшлемника.

Простейшие средства защиты кожи применяются при отсутствии табельных средств. Может быть использована прежде всего производственная одежда (спецовка) – куртка и брюки, комбинезоны, халаты с капюшоном, сшитые из брезента, огнезащитной или прорезиненной ткани, грубого сукна. Они способны не только защищать от попадания на кожу людей радиоактивных веществ и биологических средств, но и не пропускать в течение некоторого времени капельножидких отравляющих веществ.

Обычная одежда, обработанная специальной пропиткой, может защищать и от паров отравляющих веществ. В качестве пропитки используют моющие средства или мыльно-масляную эмульсию. Основные представители неионогенных моющих средств – ОП-7 и ОП-10 (ОП-7иОП-10 - вспомогательные вещества, представляющие собой продукты обработки смеси моно- и диалкилфенолов окисью этилена. Вспомогательные вещества ОП-7 и ОП-10 относятся к неионогенным поверхностно-активным веществам. Применяются в качестве смачивающих, эмульсирующих, стабилизирующих поверхностно-активных веществ. Хорошо растворимы в воде). Синтетические моющие средства в чистом виде используются редко и служат исходным материалом для приготовления моющих средств, которые состоят из моющего вещества, активных добавок (соли фосфорной кислоты, сульфат натрия, метасиликат натрия и др.) и веществ, предохраняющих кожу (карбоксиметилцеллюлоза, дермоланы – высокомолекулярные циклические соединения, содержащие группы SO_2,NH_4,далгоны – конденсированные фосфаты).

Придать повседневной одежде защитные от отравляющих веществ свойства можно, пропитав ее раствором, который может быть приготовлен в домашних условиях. 2,5-3 л раствора, необходимого для пропитки одного комплекта одежды, можно получить если растворить 250-300 г измельченного хозяйственного мыла в 2-3 л горячей воды (60-70 ° С), добавить в раствор 0,5 л минерального (машинного) и другого масла и, подогревая,перемешивать раствор до получения однородной мыльно-масляной эмульсии. Одежду помещают в большую емкость (бак, ведро) и заливают раствором. Пропитанная одежда отжимается и просушивается (утюжке не подлежит).

В летную жаркую погоду необходимо соблюдать установленные сроки работы в защитной одежде. Зимой для предупреждения обмораживания следует надевать ее на ватник, использовать подшлемник, теплые портянки, в резиновые сапоги подкладывать теплые стельки, защитные перчатки одевать поверх обычных шерстяных или фланелевых. Обычно длительность пребывания людей в убежищах зависит от степени радиоактивного заражения местности. Если убежище находится в зоне заражения с уровнями радиации от 8 до 80 Р/ччерез один час после ядерного взрыва, то время пребывания в нем укрываемых людей составит от нескольких часов до одних суток (рис.8.7) .

Рис.8. 7. Ватно-марлевая повязка

В зоне заражения с уровнями радиации от 80 до 240 Р/ч нахождение людей в защитном сооружении увеличивается до 3 сут. В зоне заражения с уровнем радиации 240 Р/ч и выше это время составит 3 сут. и более. По истечении указанных сроков из убежищ (укрытий) можно перейти в жилые помещения. В течение последующих 1-4 сут. (в зависимости от уровней радиации в зонах заражения) из таких помещений можно периодически выходить наружу, но не более чем на 3-4 ч в сутки.

В условиях сухой и ветреной погоды, когда возможно пылеобразование, при выходе из помещений следует использовать СИЗОД. Чтобы благополучно пережить указанные сроки пребывания в убежищах, необходимо иметь запасы продуктов питания (не менее чем на 4 сут. (крупы, сахар и соль, галеты, сухари, консервы, макаронные изделия, мука, сухофрукты, шоколад, подсолнечное масло, мед, варенье. уксус, вода)), питьевой воды (из расчета 3 л на человека в сутки), а также предметы первой необходимости и медикаменты.

Если в результате ядерного взрыва убежище (укрытие) окажется поврежденным, принимают меры к быстрому выходу из него, надев СИЗОД. Если основным и ли запасным выходом воспользоваться невозможно, приступают к расчистке одного из заваленных выходов или к проделыванию выхода. После выхода из очага ядерного поражения (зоны радиоактивного заражения) необходимо провести частичную дезактивацию и санитарную обработку, т.е. удалить радиоактивную пыль. При частичной дезактивации следует осторожно снять одежду, ни в коем случае не снимая СИЗОД. Встав спиной к ветру, вытряхнуть ее, развесить одежду на перекладине или веревке и обмести с нее пыль сверху вниз с помощью щетки или веника. Одежду можно выколачивать и палкой.

После этого следует продезактивировать обувь: протереть тряпками и ветошью, смоченными водой, очистить веником или щеткой. Резиновую обувь можно мыть. Противогаз дезактивируют в особой последовательности. Фильтрующе-поглощающую коробку вынимают из сумки, сумку тщательно вытряхивают. Затем тампоном, смоченным мыльной воде, моющим раствором или жидкостью из противохимического пакета обрабатывают фильтрующе-поглощающую коробку, соединительную трубку и наружную поверхность шлема-маски (маски). Лишь после этого противогаз снимают.

Противопыльные тканевые маски при дезактивации тщательно вытряхивают, чистят щетками, при возможности полощут или стирают в воде. Зараженные ватно-марлевые повязки сжигают. При частичной санитарной обработке открытые участки тела: руки, лицо, шею, глаза обмывают незараженной водой. Нос, рот и горло полощут. Важно, чтобы при обмывке лица зараженная вода не попала в глаза, рот и нос. При недостатке воды обработку проводят путем многократного протирания участков тела тампонами из марли (ваты, пакли, ветоши), смоченными незараженной водой. Протирание следует проводить сверху вниз. каждый раз переворачивая тампон чистой стороной. Зимой может использоваться незараженный снег.

Летом санитарную обработку можно организовать в реке или другом проточном водоеме. Частичная дезактивация и санитарная обработка, проводимые в одноразовом порядке, не всегда гарантируют полное удаление радиоактивной пыли. Потому после их проведения обязательно проводится дозиметрический контроль. Если заражение одежды и тела окажется выше допустимой нормы, частичные дезактивацию и санитарную обработку повторяют. В необходимых случаях проводится полная санитарная обработка. Своевременно проведенные частичные дезактивация и санитарная обработка могут полностью предотвратить или сильно снизить степень поражения людей радиоактивными веществами.

Если люди во время ядерного взрыва находятся вне убежища укрытия, следует использовать естественные ближайшие укрытия (рис.10). Если таких укрытий нет, надо повернуться к взрыву спиной, лечь на землю лицом вниз, руки спрятать под себя. Через 15-20 с. после взрыва, когда пройдет ударная волна, следует встать и немедленно надеть противогаз, респиратор или какое-либо другое СИЗОД. В случае отсутствия специальных средств следует закрыть рот и нос платком, шарфом или плотным материалом.

Задача состоит в том, чтобы исключить попадание внутрь организма радиоактивных веществ. Их поражающее действие бывает значительным в течение длительного времени, поскольку выведение их из организма происходит медленно. Далее необходимо стряхнуть осевшую на одежду и обувь пыль, надеть имеющиеся средства защиты кожи.

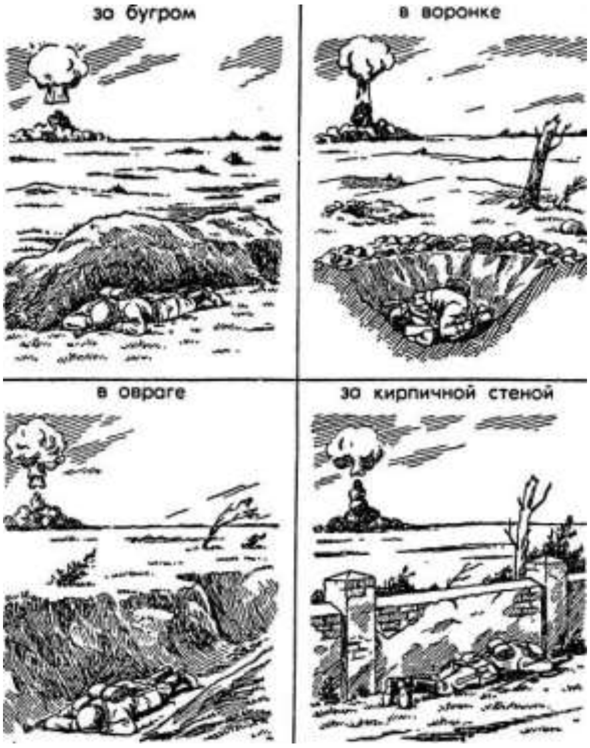


Рис 8.8 Естественные укрытия при внезапном ядерном взрыве

Для этого можно использовать имеющиеся одежду и обувь. Затем следует побыстрее покинуть очаг поражения или укрыться в ближайшем защитном сооружении.

Оставаться на зараженной радиоактивными веществами местности вне убежищ (укрытий), несмотря на использование средств индивидуальной защиты, опасно. Это сопряжено с возможностью облучения и, как следствие, развития лучевой болезни. В целях уменьшения возможности поражения радиоактивными веществами в зонах заражения запрещается принимать пищу, пить и курить. Приготовление пиши должно вестись на незараженной местности или, в крайнем случае, на местности, где уровень радиации не превышает 1 Р/ч. При выходе из очага поражения необходимо учитывать, что в результате ядерных взрывов разрушаются здания, сети коммунального хозяйства. При этом отдельные элементы зданий могут обрушиться через некоторое время после взрыва. Продвигаться надо посередине улицы, стараясь возможно быстрее попасть в безопасное место. Нельзя трогать электропровода. Направление движения из очага поражения следует выбирать, ориентируясь на знаки ограждения, расставленные разведкой гражданской обороны. Они ведут всторону снижения уровней радиации. Двигаясь по зараженной территории, надо стараться не поднимать пыли, обходить лужи, не создавать брызг.

В результате применения химического оружия возникают очаги химического поражения-территории, в пределах которой в результате воздействия химического оружия произошли массовые поражения людей и сельскохозяйственных животных. Размеры очага зависят от масштаба и способа применения БТХВ (боевые токсичные химические вещества - это химические соединения, которые способны поражать людей и животных на больших площадях, проникать в различные сооружения, заражать местность и водоемы), его типа метеорологических условий, рельефа местности. Особенно опасны стойкие БТХВ нервнопаралитического действия. Их пары распространяются по ветру на довольно большое расстояние (15-25 км и более). Поэтому люди и животные могут быть поражены ими не только в районе применения химических боеприпасов, но и далеко за его пределами. Длительность поражающего действия БТХВ тем меньше, чем сильнее ветер и восходящие потоки воздуха. В лесах, парках, оврагах, на узких улицах они сохраняются дольше, чем на открытой местности. Современные отравляющие вещества обладают чрезвычайно высокой токсичностью.

При обнаружении признаков применения противником отравляющих веществ, далее ОВ (по сигналу «Химическая тревога») надо срочно надеть противогаз, а в случае необходимости - средства защиты кожи. Если поблизости имеется убежище, нужно укрыться в нем. Перед тем как войти в убежище, следует снять использованные средства защиты кожи и верхнюю одежду и оставить их в тамбуре убежища. Эта мера предосторожности исключает занос ОВ в убежище. Противогаз снимают после входа в убежище.

При пользовании укрытием, например, подвалом, не следует забывать, что оно м служить защитой лишь от попадания на кожные покровы и одежду капельножидких ОВ. Однако оно не защищает от паров или аэрозолей отравляющих веществ, находящихся в воздухе. Находясь в таких укрытиях, при наружном заражении обязательно надо воспользоваться противогазом. Находиться в убежище (укрытии) следует до получения распоряжения на выход из него. Когда такое распоряжение поступит, необходимо надеть требуемые средства индивидуальной защиты - противогазы и средства защиты кожи и выйти за пределы очага поражения по направлениям, обозначенным специальными указателями. Если нет ни указателей, ни постов, то двигаться следует перпендикулярно направлению ветра.

На зараженной ОВ территории надо двигаться быстро, но не пыль (брызги). Нельзя прислоняться к зданиям и прикасаться к окружающим предметам. Не следует наступать на видимые капли и мазки ОВ. На зараженной территории запрещается снимать противогазы и другие средства защиты. Особо осторожно нужно двигаться через парки, сады, огороды и поля. На листьях и ветках растений могут находиться осевшие капли ОВ, при прикосновении к ним можно заразить одежду и обувь, что может привести к поражению.

По возможности следует избегать движения оврагами и лощинами, через луга и болота, в этих местах возможен длительный застой паров ОВ. В городах пары ОВ могут застаиваться в замкнутых кварталах, парках, а также в подъездах и на чердаках домов. Зараженное облако в городе распространяется на наибольшие расстояния по улицам,тоннелям, трубопроводам.

ОВ на кожных покровах, одежде, обуви или средствах индивидуальной защиты необходимо немедленно снять их тампонами из марли или ваты; если таких тампонов нет, капли ОВ можно снять тампонами из бумаги или ветоши. Пораженные места следует обработать раствором из противохимического пакета или тщательно промыть теплой водой с мылом. После выхода из очага химического поражения немедленно проводится полная санитарная обработка. Если это невозможно, проводятся частичные дегазация и санитарная обработка.

Очагом биологического поражения считаются территорииподвергшиеся непосредственному воздействию бактериальных (биологических) средств, создающих источник распространения инфекционных заболеваний. Заражение людей и животных происходит в результате вдыхания зараженного воздуха, попадания микробов или токсинов на слизистую оболочку и поврежденную кожу, употребления в пищу зараженных продуктов питания и воды.

Причиной заражения могут быть укусы зараженных насекомых и клещей, соприкосновения с зараженными предметами, ранения осколками боеприпасов, снаряженных БС (биологические средства поражения - общее название болезнетворных микроорганизмов и продуктов их жизнедеятельности, предназначенных для использования в системах биологического оружия с целью поражения людей, животных и растений). Заражение возможно также в результате непосредственного общения с больными людьми (животными). Ряд заболеваний быстро передается от больных людей к здоровым и вызывает эпидемии (чума, холера, тиф, грипп и др.). К основным средствам защиты населения от биологического оружия относятся вакциносывороточные препараты, антибиотики, сульфамидные и другие лекарственные вещества, используемые для специальной и экстренной профилактики инфекционных болезней.

Употребимы такие средства индивидуальной и коллективной защиты. Своевременное и правильное применение средств индивидуальной защиты и защитных сооружений предохранит от попадания БС в органы дыхания, на кожные покровы и одежду. Необходимо строгое соблюдение правил личной гигиены и санитарно-гигиенических требований к питанию и водоснабжению населения. Приготовление и прием питии должны исключать возможность ее заражения бактериальными средствами. Посуду необходимо мыть дезинфицирующими растворами или обрабатывать кипячением. В случае применения противником биологического оружия возможно возникновение значительного количества инфекционных заболеваний.

Основными формами борьбы с эпидемиями являются обсервация и карантин. Делается это в тех случаях, когда примененные возбудители болезней относятся к особо опасным (чума, холера и др.). Карантинный режим предусматривает полную изоляцию очага поражения от окружающего населения. Это наиболее эффективный способ противодействия распространению инфекционных заболеваний. На внешних границах зоны карантина устанавливается вооруженная охрана, выход людей, вывод животных и вывоз имущества запрещаются. Транзитный проезд транспорта через очаги поражения запрещается. Объекты экономики переходят на особый режим работы со строгим выполнением противоэпидемических требований. Рабочие смены разбиваются на отдельные группы как можно более малочисленные по составу. Контакт между ними сокращается до минимума. Питание и отдых рабочих и служащих организуются по группам в специально отведенных для этого помещениях. Работа учебных заведений, зрелищных учреждений, рынков и т.д. прекращается. Людям не разрешается без крайней необходимости выходить их своих квартир. Продукты питания, вода и предметы первой необходимости доставляются им специальными командами.

При выполнении срочных работ вне зданий люди должны быть обязательно в средствах индивидуальной защиты. Если установленный вид возбудителя не относится к группе особо опасных, вместо карантина применяется обсервация. Она предусматривает медицинское наблюдение за очагом поражения и проведение необходимых лечебно-профилактических мероприятий. Изоляционно-ограничительные меры при обсервации менее строгие: организуются дезинфекция, дезинсекция и дератизация.

Дезинфекция имеет целью обеззараживание объектов внешней среды, которые необходимы для нормальной деятельности и безопасного нахождения людей. Для дезинфекции применяются растворы хлорной извести и хлорамина, лизол, формалин, могут использоваться горячая вода (с мылом или содой) и пар.

Дезинсекция и дератизация-это мероприятия, связанные соответственно с уничтожением насекомых и истреблением грызунов, которые являются переносчиками инфекционных заболеваний. Для уничтожения насекомых применяют физические (кипячение, проглаживание накаленным утюгом и др.), химические (применение дезинсектирующих средств) и комбинированные способы.

Истребление грызунов в большинстве случаев проводят с помощью механических приспособлений (ловушек различных типов) и химических препаратов. После проведения дезинфекции, дезинсекции и дератизации проводится полная санитарная обработка лиц, принимавших участие в осуществлении названных мероприятий. При необходимости организуется санитарная обработка и остального населения.

Контрольные вопросы

1. Перечислите СИЗОД.
2. Перечислите СИЗ кожи.
3. Назовите порядок изготовления ВМП.
4. При каких опасностях используются индивидуальные средства защиты?
5. Что является основным средством защиты при угрозе применения ядерного оружия?
6. Что относится к основным средством защиты населения от биологического оружия?
7. Какие индивидуальные средства защиты применяются при химической угрозе?
8. Какие действия предполагает санитарная обработка?
9. В чем отличие дезинфекции от дезинсекции?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Косолапова Н.В. Основы безопасности жизнедеятельности: учебник / Н.В. Косолапова, Н.А. Прокопенко. – 3-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013. – 320 с.: ил.

2. Безопасности жизнедеятельности: учебник / Е.А. Арустамов. – 9-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013 с.: ис.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу ________________ С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

по дисциплине

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Специальность

Направление

15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

Авторы: Кузнецов А.М., Тетерев Н.А.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Безопасности горного производства	Горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой ________ *(подпись)*	Председатель ________ *(подпись)*
Елохин В.А.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 20.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современный человек живет в мире различного рода опасностей, т.е. явлений, процессов, объектов, постоянно угрожающих его здоровью и самой жизни. Не проходит и дня, чтобы газеты, радио и телевидение не принесли тревожные сообщения об очередной аварии, катастрофе, стихийном бедствии, социальном конфликте или криминальном происшествии, повлекших за собой гибель людей и громадный материальный ущерб.

По мнению специалистов, одной из причин создавшейся ситуации является недостаточный уровень образования – обучения и воспитания – человека в области обеспечения безопасной деятельности. Только постоянное формирование в людях разумного отношения к опасностям, пропаганда обязательности выполнения требований безопасности может гарантировать им нормальные условия жизни и деятельности.

В курсе БЖД излагаются теория и практика защиты человека от опасных и вредных факторов природного и антропогенного происхождения в сфере деятельности.

Данный курс предназначен для формирования у будущих специалистов сознательного и ответственного отношения к вопросам безопасности, для привития им теоретических знаний и практических навыков, необходимых для создания безопасных и безвредных условий деятельности в системе «человек – среда», проектирования новой безопасной техники и безопасных технологий, прогнозирования и принятия грамотных решений в условиях нормальных и чрезвычайных ситуаций.

В процессе изучения курса БЖД студенту предстоит решить следующие задачи: усвоить теоретические основы БЖД; ознакомиться с естественной системой защиты человека от опасностей; изучить систему искусственной защиты в условиях нормальных (штатных) и чрезвычайных (экстремальных) ситуаций; ознакомиться с проблемами заболеваемости и травматизма на производстве; изучить вопросы управления безопасностью деятельности.

Успешное изучение курса студентами возможно при наличии соответствующей учебной литературы. Предлагаемое вниманию студентов и преподавателей учебное пособие подготовлено в соответствии с учебной программой курса БЖД для студентов всех направлений и специальностей.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

В последующем разделе пособия приведена развернутая программа дисциплины «Безопасность жизнедеятельности». Она содержит названия разделов с указанием основных вопросов и разделов каждой темы. Каждая тема является основой вопросов на зачет. При чтении лекций по курсу преподаватель указывает те темы дисциплины, которые выносятся на самостоятельную проработку студентами. Для углубленного освоения темы рекомендуется дополнительная литература. При освоении указанных ниже тем рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы студента.

1. Ознакомьтесь со структурой темы.

2. По учебникам освойте каждый структурный элемент темы.

3. При необходимости используйте указанную дополнительную литературу. Консультацию по использованию дополнительной литературы Вы можете получить у преподавателя.

4. Ответьте на контрольные вопросы. При затруднениях в ответах на вопросы вернитесь к изучению рекомендованной литературы.

5. Законспектируйте материал. При этом конспект может быть написан в виде ответов на контрольные вопросы и упражнения.

При самостоятельной работе над указанными темами рекомендуется вести записи в конспектах, формируемых на лекционных занятиях по курсу, и в том порядке, в котором данные темы следуют по учебной программе.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Основные понятия и определения. Характеристика форм трудовой деятельности. Опасности среды обитания. Основные положения теории риска. Системный анализ безопасности. Принципы, методы и средства обеспечения безопасности.

ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЗАЩИТЫ ЧЕЛОВЕКА ОТ ОПАСНОСТЕЙ

Анатомо-физиологическая характеристика человека. Анализаторы человека. Защитные механизмы организма.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ

Гелиофизические и метеорологические факторы. Производственная пыль. Механические опасности. Опасности при эксплуатации сосудов, работающих под давлением. Механические колебания и волны. Электробезопасность. Электромагнитные излучения. Световой климат. Ионизирующие излучения. Световой климат. Ионизирующие излучения. Химические опасности. Биологические опасности. Психологические опасности. Экологические опасности. Социальные опасности. Санитарно-гигиенические требования к устройству и содержанию предприятий.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ

Общая характеристика чрезвычайных ситуаций. Стихийные бедствия. Аварии на особо опасных объектах экономики. Аварии на объектах горной промышленности и подземных геологоразведочных работ. Чрезвычайные ситуации, связанные с применением современных средств поражения. Прогнозирование и оценка обстановки при чрезвычайных ситуациях. Защита населения и территорий от чрезвычайных ситуаций. Устойчивость функционирования объектов экономики в чрезвычайных ситуациях. Ликвидация последствий чрезвычайных ситуаций. Единая государственная система предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций.

ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ И ТРАВМАТИЗМ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Заболеваемость. Травматизм. Методы анализа травматизма.

УПРАВЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Правовые основы обеспечения безопасности деятельности. Обязанности работодателя по обеспечению безопасных условий труда. Время отдыха. Подготовка работников к безопасному труду. Система управления охраной труда на предприятии. Экономические аспекты охраны труда.

СОЦИАЛЬНАЯ ЗАЩИТА РАБОТНИКОВ

НАДЗОР И КОНТРОЛЬ ЗА СОСТОЯНИЕМ ОХРАНЫ ТРУДА ОТВЕТСТВЕННОСТЬ ЗА НАРУШЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ ОХРАНЫ ТРУДА

• КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите основные термины теории безопасности деятельности, дайте их определения.
2. Охарактеризуйте основные формы трудовой деятельности.
3. Что понимают под опасностью среды обитания? Как классифицируют опасности?
4. Сформулируйте аксиому о потенциальной опасности деятельности.
5. В чем состоит идентификация (распознавание) опасности?
6. Что такое квантификация опасностей?
7. Назовите методы анализа безопасности деятельности.
8. Приведите примеры расчета производственного риска.
9. В чем заключается концепция приемлемого риска?
10. Что такое управление риском?
11. Охарактеризуйте системный анализ безопасности деятельности.
12. Перечислите принципы, методы и средства обеспечения безопасности.
13. Изложите сущность естественной системы защиты человека от опасностей.
14. Дайте анатомо-физиологическую характеристику человека.
15. Какова роль анализаторов человека в обеспечении безопасности его деятельности?
16. Опишите зрительный, слуховой и обонятельный анализаторы.
17. Опишите вестибулярный, кинестетический и кожный анализаторы.
18. Что понимают под защитными механизмами человеческого организма?
19. Охарактеризуйте действие гелиофизических и метеорологических факторов на человека.
20. Какое действие оказывают высокие и низкие температуры, повышенная и пониженная влажность на организм человека?
21. Как действуют на организм человека вредные газы и пары?
22. В чем заключается вредное действие производственной пыли на организм? Как ведется борьба с пылью?
23. Назовите средства индивидуальной защиты работающих от пыли.
24. Как классифицируют механические опасности?
25. Перечислите методы и средства защиты от механических опасностей.
26. Укажите, как обеспечивается безопасность при эксплуатации сосудов, работающих под давлением.
27. Охарактеризуйте действие инфразвука и ультразвука на организм и меры защиты от них.
28. Объясните действие шума на организм. Перечислите методы и средства коллективной и индивидуальной защиты от шума.

29. Как борются с вибрацией на горных предприятиях?
30. Объясните действие электрического тока на организм человека.
31. Укажите опасности, связанные с применением электрического тока на горных предприятиях.
32. Назовите основные меры безопасности при эксплуатации электроустановок.
33. Перечислите средства индивидуальной защиты от поражения электрическим током.
34. В чем состоит молниезащита зданий и сооружений?
35. Назовите способы защиты работающих от воздействия электрических и электромагнитных полей.
36. Укажите меры защиты от инфракрасного, ультрафиолетового и лазерного излучений.
37. Как влияет освещение на условия труда? Перечислите виды освещения.
38. Укажите средства нормализации освещения производственных помещений, рабочих мест и горных выработок.
39. Охарактеризуйте виды ионизирующих излучений.
40. Назовите общие принципы защиты от ионизирующих излучений.
41. Охарактеризуйте методы и средства защиты от ионизирующих излучений.
42. Перечислите химические опасности (вредные вещества) и укажите меры защиты от них.
43. Назовите биологические опасности и меры защиты от них.
44. Что понимают под психологическими опасностями?
45. Какие естественные факторы воздействуют на биосферу Земли?
46. В чем заключается антропогенное воздействие на природу?
47. Назовите методы и средства обеспечения экологической безопасности на горных предприятиях.
48. Какие санитарно-гигиенические требования предъявляются к устройству и содержанию предприятий?
49. Что такое чрезвычайная ситуация?
50. Перечислите признаки, характеризующие чрезвычайные ситуации.
51. Как классифицируют чрезвычайные ситуации по причинам возникновения?
52. Охарактеризуйте стихийные бедствия. Укажите мероприятия по предупреждению и ликвидации последствий стихийных бедствий.
53. Перечислите виды аварий на особо опасных объектах экономики (народного хозяйства). В чем заключается профилактика возникновения аварий на таких объектах?
54. Какие аварии происходят на объектах горной промышленности? Укажите методы профилактики и ликвидации таких аварий.
55. Охарактеризуйте чрезвычайные ситуации, связанные с применением современных средств поражения.

56. Перечислите основные принципы и способы защиты населения от чрезвычайных ситуаций.
57. Какие действия надлежит выполнить населению при стихийных бедствиях и авариях?
58. Укажите действия населения при возникновении угрозы нападения противника.
59. Какие действия должно выполнять население в очагах поражения и после выхода из них?
60. Какие факторы влияют на устойчивость функционирования объектов экономики?
61. Перечислите основные мероприятия по повышению устойчивости функционирования объектов экономики.
62. Назовите принципы организации и проведения аварийно-спасательных и других неотложных работ (АСиДНР) в чрезвычайных ситуациях мирного и военного времени.
63. Какие приемы и способы проведения АСиДНР используются в очагах поражения?
64. Перечислите меры безопасности при проведении АСиДНР.
65. По каким признакам классифицируют травмы и несчастные случаи на производстве?
66. Перечислите причины травматизма.
67. Укажите причины несчастных случаев на шахтах.
68. Опишите порядок расследования и учета несчастных случаев на производстве.
69. В чем заключается профилактика травматизма?
70. Какие методы используются при анализе травматизма?
71. Как расследуются профессиональные заболевания?
72. Кто назначает комиссию по расследованию профессионального заболевания?
73. Каким образом определяется окончательный диагноз острого профессионального заболевания?
74. Назовите меры профилактики профессиональных заболеваний.
75. Назовите меры профилактики производственного травматизма.
76. Изложите правовые основы обеспечения безопасности деятельности.
77. Какие обязанности возложены на администрацию предприятия по обеспечению охраны труда?
78. Перечислите виды подготовки работников к безопасному труду.
79. Что понимают под системой управления охраной труда на предприятиях?
80. Назовите основные нормативные документы, обеспечивающие безопасность деятельности.
81. Какова продолжительность ежедневной работы?
82. Какова профессиональная подготовка работников к безопасному труду?

83. Опишите систему управления охраной труда.
84. Назовите фонды охраны труда.
85. Чем обусловливается эффективность мероприятий по охране труда?
86. Опишите медицинское обслуживание работников.
87. Какие существуют льготы и компенсации за вредные и опасные условия труда?
88. Поясните суть обязательного социального страхования от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний.
89. Назовите обязательные принципы обязательного страхования от несчастных случаев на производстве и профзаболеваний.
90. Кто имеет право на получение страховых выплат в случае смерти застрахованного?
91. Как осуществляются страховые выплаты по социальному страхованию?
92. Как начисляется пособие по временной нетрудоспособности?
93. Каков порядок привлечения к дисциплинарной ответственности?
94. Кто может привлекать к дисциплинарной ответственности.
95. Кто может привлекать к административной ответственности?
96. В каких случаях привлекают к уголовной ответственности?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В среде обитания человека постоянно присутствуют естественные, техногенные и антропогенные опасности.

Полностью устранить негативное влияние естественных опасностей человечеству до настоящего времени не удается. Реальные успехи в защите человека от стихийных явлений сводятся к определению наиболее вероятных зон их действия и ликвидации возникающих последствий.

Мир техногенных опасностей вполне познаваем, и у человека есть достаточно способов и средств для защиты.

Антропогенные опасности во многом обусловлены недостаточным вниманием человека к проблеме безопасности, склонностью к риску и пренебрежению опасностью. Часто это связано с ограниченными знаниями человека о мире опасностей и негативных последствиях их проявления. Воздействие антропогенных опасностей может быть сведено к минимуму за счет обучения населения и работающих основам безопасности жизнедеятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Безопасность жизнедеятельности [Текст]: учебное пособие / В.В. Токмаков, Ю.Ф. Килин, А.М. Кузнецов; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский государственный горный университет. - 4-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург: УГГУ, 2018. - 272 с.

Безопасность жизнедеятельности: учебное пособие / В.А. Подюков, В.В. Токмаков, В.М. Куликов ; под ред. В.В. Токмакова ; Уральский государственный горный уни-верситет. - 3-е изд., испр. и доп. - Екатеринбург : УГГУ, 2007. - 314 с.

Белов С. В. Безопасность жизнедеятельности и защита окружающей среды (техносферная безопасность): учебник. 5-е изд., исправл. и доп. – М.: Изд-во «Юрай», 2015. – 702с.

Безопасность жизнедеятельности: энциклопедический словарь / под ред. проф. Русака О. Н. – СПб.: Инф-изд. агент «Лик», 2003.

Безопасность жизнедеятельности: Учебник для вузов / К. З. Ушаков, Н. О. Каледина, Б. Ф. Кирин, М. А. Сребный / под ред. К. З. Ушакова. – М.: Изд-во МГГУ, 2000. – 430 с.

Воронов Е. Т., Резник Ю. Н., Бондарь И. А. Безопасность жизнедеятельности. Теоретические основы БЖД. Охрана труда: учебное пособие. – Чита: Изд-во ЧитГУ, 2010. – 390 с.

Занько Н. К., Малаян К. Р., Русак О. Н. Безопасность жизнедеятельности: учебник. – М.: Лань, 2012. – 672 с.

Субботин А. И. Управление безопасностью труда: учебное пособие. – М.: Изд-во МГГУ, 2014. – 266 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
____________С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Б1.О.05.01 ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Физической культуры	Горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой ____________	Председатель ____________
(подпись)	*(подпись)*
Сидоров С.Г.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 28.08.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен 1 вариант контрольной работы.

Содержание контрольной работы

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращением, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни

		Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости

	повышению работоспособности, потому что:	Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения. Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) ровной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения

		Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма
21	Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимость управлять динамикой работоспособности занимающихся. В) выделение частей в уроке требует Министерство образовании России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышение частоты шагов. 6. Прыжки. 7.Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4 В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4 Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2,1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2,3,1,4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4,2 ,3, 1

27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6.Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленом суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное действие

		Г) предпочтения учителя
42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине
ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа ________

Преподаватель: Петров Петр Петрович

Екатеринбург
2024

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
________________С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Б1.О.05.01 ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Физической культуры	Горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой ________	Председатель ________
(подпись)	*(подпись)*
Сидоров С.Г.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 28.08.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Содержание

Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

Требования к оформлению теста

Задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в тесте.

Выполненный тест необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если тест выполнен без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен, тест, вопросы для проведения опроса.

Содержание теста

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращением, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность

		В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.

		Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) ровной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма

21	Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимость управлять динамикой работоспособности занимающихся. В) выделение частей в уроке требует Министерство образовании России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышение частоты шагов. 6. Прыжки. 7.Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4 В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4 Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2,1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2,3,1,4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4,2 ,3, 1
27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы

		Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходит к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6.Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленом суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное действие Г) предпочтения учителя

42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Критерии оценивания теста

Оценка за тест определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат теста

Тест оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПРОСА

1. Определение понятий в области физической культуры
2. Понятие «здоровье» и основные его компоненты
3. Факторы, определяющие здоровье человека.
4. Образ жизни и его составляющие.
5. Разумное чередование труда и отдыха, как компонент ЗОЖ.
6. Рациональное питание и ЗОЖ.
7. Отказ от вредных привычек и соблюдение правил личной и общественной гигиены.
8. Двигательная активность — как компонент ЗОЖ.
9. Выполнение мероприятий по закаливанию организма.
10. Физическое самовоспитание и самосовершенствование как необходимое условие реализации мероприятий ЗОЖ.
11. Врачебный контроль как обязательная процедура для занимающихся физической культурой.
12. Самоконтроль — необходимая форма контроля человека за физическим состоянием.
13. Методика самоконтроля физического развития.
14. Самостоятельное измерение артериального давления и частоты сердечных сокращений.
15. Проведение функциональных проб для оценки деятельности сердечно-сосудистой системы.
16. Проведение функциональных проб для оценки деятельности дыхательной системы.
17. Самоконтроль уровня развития физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости, силы и выносливости
18. Ведение дневника самоконтроля.
19. Цель и задачи физического воспитания в вузе.
20. Специфические функции физической культуры.
21. Социальная роль и значение спорта.
22. Этапы становления физической культуры личности студента.
23. Понятия физическая культура, физическое воспитание, физическое развитие, физическое совершенство.
24. Реабилитационная физическая культура, виды, краткая характеристика.
25. Разделы учебной программы дисциплины «Физическая культура».
26. Комплектование учебных отделений студентов для организации и проведения занятий по физическому воспитанию.

27. Преимущества спортивно-ориентированной программы дисциплины «Физическая культура» для студентов.
28. Особенности комплектования студентов с различным характером заболеваний в специальном учебном отделении.
29. Зачетные требования по учебной дисциплине «Физическая культура».
30. Формирование двигательного навыка.
31. Устойчивость организма к воздействию неблагоприятных факторов.
32. Мотивация и направленность самостоятельных занятий.
33. Утренняя гигиеническая гимнастика.
34. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
35. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
36. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
37. Особенности самостоятельных занятий женщин.
38. Мотивация и направленность самостоятельных занятий. Утренняя гигиеническая гимнастика.
39. Физические упражнения в течение учебного дня: физкультминутки, физкультпаузы.
40. Самостоятельные тренировочные занятия: структура, требования к организации и проведению.
41. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
42. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
43. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
44. Особенности самостоятельных занятий женщин.
45. Роль физической культуры в профессиональной деятельности бакалавра и специалиста.
46. Производственная физическая культура, ее цели и задачи.
47. Методические основы производственной физической культуры.
48. Производственная физическая культура в рабочее время.
49. Физическая культура и спорт в свободное время.
50. Профилактика профессиональных заболеваний и травматизма средствами физической культуры.
51. Понятие ППФП, её цель, задачи. Прикладные знания, умения и навыки.
52. Прикладные психические качества.
53. Прикладные специальные качества.
54. Факторы, определяющие содержание ППФП: формы труда, условия труда.
55. Факторы, определяющие содержание ППФП: характер труда, режим труда и отдыха.
56. Дополнительные факторы, определяющие содержание ППФП.
57. Средства ППФП.
58. Организация и формы ППФП в вузе.
59. Понятия общей и специальной физической подготовки.
60. Отличия понятий спортивная подготовка и спортивная тренировка.
61. Стороны подготовки спортсмена.
62. Средства спортивной подготовки.
63. Структура отдельного тренировочного занятия.
64. Роль подготовительной части занятия в тренировочном процессе.
65. Понятие «физическая нагрузка», эффект ее воздействия на организм.
66. Внешние признаки утомления.
67. Виды и параметры физических нагрузок.
68. Интенсивность физических нагрузок.
69. Психофизиологическая характеристика умственной деятельности.
70. Работоспособность: понятие, факторы, периоды
71. Физические упражнения в течение учебного дня для поддержания работоспособности.
72. Бег как самое эффективное средство восстановления и повышения работоспособности.
73. Плавание и работоспособность.
74. Методические принципы физического воспитания, сущность и значение.
75. Принципы сознательности и активности, наглядности в процессе физического воспитания.
76. Принципы доступности и индивидуализации, систематичности и динамичности.
77. Средства физической культуры.
78. Общепедагогические методы физического воспитания.
79. Методы обучения технике двигательного действия.
80. Этапы обучения двигательного действия.
81. Методы развития физических качеств: равномерный, повторный, интервальный.
82. Метод круговой тренировки, игровой и соревновательный методы.
83. Сила как физическое качество, общая характеристика силовых упражнений.
84. Методы развития силы.
85. Выносливость — виды выносливости, особенности развития выносливости.
86. Развитие физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости.
87. Понятие «спорт». Его принципиальное отличие от других видов занятий физическими упражнениями.
88. Массовый спорт: понятие, цель, задачи.
89. Спорт высших достижений: понятие, цель, задачи.

90. Студенческий спорт, его организационные особенности.
91. Студенческие спортивные соревнования.
92. Студенческие спортивные организации.
93. Всероссийский физкультурно-спортивный комплекс «ГТО» (Готов к труду и обороне).

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенного теста необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данного теста. Тесты, тесты являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
________________С. А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Б1.О.05.02 ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Физической культуры	Горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой ________	Председатель ________
(подпись)	*(подпись)*
Сидоров С.Г.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 28.08.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Элективные курсы по физической культуре и спорту» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «элективные курсы по физической культуре и спорту» представлено 2 варианта контрольной работы.

Содержание контрольной работы

Вопросы для групповой дискуссии

1 .Что можно отнести к средствам физического воспитания?
2. Влияние климатогеографического фактора на здоровье и работоспособность человека
3. Чем отличается спорт от физической культуры?
4. Что мы относим к материальным ценностям физической культуры, а что – к духовным?
5. В чем состоит взаимосвязь физической и умственной деятельности человека?
6. Причины возникновения таких явлений как гипокинезия и гиподинамия
7. Для чего нужна адаптивная физическая культура?
8. При выборе вида спорта на какие аспекты и характеристики необходимо обратить основное внимание.

Контрольная работа №1

Вариант 1

ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. Часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности – это:

а) физическая культура; б) спорт; в) туризм; г) физическое развитие.

2. Физическое воспитание – это:

а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) приобщение человека к физической культуре;

в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
г) процесс формирования определенных физических и психических качеств.

3. Чем спорт отличается от физической культуры:

а) наличием специального оборудования; б) присутствием зрителей; в) наличием соревновательного момента; г) большой физической нагрузкой.

4 Какой из ниже перечисленных принципов не относится к основным принципам физического воспитания:

а) сознательности и активности; б) наглядности; в) последовательности;
г) систематичности;

5 Под физическим развитием понимается:

а) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни;
б) размеры мускулатуры, форма тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность;
в) процесс совершенствования физических качеств, при выполнении физических упражнений;
г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

а) естественное состояние организма без болезней и недомоганий;
б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
г) все перечисленное.

2. Состояние здоровья обусловлено:

а) резервными возможностями организма; б) образом жизни;
в) уровнем здравоохранения; г) отсутствием болезней.

3. Что не относятся к внешним факторам, влияющим на человека:

а) природные факторы; б) факторы социальной среды; в) генетические факторы;
г) биологические факторы.

4. Сколько времени необходимо нормальному человеку для ночного сна:

а) 5 – 6 часов; б) 6 – 7 часов; в) 7 – 8 часов; г) 8 – 9 часов.

5. К активному отдыху относится:

а) сон; б) отдых сидя; в) занятия двигательной деятельностью; г) умственная деятельность.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическими упражнениями называются:

а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;
б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Занятия физическими упражнениями отличаются от трудовых действий:

а) интенсивностью; б) задачами; в) местом проведения; г) все ответы верны.

3. Физические упражнения являются:

а) принципом физического воспитания; б) методом физического воспитания;
в) средством физического воспитания; г) функцией физического воспитания.

4. Что не относится к методам физического воспитания:

а) игровой; б) регламентированного упражнения; в) словесный и сенсорный;
г) самостоятельный.

5. Метод в физической культуре – это

а) основное положение, определяющее содержание учебного процесса по физической культуре;
б) руководящее положение, раскрывающее принципы физической культуры;
в) конкретная причина, заставляющая человека выполнять физические упражнения;
г) способ применения физических упражнений.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Физическая подготовка – это:

а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;

г) процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

2. К основным физическим качествам относятся:

а) рост, вес, объем бицепсов, становая сила; б) бег, прыжки, метания, лазания;
в) сила, выносливость, быстрота, ловкость, гибкость; г) взрывная сила, прыгучесть, меткость.

3. Различают гибкость:

а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
г) простую и сложную.

4. Какие виды спорта развивают преимущественно выносливость:

а) спортивные единоборства; б) циклические; в) спортивные игры; г) ациклические.

5. Скоростно-силовые качества преимущественно развиваются:

а) в тяжелой атлетике; б) в акробатике; в) в конькобежном спорте; г) в лыжном спорте.

Вариант 2

ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. На что преимущественно влияют занятия по физической культуре:

а) на интеллектуальные способности;
б) на удовлетворение социальных потребностей;
в) на воспитание лидерских качеств;
г) на полноценное физическое развитие.

2. Физическая культура – это:

а) часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности;
б) часть наука о природе двигательной деятельности человека
в) вид воспитательного процесса, специфика которого заключена в обучении двигательным актам и управлением развитием и совершенствованием физических качеств человека;
г) процесс физического образования и воспитания, выражающий высокую степень развития индивидуальных физических способностей.

3. Что не относиться к компонентам физической культуры:

а) физическое развитие; б) спорт высших достижений; в) оздоровительно-реабилитационная физическая культура;
г) гигиеническая физическая культура.

4. Выбрать правильное определение термина «Физическое развитие»:

а) физическое развитие – это педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) физическое развитие – это приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
в) физическое развитие – это биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
г) физическое развитие – это процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

5. Теоретический материал учебного предмета «Физическая культура и спорт» в высших учебных заведениях включает в себя:

а) фундаментальные знания общетеоретического характера;
б) инструктивно-методические знания;
в) знания о правилах выполнения двигательных действий;
г) все вышеперечисленное.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Что понимается под закаливанием:

а) купание в холодной воде и хождение босиком;
б) приспособление организма к воздействиям внешней среды;
в) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми;
г) укрепление здоровья.

2. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

а) естественное состояние организма без болезней и недомоганий;
б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
г) все перечисленное.

3. Какое понятие не относится к двигательной активности человека:

а) гипоксия; б) гиподинамия; в) гипокинезия; г) гипердинамия.

4. Какая из перечисленных функций не относится к функции кожи:

а) защита внутренней среды организма; б) теплорегуляция; в) выделение из организма продуктов обмена веществ; г) звукоизоляция.

5. Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому что:

а) обеспечивает ритмичность работы организма;
б) позволяет правильно планировать дела в течение дня;
в) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня;
г) позволяет избегать неоправданных физических напряжений.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическое упражнение - это:

а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;
б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Положительное влияние физических упражнений на развитие функциональных возможностей организма будет зависеть:

а) от технической и физической подготовленности занимающихся;
б) от особенностей реакций систем организма в ответ на выполняемые упражнения;
г) от состояния здоровья и самочувствия занимающихся во время выполнения упражнений;
г) от величины физической нагрузки и степени напряжения в работе определенных мышечных групп.

3. Что не относиться к средствам физического воспитания:

а) физические упражнения;
б) подвижные игры;
в) соревнования;
в) спортивные игры.

4. Что относится к методическим принципам физического воспитания:

а) сознательность и активность;
б) наглядность и доступность;
в) систематичность и динамичность;
г) все вышеперечисленное.

5. Регулярные занятия физическими упражнениями способствует повышению работоспособности, потому что:

а) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости;
б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации;
в) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения;
г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнять больший объем физической работы за отведенный отрезок времени.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Степень владения техникой действий, при которой повышена концентрация внимания на составные операции (части), наблюдается нестабильное решение двигательной задачи – это

а) двигательное умение; в) массовый спорт; в) двигательный навык;
г) спорт высших достижений.

2. Для воспитания быстроты используются:

а) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции;
б) подвижные и спортивные игры;
в) упражнения на быстроту реакции и частоту движений;
г) двигательные упражнения, выполняемые с максимальной скоростью.

3. Различают два вида выносливости:

а) абсолютная и относительная; б) общая и специальная; в) активная и пассивная;
г) динамическую и статическую.

4. Процесс воспитания физических качеств, обеспечивающих преимущественное развитие тех двигательных способностей, которые необходимы для конкретной спортивной дисциплины - это

а) общая физическая подготовка; б) двигательное умение; в) специальная физическая подготовка; г) двигательный навык.

5. Различают силу:

а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
г) статическую и динамическую.

Контрольная работа №2

Вариант 1

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1. В комплекс утренней гимнастики следует включать:

а) упражнения с отягощением; б) упражнения статического характера;
в) упражнения на гибкость и дыхательные упражнения; г) упражнения на выносливость.

2. К объективным показателям самоконтроля относится:

а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.

3. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает:

а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.

4. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять:

а) после приема пищи; б) после сна натощак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1. Регулярные занятия доступным видом спорта, участия в соревнованиях с целью укрепления здоровья, коррекции физического развития и телосложения, активного отдыха, достижение физического совершенствования – это:

а) спорт высших достижений;
б) лечебная физическая культура;
в) профессионально-прикладная физическая культура;
в) массовый спорт.

2. Какой вид спорта наиболее эффективно развивает гибкость и ловкость:

а) фехтование;
б) баскетбол;
в) фигурное катание;
г) художественная гимнастика.

3. Количество игроков одной команды в волейболе на площадке:

а) 7; б) 6; в) 5; г) 8.

4. Как осуществляется контроль за влиянием физических нагрузок на организм во время занятий физическими упражнениями:

а) по частоте дыхания;
б) по частоте сердечно-сосудистых сокращений;
в) по объему выполненной работы.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Степень владения техникой действия, при которой управление движением происходит автоматически, и действия отличаются надежностью – это:

а) двигательное умение;
б) массовый спорт;
в) двигательный навык;
г) спорт высших достижений.

2. Как дозируются упражнения на гибкость:

а) до появления пота;
б) до снижения амплитуды движений;
в) по 12-16 циклов движений;
г) до появления болевых ощущений.

3. При воспитании силы применяются специальные упражнения с отягощениями. Их отличительная особенность заключается в том, что:

а) в качестве отягощения используется собственный вес человека;
б) они выполняются до утомления;
в) они вызывают значительное напряжение мышц;
г) они выполняются медленно.

4. В каком из перечисленных видов спорта преимущественно развивается выносливость:

а) в фигурном катании;
б) в пауэрлифтинге;
в) в художественной гимнастике;
г) в лыжном спорте.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:

а) обеспечивают усиленную работу мышц;

б) обеспечивают выполнение большого объема мышечной работы с разной интенсивностью;
в) обеспечивают усиленную работу систем дыхания и кровообращения;
г) обеспечивают усиленную работу системы энергообеспечения.

2. Меры профилактики переутомления:

а) посидеть 3-4 минуты;
б) сменить вид деятельности;
в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;
г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

3. При нагрузке средней интенсивности частота пульса достигает:

а) 100 – 130 уд/мин;
б) 130 – 150 уд/мин;
в) 150 – 170 уд/мин;
г) более 170 уд/мин

4. Что называется «разминкой», проводимой в подготовительной части занятия:

а) чередование легких и трудных общеразвивающих упражнений;
б) чередование беговых и общеразвивающих упражнений;
в) подготовка организма к предстоящей работе;
г) чередование беговых упражнений и ходьбы.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

Специально направленное и избирательное использование средств физической культуры и спорта для подготовки человека к определенной профессиональной деятельности – это:
а) спорт высших достижений;
б) лечебная физическая культура;
в) производственная физическая культура;
г) массовый спорт.

1. ППФП строится на основе и в единстве с:

а) физической подготовкой; б) технической подготовкой; в) тактической подготовкой;
г) психологической подготовкой.

3. Какая из нижеперечисленных задач не является задачей ППФП:

а) развитие физических способностей, специфических для данной профессии;
б) формирование профессионально-прикладных сенсорных умений и навыков;
в) сообщение специальных знаний для успешного освоения практических навыков трудовой деятельности;
г) повышение функциональной устойчивости организма к неблагоприятному воздействию факторов окружающей среды.

4. Что не является формой занятий по ППФП:

а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия.

Вариант 2

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1. Определение повседневных изменений в подготовке занимающихся – это:

а) педагогический поэтапный контроль;
б) педагогический текущий контроль;
в) педагогический оперативный контроль;
г) педагогический двигательный контроль.

1. В комплекс утренней гимнастики не рекомендуется включать:

а) упражнения на гибкость;
б) дыхательные упражнения;
в) упражнения с отягощением;
г) упражнения для всех групп мышц.

2. Самостоятельные тренировочные занятия не рекомендуется выполнять:

а) за час до приема пищи;
б) после сна натощак;
в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда;
г) за 3 часа до отхода ко сну.

4. Дневник самоконтроля нужен для:

а) коррекции содержания и методики занятий физическими упражнениями;
б) контроля родителей;
в) лично спортсмену;
г) лично тренеру.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1. К циклическим видам спорта не относится:
а) волейбол;
б) стайерский бег;
в) плавание;
г) спортивная ходьба.
2. Какой из перечисленных видов спорта преимущественно развивает координацию движений:
а) спортивная гимнастика;
б) лыжный спорт;
в) триатлон;
г) атлетическая гимнастика.
3. Систематическая плановая многолетняя подготовка и участие в соревнованиях в избранном виде спорта с целью достижения максимальных спортивных результатов – это:
а) спорт высших достижений;
б) лечебная физическая культура;
в) профессионально-прикладная физическая культура;
в) массовый спорт.
4. Какие упражнения включаются в разминку почти во всех видах спорта:
а) упражнения на развитие выносливости;
б) упражнения на развитие гибкости и координации движений;
в) бег и общеразвивающие упражнения.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.
1. Какая из представленных способностей не относится к группе координационных:
а) способность сохранять равновесие;
б) способность точно дозировать величину мышечных усилий;
в) способность быстро реагировать на стартовый сигнал;
г) способность точно воспроизводить движения в пространстве.
2. Почему на занятиях по «физической культуре» выделяют подготовительную, основную и заключительную части:
а) так удобнее распределять различные по характеру упражнения;
б) выделение частей занятий связано с необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся;
в) выделение частей в занятии требует Министерство науки и образования;
г) перед занятием, как правило, ставятся 3 задачи, и каждая часть предназначена для них.
3. Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:
а) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий;
б) степень преодолеваемых при их выполнении трудностей;
в) утомлением, возникающим в результате их выполнения;
г) частотой сердечных сокращений.
4. Назовите количество игроков на волейбольной площадке:
а) 4; б) 5; в) 6; г) 7.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.
1. К объективным показателям самоконтроля относится:
а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.
2. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает:
а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.
3. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять:
а) после приема пищи; б) после сна натощак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.
4. Меры профилактики переутомления:
а) посидеть 3-4 минуты;
б) сменить вид деятельности;
в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;
г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.
1. Система методически обоснованных физических упражнений, физкультурно-оздоровительных и спортивных мероприятий, направленных на повышение и сохранение устойчивой и профессиональной дееспособности – это:
а) физкультурная пауза;
б) производственная физическая культура;
в) спорт высших достижений;
г) массовый спорт.

2. Профессионально-прикладная физическая подготовка - это
а) специализированный вид физического воспитания, осуществляемый в соответствии с особенностями и требованиями данной профессии;
б) система профессиональных мероприятий, осуществляемая в соответствии с особенностями данной профессии;
в) процесс формирования специализированных знаний, умений и навыков;
г) целенаправленное воздействие на развитие физических качеств человека посредством нормированных нагрузок.
3. Какой вид спорта наиболее эффективно развивает координационные способности монтажников-высотников:
а) фехтование; б) баскетбол; в) мото-спорт; г) гимнастика.
4. Что не является формой занятий по ППФП:
а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия.

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 40 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

20-40 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-19 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа ________

Преподаватель: Петров Петр Петрович

Екатеринбург
2024

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
________________________С. А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Б1.О.06 РУССКИЙ ЯЗЫК И ДЕЛОВЫЕ КОММУНИКАЦИИ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией
Иностранных языков и деловой коммуникации	Горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой ________ *(подпись)*	Председатель ________ *(подпись)*
Юсупова Л. Г.	Осипов П. А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 19.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Автор: Меленскова Е. С., канд. филол. наук, доцент

Методические материалы дисциплины согласованы с выпускающей кафедрой **технической механики**

Заведующий кафедрой ____________________________ __**Е. Б. Волков**___

Подпись *И. О. Фамилия*

Методические рекомендации к практическим занятиям

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе лекций, ознакомления с учебной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют более качественному усвоению знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы.

Приступая к подготовке к практическому занятию необходимо изучить соответствующие конспекты лекций по заданной теме, главы учебников или учебных пособий, разобрать примеры, ознакомиться с дополнительной литературой (например, словарями). Конспектирование дополнительных источников также способствует более плодотворному усвоению учебного материала. Следует обращать внимание на основные понятия и классификации, актуальные для темы практического занятия.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студента. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения и проследить их логику. Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Все это находит свое отражение в процессе выполнения итогового зачетного теста.

Очевидны три структурные части практического занятия: предваряющая (подготовка к занятию), непосредственно само практического занятия (обсуждение вопросов темы в группе, выполнение упражнений по теме) и завершающая часть (последующая работа студентов по устранению обнаружившихся пробелов). Не только само практическое занятие, но и предваряющая, и заключающая части его являются необходимыми звеньями целостной системы усвоения вынесенной на обсуждение темы.

Перед очередным практическим занятием целесообразно выполнить все задания, предназначенные для самостоятельного рассмотрения, изучить лекцию, соответствующую теме практического занятия. В процессе подготовки к практическому занятию закрепляются и уточняются уже известные и осваиваются новые знания. Столкнувшись в ходе подготовки с недостаточно понятными моментами темы, необходимо найти ответы самостоятельно или зафиксировать свои вопросы для постановки и уяснения их на самом практическом занятии.

В начале занятия следует задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, поскольку всегда сначала студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

В ходе практического занятия каждый должен опираться на свои конспекты, сделанные на лекции или по учебникам и учебным пособиям, на самостоятельно выполненные упражнения по данной теме.

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь.

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе прослушивания и запоминания лекционного материала, ознакомления с учебной и научной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют получению наиболее качественных знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы. Планы практических занятий состоят из отдельных тем, расположенных в соответствии с рабочей программой изучаемой дисциплины. Каждая тема включает следующие элементы:

- цель проведения занятия;
- теоретические вопросы, необходимые для усвоения темы;
- задания;
- список литературы по теме для подготовки к практическому занятию.

Работа на практических занятиях направлена на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемой дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений (например, аналитических).

В ходе занятий у студентов формируются практические умения и навыки, отраженные в РПД.

Методические материалы к практическим занятиям

ТЕМА 1. СЛОВАРИ И СПРАВОЧНИКИ ПО КУЛЬТУРЕ РЕЧИ. СИСТЕМА СЛОВАРНЫХ ПОМЕТ

Цель – вспомнить классификацию словарей и проверить у студентов умение работать с ними (лексикографическая грамотность).

Основные понятия темы:

Лексикография – раздел науки о языке, занимающийся теорией и практикой составления словарей.
Энциклопедический словарь – книга, содержащая описание научных понятий и терминов, исторических событий, характеристику персоналий из разных областей или определенной области знания.
Лингвистический словарь – книга, содержащая собрание слов (морфем, фразеологизмов и т. д.), расположенных по определённому принципу (как правило, по алфавиту), и дающая сведения об их значениях, употреблении, происхождении, переводе на другой язык и т. п.
Словарная статья – отдельный текст, посвященный языковой единице (слову, морфеме и т. п.) или их группе (лексической группе, гнезду слов и т. п.).
Помета – применяемое в словарях сокращенное указание на какие-либо характерные признаки слова или его употребления.

Задание 1. *Прочитайте и сравните словарные статьи, взятые из разных словарей. Найдите общую и различающую их дополнительную информацию. Объясните, чем вызвано различие.*

ФАЗА – **1.** В геохимии: совокупность однородных частей системы, одинаковых по термодинамическим свойствам (тем, которые не зависят от количества вещества) и отграниченных от других частей поверхностью раздела. В природных процессах минералообразования могут принимать участие газовая Ф., жидкие Ф. и твердые Ф. – металлы. Системы, состоящие из одной Ф., называются однофазными, или гомогенными (напр., раствор различных солей в воде; кристалл кварца без включений; мономинеральная горная порода); состоящие из нескольких Ф. – многофазными, или гетерогенными (напр., раствор вместе с твердым осадком; кристалл кварца с газово-жидким включением; полиминеральная порода). **2.** В исторической геологии: термин, иногда употребляющийся для обозначения времени, соответствующего длительности накопления отложений, составляющих зону как часть яруса. Термин был условно принят в этом значении VIII сессией МГК в Париже в 1900 г., но не стал общепринятым. При изучении четвертичного периода иногда фазой называют время каждого отдельного оледенения и промежутков между ними (*Геологический толковый словарь*[1]).

ФÁЗА, -ы, *ж.* [нем. Phase < греч. phasis появление (о небесных светилах)]. **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н., а также само положение, форма чего-н. в данный момент; то же, что фазис. *Новая ф. в развитии общества. Луна в первой фазе.* **2.**

[1] Геологический толковый словарь [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.edudic.ru/geo/

физ. Величина, характеризующая состояние какого-н. процесса в каждый момент времени. *Ф. колебания маятника. Газообразная ф. вещества.* **Фа́зовый** – относящийся к фазе (в 1-м и 2-м знач.), фазам. **3.** *эл.* Отдельная группа обмоток генератора. **Фа́зный** – относящийся к фазе, фазам. (Крысин Л. П. Толковый словарь иноязычных слов. М., 2001. С. 810).

ФА́ЗА, -ы, *ж.* **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н. (напр. положения планеты, формы или состояния вещества, периодического явления, общественного процесса), а также само положение, форма в этот момент (книжн.). *Первая ф. Луны. Жидкая ф. Газообразная ф. Ф. колебания маятника. Вступить в новую ф. развития.* **2.** Отдельная группа обмоток генератора (спец.). || *прил.* **фа́зовый**, -ая, -ое (к 1 знач.) *и* **фа́зный**, -ая, -ое (ко 2 знач.). ♦ **Фазовые глаголы** – в лингвистике: глаголы со значением начала, продолжения или окончания действия. (Ожегов С. И. и Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка. М., 2005. С. 847).

Задание 2. *Познакомьтесь с типами помет, используемых в толковых словарях. Объясните значение всех помет, приведенных в качестве примера.*

ТИПЫ ПОМЕТ ТОЛКОВОГО СЛОВАРЯ

Типы помет	Примеры помет	Значение отсутствия помет
1. Помета, указывающая на принадлежность к функциональному стилю	*науч., газет., публиц., оф.-дел., разг., книжн.* и др.	Слово межстилевое
2. Помета, указывающая на сферу употребления слова	*обл., прост., жарг., спец.* и др.	Слово общеупотребительное
3. Помета, указывающая на принадлежность к активному / пассивному запасу	*устар., ист., арх., нов.* и др.	Слово принадлежит к активному запасу
4. Помета, указывающая на эмоционально-экспрессивную окраску слова	*ласк., ирон., шутл., унич., бран., пренебр., высок., неодобр.* и др.	Слово нейтральное

Задание 3. *Прочитайте словарные статьи, извлеченные из толкового словаря современного русского языка. Укажите пометы и объясните, что они означают.*

Абориге́н, -а, *м.* (книжн.) – коренной житель страны, местности. || *ж.* **абориге́нка** (разг.)

Грамоте́й, -я, *м.* (устар. и ирон.) – грамотный человек.

Деяние, -я, *ср.* (высок. и спец.) – действие, поступок, свершение.

Жена́тик, -а, *м.* (прост. шутл.) – женатый человек (обычно о молодожене).

Иждиве́нчество, -а, *ср.* (неодобр.) – стремление во всем рассчитывать не на свои силы, а на помощь других, вообще жить за чужой счет.

Карапу́з, -а, *м.* (разг. шутл.) – толстый, пухлый малыш.

Кляча, -и, *ж.* (разг. пренебр.) – плохая (обычно старая) лошадь.

Ле́нчик, -а, *м.* (спец.) – деревянная основа седла.

Мате́рщина, -ы, *ж., собират.* (прост. груб.) – неприличная брань.

Ми́шка, -и, *м.* (разг. ласк.) – то же, что медведь.

Небезызве́стный, -ая, -ое; -тен, -тна (обычно ирон.) – достаточно, хорошо известный.

Неулыба, -ы, *м.* и *ж.* (обл. и прост.) – человек, который редко улыбается, неулыбчив.

Новоде́л, -а, *м.* (разг.) – здание, сооружение, построенное на месте уничтоженного, исчезнувшего и воспроизводящее его прежний внешний вид.

Нувори́ш, -а, *м.* (книжн. презр.) – богач, наживший свое состояние на социальных переменах или бедствиях, на разорении других.

Общепи́т, -а, *м.* (офиц.) – сокращение: общественное питание – отрасль народного хозяйства, занимающаяся производством и продажей готовой пищи и полуфабрикатов. || *прил.* **общепи́товский**, -ая, -ое (разг.).

Остоло́п, -а, *м.* (прост. бран.) – глупец, болван.

Отчи́зна, -ы, *ж.* (высок.) – отечество, родина.

Побо́ры, -ов. **1.** Чрезмерные, непосильные налоги или сборы (устар.). **2.** *перен.* Неофициальные сборы средств на что-нибудь (разг. неодобр.).

Предуве́домить, -млю, -мишь; -мленный; *сов.*, *кого-что* (устар. и офиц.) – заранее уведомить.

Риста́лище, -а, *ср.* (стар.) – площадь для гимнастических, конных и других состязаний, а также само такое состязание.

Сва́ра, -ы, *ж.* (прост.) – шумная перебранка, ссора.

Торга́ш, -а, *м.* **1.** То же, что торговец (устар. неодобр.). **2.** *перен.* Человек, который выше всего ставит свою выгоду, корысть, личный интерес (презр.).

Умка, -и, *м.* (обл.) – белый медведь.

Упова́ние, -а, *ср.* (книжн., часто ирон.) – то же, что надежда.

Ха́м, -а, *м.* (презр. и бран.) – грубый, наглый человек.

Задание 4. *Познакомьтесь с пометами, используемыми в орфоэпических словарях, словарях грамматических трудностей и т. п. Какие пометы указывают на императивную норму, а какие на диспозитивную? Запишите их в предложенную ниже таблицу.*

НОРМАТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОВ[2]

Словарь является не просто нормативным, а ставит своей задачей показать литературную норму во всем многообразии ее проявлений. В отличие от большинства нормативных словарей, словарь отражает и такие факты речи, которые считаются неверными с точки зрения литературной нормы. Все запретительные пометы, которые характеризуют неверные варианты, снабжаются значком «восклицательный знак» (!). В Словаре используются ясные и общедоступные способы нормативной оценки вариантов.

1. Равноправные варианты соединяются союзом *и*:

ба́рхатка *и* бархо́тка;

ведёрцев *и* ведёрец.

При этом на первом месте помещается обычно традиционный вариант, более частотный в употреблении.

2. Помета «допустимо» (*и доп.*) свидетельствует о том, что оба варианта соответствуют нормам литературного языка. Естественно, что предпочтителен вариант, помещённый на первом месте. Такая помета используется, как правило, применительно к

[2] Орфоэпический словарь русского языка для школьников / Сост. О. А. Михайлова. Екатеринбург: У-Фактория, 2002. С. 6-8.

новым, входящим в норму вариантам ударения, произношения и грамматическим формам. Например:

бредо́вый *и доп.* бредово́й;

белёсый *и доп.* беле́сый;

ма́шет *и доп.* маха́ет.

3. Помета «допустимо устаревшее» (*доп. устар.*) означает, что второй вариант, хотя и находится в пределах литературной нормы, всё реже встречается в речевой практике, постепенно утрачивается, переходя в пассивный языковой фонд. Например:

ворва́лся *и доп. устар.* ворвался́

вспе́ненный, -ая, -ое, *кратк. ф.* вспе́нен, вспе́нена *и доп. устар.* вспенённый, вспенён, вспенена́

бу́до[чн]ик *и доп. устар.* бу́до[шн]ик.

4. Помета «не рекомендуется» (*не рек.*) применяется в тех случаях, когда отмеченный ею вариант в данное время не признаётся нормативным. Однако его широкое употребление в современной речи и соответствие общим тенденциям языкового развития не исключают возможности признания этого варианта литературной нормой в будущем. Например:

бало́ванный ! *не рек.* ба́лованный;

вручи́т ! *не рек*. вру́чит;

гри́фели, -ей ! *не рек.* грифеля́, -е́й.

5. Помета «не рекомендуется устаревшее» (*не рек. устар.*) означает, что снабжённый ею вариант, ныне находящийся за пределами нормы, представляет собой бывшую норму. Например:

горшо́чек, горшо́чка ! *не рек. устар.* горше́чек;

да́рит ! *не рек. устар.* дари́т.

6. Помета «неправильно» (*неправ.*) служит для предупреждения распространённых речевых ошибок. Например:

вы́боры, вы́боров ! неправ. выбора́, выборо́в;

компромети́ровать, -рую, -рует ! неправ. компроме[н]ти́ровать

Рекомендательные пометы	**Запретительные пометы**

ТЕМА 2. ОРФОГРАФИЧЕСКИЕ И ПУНКТУАЦИОННЫЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила орфографии и пунктуации русского языка.

Основные понятия темы:

Орфографические нормы – это правила написания слов.
Пунктуационные нормы – это правила расстановки знаков препинания.

Задание 1. *Повторите правописание гласных (безударных и чередующихся) и согласных в корне слова. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы. Расставьте знаки препинания. Объясните свой выбор.*

Я р…шил в…рнуться д…мой. Быстрыми шагами я прошел зар…сли кустов. У моих ног т…нулась р…внина а дальше ст…ной возвышался мрачный лес. Я осм…трел окрес…ность и спустился с х…лма. Высокая тр…ва на дне д…лины б…лела р…вной скат…ртью. Я вышел на опушку и пошел полем. Трудно было проб…раться по у…кой тр…пинке. Кругом р…сла высокая ро…ь. Н…чная птица промчалась и к…снулась меня св…им крылом. В т…шине глухо разд…вались мои шаги. Но вот на в…чернем небе стали заж…гаться звезды. Забл…стел серп м…л…дого мес…ца. Теперь я узнал д…рогу и предпол…гал что через час буду дома.

Задание 2. *Повторите правописание приставок. Перепишите предложения, вставив пропущенные буквы. Расставьте недостающие знаки препинания при однородных членах предложения.*

Перед самым селом п…р…езжаем речку вброд. На спуске перед церковью ра…ливается море сарафанов мужицких голосов. Народ все пр…бывает мужики в пиджаках ребятишки со свистульками, на ра…пряженных телегах сидят пр…старелые пр…езжие. Над колокольнями белеют верхи палаток, а над ними – облака, и падают вьются стрелами свищут в воздухе стрижи.

Медленно пр…бираясь в ра(с, сс)тупившейся толпе, по…ъезжаем к ограде пр…вязываем лошадей. На дощатом пр…лавке ра…ложены картинки и книги, и мещанин-пр…давец по…совывает календари и книги с з…манчивыми названиями. Всё смех и ржанье лошадей крик бабы, ругающей мужика, (с, з)ливается в один ярмарочный гул. За время работы ярмарки хочется успеть (с, з)делать многое пр…смотреть липового меда п…дешевле п…торговаться в свое удовольствие пр…купить гостинцев родным.

В обед негаданно с…бирается туча, и дождь, по…нимая пыль, барабанит по усыпанной по…солнечной шелухой дороге. Но летний дождь быстро пр…ходит, и яркая радуга, упершись в реку, широким полотенцем ра…кидывается над ярмаркой. С ярмарки народ ра…ъезжается только после обеда. (По И. Соколову-Микитову)

Задание 3. *Повторите правописание Ъ и Ь (учтите разные функции Ь). Перепишите, вставив, где необходимо, пропущенные буквы.*

Пред…юбилейное мероприятие, обжеч…ся огнем, решил удалит…ся проч…, кофе был горяч…, достан…те багаж…, чувствовать гореч… неудач…, выть по-волч…и, любител…ская кинос…емка, должность камен…щика, выйти замуж… осен…ю, береч… здоров…е, сроч…ный заказ, лечить кон…юнктивит, уловить фал…ш… в голосе, трех…этажный павил…он, заменить мед…ю, назнач…те время трех встреч…, с…еш… во время лан…ча, следить за своей реч…ю, купает…ся в реке, оформиш… пен…сию, остав…те антиквару старинную брош…, четырех…ядерный процессор, волосы до плеч…, сер…езный компан…он, умнож…те полученный резул…тат, он хорош… собой, выявить из…ян, декабр…ские морозы, с…агитировать на выборы, коротко стрич…ся, сверх…естественный об…ект, боиш…ся ос…минога, неб…ющаяся вещ…, об…емный текст п…есы, не забуд…те плащ…, невтерпеж… ждать, раз…яренный бык, разрабатывать кар…ер.

Задание 4. *Повторите правописание Н и НН в причастиях, прилагательных и образованных от них формах. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и расставив недостающие знаки препинания при причастных оборотах. Причастные обороты подчеркните.*

Было нестерпимо холодн…о, и даже не верилось, что днем придется жариться в раскален…ом пекле. Среди потрескавшихся от зноя пород обнаруживаются словно бы отполирован…ые плиты гранита. В этом заброшен…ом неповторимом уголке необозримой пустыни существование человека – никогда не прекращающееся сражение с природой. Палатки кочевников соседствуют с домами сложен…ыми из обожжен…ого кирпича.

Снаружи жилище покрывает сетка сплетен…ая из жесткой травы. Узор наносится и на пленку, которой палатка скрепляется изнутри.

Все палатки украшен…ы под цвет камен…ых глыб. Комнаты соединен…ы переходами из плетен…ых циновок. Все разложен…о аккуратн…о, повсюду чистота. Сбоку вышел мужчина в незаменимом традицион…ом облачении. На нем накидка казавшаяся накрахмален…ой. Бросался в глаза и меч повеш…н…ый к поясу.

Геолог подходит к карте разукрашен…ой цветными пометками. Все, что нанесен…о на нее, – плод трудн…ых поисков в горах прокален…ых солнцем. Новые месторождения открывают разведчики недр. (По Б. Фетисову)

Задание 5. *Повторите правописание НЕ и НИ с разными частями речи. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки.*

Нет (н…)чего лучше Невского проспекта, по крайней мере в Петербурге. Чем (н…)блестит эта улица – красавица нашей столицы! Я знаю, что (н…)один из бедных чиновных ее жителей (н…)променяет на все блага Невского проспекта. Да и кому же он (н…)приятнен? Здесь единствен…ое место, где показываются люди (н…)по(н…)обходимости, куда загнала их надобность и меркантильный интерес, об…емлющий весь Петербург. Здесь житель Петербургской или Выборгской части, (н…)сколько лет (н…)бывавший у своего приятеля в Песках или у Московской заставы, может быть уверен, что встретится с ним (н…)пр…мен…о.

Можно сказать решительно, что в это время, то есть до двенадцати часов, Невский проспект (н…)составляет (н…)(для)кого цели, он служит только средством: он постепен…о заполняется лицами, имеющими свои занятия, свои заботы, свои досады, но вовсе (н…)думающими о нем. В это время, что бы вы на себя (н…)надели, хотя бы даже вместо шляпы был картуз у вас на голове, хотя воротнички слишком высунулись из вашего галстука, – (н…)кто этого (н…)заметит. (по Н. В. Гоголю)

Задание 6. *Повторите правописание наречий и частиц. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки. Вставьте недостающие знаки при деепричастных оборотах. Деепричастия подпишите.*

Лето выдалось знойное и сокрушило все. Земля иссохла, прокалилась до того, что ящерицы (не)боясь (ни)кого прибегали на порог с отчаянно колотящимися глотками, лиш…(бы) куда(нибудь) спрятаться. А коршуны забирались (в)высь и (на)долго умолкали в горящем мареве.

И ребят непоседливых сморила (не)померная жара. Они прятались от нее под стенами домов выглядывая (из)редк… (от)туда на проходящие мимо них пассажирские и товарные поезда. Когда у разъезда составы сбавляли ход, детям казалось, что уж… этот(то) поезд притормозит и остановится. Они бежали за ним (в)догонку заслоняясь ручонками от солнца и (по)детски наивно надеясь укатить из пекла.

Тяжко было смотреть, с какой завистью и печалью малыши глядели (в)след уходящим в неизвестность, (на)стеж… раскрытым вагонам. Пассажиры выглядывали из открытых окон, то(же) сходили с ума от духоты и мечтали о том, что(бы) (на)утро очутиться там, где прохладные реки и зеленые леса. Вряд(ли) они задумывались о том, что жара может задержаться… (По Ч. Айтматову)

Задание 7. *Повторите правила постановки знаков препинания в сложных предложениях. Перепишите предложения, расставив знаки препинания. Обратите особое внимание на пунктуацию при однородных и обособленных членах предложения. Подчеркните грамматические основы.*

1. Сначала соседи смеялись между собою над высокомерием Троекурова и каждый день ожидали чтоб незваные гости посетили Покровское где было им чем поживиться но наконец принуждены были с ним согласиться и сознаться что и разбойники оказывали ему непонятное уважение. (А. С. Пушкин)
2. Раза три в год Финский залив и покрывающее его серое небо нарядятся в голубой цвет и млеют любуясь друг другом и северный человек едучи из Петербурга в Петергоф не насмотрится на редкое чудо млеет в непривычном зное и все заликует дерево цветок и животное. (И. А. Гончаров)
3. Я писал вам как мы гонимые бурным ветром дрожа от холода пробежали мимо берегов Европы как в первый раз пал на нас у подошвы гор Мадейры ласковый луч солнца и заплескали голубые волны засияли синие небеса как мы жадно бросились к берегу погреться горячим дыханием земли. (И. А. Гончаров)
4. Иногда бывает что облака в беспорядке толпятся на горизонте а солнце прячась за них красит их и небо во всевозможные цвета в багряный оранжевый золотой лиловый грязно-розовый. (А. П. Чехов)
5. Направо темнели холмы налево все небо было запито багровым заревом и трудно было понять был ли то пожар или же собиралась всходить луна. (А. П. Чехов)
6. Живя здесь я реже попадался на глаза отцу и его гостям и мне казалось что если я живу не в настоящей комнате и не каждый день хожу в дом то слова отца что я сижу у него на шее звучат уже как будто не так обидно. (А. П. Чехов)
7. Он пел и от каждого звука его голоса веяло чем-то родным и необозримо широким словно знакомая степь раскрывалась перед нами уходя в бесконечную даль. (И. С. Тургенев)
8. Большая низкая лампа с непрозрачным абажуром стоящая на письменном столе горела ясно но освещала только поверхность стола да часть потолка образуя на нем дрожащее круглое пятно света в остальной комнате все было в полумраке в нем можно было разглядеть только шкаф с книгами большой диван еще кое-какую мебель. (В. Гаршин)
9. Куда ни обращаешь взор всюду как будто встречаешь быстро удаляющийся образ лета которое время от времени оборачивается назад и бросает прощальную меланхолически-задумчивую улыбку. (Д. Григорович)
10. А на него посмотришь и кажется что вся эта земная деятельность для него только лишь забава и ею занят он пока а настоящие его заботы где-то впереди куда порою устремлялись его бойкие но как бы неживые оловянного блеска глаза. (Ф. Сологуб)

11. На седом фоне тумана ближайшие сосны однотонно плоско и неясно вырисовываются своими прямыми и голыми стволами и в их неподвижности среди этой голубой тишины и среди этого холодного тумана чувствуется что-то суровое печальное и покорное. (А. И. Куприн)

ТЕМА 3. АКЦЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить характеристику русского языка, составить собственный акцентологический словарь при выполнении упражнений[3].

Основные понятия темы:

Акцентологические нормы – это правила постановки ударения в слове. **Омонимы** – слова, у которых от постановки ударения зависит значение.

Задание 1. *Расставьте ударения в следующих словах. Укажите варианты постановки ударения (например, <u>ста́ртер</u> и <u>стартёр</u>):*

1) Асимметрия, блага, кулинария, столяр, добыча, плато, диоптрия, творог, средства, шофер, туфля, эксперт, кремень, страховщик, нефтепровод, маркетинг, шасси, христианин, рассредоточение, досуг, жалюзи, танцовщица, шарфы, торты, искра, бармен, вероисповедание, квартал, симметрия, диспансер, обеспечение, склады, таможня, щебень, баржа, алкоголь, индустрия, приговор, генезис, договор, свекла, бижутерия, каталог, ходатайство, километр, пережитое, хвоя, полиграфия, ортопедия, пиццерия, стюард, овен, упрочение (*имена существительные*).

2) Асбестовый, совестливый, мизерный, оптовый, мастерски, украинский, втридорога, важно, тотчас, просмотровый, завидно, правы, давнишний, стары, одновременный, красивее, красивейший, равны, семестровый, счастливо, досыта, иначе, поутру, начерно, зубчатый (*имена прилагательные и наречия*).

3) Аранжировать, заржаветь, нормировать, убыстрить, заплесневеть, новорожденный, опошлить, баловать, балованный, расклешенный, дарит, включишь, включенный, копировать, повторишь, понял, звонит, закупорить, начался, начатый, положить, положил, вручит, врученный, доложишь, облегчить, осведомиться, премировать, черпать, ободрить, пломбировать, вогнутый, вскружит, буксировать, скрещенный, разрыхлить, плодоносить, наклоненный, окислить (*глагольные формы*).

Задание 2. *Поясните, как зависит значение от постановки ударения в следующих словах (омонимах):*

Глазки, замок, рожки, выкупать, ирис, характерный, полки, хлопок, мука, вычитать, орган, видение, острота, трусить, свойство, гвоздики, бронировать, кредит, угольный, правило, провидение, полнить, лавровый, электрик.

Например: <u>пла́чу</u> (1 лицо ед. число от глагола «плакать») – <u>плачу́</u> (1 лицо ед. число от глагола «платить»).

---

[3] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей при постановке ударения.

Задание 3. *Прочитайте предложения, обращая внимание на постановку ударения в подчёркнутых словах. Составьте по аналогии свои предложения, использовав любые слова из **задания 1** и / или **2**.*

1. В последнем квартале этого года эксперты одной из фирм заключили выгодный договор на прокладку газопровода**,** за что были премированы. 2. Для обеспечения здорового образа жизни исключите из своего рациона арахис, торты и алкоголь, а включите в него творог, свеклу и щавель. 3. В мебельном отделе нашего торгового центра вы можете приобрести красивейшие кухонные гарнитуры по оптовым ценам.

ТЕМА 4. ОРФОЭПИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить правила транскрибирования слов, выявить основные трудности в плане произношения, составить собственный орфоэпический словарь при выполнении упражнений[4].

Основные понятия темы:

Орфоэпические нормы – это правила произношения слов.
Транскрипция – графическая запись того, как произносится слово (всегда в квадратных скобках).

Задание 1. *Отметьте правильное произношение сочетания ЧН в следующих словах. Распределите слова на три группы:*

[шн]	**[шн]** и **[чн]**	**[чн]**

1) Шуточный, копеечный, отличник, девичник, будничный, булочная, очечник, полуночник, нарочно, прачечная, скучно, скворечник, горчичник, Фоминична, яичница, достаточно, порядочный, горничная, Никитична, двоечник, пустячный, Ильинична, конечно, спичечный, подсвечник, Кузьминична.

2) Шапочный мастер – шапочное знакомство, сердечные капли – друг сердечный, подаренная перечница – чертова перечница.

Задание 2. *Отметьте правильное произношение согласного перед Е в следующих словах. Распределите слова на три группы:*

Твёрдое произношение	**Варианты**	**Мягкое произношение**

Автосервис, дефис, агрессия, дендрарий, бухгалтер, депрессия, гарем, термин, шинель, термос, патент, сессия, тенденция, рейд, газель, дезодорант, фанера, Одесса, академия, бизнесмен, деградация, менеджер, музей, деканат, темперамент, тезис, аксессуары, протекция, бандероль, гипотеза, детектив, кредо, бассейн, экспресс, дедукция, декада, темп, терапевт, дефицит, интервал, дебаты, рельсы, ниппель, компетентный, дезинформация, пресса, цистерна, стратегия, тренинг, сенсорный, сейф, портмоне.

[4] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей произношения.

Задание 3. *Прочитайте слова, обращая внимание на произношение ударного звука, обозначенного буквой Е:*

1) Острие, поблекший, афера, хребет, оседлый, одноименный, маневренный, опека, жернов, желчь, блеклый, желоб, безнадежный, бытие, повлекший, жердочка, никчемный, гладкошерстный, гашеный, недоуменный.

2) Именительный падеж – падеж скота;

Истекший срок – истекший кровью;

Кричит как оглашенный – оглашенный приговор;

Совершенные пропорции – совершенные поступки;

Крестный ход – крестный отец.

Задание 4. *Прочитайте слова, обращая внимание на произношение выделенных согласных:*

1) Ма**сс**а, су**рр**огат, гру**пп**а, гри**пп**, те**рр**аса, а**тт**естат, ко**лл**ега, мета**лл**, су**мм**а, а**нн**отация, криста**лл**, оди**нн**адцать, и**лл**юзия, ва**нн**а, апе**лл**яция, ка**сс**а, га**лл**юцинация, не**тт**о.

2) Дро**жж**и, бу**хг**алтер, по**зж**е, во**жж**и, и**зж**арить, вы**жж**енный, пе**сч**аный, и**зж**ить, ра**зж**ать, же**стч**е, ни**зш**ий, до**жд**и, ре**зч**е, ви**зж**ать, и**зж**ога, ма**сш**таб, мо**жж**евельник, бе**зж**изненный, ра**сч**ет, съе**зж**у, прие**зж**ай.

Задание 5*. *Прочитайте следующий текст, обращая внимание на правильное произношение и постановку ударения в подчёркнутых словах:*

Примером успешного ведения бизнеса в различных отраслях экономики является деятельность фирмы «Mihail-tur». За 11 лет ее существования удалось сформировать коллектив профессионалов из высококвалифицированных менеджеров, компетентных экспертов, торговых агентов. Компании принадлежат две трети долей уставного фонда АО «Лейбл-мастер», владельца одного из крупнейших торговых центров города. Занимаясь оптовым поставкам подростковой одежды, фирма поддерживает связи с модельными агентствами, что позволяет обновлять коллекции на 15 процентов каждый квартал. С ассортиментом одежды можно познакомиться по объемному каталогу, размещенному на корпоративном интернет-сайте. Руководство фирмы заявило о намерении углубить это направление, для чего налаживаются связи с другими поставщиками, проводятся маркетинговые исследования с целью изучения конъюнктуры рынка в трех крупнейших областях региона. В планы компании входит также сосредоточение средств в области дорожного строительства. Начата подготовка к тендерным торгам, намеченным на первую декаду ноября, к участию в которых приглашаются компании, заинтересованные в строительстве современного путепровода.

ТЕМА 5. СЛОВООБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить состав слова, научиться находить в предложениях ошибки, связанные с неверным образованием слова.

Основные понятия темы:

Словообразовательные нормы – это правила образования новых слов.

Задание 1. *Найдите в предложениях слова, в которых нарушена словообразовательная норма, запишите их. Выделите неправильно выбранную часть слова (приставку, суффикс). Исправьте допущенные ошибки.*

1. Завесьте, пожалуйста, килограмм помидоров с витрины. **2.** Студенты в очередной раз немного запоздали на лекцию. **3.** Уважаемые пассажиры, проходите по-быстрому в середину вагона или садитесь взади. **4.** Он был коренным курчанином и после учебы в Москве вернулся в родной Курск. **5.** Чтобы сдать зачет, важно завсегда посещать занятия. **6.** Одна из самых актуальных проблем современной России – это взятничество в государственных учреждениях. **7.** После концерта микрофоны со сцены надо будет перенести взад. **8.** Многие кавказские народы отличает их гостеприимчивость. **9.** Моя жизнь в этом году была наполнена заботами о заканчивании школы и поступлении в университет. **10.** Сегодня у первого курса была лекция по химии заместо высшей математики.

ТЕМА 6. ЛЕКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить основные типы речевых ошибок, связанных со значением слова.

Основные понятия темы:

Лексические нормы – это правила употребления слова в точном значении, которое закрепилось в литературном языке и зафиксировано в толковых словарях. **Паронимы** – это слова однокоренные, близкие по форме, но абсолютно разные по значению. **Речевая избыточность** – это употребление лишних слов (тавтология, плеоназм). **Лексическая сочетаемость** – это способность слова соединяться с другими словами по значению. **Жаргонизм** – слово, свойственные для речи той или иной социальной, профессиональной группы людей. **Фразеологизм** – устойчивое словосочетание, смысл которого не определяется значением отдельно взятых слов

Задание 1. *Объясните разницу в значении приведенных ниже паронимов. Составьте с каждым из них словосочетание, подобрав подходящее по смыслу слово.*

Осудить – обсудить, удачливый – удачный, соседний – соседский, жилой – жилищный, поступок – проступок, опечатки – отпечатки, командированный – командировочный, усвоить – освоить, эффектность – эффективность, невежа – невежда, представить – предоставить, цельный – целый, искусный – искусственный, практический – практичный; гуманный – гуманистический – гуманитарный; плодовитый – плодовый – плодотворный, экономический – экономичный – экономный.

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях избыточные словосочетания, выпишите их. Объясните причину избыточности, указав на лишнее слово (или лишние слова).*

1. При входе в «Копирус» висит прейскурант цен на предлагаемые услуги. **2.** Уезжая из Москвы, мы купили памятные сувениры в киоске у вокзала. **3.** Для преподавателя важно то, какие взаимоотношения друг с другом сложились между студентами в группе. **4.**

Неприятно резал слух голос, доносившийся из конференц-зала. **5.** Депутату приходится встречаться со всеми социальными слоями общества.

Задание 3. *Найдите в следующих предложениях иноязычные по происхождению слова, которые употреблены в неточном значении. Запишите свой вариант исправления.*

1. Рабочий станка допустил целый ряд дефектов при изготовлении деталей. **2.** Пейзаж Екатеринбурга за последние десять лет обогатился современными постройками, хотя многие памятники архитектуры и были реконструированы до основания. **3.** В целях профилактики основное внимание уделяется ранним проявлениям, т. е. дебюту гриппа. **4.** Для окон актового зала мы долго искали гардины длиной 4 метра, а уже потом подбирали шторы в тон стен. **5.** В январе состоялся бенефис талантливого исполнителя: он впервые выступал на профессиональной сцене.

Задание 4. *Найдите в следующих предложениях нарушения правил лексической сочетаемости слов. Запишите свой вариант исправления.*

1. Грамотный руководитель должен показывать образец своим подчиненным. **2.** Нововведения сыграли важное значение в развитии горного комбината. **3.** Красочное оформление детских книг издательства «Эгмонт» должно вызвать внимание и заинтересовать покупателей. **4.** Новогодний спектакль в Театре кукол оказал на детей большое впечатление. **5.** Первую лекцию по геологии в этом году провел молодой преподаватель.

Задание 5. *Найдите в предложениях жаргонные, просторечные, разговорные слова, замените их литературным вариантом и запишите исправленный вариант.*

1. Несколько студентов до сих пор не отнесло хвостовки в деканат. **2.** В центре Екатеринбурга забабахали очередную свечку. **3.** Я считаю, что необходимо избавляться от любой нецензурщины в нашей речи. **4.** После окончания вуза мы решили замутить свой бизнес, решив, что в этом деле нам по-любому повезет. **5.** Работяги привыкли вкалывать на заводе от зари до зари.

Задание 6. *Исправьте в следующих предложениях речевые ошибки, вызванные неправильным употреблением фразеологизма.*

1. Михаил на публике говорит очень убедительно, язык у него хорошо подвязан. **2.** Туристам кинулась в глаза красота уральской природы. **3.** Его обещания рубля ломаного не стоят. **4.** Об умельцах у нас говорят: «Они в своем деле коня подковали». **5.** К сожалению, студенты редко сейчас грызут камень науки по-настоящему.

Задание 7*. *Найдите и исправьте в следующих предложениях речевые ошибки. Запишите правильный вариант.*

1. Норвежские спортсмены по-прежнему остаются нашими самыми серьезными оппонентами в биатлоне. **2.** В своей работе руководители горных предприятий руководствуются новейшей научной и методической литературой. **3.** Многодетным семьям, чтобы жить достойно, приходится искать несколько истоков доходов. **4.** Обычно мы общаемся, не придавая важности невербальным средствам коммуникации. **5.** Екатеринбургская Епархия активно распространяет душевную литературу. **6.** Продукты Черкашинского мясокомбината пользуются авторитетом у покупателей. **7.** Исправьте ошибки в контрольной работе так, чтобы было правильно. **8.** Все места на парковке были заняты, и поэтому много машин толпилось на обочине. **9.** К маю ветераны ВОВ получили очередную добавку к пенсии. **10.** После собеседования она сказала, что на должность промоутера брали только смазливых молодых людей. **11.** В прошлом году выдался неурожайный год в плане картошки. **12.** Ребенок с рождения имитирует поведение родителей. **13.** На Неделе первокурсника нам сразу выдали студики и зачётки. **14.** Команда нашего факультета заняла первенство в смотре художественной самодеятельности. **15.** После первых же дней изнурительной работы на Севере очень хотелось вернуться назад домой.

ТЕМА 7. МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить правила определения рода у существительных и аббревиатур, особенности несклоняемых существительных, образования некоторых грамматических форм разных частей речи и научиться исправлять ошибки, связанные с их неверным образованием (все это с опорой на учебную литературу и словари[5]).

Основные понятия темы:

Морфологические нормы – это правила образования грамматических форм слова.

Задание 1. *Определите род у следующих существительных и аббревиатур. Подберите к ним подходящие по смыслу прилагательные (или причастия), учитывая правила синтаксического согласования.*

1) Атташе, авеню, адвокат, амплуа, ассорти, аэрозоль, белоручка, бра, безе, боа, боди, бродяга, видео, визави, врач, выскочка, гну, гуру, денди, доцент, евро, жалюзи, жюри, зануда, иваси, какаду, кантри, каре, кашне, кенгуру, киви, кимоно, колибри, коллега, колли, кольраби, кофе, крупье, кутюрье, лама, левша, манго, мартини, маэстро, меню, миледи, монпансье, недоросль, непоседа, ниндзя, пани, пари, педагог, пенальти, пенсне, пони, преподаватель, протеже, профессор, растяпа, резюме, рефери, сабо, салями, сирокко, спагетти, табу, такси, тамада, танго, толь, торнадо, турне, тюль, фламинго, фрау, хачапури, хиппи, цеце, цунами, шасси (*склоняемые и несклоняемые существительные*).

2) Айдахо, Бали, Борнео, Гоби, Дели, Калахари, Капри, Килиманджаро, Колорадо, Лимпопо, Мехико, Миссисипи, Онтарио, Сорренто, Тбилиси, Толедо, Чили (*имена собственные*).

3) АО, АТС, БАМ, бомж, ВТО, вуз, ГАЗ, ГОК, ГУМ, ДК, дот, ДСП, ДТП, жэк, колхоз, КПП, ЛДПР, МВД, МИД, НИИ, НХЛ, НЭП, общепит, ООН, ПК, полпред, СЕ, СМУ, СНГ, СССР, ТАУ, ТВ, ТРЦ, УЗТМ, ФГБОУ, ФМС, ФСБ, ЦУМ (*аббревиатуры*).

Задание 2. *Определите род у следующих сложносоставных существительных. Составьте с ними словосочетания **прил. + сущ.***

Диван-кровать, музей-квартира, генерал-губернатор, плащ-палатка, идея-фикс, конференц-зал, жар-птица, кафе-столовая, чудо-человек, матч-реванш, салон-парикмахерская, программа-максимум, женщина-космонавт, альфа-излучение, ракета-носитель, премьер-министр, кофе-пауза.

[5] При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем грамматических трудностей.

Задание 3. *Определите, какие фамилии при заполнении бланка письма или заявления будут склоняться, а какие нет. Обращайте внимание на пол человека. Запишите эти имена и фамилии в нужном падеже.*

Кому:

Сергей Левченко, Александр Живаго, Елена Сверчук, Анна Шевченко, Константин Ярош, Татьяна Чубинец, Вероника Лежава, Андрей Горенко, Борис Станкевич, Виталий Воробей, Ирина Шевчук, Иван Миклухо-Маклай, Виктор Доброво, Владислав Карамыш, Анна Диоп, Андрей Кожемяк, Мария Мицкевич, Петр Галаган, Маргарита Венда, Вадим Черных.

От кого:

Николай Черныш, Наталья Седых, Светлана Карась, Семен Фоменко, Лев Щерба, Сергей Соловьев-Седой, Александр Максимаджи, Екатерина Франюк, Леонид Березняк, Юлия Родных, Максим Жук, Алёна Ремесло, Николай Стрижак, Наталия Черных, Марат Ардзинба, Вера Ноздреватых, Виктория Приходько, Евгений Столпнер, Кирилл Шапиро, Станислав Горбачевич.

Задание 33. *Заполните таблицу следующими существительными, в зависимости от того, как у них образуется форма именительного падежа множественного числа.*

Окончание **–а/ –я**	Окончание **–ы/ –и**	Варианты **–а/ –я** и **–ы/ –и**

*Отдельно укажите существительные, у которых от выбора окончания в этой форме зависит значение (например, <u>ордер**а**</u> – «документы» и <u>ордер**ы**</u> – «элементы в архитектуре»).*

1) Брелок, бухгалтер, ветер, вексель, возраст, герб, год, директор, договор, жемчуг, инженер, инспектор, клин, колос, купол, лектор, медвежонок, небо, окорок, офицер, отпуск, пандус, паспорт, плинтус, почерк, прииск, прожектор, профессор, ребенок, редактор, сектор, семя, слесарь, столяр, сторож, табель, токарь, тополь, трактор, хозяин, цех, чудо, шило, шофёр, штемпель.

2) Корпус, лагерь, образ, повод, полоз, полутон, провод, пропуск, прут, тормоз, хлеб.

Задание 4. *Образуйте форму родительного падежа множественного числа от следующих существительных. Отметьте наличие вариантов (например, ла́сты – <u>ла́ст**ов**</u> и <u>ла́ст□</u>).*

Армяне, апельсины, басни, блюдца, болгары, ботинки, брызги, буряты, валенки, гардемарины, гектары, граммы, грузины, дела, деньги, джинсы, заморозки, казахи, калории, кастрюли, килограммы, клавиши, комментарии, макароны, мандарины, мечты, микроны, мокасины, носки, осетины, партизаны, перила, перипетии, петли, плечи, полотенца, поместья, помидоры, просьбы, развилки, рельсы, русла, сани, сапоги, сбои, свадьбы, сваи, свечи, серьги, солдаты, тапочки, тиски, турки, туфли, цыгане, чукчи, чулки, южане, юнги, яблоки, ясли.

Задание 5. *Раскройте скобки, заменяя цифровые обозначения словами, правильно определяя падеж числительных и существительных.*

1. Выборы в Государственную Думу состоялись в (358 округов). **2.** Появилась серия вспомогательных пособий с (5 735 чертежей). **3.** Теплоход с (657 отдыхающих) плыл вниз по Волге. **4.** За время последней экспедиции мы прошли свыше (2 580 километров). **5.** Нарушения техники безопасности были выявлены на (4 893 предприятия).

Задание 6. *Исправьте неверное употребление числительных в следующих предложениях:*

1. Лекция по философии будет прочитана для обоих студенческих групп. **2.** Мать-героиня воспитала семерых сыновей и четверых дочерей. **3.** Забор тянулся по обоим сторонам улицы и ограничивал движение. **4.** Двоих подруг она уже встретила по приезде в родной город. **5.** Главные достопримечательности Санкт-Петербурга расположены по обеим берегам Невы.

Задание 7. *Выпишите из предложений неправильно образованные грамматические формы. Запишите исправленный вариант.*

1. Всем стало понятно, что ейное предложение по реконструкции здания не будет одобрено. **2.** После второго матча наша команда оказалась в более лучшем положении. **3.** Староста пожаловалась преподавателю, что наша группа не влазиет в аудиторию 3519. **4.** Съездя в другой город, она поняла, как хорошо на родине. **5.** Ремонтники уже второй месяц не могли сменить треснутое стекло в окне. **6.** Он схватился за канат двумями руками. **7.** Хозяйка встретила гостей в бигудях и халате. **8.** Наши альпинисты покорили самые высочайшие вершины мира. **9.** Я надеялся, что к началу сессии выздоровлю. **10.** В этот раз студенты справились с заданием еще более хуже.

Задание 8. *Найдите нарушения морфологических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

1. Новый преподаватель кажется более образованнее. **2.** Студенческое общежитие находится в полтора километрах от здания университета. **3.** ФНС был создан как федеральный орган исполнительной власти. **4.** В магазине «Лео-строй» разнообразные варианты цветных жалюзей. **5.** Куратор совсем не интересовался ихними проблемами в учебе. **6.** МВФ выделило очередной транш в 1,5 миллиарда долларов. **7.** В столовой нельзя пользоваться лопнутыми стаканами. **8.** Эту сумму мы добавим к тысяче двести сорокам рублям. **9.** На конференцию молодых ученых пригласили самых умнейших студентов старших курсов. **10.** Вскоре Сергей Исаев стал популярной тамадой на свадьбах и других торжествах. **11.** На вновь открытое предприятие требуются бухгалтера, сторожи и инженера АСУП. **12.** Южнее Сочи находится солнечное Сухуми. **13.** На дипломную практику горный комбинат принял троих девушек с нашего курса. **14.** Мама традиционно купила пять килограмм мандарин и апельсин для праздничного новогоднего стола. **15.** Увидя раздраженное состояние преподавателя, студентка решила с ним не спорить.

ТЕМА 8. СИНТАКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила построения словосочетаний и предложений

Основные понятия темы:

Синтаксические нормы – это правила, регулирующие порядок и связь слов в

словосочетании и предложении.

Задание 1. *Раскройте скобки, правильно определив падеж зависимого слова. При необходимости используйте предлоги. Запишите получившиеся словосочетания.*

Согласно (устав университета), точка зрения (события), благодаря (поддержка друга), анонс (предстоящие гастроли), вопреки (мнение большинства), наперекор (судьба), вклад (развитие науки), жажда (слава), заведующий (кафедра), по (возвращение) из отпуска, отзыв (курсовая работа), рецензия (новый фильм), оплачивать (проезд), свидетельствовать (необходимость перемен), доказывать (новая теория), поделиться (результаты исследования), апеллировать (здравый смысл), по (прибытие) поезда; предостеречь (опасность) – предупредить (опасность), обращать внимание (недостатки) – уделять внимание (подготовка к экзаменам), уверенность (свои силы) – вера (победа).

Задание 2. *Найдите предложения, в которых неверно употреблен деепричастный оборот. Предложите свой вариант исправления.*

Образец: Подводя итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации (***действие, названное деепричастием, не относится к подлежащему***).

Варианты исправления: 1) Подводя итог проделанной работы, я выдвинул ряд предложений по модернизации. 2) Когда я подвел итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации. 3) После подведения ряда итогов проделанной работы мною был вдвинут ряд предложений по модернизации.

1. Будучи ребенком, Дмитрия всегда интересовали вопросы, связанные с техникой. **2.** Читая произведения русской классики, меня охватывает чувство гордости за отечественную литературу. **3.** Не чувствуя ни усталости, ни голода, наш путь к вершине продолжался. **4.** Узнав эту прекрасную новость, радости студентов не было предела. **5.** Первым, слегка хромая, из автобуса вышел седой старик. **6.** Записываясь на практику, у студентов были очень ограничены возможности выбора места ее прохождения. **7.** Вспоминая родные места, мне видится наш маленький кирпичный домик в тени тополей. **8.** Глядя на ярко освещенные стены Зимнего дворца, у меня возникло желание приехать сюда еще раз. **9.** Позвонив в третий раз, он с грустью понял, что никого нет дома. **10.** Произведя ряд расчетов, задача была решена студентами в течение 15 минут.

Задание 3. *Найдите предложения, в которых неправильно согласовано подлежащее со сказуемым. Запишите исправленный вариант.*

1. Много знаменитых людей закончили наш университет. **2.** Немало средств были потрачены на восстановление полуразрушенного памятника архитектуры. **3.** Несколько важных дат будут отмечены в календаре помимо официальных государственных праздников. **4.** На собрание по поводу летней практики явились лишь 31 студент. **5.** Часть студентов не справились с итоговой контрольной работой. **6.** Множество горожан приняли участие в шествии «Бессмертного полка». **7.** Ряд важных вопросов не были решены во время последнего заседания Ученого совета. **8.** Половина участников соревнований были размещены в студенческом общежитии. **9.** Тысяча периодических изданий имеются в открытом доступе в электронной библиотеке. **10.** Газета «Екатеринбургские новости» опубликовали интересную статью о творчестве молодых поэтов и писателей Урала.

Задание 4. *Найдите нарушения синтаксических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

1. Согласно распоряжения ректора всем студентам и сотрудникам необходимо пройти флюорографический осмотр. **2.** Открыв дверь в аудиторию, перед моими глазами предстала странная картина. **3.** Важно изучать условия жизни человека и как они связаны с процессами, происходящими сегодня в нашем обществе. **4.** Молодежь всегда принимали участие в студенческой самодеятельности и спортивных мероприятиях. **5.** В своей новой статье автор исследует и размышляет о возможностях искусственного интеллекта. **6.** Приказ был подписан ректором университета, устанавливающий обязательное посещение занятий, и доведен до сведения сотрудников вуза, преподавателей и студентов. **7.** Несколько членов Ученого совета не присутствовали на очередном заседании. **8.** В район приехал инструктор для подготовки специалистов по борьбе с сельскохозяйственными вредителями из местных жителей. **9.** Ученики горного лицея поступают в престижные учебные заведения, родители которых гордятся их успехами в учебе. **10.** Можно было согласиться лишь с теми положениями доклада, где приводились статистические данные для подтверждения гипотезы. **11.** Сдав нормативы ГТО, большинству из нас был вручен золотой значок. **12.** Учебное пособие не только предназначено для преподавателей, а также и для студентов и аспирантов. **13.** Скоро будет заселен многоквартирный дом, выросший на глазах за несколько месяцев и который уже приняла комиссия. **14.** Нам предложили поселиться в номере-люкс новой гостиницы для туристов с видом на море. **15.** Преподаватель попросил студентов, чтобы они ему напомнили на следующем занятии, чтобы он им распечатал раздаточный материал к семинарскому занятию.

ТЕМА 9. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СТИЛЕЙ

Цель – повторить систему функциональных стильных стилей русского языка, научиться определять стиль текста и доказывать свою точку зрения в этом вопросе.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Функциональный стиль – это исторически сложившаяся и социально осознанная разновидность языка, функционирующая в определенной сфере человеческой деятельности и общения, создаваемая особенностями употребления в этой сфере языковых средств и их специфической организацией.

В основе классификации стилей лежат экстралингвистические факторы: сфера применения языка, обусловленная ею тематика и цели общения. Сферы применения языка соотносятся с видами деятельности человека, соответствующими формам общественного сознания: наука, идеология, право, искусство, религия. Выделяются стили официальной речи (книжные): **научный**, **официально-деловой**, **публицистический**, **литературно-художественный**, **церковно-религиозный**. Им противопоставлен стиль неофициальной речи – **разговорный**, экстралингвистической основой которого является сфера бытовых отношений и общения (быт как область отношений людей вне их непосредственной производственной и общественно-политической деятельности).

Сферы применения языка в значительной мере влияют на тематику и содержание высказывания. Каждая из них имеет свои актуальные темы. Например, в научной сфере обсуждаются проблемы научного познания мира, в сфере бытовых отношений – бытовые вопросы. Однако в разных сферах может обсуждаться одна и та же тема, но цели преследуются неодинаковые, вследствие чего высказывания различаются и по содержанию, и по форме (см. **Задание 1**).

Каждый стиль обладает определёнными языковыми особенностями (прежде всего лексическими и грамматическими). Можно говорить лишь об относительной замкнутости функциональных стилей: большинство языковых средств в каждом стиле нейтральные, межстилевые. Однако ядро каждого стиля образуют присущие именно ему языковые средства с соответствующей стилистической окраской и едиными нормами употребления.

Следует отбирать слова и конструкции в соответствии с выбранным стилем, особенно в письменной речи. Употребление разностилевых языковых средств в рамках одного текста ведет к появлению стилистических ошибок. Часто встречаются ошибки, связанные с неуместным употреблением канцеляризмов, а также злоупотреблением специальными терминами в ненаучном тексте и использованием разговорной и просторечной лексики в книжных текстах (см. **Задание 2**).

Можно сделать вывод, что **стилистические нормы** – это 1) правила употребления языковых средств в соответствии с выбранным стилем и 2) правила выбора стиля, соответствующего условиям общения.

Таким образом, специфические черты каждого функционального стиля можно описать, ориентируясь на целый ряд признаков, которые обозначаются как **стилеобразующие факторы**, а также на его стилевые и языковые особенности. Кроме того, каждый стиль включает в себя тексты разных жанров (см. **Задание 3**).

Функциональный стиль	Стилеобразующий фактор						Жанры
	Доминирующая языковая функция	**Форма общественного сознания**	**Основная форма речи**	**Типичный вид речи**	**Тон речи**	**Тип адресата**	
Научный	Сообщение	Научное сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный	Массовый (подготовленный к восприятию научной информации)	Учебник, монография лекция, научная статья, аннотация, реферат, конспект, тезисы, курсовая работа, выпускная работа, диссертация, доклад
Официально-деловой	Сообщение / воздействие	Правовое сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный / императивный	Массовый	Конституция, закон, приказ, указ, распоряжение, положение, регламент, заявление, автобиография, резюме, характеристика
Публицистический	Сообщение + воздействие	Идеологическое сознание	Письменная и устная	Монолог и диалог	Обусловленный содержательно	Массовый	Репортаж, интервью, очерк, дискуссионное выступление, статья, информационная заметка
Литературно-художественный	Воздействие	Эстетическое сознание	Письменная	Обусловленный родом и жанром литературы	Обусловленный эстетической задачей	Массовый (подготовленный к восприятию классических произведений)	Роман, повесть, рассказ, новелла, стихотворение, поэма, баллада
Церковно-религиозный	Воздействие	Религиозное сознание	Письменная и устная	Монолог	Обусловленный ситуативно	Массовый	Исповедь, проповедь, житие, молитва
Разговорный	Общение	Обыденное сознание	Устная	Диалог и полилог	Обусловленный ситуативно	Личный (конкретный собеседник)	Дружеская беседа, семейная беседа, бытовой спор, байка

Задание 1. *Прочитайте тексты, посвященные одной теме. Определите функционально-стилевую принадлежность текстов, опираясь на стилеобразующие факторы и языковые особенности каждого из них.*

Текст 1

Гроза – атмосферное явление, заключающееся в электрических разрядах между так называемыми кучево-дождевыми (грозовыми) облаками или между облаками и земной поверхностью, а также находящимися над ней предметами. Эти разряды – молнии – сопровождаются осадками в виде ливня, иногда с градом и сильным ветром (иногда до шквала). Гроза наблюдается в жаркую погоду при бурной конденсации водяного пара над перегретой сушей, а также в холодных воздушных массах, движущихся на более теплую подстилающую поверхность.

Текст 2

Как передает наш корреспондент, вчера над центральными районами Пензенской области прошла небывалой силы гроза. В ряде мест были повалены телеграфные столбы, порваны провода, с корнем вырваны столетние деревья. В двух деревнях возникли пожары в результате удара молнии. К этому прибавилось еще одно стихийное бедствие: ливневый дождь вызвал сильное наводнение. Нанесен значительный ущерб сельскому хозяйству. Временно было прервано железнодорожное и автомобильное сообщение между соседними районами.

Текст 3

Доводим до Вашего сведения, что вчера после полуночи над районным центром – городом Нижний Ломов и прилегающей к нему сельской местностью – пронеслась сильная гроза, продолжавшаяся около получаса. Скорость ветра достигала 30-35 метров в секунду. Причинен значительный материальный ущерб жителям деревень Ивановка, Щепилово и Вязники, исчисляемый, по предварительным данным, сотнями тысяч рублей. Имели место пожары, возникшие вследствие удара молнии. Сильно пострадало здание школы в деревне Курково, для его восстановления понадобится капитальный ремонт. Вышедшая из берегов в результате проливного дождя река Вад затопила значительную площадь. Человеческих жертв нет. Образована специальная комиссия для выяснения размеров причиненного стихийным бедствием ущерба и оказания помощи пострадавшему местному населению. О принятых мерах будет незамедлительно доложено.

Текст 4

Ты не поверишь, какая гроза прошла вчера над нами! Я человек не робкого десятка, и то испугался насмерть.

Сначала все было тихо, нормально, я уже собирался было лечь, да вдруг как сверкнет молния, бабахнет гром! И с такой силищей, что весь наш домишко задрожал. Я уже подумал, не разломалось ли небо над нами на куски, которые вот-вот обрушатся на мою несчастную голову. А потом разверзлись хляби небесные... В придачу ко всему наша безобидная речушка вздулась, распухла и ну заливать своей мутной водицей все вокруг. А совсем рядом, что называется – рукой подать, загорелась школа. И стар и млад – все повысыпали из изб, толкутся, орут, скотина ревет – вот страсти какие! Здорово я перепугался в тот час, да, слава Богу, все скоро кончилось.

Текст 5

При Крещении священник крестообразно помазывает лоб христианина святым миром, говоря: «Печать дара Духа Святаго». Впоследствии всякий раз, когда христианин осеняет себя крестным знамением, он поклоняется спасительной Страсти Господней и призывает крестную силу, иже есть сила крестной смерти нашего Христа. Говоря: «Кресте Христов, спаси нас силою твоею», мы призываем силу крестной жертвы Господа. Поэтому крест обладает великой силой. Например, началась гроза. Сверкают молнии, и в большой железный крест на колокольне тоже может ударить молния. Однако, если стоящий под этим железным крестом христианин имеет на себе вот такой маленький крестик и говорит: «Кресте Христов, спаси мя силою твоею», то молния ему не повредит. В первом случае действуют природные законы: молния попадает в крест и сбивает его на землю. Во втором случае такой вот малюсенький крестик хранит верующего человека, призвавшего на помощь силу Креста.

Текст 6

Между далью и правым горизонтом мигнула молния, и так ярко, что осветила часть степи и место, где ясное небо граничило с чернотой. Страшная туча надвигалась не спеша, сплошной массой; на ее краю висели большие, черные лохмотья; точно такие же лохмотья, давя друг друга, громоздились на правом и на левом горизонте. Этот оборванный, разлохмаченный вид тучи придавал ей какое-то пьяное, озорническое выражение. Явственно и не глухо проворчал гром. Егорушка перекрестился и стал быстро надевать пальто.

Вдруг рванул ветер и со свистом понесся по степи, беспорядочно закружился и поднял с травою такой шум, что из-за него не было слышно ни грома, ни скрипа колес. Он дул с черной тучи, неся с собой облака пыли и запах дождя и мокрой земли. Лунный свет затуманился, стал как будто грязнее, звезды еще больше нахмурились, и видно было, как по краю дороги спешили куда-то назад облака пыли и их тени.

Чернота на небе раскрыла рот и дыхнула белым огнем; тотчас же опять загремел гром.

Дождь почему-то долго не начинался... Было страшно темно. А молнии в потемках казались белее и ослепительнее, так что глазам было больно.

Вдруг над самой головой его [Егорушки] со страшным, оглушительным треском разломалось небо; он нагнулся и притаил дыхание, ожидая, когда на его затылок и спину посыпятся обломки... Раздался новый удар, такой же сильный и ужасный. Небо уже не гремело, не грохотало, а издавало сухие, трескучие, похожие на треск сухого дерева звуки. (*А. П. Чехов. Степь*)

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях стилистические ошибки и запишите исправленный вариант.*

1. Некоторым министрам необходимо включить мозги, чтобы до них дошло, что на прожиточный минимум люди в России могут только существовать. **2.** В статье сообщается, что левые лекарства отследят по аптекам и конфискуют. **3.** Мэр города рассказал, что в настоящее время ведется возведение двух бюджетных высоток в Пионерском поселке. **4.** Новый сотрудник редакции сумел нарыть некий компромат на верхушку министерства, но опубликовать материалы ему не дали. **5.** Директор гимназии был в ауте, когда ему сообщили, что гимназия получила-таки грант в размере 1 млн. рублей. **6.** Бытие в хрущевках и интенсивные трудовые затраты скрашивала душевная атмосфера, царившая в те годы в коллективе. **7.** Благополучие родных деревень отстаивает наш председатель, который по восемнадцать часов в сутки мотается по полям, фермам, частит по делам в Екатеринбург. **8.** Трудно понять, почему ученый допустил такую промашку в расчетах. **9.** Семь школ, которые дислоцируются в нашем районе, переполнены, поэтому некоторым детям приходится ездить за тридевять земель. **10.** Избранников народа одолевает такое количество проблем, что у некоторых уже крыша поехала.

Задание 3. *Определите, к какому стилю принадлежит каждый из предложенных текстов*[6]*. Попытайтесь обосновать свою точку зрения.*

Текст 1

В психологии и этике делового общения речь пойдет не столько об абстрактных общепсихологических категориях и принципах, сколько о профессиональных психологических и в то же время практически ориентированных знаниях, которые могут обеспечить успех той или иной деятельности. Под **деловым** понимается общение, обеспечивающее успех какого-то общего дела, создающее условия для сотрудничества людей, чтобы осуществить значимые для них цели. Деловое общение содействует установлению и развитию отношений сотрудничества и партнерства между коллегами по работе, руководителями и подчиненными, партнерами, соперниками и конкурентами. Оно предполагает такие способы достижения общих целей, которые не только не исключают, но, наоборот, предполагают также и достижение лично значимых целей, удовлетворение личных интересов.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 2

Веруем в Единого Бога Отца Всемогущего, Творца неба и земли.

Веруем также в Иисуса Христа, Его Единородного Сына и Господа нашего, Который был зачат Духом Святым, рожден девой Марией, Который страдал во времена Понтия Пилата, был распят, умер и был погребен, сошел в царство смерти, на третий день воскрес из мертвых, вознесся на Небо и воссел одесную Всемогущего Бога Отца, откуда вернется судить живых и мертвых.

Веруем также во Святого Духа, Святую Соборную Церковь, собрание святых, в прощение грехов, воскресение мертвых и жизнь вечную.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 3

В Горном университете прошел День открытых дверей. На площадке перед Большим актовым залом – Залом УГМК развернулся настоящий наукоград: кроме презентации различных направлений подготовки, школьников ждали специализированные мастер-классы.

Об основах робототехники будущим абитуриентам рассказывали сотрудники кафедры горных машин и комплексов и робот Герман. О далеких экспедициях и романтике походов – студенты-геологоразведчики. У стенда **Уральского геологического музея** ребята рассматривали минералы под микроскопом, а вместе с инструкторами **студенческого патриотического центра «Святогор»** учились основам безопасного обращения с оружием.

---

[6] Задание может быть выполнено как тестовое.

Всего на **День открытых дверей** в **Горный университет** пришли около тысячи школьников. Многие из них уже серьезно задумались о том, чтобы стать частью дружной семьи горняков.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 4

В соответствии с Федеральным законом от 18.06.2001 N 77-ФЗ «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», Постановлением Правительства РФ от 25.12.2001 N 892 «О реализации Федерального закона «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», санитарно-эпидемиологическими правилами СП 3.1.2.3114-13 «Профилактика туберкулеза» и в целях раннего выявления заболеваний органов грудной клетки среди студентов и сотрудников университета

ПРИКАЗЫВАЮ:

Организовать с 10 апреля по 12 мая 2017 года флюорографический профилактический осмотр студентов и сотрудников университета в передвижном цифровом флюорографическом кабинете, установленном во дворе I учебного здания, с предъявлением каждым студентом и сотрудником копии полиса обязательного медицинского страхования.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 5

Страны, которые являются участниками процесса торговли минеральным сырьем, решают разные задачи, что отражается на структуре их экономики, влияет на характер воспроизводственных процессов, порождает специфические для каждой страны проблемы. Взаимодействие экспортеров и импортеров сырья накладывает отпечаток на международные отношения, являясь причиной возникновения конфликтов, создания экономических и военно-политических союзов. Стремление к поддержанию и расширению экспорта вызывает дополнительные потребности в производстве сырья внутри страны, в развитии минерально-сырьевой базы. Импорт сырья следует рассматривать как источник удовлетворения потребностей и стимулирование развития несырьевых отраслей.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 6

Отец наш шибко тада заболел // У него было очень больное сердце // А что такое больное сердце в те годы / это же неизлечимая болячка! Он работал у нас мастером в заводе / в формовочном цехе / где делались изделия для сталелитейного завода / для нижнетагильского // Ковшовые кирпичи / розетки / воронки всякие / сифоны / вообщем / всякая всячина // Всё было для фронта / всё для победы // Щас этого никто не понимает / особенно нынешняя молодёжь // Какие же тяжёлые дни пережило наше поколение! И не дай вам Бог узнать / что такое война! Да даже твои родители ещё воспитывались в этом послевоенном духе // Ну да ладно / всё равно меня трудно понять…

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 7

Реклама работает на подсознательном уровне, обращается к иррациональному в природе человека. Ее влияние и глубже и сильнее, чем мы думаем, потешаясь над каким-нибудь слабоумным персонажем вроде пропагандиста бытовой техники. Кого и в чем может убедить этот шут гороховый? Оказалось – нас. Но не в том, что его товары дешевле и лучше, а совсем в другом – в преимуществе нового образа жизни.

От рекламы не требуется реализма. Задавая высокие нравственные стандарты, она порождает особое позитивное мышление. Задача рекламы состоит в том, чтобы потребитель подсознательно стремился отождествить себя с героем «коммершелз». Тогда он купит сковородку не для того, чтобы жарить яичницу, а для того, чтобы стать участником идеальной экранной жизни.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 8

Наутро поднявшееся яркое солнце быстро съело тонкий ледок, подернувший воды, и весь теплый воздух задрожал от наполнивших его испарений отжившей земли. Зазеленела старая и вылезающая иглами молодая трава, надулись почки калины, смородины и липкой спиртовой березы, и на обсыпанной золотым светом лозине загудела выставленная облетавшаяся пчела. Залились невидимые жаворонки над бархатом зеленей и обледеневшим жнивьем, заплакали чибисы над налившимися бурою неубравшеюся водой низами и болотами, и высоко пролетели с весенним гоготаньем журавли и гуси. Заревела на выгонах облезшая, только местами еще не перелинявшая скотина, заиграли кривоногие ягнята вокруг теряющих волну блеющих матерей, побежали быстроногие ребята по просыхающим, с отпечатками босых ног тропинкам, затрещали на пруду веселые голоса баб с холстами, и застучали по дворам топоры мужиков, налаживающих сохи и бороны. Пришла настоящая весна.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 9

К нашему большому сожалению, мы должны сообщить Вам, что партия лакокрасочных материалов, отгруженных Вами на судне «Ленинград» по контракту 27-005/40289, не соответствует по качеству нашим спецификациям, на основании которых был заключен контракт.

Согласно параграфу № 03 в договоре, мы имеем право отказаться от приемки этой партии товара. Однако, принимая во внимание наши длительные деловые отношения и то обстоятельство, что предыдущие поставки лакокрасочных материалов в счет данного контракта были произведены в соответствии с условиями договора и надлежащего качества, мы согласны принять эту партию товара, если Вы предоставите нам скидку в 10 %.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 10

Человек должен быть широк. Из универсализма вытекает креативность, а ЕГЭ не обеспечивает ни того, ни другого. Даже те ребята, которые прекрасно сдали тесты по выбранным предметам, далеко не всегда в состоянии объяснить, откуда взялись все эти ответы, вывести их самостоятельно. А предложение «докрутить» чуть дальше и глубже вообще ставит в тупик: «Почему вы у нас спрашиваете то, что вы нам не рассказали?» Но креативность как раз и состоит в умении давать такие ответы. Учащийся – это же не шляпа, в которую положили кролика, чтобы его же и достать. Это неинтересно.

Убрать ЕГЭ нельзя. Но если оставить все как есть, мы обречены на дальнейшее отставание в науке, в любых творческих профессиях. Поэтому необходимо уточнить функционал ЕГЭ. А для этого надо все же назвать кошку кошкой и понять, что такое образование.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 11

На религию после революции 1917 года было наложено так называемое табу. Христианское вероисповедание и все реалии, связанные с ним, воспринимались только как культурное наследие и пережиток царского режима. Соборы и церкви были лишь памятниками архитектуры, жития святых – памятниками литературы, иконы и фрески – памятниками художественного творчества. Очень многие храмы были разрушены или применялись не по своему прямому назначению; они становились складами, конторами, монастыри превращались в тюрьмы и колонии. Люди, особенно священнослужители, преследовались за свою веру. Как следствие, лексика религиозного характера со временем стала постепенно переходить в пассивный состав языка, используясь в основном в составе фразеологизмов и афоризмов (<u>как Бог на душу положит</u>; <u>как у Христа за пазухой</u>; <u>человек предполагает, а Бог располагает</u>). Некоторые слова изменили свою семантику (<u>воскресение</u>, <u>братия</u>), многие приобрели в современном русском языке отрицательную окраску (<u>вертеп</u>).

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

ТЕМА 10. НАУЧНЫЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой научного стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности научных текстов.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Научный стиль – один из важнейших функциональных стилей литературного языка, относящийся к письменно-книжному типу речи и обслуживающий сферу науки и производства. Цель текста научного стиля может заключаться в передаче объективной информации о природе, человеке и обществе, доказательстве ее новизны, истинности или ценности.

Основные стилевые черты научного стиля:

– **объективность**, которая проявляется в изложении разных точек зрения на рассматриваемую проблемы, в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения, в сосредоточенности на предмете высказывания;

– **логичность**, которая проявляется в последовательности и непротиворечивости изложения научной теории и создается с помощью особых синтаксических конструкций (сложные предложения с придаточными причины, условия, следствия; предложения с вводными словами *во-первых, во-вторых, наконец, итак, следовательно* и др.);

– **доказательность**, которая проявляется в цепочке рассуждений, аргументации определенных положений и гипотез;

– **точность**, которая достигается благодаря использованию терминов (т. е. слов и словосочетаний, обозначающих понятия особой области знания или деятельности), однозначных слов; четким оформлением синтаксических связей;

– **обобщенность** и **отвлеченность**, которые проявляются в отборе слов (преобладание имен существительных над глаголом, общенаучные слова, имена существительные с абстрактным значением, конкретные существительные в обобщенном значении), в употреблении грамматических форм (глаголы настоящего времени во «вневременном» значении, возвратные и безличные глаголы, преобладание форм 3-го лица, форм несовершенного вида), в использовании синтаксических конструкций (неопределенно-личные предложения, страдательные обороты), в существовании авторского «мы», характерного только для научного стиля;

– **насыщенность фактической информацией**;

– **отсутствие выражения эмоций** (отсутствуют разговорные элементы, эмоционально-экспрессивная лексика, неполные конструкции и т. п.).

Основные языковые особенности научного стиля:

Языковые особенности	**Примеры**
Лексические	
1) термины	*обогащение полезных ископаемых, месторождение, осадочные породы, смешанослойный минерал, рудное тело* и др.
2) общенаучная лексика	*закон, теория, аспект, носитель, конструкция* и др.
3) книжная лексика абстрактного значения	*применение, явление, замедление, обязательство, подготовка* и др.
Морфологические	
1) частотность существительных	(Примерно 40 % существительных на единицу текста)

2) частотность форм родительного падежа существительных	*попадание в водоемы масло-смазывающих продуктов* (род. п.) *отдельных узлов* (род. п.) *механического оборудования* (род. п.) *гидротехнических сооружений* (род. п.) и т. п.
3) широкое использование существительных среднего рода	*отношение, употребление, дело, доказательство, заполнение* и др.
4) преобладание глаголов несовершенного вида настоящего времени	*равняется, оказывается, возрастает, наблюдается, составляет* и др.
5) полузнаменательные глаголы-связки	*есть, быть, являться*
6) употребление причастий и деепричастий	*подчеркнутый, обрабатываемый, соответствующий; замечая, решая, сменив* и др.
Синтаксические	
1) вводные слова и конструкции	*вероятно, возможно, таким образом; по словам ученых, по мнению большинства исследователей* и др.
2) бессубъектные конструкции	*карьер был разработан; оборудование было закуплено; проект был одобрен* и др.
3) безличные предложения	*необходимо отметить; следует подчеркнуть; можно сделать ряд выводов* и др.
4) обобщенно-личные предложения	*подчеркнем следующие положения; выделим важные особенности; отметим ряд недостатков* и др.
5) цепочки однородных членов	*Хорошие каталоги Интернета обеспечивают разнообразный дополнительный сервис: поиск по ключевым словам в базе данных, списки последних поступлений, списки наиболее интересных из них, выдачу случайной ссылки, автоматическое оповещение по электронной почте о свежих поступлениях.*
6) многокомпонентные сложные предложения с союзной связью	*Если эксперимент оправдывает надежды, то гипотеза детализируется и конкретизуется, а затем ставится новый эксперимент.*

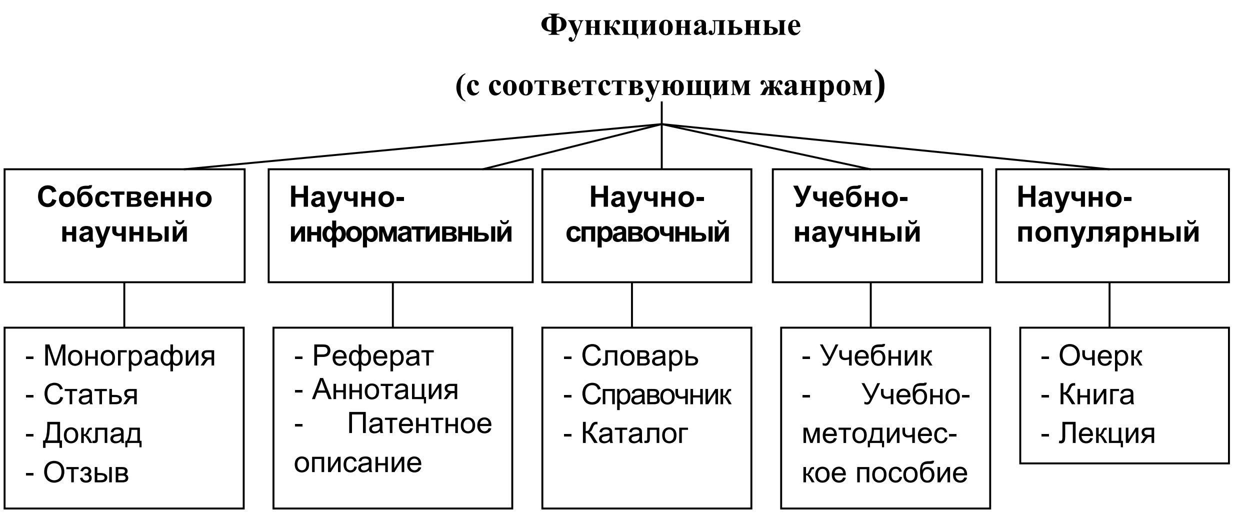
Подстили научной речи:

Тематические

Научно-технический

Научно-естественный

Научно-гуманитарный



Задание 1. *Проанализируйте текст по следующей схеме:*

1. *Охарактеризуйте текст по стилеобразующим факторам научного стиля.*

2. *Докажите принадлежность текста к научному стилю с опорой на основные стилевые черты.*

3. *Определите отнесенность текста к тематическому и функциональному подстилю научного стиля.*

4. *Составьте план текста и сформулируйте главную мысль.*

5. *Выделите в тексте языковые особенности научного стиля.*

Вариант 1: ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ[7]

В геологии существует более ста различных специальностей и специализаций. Одни из них тесно связаны с химией (геохимическое направление), другие – с физикой (геофизическое направление), третьи – с биологией (палеонтологическое и палеобиологическое направления), четвертые – с математикой и кибернетикой (компьютерное моделирование геологических процессов), пятые – с астрономией и астрофизикой (космическая геология) и т. д.

В недрах Земли находятся залежи полезных ископаемых, вопросами поиска и разведки которых занимается геология. На земной поверхности протекают разнообразные геологические процессы, люди возводят здания и различные инженерные сооружения, строят транспортные магистрали. Задачей геологов является обеспечение их устойчивости и безопасного функционирования. Правильное решение этих двух основных практических задач немыслимо без глубокого знания общих закономерностей строения и развития отдельных геосфер. Раскрытие данных закономерностей и познание лежащих в их основе причин невозможны без изучения всей Земли, так как наша планета представляет собой единую природную среду и развивается так же, как и все планеты Солнечной системы.

Знание происхождения и эволюции Земли, условий образования и развития земной коры, ее строения и состава во взаимодействии с внешними оболочками – водной (гидросферой) и воздушной (атмосферой), а также с внутренними оболочками – земным ядром и мантией – составляет необходимое звено мировоззрения. Оно позволяет понять, как

[7] Геология: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Н. В. Короновский, Н. А. Ясаманов. – 7-е изд., перераб. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 6-7.

осуществляется постепенный переход от неживого неорганического мира к органическому, как эволюционируют живые существа и вместе с ними изменяются геологические процессы.

Велико и познавательно значение геологии как науки о Земле, ее строении, происхождении и развитии. Она затрагивает проблемы происхождения и эволюции жизни и природных условий. Геология всегда стояла в центре ожесточенной борьбы научных воззрений и научных школ против религиозных предрассудков.

Практическое значение геологии огромно и разнообразно. Весь арсенал современной науки и техники основан на использовании продуктов земных недр – нефти, угля, различных металлов, строительных материалов, подземных вод и др. Воды минеральных источников используют в лечебных и бальнеологических целях. Для поисков, разведки и извлечения разнообразного минерального сырья из земных недр требуется прежде всего разработка методов обнаружения залежей полезных ископаемых, которые необходимы для промышленности, сельского хозяйства и строительства.

Среди полезных ископаемых различают рудные, или металлические, из которых добывают различные металлы, и нерудные, или неметаллические. Из последних добывают удобрения, каменную соль, серу, строительные материалы, драгоценные (алмаз, рубин, сапфир, изумруд), полудрагоценные (аметист, циркон, топаз, цитрин, нефрит, малахит и др.) и поделочные камни (яшма, кварциты и др.), а также горючие полезные ископаемые (нефть, каменный и бурый уголь, горючие сланцы, газ). Подземные воды (пресные и минеральные) также являются полезными ископаемыми. Поисками залежей подземных вод и практическим их использованием занимается специальная отрасль геологии – гидрогеология. В особые научные дисциплины выделились геология рудных и геология нерудных месторождений, геология горючих полезных ископаемых. Без знания геологического строения территории не обходится ни одно строительство промышленных и гражданских зданий, транспортных магистралей, трубопроводов и средств связи. Эта особая отрасль геологии именуется инженерной геологией. Работами, проводимыми в районах развития многолетней мерзлоты, занимается такая наука, как мерзлотоведение.

Все перечисленные специальные научные дисциплины образуют самостоятельный раздел геологии, который называется *практической,* или *прикладной*, геологией.

ВАРИАНТ 2: ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ[8]

Современная мировая экономика характеризуется неуклонным ростом потребления минерального сырья, расширением круга используемых в промышленности элементов, вовлечением в производство новых типов месторождений полезных ископаемых. Укрепление и совершенствование минерально-сырьевой базы России – основная задача геологической службы.

Обеспечение ресурсами и запасами не только действующих отраслей горнодобывающей промышленности, но и ее перспективных направлений требует оперативного решения проблемы освоения новых видов полезных ископаемых. Успешное осуществление геолого-разведочных работ возможно лишь при условии постоянного совершенствования теории и методов поисков и разведок месторождений полезных

[8] Геология и разведка месторождений полезных ископаемых: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / [В. В. Авдонин, В. В. Мосейкин, Г. В. Ручкин и др.]; под ред. В. В. Авдонина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 5-6.

ископаемых. Результативность геолого-разведочной отрасли определяется уровнем научных и методических разработок, степенью использования современных поисково-разведочных средств.

Научные основы поисков и разведок месторождений полезных ископаемых созданы трудами нескольких поколений отечественных геологов, среди которых в первую очередь необходимо назвать Г. Д. Ажгирея, Я. Н. Белевцева, А. Г. Бетехтина, Ю. А. Билибина, П. П. Бурова, А. Б. Каждана, В. М. Крейтера, В. А. Обручева, А. П. Прокофьева, В. И. Смирнова, С. С. Смирнова, А. А. Якжина и др.

Многими ведущими учеными были написаны замечательные учебники и методические руководства по поискам и разведкам месторождений, не утратившие своего значения до настоящего времени. Тем не менее в последние годы произошли существенные изменения в самой структуре минерально-сырьевой базы, оценке перспектив использования природных ресурсов и методов их вовлечения в промышленное использование.

В геолого-разведочной отрасли можно отметить несколько областей, в которых наблюдаются наиболее значимые изменения.

Во-первых, это касается совершенствования теории и методики поисковых работ. Во-вторых, широкое внедрение компьютерных технологий во все направления геолого-разведочного процесса качественно изменило методику подсчета запасов и оценки месторождений на всех стадиях их освоения.

Существенные изменения происходят и в методике добычных работ, в особенности в связи с требованиями экологической безопасности.

Наконец, необходимо учитывать еще одно важное обстоятельство. Наряду с неуклонно возрастающей потребностью в различных видах минерального сырья отчетливо проявляется тенденция истощения минерально-сырьевой базы, снижения открываемости новых месторождений, вовлечения в промышленное производство неблагоприятных по геологической позиции месторождений и руд более низкого качества. Эти причины стимулируют повышенный интерес к минерально-сырьевому потенциалу Мирового океана. Вследствие интенсификации научно-исследовательских и поисково-разведочных работ в океане в последние годы сложилась качественно новая ситуация – возникла необходимость решения проблем освоения минерально-сырьевых ресурсов океана в практической плоскости, что ознаменовалось интенсивными усилиями по разработке теоретических основ, методики и технических средств морских геолого-разведочных работ.

Авторский коллектив настоящего учебника постарался отразить в нем все важнейшие достижения, касающиеся поисков, разведки и эксплуатации месторождений и характеризующие современное состояние геолого-разведочной отрасли.

Вариант 3: ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА[9]

Полезные ископаемые, располагающиеся в земной коре в пределах территории страны, образуют ее минерально-сырьевую базу. Эти природные ресурсы называют богатством недр государства.

---

[9] Городниченко В. И., Дмитриев А. П. Основы горного дела: учебник для вузов. М.: Издательство «Горная Книга», Издательство московского государственного горного университета, 2008. С. 7-8.

Добычу полезных ископаемых обеспечивают горно-добывающие отрасли промышленности, перспективы развития которых зависят прежде всего от состояния природных ресурсов. Их освоение играет важнейшую роль в развитии экономики России.

В нашей стране выявлены в промышленных концентрациях все виды минерального сырья, используемого в мировой практике.

Оценка прогнозных ресурсов, которую сегодня осуществляют в основном до глубины освоенных промышленностью недр, составляющей для твердых полезных ископаемых около 1 км, свидетельствует о том, что в России в обозримом будущем исчерпания минеральных ресурсов не предвидится, тем более что результаты исследований сверхглубоких скважин подтверждают наличие промышленных концентраций полезных компонентов на глубинах до 10 км.

По данным Министерства природных ресурсов России, в нашей стране 60–70 % запасов важнейших видов полезных ископаемых сосредоточено в ограниченном числе крупных месторождений. В настоящее время сохраняют свое значение освоенные крупные месторождения полезных ископаемых и имеют большие перспективы развития месторождения в регионах Сибири, Дальнего Востока и Севера.

В Сибири находится около 84 % разведанных запасов угля России (категории А, В, Сi), из них бурых и каменных углей примерно поровну. В этих запасах сосредоточено до 90 % коксующихся углей России и около 85 % особо ценных для коксования углей марок ГЖ, Ж, КЖ, К, ОС.

В настоящее время в Сибири, включая республику Саха, добывается около 70 % углей России. Как считают эксперты, этот показатель будет возрастать в связи с сокращением добычи угля в европейской части страны, а также на Урале и Дальнем Востоке. Можно предположить, что основная роль в обеспечении потребностей страны в углях в будущем будет принадлежать Кузбассу.

Повышение эффективности производства имеет особое значение для горно-добывающих отраслей промышленности, которые обеспечивают топливом, минеральным сырьем и материалами многие отрасли экономики страны: черную и цветную металлургию, энергетику, химическую, строительных материалов, сельское хозяйство и др.

Результаты работы горных предприятий в значительной степени определяют уровень эффективности производства во всех других отраслях, потребляющих их продукцию.

Так, в общих затратах на производство цветных металлов затраты на добычу руды составляют более 50 %. В затратах на производство электроэнергии 60–70 % составляют затраты на топливо.

Повышение эффективности горного производства должно осуществляться путем его технического перевооружения, обеспечивающего снижение затрат на производство продукции, повышение качества продукции, экономное и рациональное использование трудовых и материальных ресурсов, комплексное освоение богатства земных недр.

Задание 2. *Отредактируйте предложения таким образом, чтобы они соответствовали научному стилю, запишите исправленный вариант. Определите, с чем связаны допущенные ошибки.*

1. В своей курсовой работе я хотел бы ответить на очень актуальные в наше нелегкое время вопросы. **2.** Авторы этих статей абсолютно неправильно думают, что только их точка зрения имеет право на существование. **3.** Выводы оказались неожиданными, на первый взгляд просто сумасшедшими. **4.** Однако вначале необходимо разобраться, есть ли угроза энергетического голода. **5.** Мне кажется, что первый способ решения проблемы более целесообразный. **6.** Стоит представить, а какой будет польза от этого изобретения. **7.** Компьютерный вирус – это сильный паразит! **8.** Современное состояние экономики, энергетики и экологии выдвигает необходимость проведения интердисциплинарных исследований. **9.** Это приводит к необходимости изыскания и выделения огромных усилий общества, чтобы противостоять результатам экологически опасных действий. **10.** В настоящее время сетевые технологии претерпевают бурное развитие. **11.** Свобода в современной России – это не столько свобода сотрудничества и доброжелательного диалога, как своевольное навязывание своего понимания свободы ради сокрушения чужой. **12.** Математическая модель включала в себя систему уравнений, описывающая течение газа около криволинейной поверхности. **13.** Земля должна рассматриваться как некая квазизамкнутая система, ресурс жизнеобеспечения которой большой, но ограничен. **14.** Изучение новых материалов дает свои плоды. **15.** Используя метод аналогий, на кафедре систем управления разработан комплекс программных средств для изучения систем путем их моделирования.

ТЕМА 11. ОФИЦИАЛЬНО-ДЕЛОВОЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой официально-делового стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности документов, их жанр, видеть реквизиты.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Официально-деловой стиль – это стиль, который обслуживает правовую и административно-общественную сферы деятельности. Он используется при написании документов, деловых бумаг и писем в государственных учреждениях, суде, а также в разных видах делового устного общения.

Среди книжных стилей официально-деловой стиль выделяется относительной устойчивостью и замкнутостью. С течением времени он, естественно, подвергается некоторым изменениям, но многие его черты: исторически сложившиеся жанры, специфическая лексика, морфология, синтаксические обороты – придают ему в целом консервативный характер.

Основные стилевые черты официально-делового стиля:

– **объективный**, **абстрагированный (неличный) характер изложения**, который проявляется в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения (отсутствуют местоименные и глагольные формы 2-го лица, ограничены – 1-го лица);

– **точность и детальность изложения**, которые не допускают каких-либо разночтений; быстрота понимания не является важной, так как заинтересованный человек в случае необходимости прочитает документ несколько раз, стремясь к полному пониманию;

– **стандартизированность**, **стереотипность изложения**, которая проявляется в том, что разнородные явления жизни в официально-деловом стиле укладываются в ограниченное количество стандартных форм (*анкета, справка, инструкция, заявление, деловое письмо* и т. д.);

– **долженствующе-предписующий характер изложения**, т. е. **волюнтативность** (выражение воли), которая в текстах выражается семантически (подбором слов) и грамматически (формы первого лица глагола – *предлагаю*, *приказываю*, *поздравляю*; формами должествования – *надлежит*, *необходимо*, *следует*, *предлагается*);

– **отсутствие выражения эмоций и оценок** (не употребляются эмоционально-экспрессивные средства).

Эти черты находят свое выражение 1) в отборе языковых средств (лексических, морфологических и синтаксических); 2) в оформлении деловых документов.

Основные языковые особенности официально-делового стиля:

Языковые особенности	Примеры
Лексические	
1) языковые штампы (канцеляризмы, клише)	*ставить вопрос, на основании решения, по собственному желанию, по семейным обстоятельствам, входящие-исходящие документы, контроль за исполнением возложить, по истечении срока* и др.
2) профессиональная терминология	*недоимка, алиби, черный нал, теневой бизнес, жилищный найм, прокурорский надзор, единовременное пособие* и др.
3) архаизмы	*оным удостоверяю, сей документ, в надлежащем виде, во избежание* и др.
4) тяготение к использованию родовых понятий с широкой и бедной семантикой	*прибыть* (вместо *приехать, прилететь, прийти* и т. д.), *транспортное средство* (вместо *автобус, самолет, «Волга»* и т. д.), *населенный пункт* (вместо *деревня, город, село* и т. д.), *помещение (вместо: квартира, цех, ангар, вестибюль, кров, обитель, апартаменты и т. д.)*
Морфологические	
1) существительные-названия людей по признаку, обусловленному действием	*налогоплательщик, ответчик, арендатор, свидетель* и др.
2) существительные, обозначающие должности и звания в форме мужского рода	*сержант полиции Ушакова, инспектор Неверова, ответчик Прошина* и др.
3) отглагольные существительные с частицей *не-*	*нелишение, неявка, несоблюдение, непризнание* и др.
4) производные предлоги	*в связи, в течение, за счет, в силу, по мере, в отношении, на основании* и др.
5) инфинитивные конструкции	*провести осмотр, оказать помощь, доказать невиновность* и др.
6) глаголы настоящего времени в значении обычно производимого действия	*обвиняемому обеспечивается право на защиту, за неуплату взимается штраф* и др.

7) сложные слова, образованные от двух и более основ	*бракосочетание, правонарушение, налогообложение, землепользование, пассажироперевозки, дачевладелец, нетрудоспособность, работодатель, квартиросъемщик, материально-технический, осенне-зимний, ремонтно-эксплуатационный, вышеуказанный, нижепоименованный* и др.
8) нанизывание существительных с суффиксом -*ние*	*Приготовлением к преступлению признается приискание и приспособление средств или орудий или умышленное создание условий для совершения преступлений*....
9) гигантский пласт официальных наименований номенклатуре учреждений, профессий, должностей и т. п.	*Российское акционерное общество «Единая энергетическая система России», Открытое акционерное общество «Нефтяная компания «Лукойл», Всероссийский научно-исследовательский институт документоведения и архивного дела, главный научный сотрудник, заместитель командира полка по инженерной службе, главный специалист сектора делопроизводства компании, председатель Военной коллегии Верховного Суда Российской Федерации, депутат Государственной Думы РФ и др.*
10) широкое использование аббревиатур	*РФ, МИД, МЧС, ФСБ, РЖД, Сбербанк, МОК, СМИ, РПЦ, УГГУ, ЕГЭ, ОСАГО, ТРЦ, ТК, УФМС, МОУ, ФГБОУ, ГТО, ГОСТ, ФГОС, КамАЗ, Роспечать и др.*
11) употребление цепочки имен существительных в родительном падеже	*Для применения (род. п.) мер (род. п.) общественного воздействия (род. п.); в целях широкой гласности (род. п.) работы (род. п.) Министерства (род. п.) высшего образования (род. п.); результаты деятельности (род. п.) органов (род. п.) налоговой полиции (род. п.)* и др.
Синтаксические	
1) употребление простых предложений с однородными членами, причем ряды этих однородных членов могут быть весьма распространенными (до 8–10)	*Объектами общей собственности крестьянского хозяйства является имущество: земельный участок, насаждения, хозяйственные или иные постройки, мелиоративные и другие сооружения, продуктивный и рабочий скот, птица, сельскохозяйственная и иная*

	техника, оборудование, транспортные средства, инвентарь и другое имущество и др.
2) наличие пассивных конструкций	*платежи вносятся в указанное время, сроки выплат установлены на год* и др.
3) преобладание сложных предложений, в особенности сложноподчиненных, с придаточными условия	*При наличии спора о размерах причитающихся уволенному работнику сумм администрация обязана уплатить указанное в настоящей статье возмещение в том случае, если спор решен в пользу работника.*

Документ – зафиксированная на материальном носителе информация с реквизитами, позволяющими её идентифицировать.

Форма документа (схема, отражающая семантико-информативную структуру текста) предоставляет в распоряжение его составителя определенный набор **реквизитов** (необходимые элементы оформления документа) и определенную их **композицию** (последовательность и порядок их размещения в тексте). Состав реквизитов, требования к реквизитам и бланкам документов устанавливаются ГОСТом. В настоящее время это ГОСТ Р 6.30-2003 «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов».

	Состав реквизитов документа
1.	Государственный герб Российской Федерации
2.	Герб субъекта Российской Федерации
3.	Эмблема организации или товарный знак
4.	Код организации
5.	Основной государственный регистрационный номер юридического лица (ОГРН)
6.	Идентификационный номер налогоплательщика / код причины постановки на учет (ИНН / КПП)
7.	Код формы документа
8.	Наименование организации
9.	Справочные данные об организации
10.	Наименование вида документа (жанр документа)
11.	Дата составления документа
12.	Регистрационный номер документа
13.	Ссылка на регистрационный номер или дату документа
14.	Место составления или издания документа
15.	Адресат
16.	Гриф утверждения документа
17.	Резолюция
18.	Заголовок к тексту
19.	Отметка о контроле
20.	Текст документа
21.	Отметка о наличии приложения
22.	Подпись

23.	Гриф согласования документа
24.	Визы согласования документа
25.	Оттиск печати
26.	Отметка о заверении копии
27.	Отметка об исполнителе
28.	Отметка об исполнении документа и направлении его в дело
29.	Отметка о поступлении документа в организацию
30.	Идентификатор электронной копии документа

Состав реквизитов конкретного документа определяется его видом и назначением. К наиболее частотным реквизитам можно отнести: **адресата**, **адресанта**, **название жанра документа**, **основной текст документа**, **список приложений**, **дату** и **подпись**. Логическому делению текста способствует его рубрикация, деление на части с помощью внутренних заголовков, подзаголовков, нумерация или графически единообразное выделение всех однотипных частей.

Способы классификации документов:

1. ***По месту составления***: *внутренние* и *внешние* документы. **Внутренний** документ создаётся в рамках одной организации, где работают и составитель, и адресат текста (*приказы администрации предприятия, служебные записки, должностные инструкции* и др). **Внешние** документы предназначаются адресатам, работающим на других предприятиях (*все виды деловых писем, приказы и распоряжения вышестоящих организаций* и др.).

2. ***По содержанию***: *простые* и *сложные*. **Простые** документы посвящены решению одного вопроса (*заявление, объяснительная записка* и другие виды личной документации), **сложные** – двух и более (*приказы*, *письма*, *инструкции*).

3. ***По форме***: *индивидуальные* и *типовые*. **Индивидуальные** документы предполагают некоторую самостоятельность текста и элементы творческого подхода, что не исключает их стандартизованности (*отдельные виды писем, служебных и докладных записок*). **Типовые** документы строятся на базе заранее заданного текста путём видоизменения его отдельных элементов; чаще всего эти документы одинаковы для групп однородных предприятий (*штатное расписание, положение о персонале* и др.). Если в типовом документе постоянные элементы отпечатаны типографским способом, а для переменных предусмотрены пробелы, которые заполняются при его составлении, то такой документ называют **трафаретным** (*анкеты, некоторые виды справок, трудовые договоры*).

4. ***По срокам исполнения***: *срочные* и *бессрочные*. В **срочных** документах содержится указание на выполнение некоторых действий в ограниченный временной период (*распоряжения, указания* и др.). Действие **бессрочных** документов не ограничено временными рамками (*указы, законы, некоторые виды инструкций*).

5. ***По происхождению***: *служебные* и *личные*. **Служебные** документы направлены на реализацию интересов организации (*приказы, деловые письма, контракты*). **Личные** документы, как правило, отражают взаимодействие отдельного физического лица с официальными органами или другими лицами (*заявление, доверенность, расписка, объяснительная записка* и др.).

6. ***По виду оформления***: *подлинник* (подписанный и надлежащим образом оформленный экземпляр документа, составленный в первый раз), *копия* (абсолютно точно

воспроизводит подлинник, но имеет ограниченную юридическую силу, за исключением нотариально заверенных.), *дубликат* (копия, имеющая одинаковую силу с подлинником, выдающаяся в случае его утери) и *выписки* (воспроизведение только одной из частей подлинника).

7. ***По функции***: **организационные** документы, направленные на регламентацию деятельности организации или предприятия (*устав, положение, штатное расписание, положение о персонале, должностную инструкцию*), **распорядительные** документы, содержащие конкретные распоряжения (*приказы, распоряжения, указания, решения*)., **информационно-справочные** документы, документы **по персоналу предприятия** (*трудовой договор, личные карточки, учётные карточки, анкеты*), **письма**, **договоры**.

Задание 1. *Проанализируйте текст официально-делового стиля:*

1. *Укажите характеристику данного текста с точки зрения классификации документов.*

2. *Обозначьте реквизиты и композиционные элементы государственного документа.*

3. *Опишите стилевые и языковые особенности текста*[10].

Федеральный закон от 1 июня 2005 г. N 53-ФЗ
«О государственном языке Российской Федерации»

С изменениями и дополнениями от: 2 июля 2013 г., 5 мая 2014 г.
Принят Государственной Думой 20 мая 2005 года
Одобрен Советом Федерации 25 мая 2005 года

Настоящий Федеральный закон направлен на обеспечение использования государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации, обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации, защиту и развитие языковой культуры.

Статья 1. Русский язык как государственный язык Российской Федерации

1. В соответствии с Конституцией Российской Федерации государственным языком Российской Федерации на всей ее территории является русский язык.

2. Статус русского языка как государственного языка Российской Федерации предусматривает обязательность использования русского языка в сферах, определенных настоящим Федеральным законом, другими федеральными законами, Законом Российской Федерации от 25 октября 1991 года N 1807-I «О языках народов Российской Федерации» и иными нормативными правовыми актами Российской Федерации, его защиту и поддержку, а также обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации.

3. Порядок утверждения норм современного русского литературного языка при его использовании в качестве государственного языка Российской Федерации, правил русской орфографии и пунктуации определяется Правительством Российской Федерации.

4. Государственный язык Российской Федерации является языком, способствующим взаимопониманию, укреплению межнациональных связей народов Российской Федерации в едином многонациональном государстве.

[10] Возможна работа по вариантам: 1 вариант – анализ Статьи 1; 2 вариант – анализ Статьи 3; 3 вариант – анализ статьи 4.

5. Защита и поддержка русского языка как государственного языка Российской Федерации способствуют приумножению и взаимообогащению духовной культуры народов Российской Федерации.

6. При использовании русского языка как государственного языка Российской Федерации не допускается использование слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка (в том числе нецензурной брани), за исключением иностранных слов, не имеющих общеупотребительных аналогов в русском языке.

7. Обязательность использования государственного языка Российской Федерации не должна толковаться как отрицание или умаление права на пользование государственными языками республик, находящихся в составе Российской Федерации, и языками народов Российской Федерации.

<…>

Статья 3. Сферы использования государственного языка Российской Федерации

1. Государственный язык Российской Федерации подлежит обязательному использованию:

1) в деятельности федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности, в том числе в деятельности по ведению делопроизводства;

2) в наименованиях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности;

3) при подготовке и проведении выборов и референдумов;

4) в конституционном, гражданском, уголовном, административном судопроизводстве, судопроизводстве в арбитражных судах, делопроизводстве в федеральных судах, судопроизводстве и делопроизводстве у мировых судей и в других судах субъектов Российской Федерации;

5) при официальном опубликовании международных договоров Российской Федерации, а также законов и иных нормативных правовых актов;

6) во взаимоотношениях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности и граждан Российской Федерации, иностранных граждан, лиц без гражданства, общественных объединений;

7) при написании наименований географических объектов, нанесении надписей на дорожные знаки;

8) при оформлении документов, удостоверяющих личность гражданина Российской Федерации, за исключением случаев, предусмотренных законодательством Российской Федерации, изготовлении бланков свидетельств о государственной регистрации актов гражданского состояния, оформлении документов об образовании и (или) о квалификации установленного в соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2012 года N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» образца, а также других документов, оформление которых в соответствии с законодательством Российской Федерации осуществляется на государственном языке Российской Федерации, при оформлении адресов

отправителей и получателей телеграмм и почтовых отправлений, пересылаемых в пределах Российской Федерации, почтовых переводов денежных средств;

9) в продукции средств массовой информации;

9.1) при показах фильмов в кинозалах;

9.2) при публичных исполнениях произведений литературы, искусства, народного творчества посредством проведения театрально-зрелищных, культурно-просветительных, зрелищно-развлекательных мероприятий;

10) в рекламе;

11) в иных определенных федеральными законами сферах.

1.1. В сферах, указанных в пунктах 9, 9.1, 9.2 и 10 части 1 настоящей статьи, и в иных предусмотренных федеральными законами случаях наряду с государственным языком Российской Федерации могут использоваться государственные языки республик, находящихся в составе Российской Федерации, другие языки народов Российской Федерации, а в случаях, предусмотренных законодательством Российской Федерации, также иностранные языки.

<…>

Статья 4. Защита и поддержка государственного языка Российской Федерации

В целях защиты и поддержки государственного языка Российской Федерации федеральные органы государственной власти в пределах своей компетенции:

1) обеспечивают функционирование государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации;

2) разрабатывают и принимают федеральные законы и иные нормативные правовые акты Российской Федерации, разрабатывают и реализуют направленные на защиту и поддержку государственного языка Российской Федерации соответствующие федеральные целевые программы;

3) принимают меры, направленные на обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации;

4) принимают меры по совершенствованию системы образования и системы подготовки специалистов в области русского языка и преподавателей русского языка как иностранного языка, а также осуществляют подготовку научно-педагогических кадров для образовательных организаций с обучением на русском языке за пределами Российской Федерации;

5) содействуют изучению русского языка за пределами Российской Федерации;

6) осуществляют государственную поддержку издания словарей и грамматик русского языка;

7) осуществляют контроль за соблюдением законодательства Российской Федерации о государственном языке Российской Федерации, в том числе за использованием слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка, путем организации проведения независимой экспертизы;

8) принимают иные меры по защите и поддержке государственного языка Российской Федерации.

<…>

Президент Российской Федерации В. Путин

Задание 2. *Проанализируйте следующий текст*[11]*:*

1. *Обозначьте реквизиты и структурно-содержательные элементы документа.*

2. *Опишите стилевые и языковые особенности.*

3. *Имеются ли в тексте документа средства, не соответствующие требованиям официально-делового стиля? Докажите свою точку зрения.*

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор УГГУ**,** профессор
__________ Н.П. Косарев

РЕГЛАМЕНТ
ношения форменной одежды преподавателями,
сотрудниками и студентами УГГУ

1. Общие положения

Форменная одежда УГГУ – важнейший наряду с флагом и гербом символ корпоративной чести и достоинства, принадлежности преподавателей, сотрудников и студентов к высшему учебному заведению – Уральскому государственному горному университету.

Ношение форменной одежды в установленных случаях является почетным правом и обязанностью (моральным долгом) всех преподавателей, сотрудников и студентов УГГУ, облегченных этим доверием. По решению ректора почетное право ношения форменной одежды предоставляется заслуженным выпускникам.

Отказ от форменной одежды рассматривается как пренебрежение горняцким единством и неуважение к корпоративной символике Уральского государственного горного университета.

2. Руководящий состав университета: члены Ученого совета, включая ректорат, деканов, заведующих кафедрами, представителей студенческого, ветеранского и профсоюзного актива, а также руководителя управления отделов и служб, не входящие в Ученый совет, обязаны носить форму в следующих случаях:

– на всех рабочих совещаниях, проводимых ректором, первым проректором и проректором по научной работе;
– на заседаниях Ученого совета и Президиума Ученого совета университета, ученых советах факультетов;
– на торжественных собраниях сотрудников и студентов, митингах, конференциях, проводимых по планам ректората и деканатов;
– при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и других официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также политическими, общественными и научными организациями.

3. Преподаватели университета, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

– во время лекционных занятий;
– при участии в собраниях студентов, преподавателей, конференциях и митингах;

---

[11] Текст Регламента приводится без изменений и исправлений.

– при посещениях ректората и деканатов.

4. Сотрудники из числа административно-управленческого персонала (помощники ректора, проректоров, референты, секретари) обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

– при нахождении на рабочем месте в дни проведения крупных общеуниверситетских мероприятий, при приеме делегаций, гостей и в иных случаях по распоряжению ректора;
– при участии, в том числе при орг. техническом обеспечении заседании Ученого совета и ректорских совещаний;
– при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

5. Студенты – представители студенческого актива, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде:

– при посещении ректората, деканатов;
– на всех официальных мероприятиях, проводимых в университете;
– при участии в официальных мероприятиях, проводимых вне стен университета органами власти, политическими, общественными, научными и образовательными учреждениями.

6. По собственной инициативе студенты, сотрудники и преподаватели университета могут находиться в форменной одежде во всех случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и ее функциональному назначению.

Ученый секретарь совета, профессор О. В. Ошкордин
28.09.2005 г.

Задание 3. *Проанализируйте текст*[12] *с точки зрения использованных языковых средств, характерных для официально-делового стиля. Опишите средства, с помощью которых в тексте реализуется такая стилевая черта, как волюнтативность.*

Есть ли в Правилах отступления от требований официально-делового стиля? Подтвердите свою точку зрения, опираясь на текст документа.

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор ФГБОУ ВПО "УГГУ"
Н.П.Косарев
2014 г.

Правила внутреннего распорядка обучающихся
в ФГБОУ ВПО «Уральский государственный горный университет»
Дата введения 01 сентября 2014 года

<…>

5. Основные права и обязанности обучающихся

[12] Текст Правил внутреннего распорядка приводится без изменений и исправлений.

5.1 Права обучающихся

Обучающиеся в университете имеют право:

– получать образование в соответствии с ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) обучаться в пределах этих стандартов по индивидуальным учебным планам, ускоренным курсам обучения;

– бесплатно пользоваться библиотечно-информационными ресурсами, получать дополнительные (в том числе платные) образовательные услуги;

– участвовать в управлении университетом;

– свободно выражать собственные мнения и убеждения;

– выбирать факультативные (необязательные для данного направления подготовки (специальности) и элективные (избираемые в обязательном порядке) курсы, предлагаемые факультетом и кафедрой;

– участвовать в формировании содержания своего образования при условии соблюдения требований ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) среднего профессионального и высшего образования; указанное право может быть ограничено условиями договора, заключенного между студентом и физическим или юридическим лицом, оказывающим ему содействие в получении образования и последующем трудоустройстве;

– осваивать помимо учебных дисциплин по избранным направлениям подготовки (специальностям) любые другие учебные дисциплины, преподаваемые в университете, в порядке, предусмотренном Уставом, а также преподаваемые в других высших учебных заведениях (по согласованию между их руководителями);

– определять по согласованию с деканатом и кафедрами набор дисциплин по специальности в пределах, установленных учебным планом, а также посещать дополнительно любые виды учебных занятий, проводимых в университете;

– ставить перед деканом и ректором, руководителем территориально обособленного учебного подразделения вопрос о замене преподавателей, не обеспечивающих должное качество учебного материала, нарушающих расписание занятий, иные правила организации учебно-воспитательного процесса;

– участвовать в обсуждении и решении важнейших вопросов деятельности университета и его обособленных структурных подразделений, в том числе через общественные организации и органы управления;

– бесплатно пользоваться услугами учебных, научных, лечебных и других подразделений университета в порядке, установленном Уставом;

– принимать участие во всех видах научно-исследовательских работ, конференциях, симпозиумах;

– совмещать учебу с профессиональной деятельностью и иной работой;

– представлять свои работы для публикации, в том числе в изданиях университета;

– обжаловать приказы и распоряжения администрации высшего учебного заведения в установленном законодательством РФ порядке;

– переходить с платного договорного обучения на бесплатное обучение в порядке, предусмотренном Уставом университета;

– получать от университета информацию о положении дел в сфере занятости населения и возможностях трудоустройства по специальности в соответствии с заключенными договорами и законодательством о занятости выпускников образовательных учреждений.

Обучающиеся в университете по заочной форме, выполняющие учебный план, имеют право на дополнительный оплачиваемый и не оплачиваемый отпуск по месту работы, на сокращенную рабочую неделю и на другие льготы, которые предоставляются в порядке, устанавливаемом законодательством РФ (ст. 173-176 ТК РФ).

Обучающиеся в университете имеют право на свободное посещение мероприятий, не предусмотренных учебным планом.

Обучающиеся в университете имеют право на перевод в другое образовательное учреждение, реализующее образовательную программу соответствующего уровня, при согласии этого образовательного учреждения и успешном прохождении ими аттестации.

Обучающиеся в университете по очной форме обучения имеют право на получение отсрочки от призыва на военную службу в соответствии с Федеральным законом «О воинской обязанности и военной службе».

5.2 Обязанности обучающихся

Обучающиеся в университете обязаны:

– добросовестно посещать учебные занятия, глубоко овладевать теоретическими знаниями, практическими навыками и современными методами для работы по избранной специальности;

– выполнять в установленные сроки все виды заданий, предусмотренных соответствующими учебными планами и программами обучения;

– постоянно повышать общую культуру, нравственность и физическое совершенство;

– нетерпимо относиться к недостаткам в учебно-воспитательном процессе и быту;

– бережно и аккуратно относиться к учебным и иным помещениям, оборудованию, учебным пособиям, литературе, приборам, другому имуществу университета; без соответствующего разрешения студентам запрещается выносить предметы и оборудование из лабораторий, кабинетов, аудиторий, учебных, бытовых корпусов и других помещений;

– нести материальную ответственность за ущерб, причиненный имуществу университета в соответствии с нормами действующего законодательства;

– незамедлительно сообщать в администрацию университета о возникновении ситуации, представляющей угрозу жизни и здоровью людей, сохранности имущества университета;

– соблюдать требования Устава университета, настоящие Правила и Правила проживания в общежитиях;

– поддерживать деловую репутацию, честь и престиж университета.

Обучающиеся в территориально обособленном учебном подразделении университета (филиале) помимо указанных выше правомочий пользуются правами и исполняют обязанности, предусмотренные Положением о соответствующем структурном подразделении или договорами о профессиональной подготовке, включая договоры на индивидуальную подготовку специалиста.

При неявке на занятия по уважительным причинам обучающийся ставит об этом в известность декана факультета, руководителя (уполномоченного работника) иного учебного структурного подразделения и в первый день явки на учебу представляет данные о причине неявки и документы установленного образца (справки, письма, телеграммы и т. п.), содержащие сведения оправдательного характера.

5.3 Требования к ношению формы

Обучающиеся в университете должны быть дисциплинированными и опрятными, вести себя достойно в университете, на улице, в общественном месте и в быту. В соответствии с решением Ученого совета университета от 25.06.2004 года, обучающиеся обязаны носить форменную одежду в ниже перечисленных случаях:

– на всех совещаниях, проводимых ректором, проректорами и деканами факультетов;

– на торжественных собраниях коллектива, митингах и конференциях;

– при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и иных официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также общественными и научными организациями, на которых обучающиеся университета являются его представителями;

– при участии, в т. ч. организационно-техническом обеспечении заседаний Ученого совета университета и ректорских совещаний; при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

– в иных случаях по распоряжению ректора.

По собственной инициативе обучающиеся университета могут находиться в форменной одежде в иных случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и её функциональному назначению.

Запрещается ношение предметов формы одежды измененных или неустановленных образцов, а также знаков различия, не предусмотренных Положением о форменной одежде.

<…>

ТЕМА 12. ОФОРМЛЕНИЕ ДЕЛОВЫХ БУМАГ

Цель – научиться оформлять основные жанры деловых бумаг.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (требуется записать определение, основные реквизиты и образец):

Заявление – это документ, содержащий просьбу, предложение или жалобу какого-либо лица.

Заявление, как и большинство деловых бумаг, составляется в произвольной форме от руки или печатается на листе бумаги формата А4.

Основные реквизиты заявления:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Сведения об адресате (должность, ФИО полностью, в некоторых случаях адрес или другая контактная информация).

3. Наименование жанра документа.

4. Основной текст заявления с точным изложением просьбы, предложения или жалобы.

5. Опись приложений к документу, если они имеются.

6. Дата.

7. Подпись.

Образец оформления заявления

Декану ФГиГ
проф. Талалаю А. Г.
от студента группы МПГ-20
Волкова Михаила Владимировича

Заявление

Прошу отпустить меня с занятий на 3 дня с 25 по 27 октября 2021 года в связи с участием в областных соревнованиях по футболу.

Копию справки-вызова прилагаю.

01.10.2021 г.

Доверенность – это документ, выдаваемый одним лицом (доверителем) другому лицу (доверенному) для представительства перед третьими лицами и дающий право доверенному лицу действовать от имени доверителя.

Доверенность предоставляет полномочия доверенному лицу предпринимать за доверителя какое-либо действие. В зависимости от вида полномочий различают три вида доверенности: 1) **разовая** (дает право на совершение одного конкретного действия), 2) **специальная** (дает право на совершение однородных действий), 3) **генеральная** (дает право на общее управление имуществом доверителя).

Основные реквизиты разовой доверенности:

1. Наименование жанра документа.

2. Наименование доверителя (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

3. Наименование доверенного лица (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

4. Формулировка доверяемой функции.

5. Дата.

6. Подпись.

Образец оформления разовой доверенности

Доверенность

Я, Зорянова Евгения Михайловна, студентка группы ВД-19 (паспорт: серия 3209 № 345177, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Чкаловском районе гор. Екатеринбурга 09.06.2009 г., проживающая по адресу: г. Екатеринбург, ул. 8 марта, д. 104, кв. 190), доверяю Соловчуку Сергею Станиславовичу, студенту группы ГМО-17 (паспорт: серия 5404 № 654321, выдан Железнодорожным РУВД г. Ульяновска 13.09. 2008 г., проживающему по адресу: г. Екатеринбург, ул. Сулимова, д. 63, кв. 77), получить в кассе УГГУ мою стипендию за март 2020 года.

25.02.2020 г.

Расписка – это документ, подтверждающий произведенное кем-либо определенное действие (получение ценных предметов).

Расписка всегда составляется от руки. Если она имеет особо важное значение, ее необходимо заверить.

Основные реквизиты расписки:

1. Наименование жанра документа.

2. Наименование лица, получившего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

3. Наименование лица, выдавшего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).

4. Точное наименование полученных ценностей с указанием количества (цифрами и прописью).

5. Дата, до которой необходимо вернуть полученные ценности.

6. Дата.

7. Подпись.

Образец оформления расписки

Расписка

Я, Воробьева Наталия Александровна, студентка группы УП-20 (паспорт: серия 5009 № 2435672, выдан отделом УФМС Ленинского района г. Новосибирска 25.09.2009 г., проживающая по адресу: Свердловская область, г. Первоуральск, ул. Горького, д. 7, кв. 5), получила от Штиппеля Артемия Павловича, инженера кафедры ГД (паспорт: серия 6507 № 575849, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Кировском районе г. Екатеринбурга 05.10.2004 г., проживающего по адресу: г. Екатеринбург, пер. Красный, д. 34, кв. 33), 10 000 (десять тысяч) рублей.

Обязуюсь вернуть указанную сумму до 31 декабря 2020 г.

07 ноября 2020 г.

Докладная записка – это документ, информирующий адресата о сложившейся ситуации, а также содержащий выводы и предложения составителя.

Основной текст докладной записки делится на две части:

- в первой излагаются причины, послужившие поводом для ее написания;
- во второй анализируется сложившаяся ситуация, содержатся выводы и предложения о действиях, которые необходимо предпринять.

Основные реквизиты докладной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Наименование жанра документа.

3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.

4. Опись приложений к документу, если они имеются.

5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).

6. Дата.

Образец оформления докладной записки

Ректору УГГУ
проф. Душину А. В.

Докладная записка

24 декабря 2019 г. примерно в 12.30 я сдал свой пуховик в гардероб 4 учебного корпуса. Через два часа (после окончания праздничных мероприятий) я попытался получить пуховик по бирке, но его не оказалось на вешалке. Студенты, дежурившие в гардеробе в тот день, отказались объяснять, что произошло и куда пропала моя одежда.

Прошу разобраться в сложившейся ситуации и помочь с поисками пуховика.

Описание прилагается.

Студент группы ТБ-17 *   /Вутенко Б. Н./*
25 декабря 2019 г.

Объяснительная записка – это документ, объясняющий причины какого-либо события, факта, поступка (нарушения трудовой или учебной дисциплины, невыполнение задания, поручения и т. д.).

Основной текст объяснительной записки делится на две части:

- в первой излагаются, констатируются факты нарушения;
- во второй объясняются причины нарушения.

Основные реквизиты объяснительной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Наименование жанра документа.

3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.

4. Опись приложений к документу, если они имеются.

5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).

6. Дата.

Образец оформления объяснительной записки

Зав. кафедрой ИЯДК
доц. Юсуповой Л. Г.

Объяснительная записка

05.03.2020 г. я опоздала на практическое занятие по иностранному языку по причине транспортной аварии на перекрестке улиц Малышева и Гагарина.

Выданную транспортным предприятием справку прилагаю.

Студентка группы МЭ-19  */Вайслер Ю. М./*
07.03.2020 г.

Задание 1. *Напишите от своего имени следующие жанры деловых бумаг:*

а) заявление с просьбой продлить Вам сессию на неделю;

б) заявление с просьбой принять Вас на работу;

в) доверенность на получение Вашей стипендии в этом месяце;

г) расписку в получении Вами образцов минералов для выполнения лабораторной работы;

д) докладную записку о пропаже Ваших личных вещей из аудитории;

е) объяснительную записку о пропуске Вами занятий в течение недели;

ж) объяснительную записку о неявке на экзамен.

Задание 2. *Исправьте допущенные ошибки в оформлении и содержании следующих документов. Обратите внимание на нарушение разного типа языковых норм (орфографических, пунктуационных, лексических и грамматических). Запишите исправленный вариант.*

Текст 1

Декану УГГУ
От студента III курса очной формы
обучения факультета горно
технологического
Волк Василия Васильевича

заявление

В связи с отъездом на лидерские сборы очень прошу разрешить не посещать мне занятия на следующей неделе.

09.09.21 г. 

Текст 2

Ректору УГГУ
А. В. Душину

доверенность.

Я, Задорин Виктор, студент УГГУ, даю право на получение получаемой мной стипендии студенту Гудину Александру Геннадьевичу (паспорт 6509 номер 124338, ул. Мира, 90-1).

1.5.20 г. /Задорин В. З./

Текст 3

Кафедре ИЯДК

расписка

Я – Пустник Валентин Тимурович, прошу выдать мне учебные пособия для практических занятий. Автор – Мясникова Юлия Марковна в размере одной штуки. Паспортные данные – серия 6102, номер 879521, УФМС России, дата рождения – 19.02.2000 года, проживаю в городе Лангепас на улице Парковая, 7.

Обязуюсь вернуть в срок.

25 сентября

Текст 4

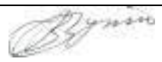
Декану ГМФ
Козину Владимиру
Зиновьевичу

Докладная

Уважаемый Владимир Зиновьевич!

Сегодня я, Курпатова Вера, студентка ГМФ, оставила без присмотра свои вещи в учебной аудитории 2240. При возвращении моих вещей в аудитории не было. Я очень расстроилась.

Пропали: куртка черная кожанная, красная сумка в цветочек, белый платок.



1 октября 2021 года

Текст 5

Зав. кафедры ГТФ Волкову М. Н.
От студента Хлебникова Семена.

Объяснительная о прогуле

Я, Семен Хлебников, отсутствовал на занятиях два месяца всвязи болезни. Справку из 6 городской больницы прилогаю.

01.11.20 *Хлебников С.*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

№ п/п	Наименование
1	*Веселкова Т. В.* Культура устной и письменной коммуникации: учебное пособие / Т. В. Веселкова, И. С. Выходцева, Н. В. Любезнова. – Саратов: Вузовское образование, ИЦ «Наука», 2020. – 264 c. – ISBN 978-5-4487-0707-0. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/94281.html
2	*Культура устной и письменной речи делового человека*: Справочник. Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания).
3	*Меленскова Е. С.* Культура речи и стилистика русского языка: учебное пособие для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 –«Технология геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело». – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. 87 с.
4	*Меленскова Е. С.* Русский язык делового общения: учебное пособие для студентов всех специальностей и направлений подготовки. Екатеринбург: УГГУ, 2018. 80 с.
5	*Меленскова Е. С.* Русский язык и культуре речи: учебное пособие с тестовыми заданиями для студентов специальностей 21.05.02 – «Прикладная геология», 21.05.03 – «Технология геологической разведки», 21.05.04 – «Горное дело» / Е. С. Меленскова. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 98 с.

Дополнительная литература

№ п/п	Наименование
1.	*Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи: учебное пособие для вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 544 с. (и другие стереотипные издания)
2.	*Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю.* Русский язык и культура речи для инженеров: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Феникс, 2003. 384 с.
3.	*Голуб И. Б.* Русский язык и культура речи: учебное пособие / И. Б. Голуб. – Москва: Логос, 2014. – 432 c. – ISBN 978-5-98704-534-3. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/39711.html
4.	*Зверева Е. Н.* Русский язык и культура речи в профессиональной коммуникации: учебное пособие / Е. Н. Зверева, С. С. Хромов. – Москва: Евразийский открытый институт, 2012. – 432 c. – ISBN 978-5-374-00575-2. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/14648.html
5.	*Культура научной и деловой речи*: учебное пособие для студентов-иностранцев / М. Б. Будильцева, И. Ю. Варламова, Н. С. Новикова, Н. Ю. Царёва. – Москва: Российский университет дружбы народов, 2013. – 240 c. – ISBN 978-5-209-05463-4. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/22186.html

6.	*Курганская М. Я.* Деловые коммуникации: курс лекций / М. Я. Курганская. – Москва: Московский гуманитарный университет, 2013. – 121 с. – ISBN 978-5-98079-935-9. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/22455.html
7.	*Лапынина Н. Н.* Русский язык и культура речи: курс лекций / Н. Н. Лапынина. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 161 с. – ISBN 978-5-89040-431-2. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/22667.html
8.	*Меленскова Е. С.* Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 78 с.
9.	*Меленскова Е. С.* Русский язык и культура речи: учебное пособие с упражнениями и контрольными работами для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 80 с.
10.	*Меленскова Е. С.* Стилистика русского языка: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 86 с.
11.	*Петрова Ю. А.* Культура и стиль делового общения: учебное пособие / Ю. А. Петрова. – Москва: ГроссМедиа, 2007. – 190 с. – ISBN 5-476-003-476. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/1129.html
12.	*Решетникова Е. В.* Русский язык в деловых коммуникациях: учебное пособие / Е. В. Решетникова. – Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2018. – 99 с. – ISBN 2227-8397. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/84078.html
13.	*Скворцов Л. И.* Большой толковый словарь правильной русской речи / Л. И. Скворцов. – Москва: Мир и Образование, Оникс, 2009. – 1104 с. – ISBN 978-5-94666-556-8. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/14555.html
14.	*Усанова О. Г.* Культура профессионального речевого общения: учебно-методическое пособие / О. Г. Усанова. – Челябинск: Челябинский государственный институт культуры, 2008. – 93 с. – ISBN 5-94839-062-4. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/56426.html
15.	*Федосюк М. Ю., Ладыженская Т. А., Михайлова О. А., Николина Н. А.* Русский язык для студентов-нефилологов: учебное пособие. М.:Флинта: Наука, 2014 (и другие стереотипные издания)

ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. *ГОСТ 6.30-2003.* «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов» (электронная публикация http://docs.cntd.ru/document/1200031361).

2. *Грамота (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramota.ru.
3. *Культура письменной речи (сайт)* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gramma.ru.
4. *Русский язык*: *энциклопедия русского языка (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://russkiyyazik.ru.
5. *Словари и энциклопедии по русскому языку на Академике (сайт).* [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://dic.academic.ru.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу ____________ С.А. Упоров
14.09.2022

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Б1.О.07 ОСНОВЫ ПРАВОВЫХ ЗНАНИЙ И ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

квалификация выпускника: бакалавр

Автор: Слукин С.В., ст. преподаватель

Одобрены на заседании кафедры
Антикризисного управления и оценочной деятельности
(название кафедры)

Зав. кафедрой ____________ *(подпись)*
Мальцев Н.В.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 04.09.2023
(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
Инженерно-экономического факультета
(название факультета)

Председатель ____________ *(подпись)*
Мочалова Л.А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов бакалавриата по направлению подготовки при организации самостоятельной работы по дисциплине «Основы правовых знаний и финансовой грамотности» в рамках подготовки и защиты контрольной работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки контрольной работы, содержание и порядок ее выполнения, комплект вариантов контрольных работ, требования к ее оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Выполнение контрольной работы в виде расчетной работы практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа представленных материалов, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов, а также принятия нестандартного решения и аргументации собственной точки зрения.

Расчетная работа предполагает творческое осмысление полученного в результате полевого исследования рынка материала, сопоставление различных точек зрения по исследуемой проблеме, выработка собственного решения поставленной задачи и его аргументацию.

Тема контрольной работы – «Прогнозирование рыночной доли на конкурентном рынке». Студенту предоставляется индивидуальное задание в виде результатов анкетирования покупателей. Студенту необходимо обработать анкету, рассчитать необходимые показатели, сделать прогноз долей рынка, оформить и наглядно представить полученные результаты и сделать окончательные выводы.

СОДЕРЖАНИЕ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа должна выполняться в соответствие с вариантом номер которого зависит от начальной буквы фамилии студента.

Вариант 1.
(начальные буквы от «А» до «Е»)

Задание 1. В марте 2022 г. в результате проведения земельным инспектором проверки состояния земельного участка, занимаемого авторемонтным предприятием, расположенного в г. Москве, было выявлено захламление земельного участка и его загрязнение химическими веществами. Какие сведения государственного земельного кадастра должны быть использованы в ходе проведения проверки?

Какие санкции могут быть применены к нарушителю?

Оцените размер ущерба от захламления земельного участка и его загрязнения химическими веществами.

Задание 2. Директор предприятия промышленности издал приказ о переводе работников на неполную рабочую неделю в связи с тяжелой экономической обстановкой. Инженер Сергеев отказался выполнять распоряжение так как считал что такой перевод возможен только с его письменного согласия и продолжил посещать рабочее место в обычном режиме. Какие правовые последствия возникают в данном случае.

Задание 3. Слесарю Дорожкину, с 9 июля по 5 августа 2008 года был предоставлен ежегодный оплачиваемый отпуск продолжительностью 28 календарных дней. В расчетном периоде (по графику пятидневной рабочей недели) был отработан 61 рабочий день и начислено 9900 рублей. С 1 июня в организации произошло увеличение тарифных ставок в 1,5 раза. *Рассчитайте размер отпускных*.

Задание 4. Работнику завода резинотехнических изделий заработная плата за месяц полностью была выдана, изготавливаемыми заводом автомобильными шинами. Члену сельскохозяйственного кооператива половина заработной платы за лето была выдана сельскохозяйственной продукцией. Работнику ликероводочного завода 25% заработной платы за месяц было выдано производимым на заводе бренди. *Дайте правовую оценку возможности такой выплаты заработной платы по каждому из перечисленных случаев.*

Вариант 2.

(начальные буквы от «Ж» до «М»)

Задание 1. Директор торгового центра установил наценку на сахар приобретаемый сверх установленной торговым центром нормы в 50 процентов. Насколько законно установление данной наценки? Опишите механизм привлечения директора к ответственности

Задание 2. В нотариальную контору г. Екатеринбурга обратились супруги Беловы с просьбой удостоверить соглашение, согласно которому после их развода Белов не будет претендовать на раздел совместно нажитого имущества, стороны не будут предъявлять друг другу каких-либо требований по содержанию малолетних детей и Белова до совершеннолетия детей не будет вступать в новый брак. Нотариус отказал в удостоверении соглашения.

Прав ли нотариус? Можно ли обжаловать его действия?

Задание 3. Зиновьев проиграл в карты Анисимову крупную сумму денег. Обязательство вернуть долг было оформлено распиской со сроком возврата через 7 дней после составления расписки. В случае задержки исполнения обязательства Зиновьев должен был выплатить Анисимову штраф в размере половины долга.

Спустя 9 дней с даты составления расписки деньги были возвращены. Поскольку Зиновьев нарушил срок уплаты долга Анисимов обратился в суд с требованием о взыскании штрафа.

Решите дело.

Задание 4. Ворошилов, преподаватель музыкального училища, имел в собственности скрипку Страдивари. Желая, чтобы скрипка после его смерти досталась самому талантливому из его учеников Углову, Ворошилов составил с Угловым договор купли-продажи скрипки и передал инструмент. Договор был составлен в простой письменной форме, денег за скрипку Ворошилов не получил. О произошедшем знали два товарища Углова.

После смерти Ворошилова наследники потребовали возврата скрипки, но Углов отказался это сделать, предложив выплатить им сумму, указанную в договоре. Наследники обратились в суд.

Вариант 3.
(начальные буквы от «Н» до «Т»)

Задание 1. Работник одного из предприятий химической промышленности сообщил в прокуратуру сведения о нарушении законодательства об экологии на предприятии где о работает по трудовому договору. В ходе проверки нарушений законодательства установлено не было. К каким видом ответственности может быть привлечен работник.

Задание 2. Недавно работающий на молочном заводе слесарь Сметанин, будучи в состоянии похмелья, уснул на работе. На прежнем месте работы он имел несколько взысканий, со дня последнего прошло меньше года. Учитывая это, администрация уволила его по п. 5 ст. 81 ТК РФ. Правомерно ли это?

Задание 3. Токарю Резцову объявлен выговор за работу на станке без защитных очков, а крановщику Крюкову – за отказ от сдачи экзаменов по технике безопасности. Указанные меры воздействия на рабочих не повлияли. Через три дня Резцов был замечен работающим без очков. Крюков, так и не смог сдать экзамен. Законно ли уволить обоих по п. 5 ст. 81 ТК РФ?

Задание 4. Буфетчица завода Ткачева была уволена по п. 5 ст. 81 ТК РФ. Она, несмотря на неоднократные напоминания, не прошла медицинского осмотра, за что приказом заведующей столовой сначала была отстранена от работы с объявлением выговора, затем из-за дальнейших отказов уволена (приказ об увольнении подписан директором столовой). Законно ли это?

Вариант 4.
(начальные буквы от «У» до «Ч»)

Задание 1. Управляющий бака зная о предстоящем запрете на процедуру обналичивания валюты. Снял со своего счета 15 марта 2022 года 40 тысяч долларов наличными. К какой ответственности он может быть привлечен?

Задание 2. Инспектор по кадрам Салтыкова была уволена по подп. «в» п.6 ст. 81 ТК РФ. Она отказалась предоставить следователю прокуратуры информацию о номерах домашних телефонов сотрудников завода. Законно ли увольнение?

Задание 3. Старший прораб строительного участка Тесный был уволен по подп. «д» п. 6 ст.81 ТК РФ. Он систематически нарушал правила внутреннего трудового распорядка (отказывался от сдачи экзаменов по строительным нормам, охране труда и техники безопасности, по правилам эксплуатации грузоподъемных кранов). Законно ли увольнение?

Задание 4. Воспитатель спецшколы получила на детей постельное белье и другие вещи, часть которых унесла домой для личного пользования. За данный проступок она была уволена по п. 8. Ст. 81 ТК РФ. По факту увольнения воспитатель обратилась в суд. При этом она утверждала, что у нее не было умысла похитить вещи. Она лишь планировала попользоваться ими и вернуть назад. Законно ли увольнение?

Вариант 5.
(начальные буквы от «Ш» до «Я»)

1. Проживающий один в коммунальной квартире Селиванов злоупотреблял спиртными напитками, нарушал покой соседей, которые и обратились в прокуратуру с заявлением о принятии к Селиванову необходимых мер. Прокурор района обратился к мировому судье с заявлением о признании Селиванова ограниченно дееспособным. К заявлению прокурором была приложена справка из психоневрологического диспансера, согласно которой Селиванов является хроническим алкоголиком и нуждается в ограничении дееспособности. Мировой судья вынес решение о признании Селиванова ограниченно дееспособным.

Оцените действия прокурора и суда.

2. С Григорьева были взысканы алименты в пользу Григорьевой на содержание несовершеннолетних детей. В связи с тем, что Григорьев не платил алименты и его место пребывания было неизвестно, он был объявлен в розыск. Григорьева обратилась к мировому судье с заявлением об объявлении ее бывшего мужа Григорьева умершим, поскольку сведения о месте его пребывания отсутствуют более 5 лет.

Мировой судья на основании заявления Григорьевой и справки жилищной конторы с последнего места жительства Григорьева вынес решение о признании последнего безвестно отсутствующим и разъяснил заявительнице, что через пять лет после вступления решения в законную силу она может подать заявление об объявлении Григорьева умершим.

Оцените действия суда.

3. Козловский взял взаймы у Попова 1500 рублей, о чем была составлена расписка, но поскольку сам расписаться Козловский не мог ввиду слепоты, он попросил это сделать своего знакомого Титова. По истечении установленного в расписке срока Попов потребовал вернуть ему деньги, но Козловский отказался по причине отсутствия средств. Попов обратился в суд. В судебном заседании выяснилось, что подпись Титова в расписке никем не заверена и сам он исчез. Ссылаясь на несоблюдение формы договора займа, Козловский иск не признал, тем не менее, получение денег он не отрицал и обещал их возвратить позднее.

Какое решение должен вынести суд?

4. Обухов работал в НИИ инженером-испытателем, у него была коллекция специальной литературы. Обухов решил подарить книги институту, о чем он объявил на заседании ученого совета и в интервью газете, издаваемой в НИИ.

Часть книг была передана Обуховым, о чем был составлен акт принятия книг на баланс. Не успев передать все книги, Обухов умер. Институт потребовал передачи оставшихся книг от наследника умершего. Сын Обухова, как единственный наследник, отказался выполнить требование НИИ и в свою очередь потребовал вернуть все книги, поскольку договор с его отцом и институтом не был надлежащим образом оформлен.

Как следует разрешить спор?

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Текст контрольной работы должен быть подготовлен в печатном виде. Текст работы оформляется на листах формата А4, на одной стороне листа, с полями: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 15 мм и нижнее – 25 мм. При компьютерном наборе шрифт должен быть таким: тип шрифта Times New Roman, кегль 14, междустрочный интервал 1,5.

Рекомендуемый объем работы – до 10 страниц. Титульный лист работы оформляется студентом по образцу, данному в приложении 1.

Все страницы работы должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится.

Необходимо подробно представить и детально описать все выполненные расчеты. В конце работы в обязательном порядке должны быть представлены окончательные выводы.

ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.
2. Ответы студента на вопросы преподавателя.
3. Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы студенту:

- Готовясь к защите работы, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом.
- Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).
- Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.
- Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этой темы, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.
- Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.
- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.
- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.
- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!
- Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Проверяемая компетенция:

УК-10: способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности

УК-11: способен формировать нетерпимое отношение к коррупционному поведению

ОПК-1: способен применять законодательные основы в областях недропользования, обеспечения экологической и промышленной безопасности при поисках, разведке и разработке месторождений твердых полезных ископаемых, строительстве и эксплуатации подземных объектов

Критерии оценивания выполнения контрольной работы	*Количество баллов*

правильность выполнения задания	0-3
самостоятельность выполнения задания	0-1
аргументированность изложения решения и сформулированных выводов	0-1
Итого	0-5

5 баллов (90-100%) - оценка «отлично»

4 балла (70-89%) - оценка «хорошо»

3 балла (50-69%) - оценка «удовлетворительно»

0-2 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно»

Приложение 1

Образец оформления титульного листа контрольной работы (творческого задания)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра экономики и менеджмента

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине
«Основы правовых знаний и финансовая грамотность»

на тему:

Вариант № 1

Руководитель:
доц., к. ф. н. Слукин С.В.
Студент гр. М-21
Воронов К.А.

Екатеринбург – 2022

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу ____________С.А. Упоров
14.09.2022

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Б1.О.07 ОСНОВЫ ПРАВОВЫХ ЗНАНИЙ И ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

квалификация выпускника: бакалавр

Автор: Балашова Ю.В.

Одобрены на заседании кафедры
Антикризисного управления и оценочной деятельности
(название кафедры)

Зав. кафедрой ____________ *(подпись)*
Мальцев Н.В.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 04.09.2023
(Дата)

Рассмотрены методической комиссией
Инженерно-экономического факультета
(название факультета)

Председатель ____________ *(подпись)*
Мочалова Л.А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении — это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знании должна соответствовать уровню развития студентов;
- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;
- объем задания должен соответствовать уровню студента;
- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны - это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе лекций, практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа - лекционные, практические занятия;
2. внеаудиторная самостоятельная работа – дополнение лекционных материалов, подготовка к практическим занятиям, подготовка к участию в дискуссиях, выполнение тестовых и практико-ориентированных заданий и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине «*Основы правовых знаний*» обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к выполнению *контрольной работы* и к сдаче *зачета*.

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «*Основы правовых знаний*» являются:

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение тем курса (в т.ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);
- ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля);
- подготовка к практическим (семинарским) занятиям (в т.ч. подготовка к выполнению практико-ориентированного задания);
- подготовка к тестированию;
- выполнение контрольной работы;
- подготовка к зачету.

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Тема 1. Теория сочетания и взаимодействия современного права и экономики

1. Чем объясняется множественность теорий происхождения государства?
2. Что такое государство? Какие основные признаки присущи современному государству?
3. Охарактеризуйте внутренние функции государства. Охарактеризуйте внешние функции государства. Чем различаются правовые и неправовые формы осуществления функций государства?
4. Понятие формы государства. Что влияет на форму конкретного государства?
5. Понятие и виды монархии. Понятие и виды республик. Раскройте сущность и назначение государства.
6. Определение, признаки механизма государства. Что включает в себя структура механизма государства. Каковы виды государственных органов.
7. Проблемы совершенствования механизма Российского государства. Основные теории происхождения права. Причины и закономерности происхождения права.
8. Основные подходы к правопониманию.
9. Признаки права, отличающие его от социальных норм первобытного общества.
10. Что понимается под предметом правового регулирования?
11. Дайте характеристику централизованному и децентрализованному методу правового регулирования.
12. Каковы способы правового регулирования? Каковы типы правового регулирования?
13. Раскройте особенности индивидуального и нормативного регулирования.
14. Каковы критерии эффективности правового регулирования? Понятие и элементы механизма правового регулирования.
15. В чем проблема обеспечения эффективности правового регулирования отношений?

Тема 2. Основы конституционного, гражданского и семейного права

1. Понятие, сущность и юридическая природа основных (конституционных) прав, свобод и обязанностей граждан.
2. Классификация (виды) прав и свобод граждан. Механизм и гарантии реализации основных прав и свобод граждан.
3. Роль органов внутренних дел в обеспечении конституционных прав, свобод и обязанностей граждан.
4. Россия как федеративное государство: юридическая природа, принципы построения, особенности.

5. Предметы ведения РФ, их соотношение с компетенцией.
6. Субъекты РФ, их конституционно правовой статус.
7. Сколько и каких значений имеет термин конституционное право?
8. Каковы источники конституционного права как отрасли права?
9. Каковы функции Конституции РФ?
10. Какие виды конституций вам известны?
11. Что понимается в конституции под социальным государством?
12. Что означает принцип разделения властей, и какие ветви власти выделяются в РФ?
13. Какие личные права и свободы установлены в Конституции РФ?
14. Какие судебные гарантии соблюдения прав и свобод человека содержит Конституция РФ?
15. Чем отличается федерация от унитарного государства?
16. В чем особенности федерации в России?
17. Каковы полномочия Президента РФ в отношении законодательной и исполнительной ветвей власти?
18. Каковы полномочия Государственной Думы и Совета Федерации?

Действие гражданского законодательства во времени, пространстве и по кругу лиц. Аналогия закона и аналогия права.

19. Правоспособность граждан: понятие, черты и содержание. Дееспособность граждан. Дифференциация граждан по объему их дееспособности. Эмансипация граждан.
20. Понятие и признаки юридического лица. Виды и организационно-правовые формы юридических лиц.
21. Форма сделок. Правовые последствия нарушения формы сделок.
22. Сроки в гражданском праве: понятие, виды и значение для гражданско-правового регулирования общественных отношений.
23. Понятие права собственности. Формы и виды права собственности. Содержание субъективного права собственности.
24. Виды обязательств со множественностью лиц: долевые, солидарные, субсидиарные.
25. Обеспечение исполнения обязательств. Понятие и виды (способы) обеспечения исполнения обязательств.
26. Договор как юридический факт и как средство регулирования отношений его участников. Свобода договора и договорная дисциплина в условиях рыночной экономики.
27. Публичный договор. Договор присоединения. Предварительный договор.
28. Ответственность за вред, причиненный жизни и здоровью гражданина.

Семейный кодекс РФ как источник семейного права, его роль и место в системе семейного права.

28. Форма брака по российскому семейному праву. Порядок заключения брака. Признание фактических брачных отношений, возникших до 8 июля 1944 г.

29. Недействительность брака: понятие, основания, порядок и правовые последствия признания брака недействительным.

30. Понятие и основания прекращения брака. Расторжение брака в органах ЗАГСа.

31. Семейно-правовое алиментное обязательство: понятие, черты, содержание, основания возникновения и прекращения, юридическая природа.

32. Что относится к источникам семейного права России?

33. Что следует понимать под категорией «брак» в семейном праве?

34. Какими правилами обладают супруги по семейному законодательству Российской Федерации?

35. Что следует понимать под презумпцией отцовства?

36. Каков размер алиментных обязательств на содержание несовершеннолетних детей в случае развода родителей?

37. Каковы особенности усыновления в России?

Тема 3. Основы трудового права и права социального обеспечения

1. Соотношение федерального и регионального законодательства.
2. Понятие трудовой правосубъектности.
3. Порядок заключения трудовых договоров. Обязательные и факультативные условия трудового договора.
4. Нормативные акты, регулирующие вопросы трудовой дисциплины. Виды дисциплинарных взысканий.
5. Понятие материальной ответственности по трудовому праву, отличие ответственности по гражданскому праву.
6. Перечислите основные источники трудового права.
7. Назовите понятие и виды трудовых договоров.
8. Отметьте порядок заключения трудового договора.
9. Выделите особенности расторжения трудового договора: по инициативе работника, по инициативе работодателя.
10. Дайте понятие рабочего времени.
11. Укажите время отдыха: понятие и виды.
12. Охарактеризуйте понятие и систему заработной платы по российскому трудовому законодательству.
13. Назовите понятие трудовой дисциплины.
14. Перечислите виды дисциплинарных взысканий: порядок их наложения и снятия.
15. Кажите особенности материальная ответственность по российскому трудовому праву.

Тема 4. Основы финансового и налогового права

1. Опишите особенности налогового регулирования в России
2. Перечислите основные виды налогов.
3. Раскройте содержание налога на добавленную стоимость.

4. Перечислите и раскройте содержание основных видов налоговых вычетов.
5. Источники и основные принципы финансового и налогового права.
6. Финансовая система России.
7. Социально-экономическая сущность и функции финансов.
8. Финансовая система и характеристика ее звеньев.
9. Налоги и налогообложение в рыночной экономике в рыночной экономике.
10. Виды налогов и принципы налогообложения.
11. Налогообложение малого бизнеса.
12. Раскройте особенности экологического налогообложения в России.

Тема 5. Правовое регулирование рынка финансовых услуг в РФ

1. Раскройте правовое положение бирж в России.
2. Опишите основные виды финансовых услуг.
3. Раскройте особенности деятельности профессиональных участников рынка ценных бумаг.
4. Опишите источники и основные принципы финансового и налогового права.
5. Финансовая система России.
6. Социально-экономическая сущность и функции финансов.
7. Финансовая система и характеристика ее звеньев.
8. Налоги и налогообложение в рыночной экономике в рыночной экономике.
9. Виды налогов и принципы налогообложения.
10. Раскройте основные критерии налогообложение малого бизнеса.
11. Раскройте особенности налогообложения в сфере недропользования.
12. Финансово кредитное предпринимательство в России.
13. Понятие рынка финансовых услуг.
14. Особенности банковской деятельности в России.
15. Договор кредита, договор займа, договор финансирования под уступку денежного требования.
16. Правовое положение коммерческих банков. Правовое регулирование биржевой деятельности.
17. Правовое регулирование страховой деятельности. Центральный Банк России.
18. Правовое регулирование деятельности профессиональных участников рынка ценных бумаг.

Тема 6. Права потребителя и связанные с ними основы предпринимательского права в областях недропользования, разработке месторождений твердых полезных ископаемых, строительстве и эксплуатации подземных объектов

1. Дайте понятие экологической политики.
2. Сформулируйте понятие «экологическое право».
3. В чем заключается отличие экологического права от других отраслей права России?
4. Опишите основные права и обязанности в сфере прав потребителей.
5. Что является предметом экологического права?
6. Что относится к источникам экологического права?
7. Какова роль России в деятельности международных организаций, обеспечивающих экологическую безопасность?
8. Дайте понятие предмета, метода, системы и источников административного права.
9. Раскройте содержание административно-правового статуса органов исполнительной власти Российской Федерации и субъектов Российской Федерации
10. Назовите понятие и виды форм государственного управления в сфере недропользования.

5\. Раскройте понятие и особенности административной ответственности за правонарушение в экологической сфере.

Тема 7. Правовые основы волонтерской деятельности и антикоррупционное законодательство РФ

1. Перечислите и раскройте содержание законодательства, регулирующего волонтерскую деятельность в России.
2. Дайте понятие волонтерской деятельности.
3. Раскройте основные понятия антикоррупционного законодательства.
4. Определите основные меры государственной политики по противодействию коррупции.
5. Дайте понятие информации.
6. Определите виды информации.
7. Какая информация относится к информации требующей защиты?
8. Сформулируйте понятия государственной и коммерческой тайны.
9. Какую информацию недопустимо относить к сведениям, составляющим государственную и коммерческую тайны?
10. Что является правовой основой защиты компьютерной информации?

САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики– это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

• составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;

• перечень должен быть систематизированным;

• обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге;

• определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;

• при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;

• все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);

• если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;

• следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьёзный, кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);

- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);

- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);

- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

- просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе –

поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис - это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта - основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Практико-ориентированные задания выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций. Это могут быть ситуации, требующие применения умений и навыков, специфичных для соответствующего профиля обучения (знания содержания предмета), ситуации, требующие организации деятельности, выбора её оптимальной структуры личностно-ориентированных ситуаций (нахождение нестандартного способа решения).

Кроме этого, они выступают средством формирования у студентов умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач. Они строятся на основе ситуаций, возникающих на различных уровнях осуществления практики, и формулируются в виде производственных поручений (заданий).

Под практико-ориентированными задания понимают задачи из окружающей действительности, связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием элементов производственных процессов.

Цель практико-ориентированных заданий– приобретение умений и навыков практической деятельности по изучаемой дисциплине.

Задачи практико-ориентированных заданий:

- закрепление, углубление, расширение и детализация знаний студентов при решении конкретных задач;
- развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности;
- овладение новыми методами и методиками изучения конкретной учебной дисциплины;
- обучение приемам решения практических задач;
- выработка способности логического осмысления полученных знаний для выполнения заданий;
- обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Важными отличительными особенностями практико-ориентированных задания от стандартных задач (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

- значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию обучающегося;
- условие задания сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов основного предмета, из другого предмета или из жизни, на которые нет явного указания в тексте задания;

- информация и данные в задании могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т.д.), что потребует распознавания объектов;

- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задания.

Кроме выделенных четырех характеристик, практико-ориентированные задания имеют следующие:

1. по структуре эти задания – нестандартные, т.е. в структуре задания не все его компоненты полностью определены;
2. наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задания, что приводит к объемной формулировке условия;
3. наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причем данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

При выполнении практико-ориентированных заданий следует руководствоваться следующими общими рекомендациями:

- для выполнения практико-ориентированного задания необходимо внимательно прочитать задание, повторить лекционный материал по соответствующей теме, изучить рекомендуемую литературу, в т.ч. дополнительную;

- выполнение практико-ориентированного задания включает постановку задачи, выбор способа решения задания, разработку алгоритма практических действий, программы, рекомендаций, сценария и т. п.;

- если практико-ориентированное задание выдается по вариантам, то получить номер варианта исходных данных у преподавателя; если нет вариантов, то нужно подобрать исходные данные самостоятельно, используя различные источники информации;

- для выполнения практико-ориентированного задания может использоваться метод малых групп. Работа в малых группах предполагает решение определенных образовательных задач в рамках небольших групп с последующим обсуждением полученных результатов. Этот метод развивает навыки сотрудничества, достижения компромиссного решения, аналитические способности.

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

1. готовясь к тестированию, проработать информационный материал по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

2. четко выяснить все условия тестирования заранее. Студент должен знать, сколько тестов ему будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т. д.;

3. приступая к работе с тестами, внимательно и до конца нужно прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов; выбрать правильные (их может быть несколько); на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

- в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант;

- не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, нужно переходить к другим тестовым заданиям; к трудному вопросу можно обратиться в конце;

- обязательно необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к *зачету* по дисциплине «*Основы правовых знаний*» обучающемуся рекомендуется:

1. Повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «*Основы правовых знаний*».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса.

2. При изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса.

3. При изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во-первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию).

4. Следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к *зачету* на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу_______________С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.О.08 ПСИХОЛОГИЯ КОМАНДНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И САМОРАЗВИТИЯ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией
Управления персоналом	Горно-механического факультета
(название кафедры)	
Зав.кафедрой ________	Председатель ________
(подпись)	*(подпись)*
Абрамов С.М.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 10.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Автор: Полянок О.В., к.пс.н., доцент

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);
- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

1. Методические рекомендации по написанию реферата

Реферат - письменная работа объемом 10-18 печатных страниц, выполняемая студентом в течение длительного срока (от одной недели до месяца).

Реферат (от лат. referrer - докладывать, сообщать) - краткое точное изложение сущности какого-либо вопроса, темы на основе одной или нескольких книг, монографий или других первоисточников. Реферат должен содержать основные фактические сведения и выводы по рассматриваемой теме[1].

Выполнение и защита реферата призваны дать аспиранту возможность всесторонне изучить интересующую его проблему и вооружить его навыками научного и творческого подхода к решению различных задач в исследуемой области.

Основными задачами выполнения и защиты реферата являются развитие у студентов общекультурных и профессиональных компетенций, среди них:

- формирование навыков аналитической работы с литературными источниками разных видов;
- развитие умения критически оценивать и обобщать теоретические положения;
- стимулирование навыков самостоятельной аналитической работы;
- углубление, систематизация и интеграция теоретических знаний и практических навыков по соответствующему направлению высшего образования;
- презентация навыков публичной дискуссии.

Структура и содержание реферата

Подготовка материалов и написание реферата - один из самых трудоемких процессов. Работа над рефератом сводится к следующим этапам.

1. Выбор темы реферата.
2. Предварительная проработка литературы по теме и составление «рабочего» плана реферата.
3. Конкретизация необходимых элементов реферата.
4. Сбор и систематизация литературы.
5. Написание основной части реферата.
6. Написание введения и заключения.
7. Представление реферата преподавателю.
8. Защита реферата.

Выбор темы реферата

Перечень тем реферата определяется преподавателем, который ведет дисциплину. Вместе с тем, аспиранту предоставляется право самостоятельной формулировки темы реферата с необходимым обоснованием целесообразности ее разработки и согласованием с преподавателем. Рассмотрев инициативную тему реферата студента, преподаватель имеет право ее отклонить, аргументировав свое решение, или, при согласии студента, переформулировать тему.

При выборе темы нужно иметь в виду следующее:

1. Тема должна быть актуальной, то есть затрагивать важные в данное время проблемы общественно-политической, экономической или культурной жизни общества.

2. Не следует формулировать тему очень широко: вычленение из широкой проблемы узкого, специфического вопроса помогает проработать тему глубже.

---

[1] Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Какой бы интересной и актуальной ни была тема, прежде всего, следуетудостовериться, что для ее раскрытия имеются необходимые материалы.

4. Тема должна открывать возможности для проведения самостоятельного исследования, в котором можно будет показать умение собирать, накапливать, обобщать и анализировать факты и документы.

5. После предварительной самостоятельной формулировки темы необходимо проконсультироваться с преподавателем с целью ее возможного уточнения и углубления.

Предварительная проработка литературы по теме и составление «рабочего» плана реферата

Подбор литературы следует начинать сразу же после выбора темы реферата. Первоначально с целью обзора имеющихся источников целесообразно обратиться к электронным ресурсам в сети Интернет и, в частности, к электронным информационным ресурсам УГГУ: благодаря оперативности и мобильности такого источника информации, не потратив много времени, можно создать общее представление о предмете исследования, выделить основные рубрики (главы, параграфы, проблемные модули) будущего курсовой работы. При подборе литературы следует также обращаться к предметно-тематическим каталогам и библиографическим справочникам библиотеки УГГУ, публичных библиотек города.

Предварительное ознакомление с источниками следует расценивать как первый этап работы над рефератом. Для облегчения дальнейшей работы необходимо тщательно фиксировать все просмотренные ресурсы (даже если кажется, что тот или иной источник непригоден для использования в работе над рефератом, впоследствии он может пригодиться, и тогда его не придется искать).

Результатом предварительного анализа источников является рабочий план, представляющий собой черновой набросок исследования, который в дальнейшем обрастает конкретными чертами. Форма рабочего плана допускает определенную степень произвольности. Первоначальный вариант плана должен отражать основную идею работы. При его составлении следует определить содержание отдельных глав и дать им соответствующее название; продумать содержание каждой главы и наметить в виде параграфов последовательность вопросов, которые будут в них рассмотрены. В реферате может быть две или три главы - в зависимости от выбранной проблемы, а также тех целей и задач исследования.

Работа над предварительным планом необходима, поскольку она дает возможность еще до начала написания реферата выявить логические неточности, информационные накладки, повторы, неверную последовательность глав и параграфов, неудачные формулировки выделенных частей или даже реферата в целом.

Рабочий план реферата разрабатывается студентом самостоятельно и может согласовываться с преподавателем.

Конкретизация необходимых элементов реферата

Реферат должен иметь четко определенные цель и задачи, объект, предмет и методы исследования. Их необходимо сформулировать до начала непосредственной работы над текстом.

Цель реферата представляет собой формулировку результата исследовательской деятельности и путей его достижения с помощью определенных средств. Учитывайте, что у работы может быть только одна цель.

Задачи конкретизируют цель, в реферате целесообразно выделить три-четыре задачи. Задачи - это теоретические и практические результаты, которые должны быть получены в реферате. Постановку задач следует делать как можно более тщательно, т.к. их решение составляет содержание разделов (подпунктов, параграфов) реферата. В качестве задач может выступать либо решение подпроблем, вытекающих из общей проблемы, либо задачи анализа, обобщения, обоснования, разработки отдельных аспектов проблемы, ведущие к формулировке возможных направлений ее решения.

Объект исследования - процесс или явление, порождающие проблемную ситуацию и избранные для изучения.

Предмет исследования - все то, что находится в границах объекта исследования в определенном аспекте рассмотрения.

Методы исследования, используемые в реферате, зависят от поставленных цели и задач, а также от специфики объекта изучения. Это могут быть методы системного анализа, математические и статистические методы, сравнения, обобщения, экспертных оценок, теоретического анализа и т.д.

Впоследствии формулировка цели, задач, объекта, предмета и методов исследования составят основу Введения к реферату.

Сбор и систематизация литературы

Основные источники, использование которых возможно и необходимо в реферате, следующие:

- учебники, рекомендованные Министерством образования и науки РФ;
- электронные ресурсы УГГУ на русском и иностранном языках;
- статьи в специализированных и научных журналах;
- диссертации и монографии по изучаемой теме;
- инструктивные материалы и законодательные акты (только последних изданий);
- данные эмпирических и прикладных исследований (статистические данные, качественные интервью и т.д.)
- материалы интернет-сайтов.

Систематизацию получаемой информации следует проводить по основным разделам реферата, предусмотренным планом. При изучении литературы не стоит стремиться освоить всю информацию, заключенную в ней, а следует отбирать только ту, которая имеет непосредственное отношение к теме работы. Критерием оценки прочитанного является возможность его использования в реферате.

Сбор фактического материала - один из наиболее ответственных этапов подготовки реферата. От того, насколько правильно и полно собран фактический материал, во многом зависит своевременное и качественное написание работы. Поэтому, прежде чем приступить к сбору материала, аспиранту необходимо тщательно продумать, какой именно фактический материал необходим для реферата и составить, по возможности, специальный план его сбора и анализа. После того, как изучена и систематизирована отобранная по теме литература, а также собран и обработан фактический материал, возможны некоторые изменения в первоначальном варианте формулировки темы и в плане реферата.

Написание основной части реферата

Изложение материала должно быть последовательным и логичным. Общая логика написания параграфа сводится к стандартной логической схеме «Тезис - Доказательство - Вывод» (количество таких цепочек в параграфе, как правило, ограничивается тремя - пятью доказанными тезисами).

Все разделы реферата должны быть связаны между собой. Особое внимание следует обращать на логические переходы от одной главы к другой, от параграфа к параграфу, а внутри параграфа - от вопроса к вопросу.

Использование цитат в тексте необходимо для того, чтобы без искажений передать мысль автора первоисточника, для идентификации взглядов при сопоставлении различных точек зрения и т.д. Отталкиваясь от содержания цитат, необходимо создать систему убедительных доказательств, важных для объективной характеристики изучаемого вопроса. Цитаты также могут использоваться и для подтверждения отдельных положений работы.

Число используемых цитат должно определяться потребностями разработки темы. Цитатами не следует злоупотреблять, их обилие может восприниматься как выражение слабости собственной позиции автора. Оптимальный объем цитаты - одно- два, максимум три предложения. Если цитируемый текст имеет больший объем, его следует заменять аналитическим пересказом.

Во всех случаях употребления цитат или пересказа мысли автора необходимо делать точную ссылку на источник с указанием страницы.

Авторский текст (собственные мысли) должен быть передан в научном стиле. Научный стиль предполагает изложение информации от первого лица множественного числа («мы» вместо «я»). Его стоит обозначить хорошо известными маркерами: «По нашему мнению», «С нашей точки зрения», «Исходя из этого мы можем заключить, что...» и т.п. или безличными предложениями: «необходимо подчеркнуть, что...», «важно обратить внимание на тот факт, что.», «следует отметить.» и т.д.

Отдельные положения реферата должны быть иллюстрированы цифровыми данными из справочников, монографий и других литературных источников, при необходимости оформленными в справочные или аналитические таблицы, диаграммы, графики. При составлении аналитических таблиц, диаграмм, графиков используемые исходные данные выносятся в приложение, а в тексте приводятся результаты расчетов отдельных показателей (если аналитическая таблица по размеру превышает одну страницу, ее целиком следует перенести в приложение). В тексте, анализирующем или комментирующем таблицу, не следует пересказывать ее содержание, а уместно формулировать основной вывод, к которому подводят табличные данные, или вводить дополнительные показатели, более отчетливо характеризующие то или иное явление или его отдельные стороны. Все материалы, не являющиеся необходимыми для решения поставленной в работе задачи, также выносятся в приложение.

Написание введения и заключения

Введение и заключение - очень важные части реферата. Они должны быть тщательно проработаны, выверены логически, стилистически, орфографически и пунктуационно.

Структурно введение состоит из нескольких логических элементов. Во введении в обязательном порядке обосновываются:

- актуальность работы (необходимо аргументировать, в силу чего именно эта проблема значима для исследования);
- характеристика степени разработанности темы (краткий обзор имеющейся научной литературы по рассматриваемому вопросу, призванный показать знакомство студента со специальной литературой, его умение систематизировать источники, критически их рассматривать, выделять существенное, оценивать ранее сделанное другими исследователями, определять главное в современном состоянии изученности темы);
- цель и задачи работы;
- объект и предмет исследования;
- методы исследования;
- теоретическая база исследования (систематизация основных источников, которые использованы для написания своей работы);
- структура работы (название глав работы и их краткая характеристика).

По объему введение занимает 1,5-2 страницы текста, напечатанного в соответствии с техническими требованиями, определенными преподавателем.

Заключение содержит краткую формулировку результатов, полученных в ходе работы, указание на проблемы практического характера, которые были выявлены в процессе исследования, а также рекомендации относительно их устранения. В заключении возможно повторение тех выводов, которые были сделаны по главам. Объем заключения - 1 - 3 страницы печатного текста.

Представление реферата преподавателю

Окончательный вариант текста реферата необходимо распечатать и вставить в папку-скоросшиватель. Законченный и оформленный в соответствии с техническими требованиями реферат подписывается студентом и представляется в распечатанном и в электронном виде в срок, обозначенный преподавателем.

Перед сдачей реферата аспирант проверяет его в системе «Антиплагиат» (http://www.antiplagiat.ru/), пишет заявление о самостоятельном характере работы, где указывает процент авторского текста, полученный в результате тестирования реферата в данной системе. Информацию, полученную в результате тестирования реферата в данной системе (с указанием процента авторского текста), аспирант в печатном виде предоставляет преподавателю вместе с окончательным вариантом текста реферата, который не подлежит доработке или замене.

Защита реферата

При подготовке реферата к защите (если она предусмотрена) следует:

1. Составить план выступления, в котором отразить актуальность темы, самостоятельных характер работы, главные выводы и/или предложения, их краткое обоснование и практическое и практическое значение - с тем, чтобы в течение 3 - 5 минут представить достоинства выполненного исследования.
2. Подготовить иллюстративный материал: схемы, таблицы, графики и др. наглядную информацию для использования во время защиты. Конкретный вариант наглядного представления результатов определяется форматом процедуры защиты реферата.

Критерии оценивания реферата

Критерии оценивания реферата: новизна текста, степень раскрытия сущности вопроса, соблюдение требований к оформлению.

Новизна текста – обоснование актуальности темы; новизна и самостоятельность в постановке проблемы, формулирование нового аспекта известной проблемы; умение работать с литературой, систематизировать и структурировать материал; наличие авторской позиции, самостоятельная интерпретация описываемых в реферате фактов и проблем – 4 балла.

Степень раскрытия сущности вопроса - соответствие содержания доклада его теме; полнота и глубина знаний по теме; умение обобщать, делать выводы, сопоставлять различные точки зрения по вопросу (проблеме); оценка использованной литературы (использование современной научной литературы) – 4 балла.

Соблюдение требований к оформлению - правильность оформления ссылок на источники, списка использованных источников; грамотное изложение текста (орфографическая, пунктуационная, стилистическая культура); владение терминологией; корректность цитирования – 4 балла.

Критерии оценивания публичного выступления (защита реферата): логичность построения выступления; грамотность речи и владение профессиональной терминологией; обоснованность выводов; умение отвечать на вопросы; поведение при защите работы *(*манера говорить, отстаивать свою точку зрения, привлекать внимание к важным моментам в докладе или ответах на вопросы и т.д.) соблюдение требований к объёму доклада – 10 баллов.

Критерии оценивания презентации: дизайн и мультимедиа – эффекты, содержание – 4 балла.

Всего – 25 баллов.

Оценка «зачтено»

Оценка *«зачтено»* – реферат полностью соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 23-25 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, присутствует новизна и самостоятельность в постановке проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, широкий диапазон и качество (уровень) используемого информационного пространства (привлечены различные источники научной информации), прослеживается наличие авторской позиции и самостоятельной интерпретации описываемых в реферате фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована полнота и глубина знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены альтернативные взгляды на рассматриваемую проблему и обосновано сбалансированное заключение; представлен критический анализ использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – текст оформлен в соответствие с методическими требованиями и ГОСТом, в работе соблюдены правила русской орфографии и пунктуации, выдержана стилистическая культура научного текста, четкое и полное определение рассматриваемых понятий (категорий), приводятся соответствующие примеры в строгом соответствии с рассматриваемой проблемой, соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона гармонирует с цветом текста, всё отлично читается, использовано 3 цвета шрифта, все страницы выдержаны в едином стиле, гиперссылки выделены и имеют разное оформление до и после посещения кадра, анимация присутствует только в тех местах, где она уместна и усиливает эффект восприятия текстовой части информации, звуковой фон соответствует единой концепции и усиливает эффект восприятия текстовой части информации, размер шрифта оптимальный, все ссылки работают, содержание является строго научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) усиливают эффект восприятия текстовой части информации, орфографические , пунктуационные, стилистические ошибки отсутствуют, наборы числовых данных проиллюстрированы графиками и диаграммами в наиболее адекватной форме, информация является актуальной и современной, ключевые слова в тексте выделены.

Критерии оценивания публичного выступления: выступление логично построено, выводы аргументированы, свободное владение профессиональной терминологией, в речи отсутствуют орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает полные и исчерпывающие ответы на вопросы, соблюдены этические нормы поведения при защите работы, владеет различными способами привлечения и удержания внимания и интереса аудитории к сообщению, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка «*зачтено*» - реферат в основном соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 18-22 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, представлен достаточный диапазон используемого информационного пространства (привлечены несколько источников научной информации), прослеживается наличие авторской позиции в реферате при отборе фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована достаточная осведомленность знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены 2-3 взгляда на рассматриваемую проблему и обосновано заключение; представлен критический обзор использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – текст оформлен в соответствие с методическими требованиями и ГОСТом, в работе имеются незначительные ошибки правил русской орфографии и пунктуации, выдержана стилистическая культура научного текста, четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), приводятся соответствующие примеры в строгом соответствии с рассматриваемой проблемой, соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона хорошо соответствует цвету текста, всё можно прочесть, использовано 3 цвета шрифта, 1-2 страницы имеют свой стиль оформления, отличный от общего, гиперссылки выделены и имеют разное оформление до и после посещения кадра, анимация присутствует только в тех местах, где она уместна, звуковой фон соответствует единой концепции и привлекает внимание зрителей в нужных местах - именно к информации, размер шрифта оптимальный, все ссылки работают, содержание в целом является научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) соответствуют тексту, орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки практически отсутствуют, наборы числовых данных проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация является актуальной и современной, ключевые слова в тексте выделены

Критерии оценивания публичного выступления : выступление логично построено, выводы аргументированы, испытывает незначительные затруднения при использовании профессиональной терминологии, в речи допускает в незначительном количестве орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает полные и исчерпывающие ответы на вопросы, соблюдены этические нормы поведения при защите работы , владеет ограниченным набором способов привлечения внимания аудитории к сообщению, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка *«зачтено»* - реферат частично соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 13-17 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, представлен достаточный диапазон используемого информационного пространства (привлечены несколько источников научной информации), прослеживается наличие авторской позиции в реферате при отборе фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована достаточная осведомленность знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены 2-3 взгляда на рассматриваемую проблему и обосновано заключение; представлен критический обзор использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – оформление текста частично не соответствует методическими требованиям и ГОСТу, в работе имеются ошибки правил русской орфографии и пунктуации, в целом выдержана стилистическая культура научного текста, четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), частично не соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона плохо соответствует цвету текста, использовано более 4 цветов шрифта, некоторые страницы имеют свой стиль оформления, гиперссылки выделены, анимация дозирована, звуковой фон не соответствует единой концепции, но не носит отвлекающий характер, размер шрифта средний (соответственно, объём информации слишком большой — кадр несколько перегружен), ссылки работают, содержание включает в себя элементы научности, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) в определенных случаях соответствуют тексту, есть орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки, наборы числовых данных чаще всего проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация является актуальной и современной ключевые слова в тексте, чаще всего, выделены.

Критерии оценивания публичного выступления: в выступлении нарушено логическое построение, выводы не аргументированы, испытывает затруднения при использовании профессиональной терминологии, в речи допускает в орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает краткие ответы на вопросы, в целом соблюдены этические нормы поведения при защите работы, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка «не зачтено»

Оценка *«не зачтено»* - реферат не соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 0-12 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы не обоснована, не сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал не систематизирован, ограниченный диапазон используемого информационного пространства (привлечен 1 источник научной информации), отсутствует авторская позиция в реферате.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата не соответствует теме, не продемонстрирована осведомленность знаний по теме, отсутствует личная оценка (вывод), представлен 1 позиция рассмотрения проблемы, заключение не обосновано, отсутствует критический обзор использованной литературы.

Соблюдение требований к оформлению – оформление текста не соответствует методическими требованиям и ГОСТу, в работе выполнена с ошибками правил русской орфографии и пунктуации, не выдержана стилистическая культура научного текста, отсутствует четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), не соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона не соответствует цвету текста, использовано более 5 цветов шрифта, каждая страница имеет свой стиль оформления, гиперссылки не выделены, анимация отсутствует (или же презентация перегружена анимацией), звуковой фон не соответствует единой концепции, носит отвлекающий характер, слишком мелкий шрифт (соответственно, объём информации слишком велик — кадр перегружен), не работают отдельные ссылки, содержание не является научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) не соответствуют тексту, много орфографических, пунктуационных, стилистических ошибок, наборы числовых данных не проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация не представляется актуальной и современной, ключевые слова в тексте не выделены

Критерии оценивания публичного выступления: отказывается от защиты или в выступлении нарушено логическое построение, отсутствуют выводы, не использует профессиональную терминологию, в речи допускает значительном количестве орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, не отвечает на вопросы, нарушает со этические нормы поведения при защите работы, не соблюдены требования к объёму доклада.

2.Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем (тема может быть предложена и студентом, но обязательно должна быть согласована с преподавателем). Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

При работе над Введением могут помочь ответы на следующие вопросы: «Надо ли давать определения терминам, прозвучавшим в теме эссе?», «Почему тема, которую я раскрываю, является важной в настоящий момент?», «Какие понятия будут вовлечены в мои рассуждения по теме?», «Могу ли я разделить тему на несколько более мелких подтем?».

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить. Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе?

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).
2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).
3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

Источники. Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

3. Методические рекомендации по написанию реферата статьи

Реферирование представляет собой интеллектуальный творческий процесс, включающий осмысление, аналитико-синтетическое преобразование информации и создание нового документа - реферата, обладающего специфической языково-стилистической формой.

Рефератом статьи (далее - реферат) называется текст, передающий основную информацию подлинника в свернутом виде и составленный в результате ее смысловой переработки[2].

Основными функциями рефератов являются следующие: информативная, поисковая, индикативная, справочная, сигнальная, адресная, коммуникативная.

Информативная функция. Поскольку реферат является кратким изложением основного содержания первичного документа, главная его задача состоит в том, чтобы передавать фактографическую информацию.

Отсюда информативность является наиболее существенной и отличительной чертой реферата.

Поисковая и справочная функции. Как средство передачи информации реферат нередко заменяет чтение первичного документа. Обращаясь к рефератам, пользователь осуществляет по ним непосредственный поиск информации, причем информации фактографической. В этом проявляется поисковая функция реферата, а также функция справочная, поскольку извлекаемая из реферата информация во многом представляет справочный интерес.

Индикативная функция. Реферат должен характеризовать оригинальный материал не только содержательно, но и описательно. Путем описания обычно даются дополнительные характеристики первичного материала: его вид (книга, статья), наличие в нем иллюстраций и т.д.

Кроме того, в реферате иногда приходится ограничиваться лишь названием или перечислением отдельных вопросов содержания. Это еще одно свойство реферата, которое принято называть индикативностью.

Адресная функция. Точным библиографическим описанием первичного документа одновременно достигается то, что реферат способен выполнять адресную функцию, без чего бессмысленен документальный информационный поиск.

Сигнальная функция. Эта функция реферата проявляется, когда осуществляется оперативное информирование с помощью авторских рефератов о планах выпуска литературы, а также о существовании неопубликованных, в том числе депонированных работ.

Диапазон использования рефератов очень широк. Они применяются как в индивидуальном, так и в коллективном информационном обеспечении, проводимом в интересах научно-исследовательских работ, учебного процесса и т.д. Они же являются средством международного обмена информацией и выполняют научно-коммуникативные функции в интернациональном масштабе.

Являясь наиболее экономным средством ознакомления с первоисточником, реферат должен отразить все существенные моменты последнего и особо выделить основную мысль автора. Многообразные функции реферата в системе научных коммуникаций можно объединить в следующие основные группы: информативные, поисковые, коммуникативные. Поскольку реферат передает в сжатом виде текст первоисточника, он позволяет специалисту либо получить релевантную информацию, либо сделать вывод о том, что обращаться к первоисточнику нет необходимости.

Существует три основных способа изложения информации в реферате.

---

[2] Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5

Экстрагирование - представление информации первоисточника в реферате. Эта методика достаточно проста: референт отмечает предложения, которые затем полностью или с незначительным перефразированием переносятся в реферат-экстракт.

Перефразирование - наиболее распространенный способ реферативного изложения. Здесь имеет место частичное текстуальное совпадение с первоисточником. Перефразирование предполагает не использование значительной части сведений оригинала, а перестройку его смысловой и синтаксической структуры. Перестройка текста достигается за счет таких операций, как замещение (одни фрагменты текста заменяются другими), совмещения (объединяются несколько предложений в одно) и обобщение.

Интерпретация - это способ реферативного изложения, когда содержание первоисточника может раскрываться либо в той же последовательности, либо на основе обобщенного представления о нем. Разновидностью интерпретированных рефератов могут быть авторефераты диссертаций, тезисы докладов научных конференций и совещаний.

Для качественной подготовки реферата необходимо владеть основными приемами анализа и синтеза, знать основные требования, предъявляемые к рефератам, их структурные и функциональные особенности.

Процесс реферирования делится на пять основных этапов:

1. Определение способа охвата первоисточника, который в данном конкретном случае наиболее целесообразен, для реферирования (общее, фрагментное, аспектное и т.д.).
2. Беглое ознакомительное чтение, когда референт решает вопрос о научно-практической значимости и информационной новизне первоисточника. Анализ его вида позволяет осуществить выбор аспектной схемы изложения реферата.
3. Конструирование текста реферата, которое осуществляется с использованием приемов перефразирования, обобщения, абстрагирования и т.д. Очень редко предложения или фрагменты оригинала используются без изменения. Запись полученных в результате синтеза конструкций осуществляется в последовательности, соответствующей разработанной схеме или плану.
4. Критический анализ полученного текста с точки зрения потребителя реферата.
5. Оформление и редактирование, которые являются заключительным этапом подготовки реферата.

Все, что в первичном документе не заслуживает внимания потребителя реферата, должно быть опущено. Так, в реферат не включаются:

- общие выводы, не вытекающие из полученных результатов;
- информация, не понятная без обращения к первоисточнику;
- общеизвестные сведения;
- второстепенные детали, избыточные рассуждения;
- исторические справки;
- детальные описания экспериментов и методик;
- сведения о ранее опубликованных документах и т. д.

Приемы составления реферата позволяют обеспечить соблюдение основных методических принципов реферирования: адекватности, информативности, краткости и достоверности.

Хотя реферат по содержанию зависит от первоисточника, он представляет собой новый, самостоятельный документ. Общими требованиями к языку реферата являются точность, краткость, ясность, доступность.

По своим языковым и стилистическим средствам реферат отличается от первоисточника, поскольку референт использует иные термины и строит предложения в соответствии со стилем реферата. Наряду с сообщением могут использоваться перифразы. Вместе с тем в ряде случаев стилистика реферата может совпадать с первоисточником, что особенно характерно для расширенных рефератов.

Изложение реферата должно обеспечивать наибольшую семантическую адекватность, семантическую эквивалентность, краткость и логическую последовательность. Для этого необходимы определенные лексические и грамматические средства. Адекватность и эквивалентность достигаются за счет правильного употребления терминов, краткость - за счет экономной структуры предложений и использования терминологической лексики.

Быстрое и адекватное восприятие реферата обеспечивается употреблением простых законченных предложений, имеющих правильную грамматическую форму. Громоздкие предложения затрудняют понимание реферата, поэтому сложные предложения, как правило, расчленяются на ряд простых при сохранении логических взаимоотношений между ними путем замены соединительных слов, например, местоимениями.

Широко используются неопределенно-личные предложения без подлежащего. Они концентрируют внимание читающего только на факте, усиливая тем самым информационно-справочную значимость реферата.

Реферату, как одному из жанров научного стиля, присущи те же семантико-структурные особенности, что и научному стилю в целом: объективность, однозначность, логичность изложения, безличная манера повествования, широкое использование научных терминов, абстрактной лексики и т.д. В то же время этот жанр имеет и свою специфику стиля: фактографичность (констатация фактов), обобщенно-отвлеченный характер изложения, предельная краткость, подчеркнутая логичность, стандартизация языкового выражения.

Рефераты делятся на информативные (реферат-конспект), индикативные, указательные (реферат-резюме) и обзорные (реферат-обзор)[3]. В основу их классификации положена степень аналитико-синтетической переработки источника.

Информативные рефераты включают в себя изложение (в обобщенном виде) всех основных проблем, изложенных в первоисточнике, их аргументацию, основные результаты и выводы, имеющие теоретическую и практическую ценность.

Индикативные рефераты указывают только на основные моменты содержания первоисточника. Их также называют реферативной аннотацией.

Научные рефераты отражают смысловую сторону образно-тематического содержания. В его основе лежат такие мыслительные операции, как обобщение и абстракция.

Реферат-резюме направлен на перечисление основных проблем источника без содержания доказательств.

Реферат, независимо от его типа, имеет единую структуру:

- название реферируемой работы (или выходные данные);
- композиция реферируемой работы;
- главная мысль реферируемого материала;
- изложение содержания;
- выводы автора по реферируемому материалу.

Обычно в самом первоисточнике главная мысль становится ясной лишь после прочтения всего материала, в реферате же с нее начинается изложение содержания, она предшествует всем выводам и доказательствам. Такая последовательность изложения необходима для того, чтобы с самого начала сориентировать читателя относительно основного содержания источника и его перспективной ценности. Выявление главной мысли источника становится весьма ответственным делом референта и требует от него вдумчивого отношения к реферируемому материалу. Иногда эта главная мысль самим автором даже не формулируется, а лишь подразумевается. Референту необходимо суметь сжато ее сформулировать, не внося своих комментариев.

Содержание реферируемого материала излагается в последовательности первоисточника по главам, разделам, параграфам. Обычно дается формулировка вопроса, приводится вывод по этому вопросу и необходимая цепь доказательств в их логической последовательности.

[3] Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. - 368с.

Следует иметь в виду, что иногда выводы автора не вполне соответствуют главной мысли первоисточника, так как могут быть продиктованы факторами, выходящими за пределы излагаемого материала. Но в большинстве случаев выводы автора вытекают из главной мысли, выявление которой и помогает их понять.

Перечень типичных смысловых частей информационного реферата и используемых в каждой из них типичных языковых средств представлен в таблице 1.

Таблица 1

Перечень типичных смысловых частей информационного реферата и используемых в каждой из них типичных языковых средств

Смысловые части реферата	**Используемые языковые средства**
1. Название реферируемой работы (или выходные данные)	- В. Вильсон. Наука государственного управления // Классики теории государственного управления: американская школа. Под ред. ДЖ. Шафритца, А. Хайда. – М. : Изд-во МГУ, 2003. – с. 24-42.; - Статья называется (носит название, озаглавлена)
2. Композиция реферируемой работы	- Статья • состоит из…… • делится на ….. • начинается с………. • кончается (чем?) ....; - В статье можно выделить две части……….
3. Проблематика и основные положения работы	- Статья • посвящена теме (проблеме, вопросу) ……… • представляет собой анализ (обзор, описание, обобщение, изложение) ………….. - Автор статьи • ставит (рассматривает, освещает, поднимает, затрагивает) следующие вопросы (проблемы) …… • особо останавливается (на чем?) ...... • показывает значение (чего?) …….. • раскрывает сущность (чего?) ………. • обращает внимание (на что?) ……… • уделяет внимание (чему?) ….. • касается (чего?) ……. - В статье • рассматривается (что?) …. • анализируется (что?) ….. • делается анализ (обзор, описание, обобщение, изложение) (чего?) …… • раскрывается, освещается вопрос… • обобщается (что?) ………. • отмечается важность (чего?) …… • касается (чего?)….. - В статье • показано (что?) ……… • уделено большое внимание (чему?) ……… • выявлено (что?) ……. • уточнено (что?) ……..
4. Аргументация основных положений работы	- Автор • приводит примеры (факты, цифры, данные) ………. • иллюстрирует это положение ……….. • подтверждает (доказывает, аргументирует) свою точку зрения примерами (данными)… - в подтверждение своей точки зрения автор приводит доказательства (аргументы, ряд доказательств, примеры, иллюстрации, данные, результаты наблюдений)… - Для доказательств своих положений автор описывает • эксперимент …… • в ходе эксперимента автор привлекал …

5. Выводы, заключения	• выполненные исследования показывают… • приведенные наблюдения (полученные данные) приводят к выводу (позволяют сделать выводы).. • из сказанного можно сделать вывод, что ….. • анализ результатов свидетельствует … - На основании проведенных наблюдений (полученных данных, анализ результатов) • был сделан вывод (можно сделать заключение) …. • автор приводит выводы ……….

Реферат может содержать комментарий референта, только в том случае, если референт является достаточно компетентным в данном вопросе и может вынести квалифицированное суждение о реферируемом материале. В комментарий входят критическая характеристика первоисточника, актуальность освещенных в нем вопросов, суждение об эффективности предложенных решений, указание, на кого рассчитан реферируемый материал.

Комментарий реферата может содержать оценку тех или иных положений, высказываемых автором реферируемой работы. Эта оценка чаще всего выражает согласие или несогласие с точкой зрения автора. Языковые средства, которые используются при этом, рассмотрены в таблице 2.

Таблица 2

Языковые средства, используемых при оценке те положений, высказываемых автором реферируемой работы

Смысловые части комментарии	Используемые языковые средства
Смысловые части комментарии	- Автор • справедливо указывает …. • правильно подходит к анализу (оценке) …. • убедительно доказывает …. • отстаивает свою точку зрения …. • критически относится к работам предшественников ….. - Мы • разделяем точку зрения (мнения, оценку) автора …… • придерживаемся подобного же мнения … • критически относимся к работам предшественников …. - Можно согласится с автором, что ….. - Следует признать достоинства такого подхода к решению ….
Несогласие (отрицательная оценка)	- Автор • не раскрывает содержания (противоречий, разных точек зрения) … • противоречит себе (известным фактам) ………. • игнорирует общеизвестные факты ….. • упускает из вида ……. • не критически относится к высказанному положению …….. • не подтверждает сказанное примерами…. - Мы • придерживаемся другой точки зрения (другого, противоположного мнения) • не можем согласиться (с чем?) … • трудно согласиться с автором (с таким подходом к решению проблемы, вопроса, задачи) …. • можно выразить сомнение в том, что ….. • дискуссивно (сомнительно, спорно) , что ……… • к недостаткам работы можно отнести ………

В реферате могут быть использованы цитаты из реферируемой работы. Они всегда ставятся в кавычки. Следует различать три вида цитирования, при этом знаки препинания ставятся, как в предложениях с прямой речью.

1. Цитата стоит после слов составителя реферата. В этом случае после слов составителя реферата ставится двоеточие, а цитата начинается с большой буквы. Например:

Автор статьи утверждает: «В нашей стране действительно произошел стремительный рост национального самосознания».

2. Цитата стоит перед словами составителя реферата. В этом случае после цитаты ставится запятая и тире» а слова составителя реферата пишутся с маленькой буквы. Например: «В нашей стране действительно стремительный рост национального самосознания», - утверждает автор статьи.

3. Слова составителя реферата стоят в середине цитаты. В этом случае перед ними и после них ставится точка с запятой. Например: «В нашей стране, - утверждает автор статьи, - действительно стремительный рост национального самосознания».

4. Цитата непосредственно включается в слова составителя реферата. В этом случае (а он является самым распространенным в реферате) цитата начинается с маленькой буквы. Например: Автор статьи утверждает, что «в нашей стране действительно стремительный рост национального самосознания».

4. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[4]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[4] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

Дискуссия занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

Метод «мозговой атаки» или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

Презентация, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

• объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;

• обоснованность оценок - их аргументация;

• систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;

• всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

• формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;

• формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;

• демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;

• соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

5. Методические рекомендации по составлению тестовых заданий

Требования к составлению тестовых заданий

Тестовое задание (ТЗ) - варьирующаяся по элементам содержания и по трудности единица контрольного материала, сформулированная в утвердительной форме предложения с неизвестным. Подстановка правильного ответа вместо неизвестного компонента превращает задание в истинное высказывание, подстановка неправильного ответа приводит к образованию ложного высказывания, что свидетельствует о незнании студентом данного учебного материала.

Для правильного составления ТЗ необходимо выполнить следующие *требования*:

1. Содержание каждого ТЗ должно охватывать какую-либо одну смысловую единицу, то есть должно оценивать что-то одно.
2. Ориентация ТЗ на получение *однозначного* заключения.
3. Формулировка содержания ТЗ в виде свернутых кратких суждений. Рекомендуемое количество слов в задании не более 15. В тексте не должно быть преднамеренных подсказок и сленга, а также оценочных суждений автора ТЗ. Формулировка ТЗ должна быть в повествовательной форме (не в форме вопроса). По возможности, текст ТЗ не должен содержать сложноподчиненные конструкции, повелительного наклонения («выберите», «вычислите», «укажите» и т.д). Специфический признак (ключевое слово) выносится в начало ТЗ. Не рекомендуется начинать ТЗ с предлога, союза, частицы.
4. Соблюдение единого стиля оформления ТЗ.

Требования к формам ТЗ

ТЗ может быть представлено в одной из четырех стандартизованных форм:

- закрытой (с выбором одного или нескольких заключений);
- открытой;
- на установление правильной последовательности;
- на установление соответствия.

Выбор формы ТЗ зависит от того, какой вид знаний следует проверить. Так, для оценки фактологических знаний (знаний конкретных фактов, названий, имён, дат, понятий) лучше использовать тестовые задания закрытой или открытой формы.
Ассоциативных знаний (знаний о взаимосвязи определений и фактов, авторов и их теорий, сущности и явления, о соотношении между различными предметами, законами, датами) - заданий на установление соответствия. Процессуальных знаний (знаний правильной последовательности различных действий, процессов) - заданий на определение правильной последовательности.

Тестовое задание закрытой формы

Если к заданиям даются готовые ответы на выбор (обычно один правильный и остальные неправильные), то такие задания называются заданиями с выбором одного правильного ответа или с единичным выбором.

При использовании этой формы следует руководствоваться правилом: в каждом задании с выбором одного правильного ответа правильный ответ должен быть.

Помимо этого, бывают задания с выбором нескольких правильных ответов или с множественным выбором. Подобная форма заданий не допускает наличия в общем перечне ответов следующих вариантов: «все ответы верны» или «нет правильного ответа».

Вариантов выбора (дистракторов) должно быть не менее 4 и не более 7. Если дистракторов мало, то возрастает вероятность угадывания правильного ответа, если слишком много, то делает задание громоздким. Кроме того, дистракторы в большом количестве часто бывают неоднородными, и тестируемый сразу исключает их, что также способствует угадыванию.

Дистракторы должны быть приблизительно одной длины. Не допускается наличие повторяющихся фраз (слов) в дистракторах.

Тестовое задание открытой формы

В заданиях открытой формы готовые ответы с выбором не даются. Требуется сформулированное самим тестируемым заключение. Задания открытой формы имеют вид неполного утверждения, в котором отсутствует один или несколько ключевых элементов. В качестве ключевых элементов могут быть: число, буква, слово или словосочетание. При формулировке задания на месте ключевого элемента, необходимо поставить прочерк или многоточие. Утверждение превращается в истинное высказывание, если ответ правильный и в ложное высказывание, если ответ неправильный. Необходимо предусмотреть наличие всех возможных вариантов правильного ответа и отразить их в ключе, поскольку отклонения от эталона (правильного ответа) могут быть зафиксированы проверяющим как неверные.

Тестовые задания на установление правильной последовательности

Такое задание состоит из однородных элементов некоторой группы и четкой формулировки критерия упорядочения этих элементов.

Задание начинается со слова: «Последовательность».

Тестовые задания на установление соответствия

Такое задание состоит из двух групп элементов и четкой формулировки критерия выбора соответствия между ними.

Соответствие устанавливается по принципу 1:1 (одному элементу первой группы соответствует только один элемент второй группы) или 1:М (одному элементу первой группы соответствуют М элементов второй группы). Внутри каждой группы элементы должны быть однородными. Количество элементов второй группы должно превышать количество элементов первой группы. Максимальное количество элементов второй группы должно быть не более 10, первой группы - не менее 2.

Задание начинается со слова: «Соответствие». Номера и буквы используются как идентификаторы (метки) элементов. Арабские цифры являются идентификаторами первой группы, заглавные буквы русского алфавита - второй. Номера и буквы отделяются от содержания столбцов круглой скобкой.

6.Требования к написанию и оформлению доклада

Доклад (или отчёт) – один из видов монологической речи, публичное, развёрнутое, официальное, сообщение по определённому вопросу, основанное на привлечении документальных данных.

Обычно любая научная работа заканчивается докладом на специальном научном семинаре, конференции, где участники собираются, чтобы обсудить научные проблемы. На таких семинарах (конференциях) всегда делается доклад по определённой теме. Доклад содержит все части научного отчёта или статьи. Это ответственный момент для докладчика. Здесь проверяются знание предмета исследования, способности проводить эксперимент и объяснять полученные результаты. С другой стороны, люди собираются, чтобы узнать что-то новое для себя. Они тратят своё время и хотят провести время с пользой и интересом. После выступления докладчика слушатели обязательно задают вопросы по теме выступления, и докладчику необходимо научиться понимать суть различных вопросов. Кроме того, на семинаре задача обсуждается, рассматривается со всех сторон, и бывает, что автор узнаёт о своей работе много нового. Часто возникают интересные идеи и неожиданные направления исследований. Работа становится более содержательной. Следовательно, доклад необходим для развития самой науки и для студентов. В этом состоит главное предназначение доклада.

На студенческом семинаре (конференции) всегда подводится итог, делаются выводы, принимается решение или соответствующее заключение. Преподаватель (жюри) выставляет оценку за выполнение доклада и его предъявление, поскольку в учебном заведении данная форма мероприятия является обучающей. Оценки полезно обсуждать со студентами: это помогает им понять уровень их собственных работ. С лучшими сообщениями, сделанными на семинарах, студенты могут выступать впоследствии на студенческих конференциях. Поэтому каждому студенту необходимо обязательно предварительно готовить доклад и учиться выступать публично.

Непосредственная польза выступления студентов на семинаре (конференции) состоит в следующем.

1. Выступление позволяет осуществлять поиск возможных ошибок в постановке работы, методике исследования, обобщении полученных результатов, их интерпретации. Получается, что студенты помогают друг другу улучшить работу. Что может быть ценнее?
2. Выступление дает возможность учиться излагать содержание работы в короткое время, схватывать суть вопросов и толково объяснять существо. Следовательно, учиться делать доклад полезно для работы в любой области знаний.
3. На семинаре (конференции) докладчику принято задавать вопросы. Студентам следует знать, что в научной среде не принято осуждать коллег за заданные в процессе обсуждения вопросы. Однако вопросы должны быть заданы по существу проблемы, исключать переход на личностные отношения. Публичное выступление позволяет студентам учиться корректно, лаконично и по существу отвечать на вопросы, демонстрировать свои знания.

Требования к подготовке доклада

Доклад может иметь форму публичной лекции, а может содержать в себе основные тезисы более крупной работы (например, реферата, курсовой, дипломной работы, научной статьи). Обычно от доклада требуется, чтобы он был:

- точен в части фактического материала и содержал обоснованные выводы;
- составлен с учетом точки зрения адресата;
- посвящен проблемам, непосредственно относящимся к определенной теме;
- разделен на части, логично построенные;
- достаточно обширен, чтобы исчерпать заявленную тему доклада, но не настолько, чтобы утомлять адресата;

• интересно написан и легко читался (слушался);

• понятен, нагляден и привлекателен по оформлению.

Как правило, доклад содержит две части: текст и иллюстрации. Представление рисунков, таблиц, графиков должно быть сделано с помощью компьютера. Компьютер - идеальный помощник при подготовке выступления на семинаре (конференции). Каждая из частей доклада важна. Хорошо подготовленному тексту всегда сопутствует хорошая презентация. Если докладчик не нашёл времени хорошо подготовить текст, то у него плохо подготовлены и иллюстрации. Это неписаное правило.

Доклад строится по определённой схеме. Только хорошая система изложения даёт возможность логично, взаимосвязано, кратко и убедительно изложить результат. Обычно участники конференции знают, что должно прозвучать в каждой части выступления. В мире ежегодно проходят тысячи семинаров, сотни различных конференций, технология создания докладов совершенствуется. Главное - говорить о природе явления, о процессах, проблемах и причинах Вашего способа их решения, аргументировать каждый Ваш шаг к цели.

На следующие вопросы докладчику полезно ответить самому себе при подготовке выступления, заблаговременно (хуже, если подобные вопросы возникнут у слушателей в процессе доклада). Естественно, отвечать целесообразно честно...

1. Какова цель выступления**?**

Или: «Я, автор доклада, хочу...»:

- информировать слушателей о чем-то;
- объяснить слушателям что-то;
- обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т.п.) со слушателями;
- спросить у слушателей совета;
- сделать себе PR;
- пожаловаться слушателям на что-то (на жизнь, ситуацию в стране и т.п.).

Т.е. ради чего, собственно, затевается выступление? Если внятного ответа на Вопрос нет, то стоит задуматься, нужно ли такое выступление?

2. Какова аудитория?

На кого рассчитано выступление:

- на студентов;
- на клиента (-ов);
- на коллег-профессионалов;
- на конкурентов;
- на присутствующую в аудитории подругу (друзей)?

3. Каков объект выступления?

О чем собственно доклад, что является его «ядром»:

- одна модель;
- серия моделей;
- динамика изменения модели (-ей);
- условия применения моделей;
- законченная методика;
- типовые ошибки;
- прогнозы;
- обзор, сравнительный анализ;
- постановка проблемы, гипотеза;
- иное?

Естественно, качественный доклад может касаться нескольких пунктов из приведенного списка...

4. Какова актуальность доклада?

Или: почему сегодня нужно говорить именно об этом?

5. В чем заключается новизна темы?

Или: если заменить многоумные и иноязычные термины в тексте доклада на обычные слова, то не станет ли содержание доклада банальностью?

Ссылается ли автор на своих предшественников? Проводит ли сравнение с существующими аналогами?

Стоит заметить, что новизна и актуальность - разные вещи. Новизна характеризует насколько ново содержание выступления по сравнению с существующими аналогами. Актуальность - насколько оно сейчас нужно. Бесспорно, самый выигрышный вариант - и ново, и актуально. Неплохо, если актуально, но не ново. Например, давняя проблема, но так никем и не решенная. Терпимо, если не актуально, но ново - как прогноз. Пример: сделанный Д.И. Менделеевым в XIX веке прогноз, что в будущем дома будут не только обогревать, но и охлаждать (кондиционеров тогда и вправду не знали).

Но если и не ново и не актуально, то нужно ли кому-то такое выступление?

6. Разработан ли автором план (структура и логика) выступления?

Есть ли логичная последовательность авторской мысли? Или же автор планирует свой доклад в стиле: «чего-нибудь наболтаю, а наглядный материал и вопросы слушателей как-нибудь помогут вытянуть выступление...?»

Есть ли выводы с четкой фиксацией главного и нового? Как они подводят итог выступлению?

7. Наглядная иллюстрация материалов

Нужна ли она вообще, и если да, то, что в ней будет содержаться? Отражает ли она логику выступления?

Иллюстрирует ли сложные места доклада?

Важно помнить: иллюстративный материал не должен полностью дублировать текст доклада. Слушатель должен иметь возможность записывать: примеры, дополнения, подробности, свои мысли... А для этого необходимо задействовать как можно больше видов памяти. Гигантской практикой образования доказано: материал усваивается лучше, если зрительная и слуховая память подкрепляются моторной. Т.е. надо дать возможность слушателям записывать, а не только пассивно впитывать материал.

Следует учитывать и отрицательный момент раздаточных материалов: точное повторение рассказа докладчика. Или иначе: если на руках слушателей (в мультимедийной презентации) есть полный письменный текст, зачем им нужен докладчик? К слову сказать, часто красивые слайды не столько иллюстрируют материал, сколько прикрывают бедность содержания...

8. Корректные ссылки

Уже много веков в научной среде считается хорошим тоном указание ссылок на первоисточники, а не утаивание их.

9. Что останется у слушателей:

- раздаточный или наглядный материал: какой и сколько?
- собственные записи: какие и сколько? И что сделано автором по ходу доклада для того, чтобы записи слушателей не искажали авторский смысл?
- в головах слушателей: какие понятия, модели, свойства и условия применения были передам слушателям?

Требования к составлению доклада

Полезно придерживаться следующей схемы составления доклада на семинаре (конференции).

Время Вашего доклада ограничено, обычно на него отводится 5-7 минут. За это время докладчик может успеть зачитать в темпе обычной разговорной речи текст объёмом не более

3-5-и листов формата А4. После доклада - вопросы слушателей и ответы докладчика (до 3 минут). Полное время Вашего выступления - не более 10-и минут.

Сначала должно прозвучать название работы и фамилии авторов. Обычно название доклада и авторов произносит руководитель семинара (председатель конференции). Он представляет доклад, но допустим и такой вариант, при котором докладчик сам произносит название работы и имена участников исследования. Потраченное время - примерно 30 с.

Следует знать, что название - это краткая формулировка цели. Поэтому название должно быть конкретным и ясно указывать, на что направлены усилия автора. Если в названии менее 10-и слов - это хороший тон. Если больше - рекомендуется сократить. Так советуют многие международные журналы. В выступлении можно пояснить название работы другими словами. Возможно, слушатели лучше Вас поймут, если Вы скажете, какое явление исследуется, что измеряется, что создаётся, разрабатывается или рассчитывается. Максимально ясно покажите, что именно Вас интересует.

Введение (до 1 мин)

В этой части необходимо обосновать необходимость проведения исследования и его актуальность. Другими словами, Вы должны доказать, что доклад достоин того, чтобы его слушали. Объясните, почему важно исследовать данное явление. Расскажите, чем интересен выбранный объект с точки зрения науки, заинтересуйте своих слушателей темой Вашего исследования.

Скажите, кто и где решал подобную задачу. Укажите сильные и слабые стороны известных результатов. Учитывайте то, что студенту необходимо учиться работать с литературой, анализировать известные факты. Назовите источники информации, Ваших предшественников по имени, отчеству и фамилии и кратко, какие ими были получены результаты. Обоснуйте достоинство Вашего способа исследования в сравнении с известными результатами. Учтите, что студенческое исследование может быть и познавательного характера, то есть можно исследовать известный науке факт. Поясните, чем он интересен с Вашей точки зрения. Ещё раз сформулируйте цель работы и покажите, какие задачи необходимо решить, чтобы достигнуть цели. Что нужно сделать, создать, решить, вычислить? Делите целое на части - так будет понятнее и проще.

Методика исследования (до 30 сек.)

Методика, или способ исследования, должна быть обоснована. Поясните, покажите преимущества и возможности выбранной Вами методики при проведении экспериментального исследования.

Теоретическая часть (до 1 мин)

Эта часть обязательна в докладе. Редкий случай, когда можно обойтись без теоретического обоснования предстоящей работы, ведь экспериментальное исследование должно базироваться на теории. Здесь необходимо показать сегодняшний уровень Вашего понимания проблемы и на основании теории попытаться сформулировать постановку задачи. Покажите только основные соотношения и обязательно дайте комментарий. Скажите, что основная часть теории находится в содержании работы (реферате).

Экспериментальная часть (для работ экспериментального типа) (1,5-2 мин.)

Покажите и объясните суть проведённого Вами эксперимента. Остановитесь только на главном, основном. Второстепенное оставьте для вопросов.

Результаты работы (до 1 мин.)

1. Перечислите основные, наиболее важные, на Ваш взгляд, результаты работы.
2. Расскажите, как он был получен, укажите его характерные особенности.
3. Поясните, что Вы считаете самым важным и почему.
4. Следует ли продолжать исследование, и, если да, то в каком направлении?
5. Каким результатом можно было бы гордиться? Остановитесь на нём подробно.

6. Скажите, что следует из представленной вами информации.
7. Покажите, удалось ли разобраться в вопросах, сформулированных при постановке задачи. Обязательно скажите, достигнута ли цель работы. Закончено ли исследование?
8. Какие перспективы?
9. Покажите, что результат Вам нравится.

Выводы (до 1 мин.)

Сжато и чётко сформулируйте выводы. Покажите, что твёрдо установлено в результате проведённого теоретического или экспериментального исследования. Что удалось надёжно выяснить? Какие факты заслуживают доверия?

Завершение доклада

Поблагодарите всех за внимание. Помните: если Вы закончили свой доклад на 15 секунд раньше, все останутся довольны и будут ждать начала вопросов и дискуссию. Если Вы просите дополнительно ещё 3 минуты, Вас смогут потерпеть. Это время могут отнять от времени для вопросов, где Вы могли бы показать себя с хорошей стороны. Поэтому есть смысл предварительно хорошо "вычитать" (почти выучить) доклад. Это лучший способ научиться управлять временем.

Требования к предъявлению доклада во время выступления

Докладчику следует знать следующие приёмы, обеспечивающие эффективность восприятия устного публичного сообщения.

Приемы привлечения внимания

1. Продуманный первый слайд презентации.
2. Обращение.
3. Контакт глаз.
4. Позитивная мимика.
5. Уверенная пантомимика и интонация.
6. Выбор места.

Приемы привлечения интереса

В формулировку актуальности включить информацию о том, в чём может быть личный интерес слушателей, в какой ситуации они могут его использовать?

Приемы поддержания интереса и активной мыслительной деятельности слушателей

1. Презентация (образы, схемы, диаграммы, логика, динамика, юмор, оформление).
2. Соответствующая невербальная коммуникация (все составляющие!!!).
3. Речь логичная, понятная, средний темп, интонационная выразительность.
4. Разговорный стиль.
5. Личностная вовлеченность.
6. Образные примеры.
7. Обращение к личному опыту.
8. Юмор.
9. Цитаты.
10. Временное соответствие.

Приемы завершения выхода из контакта

- обобщение;
- метафора, цитата;
- побуждение к действию.

7. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [5].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

[5] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[6].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

8. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих

[6]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

9.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

10.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно,логико-графическими схемами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368 с.
2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/
3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml
4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.
5. Методические рекомендации по написанию

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Н. П. Жданова, Т. С. Озерова

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ
по разделу дисциплины «Математика» для студентов всех специальностей очного обучения

Екатеринбург
2019

Ж 42

Рецензент: В. Я. Раевский, доцент, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории теоретической физики ИФМ.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры математики 16.10. 2018 г. (протокол № 134) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Жданова Н. П., Озерова Т. С.

Ж42 КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ: методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ. Н. П. Жданова, Т. С. Озерова; Уральский государственный горный университет. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 85 с.

В методических указаниях с единых позиций изложены понятия кратных криволинейных и поверхностных интегралов. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных работ. Кратко изложены элементы теории поля.

После изучения теории и решений типовых задач, студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ. Все задачи снабжены ответами.

Методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ предназначены студентам всех специальностей очного обучения для изучения темы: «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы» предназначены для самостоятельной работы студентов. Методические указания удовлетворяют всем требованиям государственного образовательного стандарта по подготовке дипломированных специалистов .В методических указаниях с единых позиций изложены понятия кратных криволинейных и поверхностных интегралов. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных и самостоятельных работ. Кратко изложены элементы теории поля.

После изучения теории и решений типовых задач, студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ. Все задачи снабжены ответами.

I. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Понятие интеграла от скалярной функции

Пусть Q – и замкнутая ограниченная часть пространства. Это может быть отрезок $[a, b]$ оси Ox, дуга плоской или пространственной кривой, часть плоскости или кривой поверхности, трехмерная область. Пусть в каждой точке M области Q задана непрерывная функция $u=f(M)$.

1. Мысленно разобьем область Q на n элементарных частей $\Delta Q_i, i=\overline{1,n}$ и найдем геометрическую меру каждой из частей, обозначив ее тоже ΔQ_i (это длина элементарного отрезка Δx_i оси Ox или элементарной части дуги Δl_i кривой, площадь ΔS_i элементарной части плоской области или $\Delta\sigma_i$ - площадь элементарной части поверхности: Δv_i - объем элементарной части трехмерной области).

2. На каждой элементарной части ΔQ_i возьмем произвольную точку M_i и вычислим значения функции в выбранных точках $U_i=f(M_i)$.

3. Составим произведения ($U_i \cdot \Delta Q_i = F(M_i)\cdot \Delta Q_i$) и найдем сумму всех произведений:

$$f(M_1)\cdot \Delta Q_1 + f(M_2)\cdot \Delta Q_2 + \ldots + f(M_i)\cdot \Delta Q_i + \ldots + f(M_n)\cdot \Delta Q_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta Q_i$$

– интегральная сумма функции $f(M)$ в области Q.

4. Назовем диаметром diam (ΔQ_i) элементарной области ΔQ_i наибольшее расстояние между точками ее границы. Из всех полученных диаметров $i=\overline{1,n}$ выберем максимальный и назовем его рангом λ данного разбиения:

$$\lambda = \max_i diam\,(\Delta Q_i)\,.$$

Уменьшая ранг, составим последовательность интегральных сумм.
Если область Q имеет геометрическую меру (длину, площадь, объем) и функция $U_i=f(M_i)$ непрерывна в области Q, то при $\lambda \to 0$ существует предел последовательности интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta Q_i$, равный числу J, независимо от способа разбиения области Q на элементарные части и от выбора точек M_i на

каждой из частей. Число J называется интегралом от функции $f(M)$ по области Q и обозначается символом $\int\limits_Q f(M)dQ,$ т. е. $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta Q_i = \int\limits_Q f(M)dQ,$ Q называется областью интегрирования; $f(M)$ – подынтегральной функцией, dQ – элементом геометрической меры области Q; (dx – элемент длины отрезка [a, b] оси Ox; dl – элемент длины дуги плоской или пространственной кривой; ds – элемент площади плоской области; $d\sigma$ – элемент площади поверхности; dv – элемент объема).

Тип интеграла различают по типу элемента dQ:

1. Если Q=[a, b] – отрезок оси Ox, получим определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.
2. Если $Q = \breve{A}B$ - дуга плоской кривой, получим $\int\limits_L f(M)dl = \int\limits_L f(x,y)dl.$

Если $Q = \breve{A}B = L$ – дуга пространственной кривой, то $\int\limits_L f(M)dl = \int\limits_L f(x,y,z)dl$.

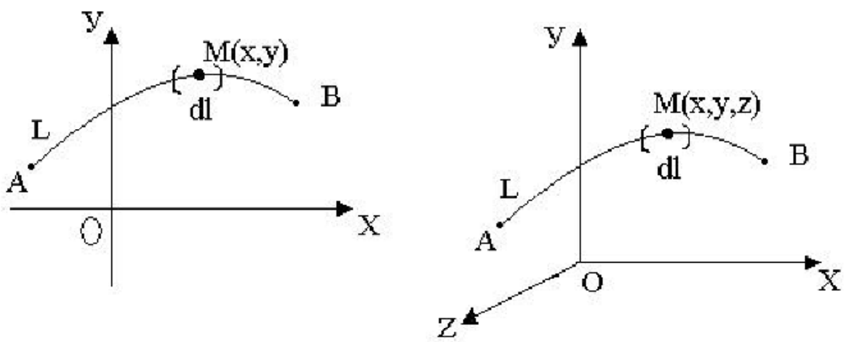


Рис. 1.1

Эти интегралы называются криволинейными интегралами первого рода или криволинейными интегралами по длине дуги кривой.

3. Q – область плоскости xOy.

$$\int\limits_Q f(M)ds = \iint\limits_Q f(x,y)ds = \iint\limits_Q f(x,y)dxdy$$ - двойной интеграл.

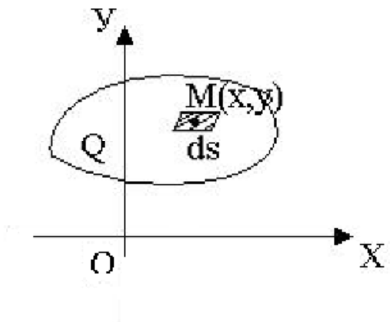


Рис. 1.2

4. Q – часть кривой поверхности

$\int\limits_{Q} f(M)d\sigma = \iint\limits_{Q} f(x,y,z)d\sigma$ - поверхностный интеграл первого рода (по площади поверхности).

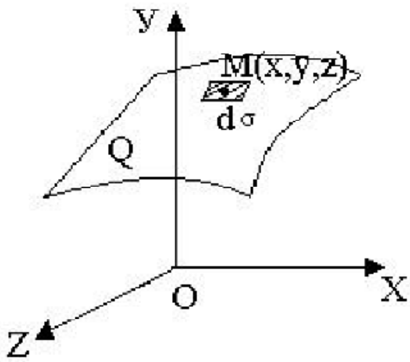


Рис. 1.3

5. Q – область в трехмерном пространстве (называется телом).

$\int\limits_{Q} f(M)dv = \iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz$ - тройной интеграл.

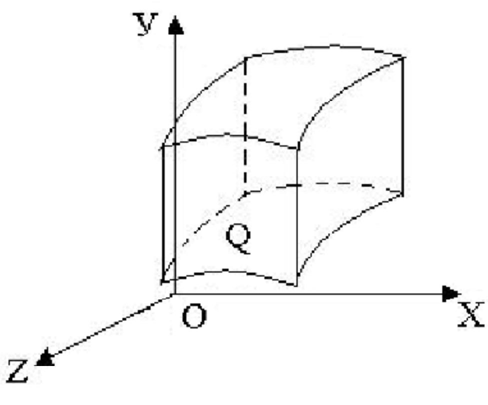


Рис. 1.4

В технических дисциплинах для обозначения интегралов используют все приведенные выше символы. Мы используем символы в правых частях равенств.

2. Основные свойства интегралов

1) $\int\limits_Q (U_1 \pm U_2) dQ = \int\limits_Q U_1 dQ \pm \int\limits_Q U_2 dQ$;

2) $\int\limits_Q AUdQ = A\int\limits_Q UdQ$, если A=const;

3) Если Q разбить на части Q_1 и Q_2, то $\int\limits_Q UdQ = \int\limits_{Q_1} UdQ + \int\limits_{Q_2} UdQ$;

4) $\int\limits_Q dQ = Q$ - мера области Q (длина, площадь, объем).

5) Если $U_1 \le U_2$, то $\int\limits_Q U_1 dQ \le \int\limits_Q U_2 dQ$.

6) Оценка интеграла: $Q \cdot U_{\min} \le \int\limits_Q UdQ \le Q \cdot U_{\max}$, где Q – мера области Q; $U_{\min}$ и $U_{\max}$ – наименьшее и наибольшее значения функции $U=f(M)$ в области Q.

7) Средним значением функции $U=f(M)$ называют число $\overline{U} = \dfrac{1}{Q}\int\limits_Q UdQ$. Непрерывная функция $U=f(M)$ принимает значение $\overline{U}$ хотя бы в одной точке M_0 области Q. $U_{\min} \le \overline{U} \le U_{\max}$.

3. Вычисление интегралов

3.1. Определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где $F(x)$ – первообразная от функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

3.2. Криволинейный интеграл

Криволинейный интеграл $\int\limits_L f(x, y)dl$ или $\int\limits_L f(x, y, z)dl$ преобразуют в определенный интеграл. Для этого все переменные и дифференциалы в подынтегральном выражении заменяют из уравнений кривой через одну переменную и ее дифференциал и вычисляют получившийся интеграл по интервалу изменения выбранной переменной на дуге *L*.

а) Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t), \alpha \le t \le \beta \end{cases}$,

то

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \qquad (2)$$

б) Если *L* – график функции *y*=*g*(*x*) и $a \le x \le b$, то

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,g(x)) \cdot \sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx \quad . \qquad (3)$$

в) Если *L*: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t) \\ z = \theta(t), \alpha \le t \le \beta \end{cases}$, то

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\theta(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\theta'(t))^2}\,dt. \qquad (4)$$

Замечание

В определенных интегралах нижний предел нужно брать меньше верхнего.

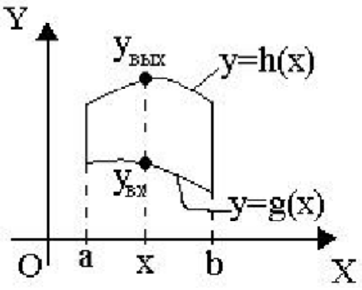
3.3. Двойной интеграл

$\iint\limits_D f(x,y)\,ds$ приводим к двукратному интегралу.

1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах.

Пусть область *D* ограничена прямыми *x=a; x=b; (a<b)* и графиками функций *y*=*g*(*x*)*; y*=*h*(*x*), причем обе функции непрерывны на отрезке [*a;b*] и, $g(x) \le h(x)$ тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx. \qquad (5)$$



В правой части равенства двукратный интеграл. Очевидно, что сначала нужно вычислить «внутренний интеграл» $\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$. Рассматривая x как постоянную величину, получим функцию от x, затем эту функцию проинтегрировать по x в пределах от a до b. Если область D ограничена прямыми $y=a$; $y=b$ и графиками функций $x=g(y)$, $x=h(y)$, $g(y) \le h(y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \right) dy. \tag{6}$$

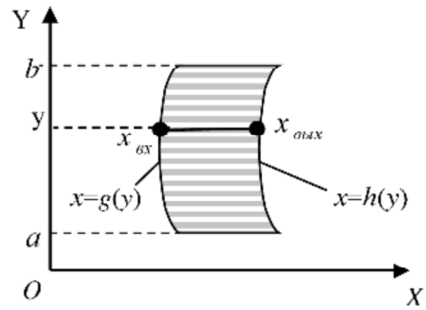


Рис. 3.2

При вычислении внутреннего интеграла в этом случае нужно считать y – постоянной величиной. Заметим, что границы «внешнего интеграла» всегда постоянны. Переход от формулы (5) к формуле (6) или от формулы (6) к формуле (5) называют изменением порядка интегрирования.

Если область D не удовлетворяет условиям формул (5) или (6), то ее разбивают на части.

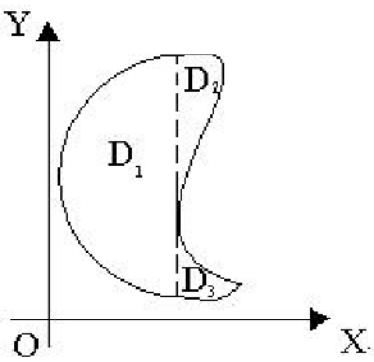


Рис. 3.3

2. Двойной интеграл в полярных координатах.

Чтобы в двойном интеграле перейти к полярным координатам нужно:

1) Совместить прямоугольную и полярную системы координат так, чтобы начало прямоугольных координат совпадало с полюсом *0*, а ось *Ox* с полярной осью *0ρ*.

2) Заменить в подынтегральном выражении *x, y* и *ds* по формулам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $ds=\rho d\varphi d\rho$ и получить:

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho. \tag{7}$$

3) По этим же формулам заменить *x* и *y* на ρ и φ в уравнении каждой границы области *D*, потом уравнения решить относительно ρ, получив уравнение вида $\rho=g(\varphi)$. Если в уравнении границы нет *ρ*, решить уравнение относительно *φ*, получить $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$.

4) Пусть область интегрирования *D* ограничена лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $(\alpha<\beta)$ и графиками функций $\rho=g(\varphi)$, $\rho=h(\varphi)$, $g(\varphi)\le h(\varphi)$.

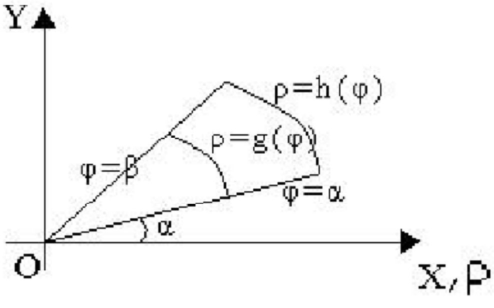


Рис. 3.4

Тогда

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \right) d\varphi. \tag{8}$$

При вычислении «внутреннего» интеграла переменная φ временно считается постоянной. В частности, если полюс принадлежит границе области, получим

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_0^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \right) d\varphi. \tag{8 a}$$

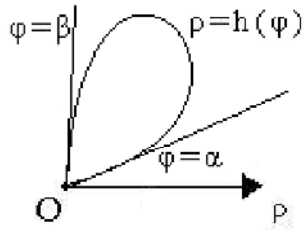


Рис. 3.5

Если полюс находится внутри области, получим:

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho\right)d\varphi \qquad (8\ б)$$

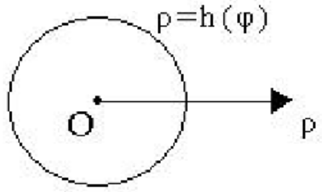


Рис. 3.6

3.4. Поверхностный интеграл первого рода

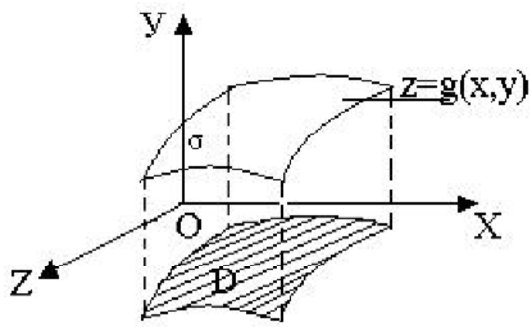


Рис. 3.7

Пусть поверхность σ задана уравнением $z=g(x,y)$. Чтобы вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_\sigma f(x,y,z)d\sigma$, нужно:

1) Найти проекцию поверхности σ на координатную плоскость xOy, получить область D.

2) Заменить в подынтегральном выражении z и $d\sigma$ по формулам: $z = g(x, y), d\sigma = \sqrt{1+\left(g'_x(x, y)\right)^2 + \left(g'_y(x, y)\right)^2}\, ds$, получить и вычислить двойной интеграл по области D (в плоскости xOy):

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1+\left(g'_x(x, y)\right)^2 + \left(g'_y(x, y)\right)^2}\, ds. \qquad (9)$$

Если уравнение поверхности $x=g(y,z)$, то находят проекцию поверхности G на плоскость yOz. Если уравнение поверхности $y=g(x,z)$, то находят проекцию поверхности G на плоскость xOz.

3.5. Тройной интеграл

Вычисление тройного интеграла $\iiint\limits_{G} f(x, y, z)dv$ сводится к последовательному вычислению «внутреннего» определенного интеграла и «внешнего» двойного интеграла по области D – проекции области G на координатную плоскость.

Пусть в трехмерном пространстве $Oxyz$ область G ограничена сверху поверхностью $z=q(x,y)$, снизу – поверхностью $z=p(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси oz (эта граница может отсутствовать). Найдем D – проекцию области G на плоскость Oxy.

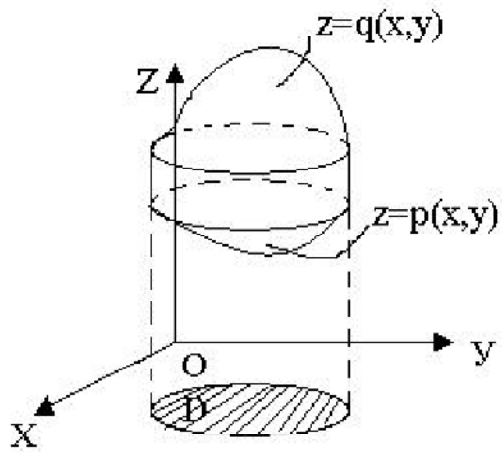


Рис. 3.8

$$\iiint_G f(x,y,z)dv = \iint_D \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz \right) ds \ . \tag{10}$$

Сначала вычисляют внутренний интеграл $\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz$, считая временно x и y постоянными величинами и получают функцию двух переменных x и y, потом от этой функции вычисляют «внешний» двойной интеграл, подобрав удобную для вычисления этого интеграла формулу. Иногда удобнее проецировать тело на плоскость Oxz или Oyz.

II. ПРИМЕНЕНИЕ КРАТНЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью интегралов можно найти величину T, связанную с некоторой областью Q и обладающую двумя свойствами:

1) При разбиении области Q на элементарные части ΔQ_i величина T тоже разбивается на элементарные части ΔT_i, причем $T = \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i$. Такие величины называются аддитивными.

2) ΔT_i приблизительно пропорциональна мере ΔQ_i, т. е. $\Delta T_i \approx k \cdot \Delta Q_i$. Для каждого i коэффициент k постоянен и связан с ΔQ_i, т. е. $K=f(M_i)$, где $M_i \in \Delta Q_i$.

Тогда приближенные значения $T \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta Q_i$ и точное значение

$$T - \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta Q_i - \int_Q f(M)dQ, \qquad \lambda = \max_i (diam \, \Delta Q_i).$$

Величину T, обладающую этими свойствами, можно найти проще, если взять элемент dQ области Q и найти формулу элемента dT величины T, т. е. получить $dT=f(M)dQ$, где $M \in dQ$. Тогда $T = \int_Q f(M)dQ$.

1. Длина дуги кривой

1) Если плоская кривая задана параметрически

$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta,$ то длина дуги

$$l = \int_L dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,. \tag{11}$$

Для пространственной кривой $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \ \alpha \le t \le \beta, \\ z = z(t) \end{cases}$

$$l = \int_L dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt\,. \tag{11a}$$

2) Если плоская кривая – график функции y=g(x), $a \le x \le b$, то

$$l = \int_L dl = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx\,. \tag{11б}$$

2. Площадь плоской области

$$S = \iint_D dS\,. \tag{12}$$

В прямоугольных координатах

$$S = \iint_D dxdy\,. \tag{12а}$$

В полярных координатах

$$S = \iint_D \rho d\varphi d\rho\,. \tag{12б}$$

3. Площадь поверхности

$$S = \iint_\sigma d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(g_x'(x,y)\right)^2 + \left(g_y'(x,y)\right)^2}\, ds, \text{ где } D = \underset{oxy}{пр}\,\sigma\,. \tag{13}$$

4. Объем тела

1. $V = \iiint_G dV\,.$ (14)

2. Объем цилиндрического тела с основанием на координатной плоскости xOy, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, можно вычислить с помощью двойного интеграла.

$$V = \iint_D g(x,y)ds. \tag{14a}$$

5. Масса, распределенная в заданной области

Говорят, что масса непрерывно распределена в области Q, если каждой мысленно выделенной части ΔQ этой области соответствует значение массы Δm. При этом масса отдельно взятой точки равна нулю.

Пусть точка $M \in \Delta Q \subset Q$. Плотностью распределения массы в точке M области Q называют величину δ:

$$\delta = \lim_{\operatorname{diam}(\Delta Q)\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta Q}, \tag{15}$$

причем ΔQ все время содержит точку M.

Если масса распределена на дуге кривой, получаем линейную плотность, на поверхности – поверхностную плотность, в трехмерной области – плотность. Так как масса распределена неравномерно, то плотность в точке является функцией точки $\delta=\delta(M)$.

Из определения плотности массы (15) следует, что элемент массы равен $\Delta m \approx \delta \cdot \Delta Q$ или $dm=\delta dQ$, тогда масса, распределенная в области Q с плотностью $\delta=\delta(M)$:

$$m = \int_Q \delta dQ = \int_Q \delta(M)dQ. \tag{16}$$

Аналогично вводят понятие плотности заряда в диэлектрике, плотности энергии электромагнитного поля и др. Все эти величины находят по формуле (16). Так, если электрический заряд q распределен в области Q с плотностью заряда $\lambda=\lambda(M)$, то

$$q = \int_Q \lambda(M)dQ. \tag{17}$$

Частные случаи распределения массы:

а) масса, распределенная с плотностью δ на дуге L кривой.

$$m = \int_L \delta(x, y)dl$$ - для плоской кривой;

$$m = \int_L \delta(x, y, z)dl$$ - для пространственной кривой; (16а)

б) масса, распределенная с поверхностной плотностью δ по области D:

$$m = \iint_D \delta(x, y)ds\,; \tag{16б}$$

в) масса, распределенная с поверхностной плотностью δ по части σ кривой поверхности:

$$m = \iint_\sigma \delta(x, y, z)d\sigma\,; \tag{16в}$$

г) масса, распределенная с плотностью δ в трехмерной области G:

$$m = \iiint_G \delta(x, y, z)dv\,. \tag{16г}$$

III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Понятие поля

Если с каждой точкой $M \in G$ связано определенное значение величины U, то говорят, что в области G задано поле величины U.

Поле называется скалярным, если U – скаляр (температура, плотность, электрический потенциал и др.) и векторным, если U – вектор (сила, скорость, напряженность и др.).

Поле называется стационарным (установившимся), если оно не меняется с течением времени.

Поле не зависит от системы координат, введенной в области G. Рассмотрим прямоугольную систему координат, тогда задание скалярного поля равносильно заданию в области G скалярной функции $U=f(x,y,z)$ или $U=f(x,y)$, если G – область в плоскости xOy. Задание векторного поля равносильно заданию в каждой точке $M(x, y, z) \in G$ векторной функции

$$\vec{U}(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Свойства скалярного поля, его линий уровня, производной по направлению и градиента рассматривались в разделе «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных».

В этом разделе рассмотрим свойства стационарного векторного поля. В дальнейшем функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их производные считаем непрерывными в области G.

2. Векторные линии

Векторной линией векторного поля называют линию, в каждой точке M которой вектор $\vec{U}(M)$ направлен по касательной к линии.

Мы не рассматриваем, как найти векторные линии.

Если $\vec{U}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ и в каждой точке поля функции P, Q, R одновременно не обращаются в нуль и непрерывны вместе со всеми своими частными производными первого порядка, то через каждую точку поля проходит единственная векторная линия, т. е. вся область G заполнена векторными линиями. По виду векторных линий получают информацию о структуре поля. Если $\vec{U}(M)$ - стационарное поле текущей жидкости, то векторные линии являются траекториями частиц жидкости и называются линиями тока. Если $\vec{U}(M)$ - вектор силы, то векторные линии называются силовыми линиями и т. д. Множество всех векторных линий, проходящих через точки поверхности σ, образует векторную трубку.

3. Работа силового поля. Криволинейный интеграл второго рода

Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура

Пусть в каждой точке плоскости xOy (или области D) определен вектор силы $\vec{F}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, образующий векторное поле. И пусть материальная точка $(m=1)$ перемещается в этом поле по гладкой кривой L из начала в конец дуги L. При перемещении материальной точки сила $\vec{F}$ производит работу A.

Возьмем на дуге L произвольную точку M. При бесконечно малом перемещении из точки M по дуге кривой силу можно считать постоянной и равной $\vec{F}(M)$, поэтому соответствующая элементарная работа равна скалярному произведению $dA=\vec{F}(M)\cdot d\vec{r}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Суммируя элементарные работы, получаем общую работу, производимую силой $\vec{F}$, когда материальная точка проходит путь L:

$$A=\int_L dA=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (18)$$

Полученный интеграл от векторной функции $\vec{F}(M)$ по кривой L называется криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам. Чтобы вычислить интеграл, нужно задать поле $\vec{F}(M)$, уравнение дуги кривой L и указать направление движения по кривой L (начало и конец пути).

Для вычисления интеграла $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ все переменные и дифференциалы в подынтегральном выражении заменяют из уравнения кривой через одну переменную и ее дифференциал. Находят интервал изменения выбранной переменной на дуге L и вычисляют полученный определенный интеграл.

Если L задана параметрически $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ и t изменяется от α до β

(α соответствует началу пути интегрирования, β – концу), то

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta (P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))dt. \qquad (18а)$$

Если L – график функции $y=f(x)$ и x измсняется от a до b, то

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b (P(x,f(x))+Q(x,f(x))f'(x))dx. \qquad (18б)$$

При изменении направления движения по L интеграл изменяет только знак (другие свойства интеграла в разделе I). Если поле $\vec{F}(M)$ и L заданы в трехмерном пространстве, получим:

$$A = \int_L dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \qquad (19)$$

который вычисляется по тому же правилу.

Если $\vec{U}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ - произвольное векторное поле, а L – замкнутый контур, то интеграл

$$\oint_L \vec{U}(M) \cdot d\vec{r} = \oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (20)$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{U}(M)$ или циркуляцией вектора $\vec{U}(M)$ вдоль замкнутого контура L.

Циркуляция вектора – величина скалярная, положительная, отрицательная или равная нулю.

4. Поток вектора через поверхность

4.1. Вектор площадки

Двусторонняя поверхность в пространстве называется ориентированной, если указано, какая ее сторона считается наружной, а какая внутренней. Можно рассматривать разные способы ориентации, например:

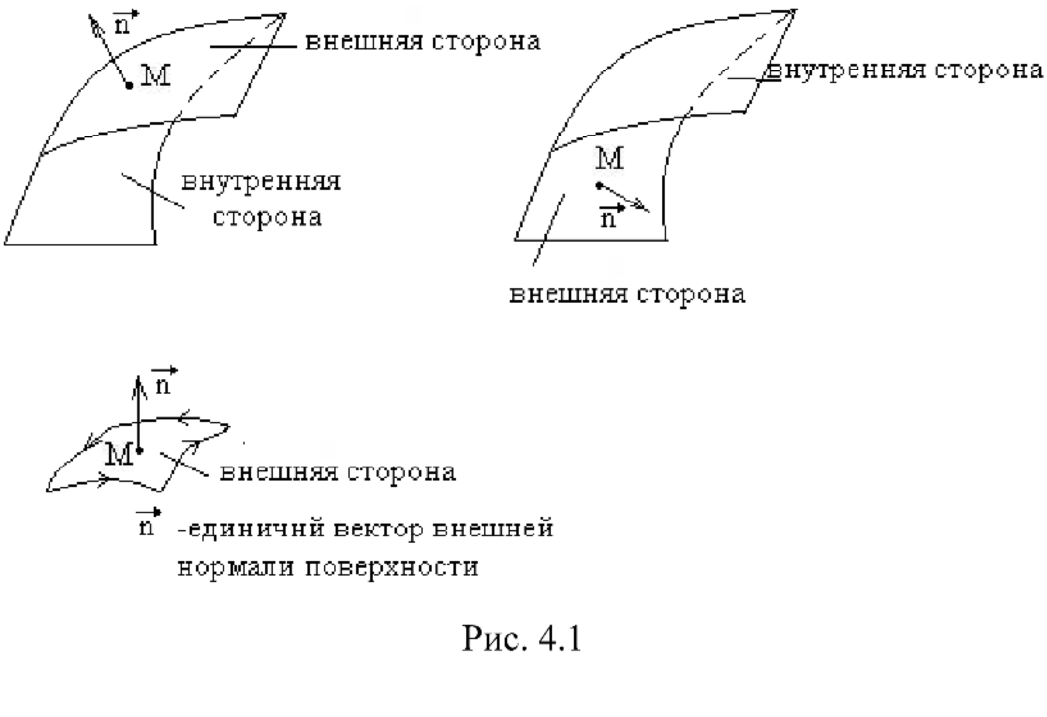


Рис. 4.1

Часто при рассмотрении элементарной части, содержащей точку M ориентированной поверхности, важна только площадь этой части, а ее форма (круг, прямоугольник и т. д.) не играет никакой роли. Тогда эту часть поверхности изображают нормальным вектором поверхности, направленным от внутренней стороны поверхности к внешней, модуль, которого равен площади этой элементарной части поверхности.

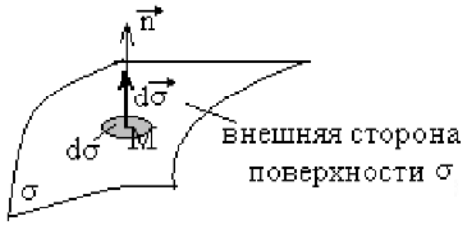


Рис. 4.2

Такой вектор называют вектором площадки (или векторной площадью площадки) в точке M. Если площадь выбранной площадки равна $d\sigma$, то вектор обозначают $d\vec{\sigma}$. Если найден единичный вектор внешней нормали поверхности $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то вектор площадки

$$d\bar{\sigma} = \bar{n} \cdot d\sigma = \left(\bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma\right)d\sigma. \qquad (21)$$

В частности, dl- вектор кривой в точке M направлен по нормали к кривой в выбранную сторону, причем модуль вектора равен дифференциалу длины дуги кривой $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Так как вектор $\vec{dr} = (dx, dy)$ направлен по касательной к кривой и в точке $M(x,y)$ и модуль $\left|\vec{dr}\right| = dl$, то вектор кривой $\vec{dl}$ можно взять равным $\vec{dl} = (dy, -dx)$ или $\vec{dl} = (-dy, dx)$, потому что в этом случае скалярное произведение $\left(\vec{dr}, \vec{dl}\right) = 0$, значит $\vec{dl} \perp \vec{dr}$, т. е. $\vec{dl}$ направлен по нормали к кривой L и $\left|\vec{dl}\right| = \sqrt{(\pm\, dy)^2 + (\mp\, dx)^2} = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2} = dl$.

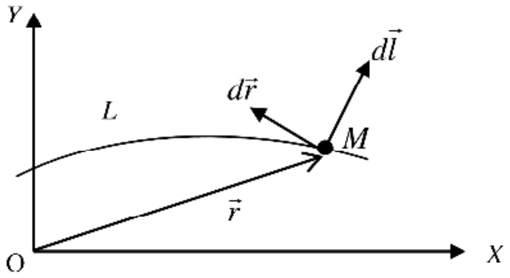


Рис. 4.3

4.2. Понятие потока вектора через поверхность

Пусть в области G задано векторное поле $\vec{U}(M)$ и ориентированная гладкая поверхность σ. Потоком векторного поля $\vec{U}(M)$ через поверхность σ называют скалярную величину, равную поверхностному интегралу

$$\Pi_\sigma(\overline{U}) = \iint_\sigma (\overline{u} \cdot \overline{n}) d\sigma = \iint_\sigma \overline{u} \cdot d\overline{\sigma}. \qquad (22)$$

где n - единичный вектор внешней нормали; $d\overrightarrow{\sigma}$ - вектор элементарной площадки поверхности σ.

Если ориентацию поверхности изменить на противоположную, то поток изменит только знак.

Часто поток рассматривают как «количество векторных линий», пересекающих поверхность изнутри наружу. «Количество» (в кавычках, так как число не целое) понимают в алгебраическом смысле, т. е., если одна часть σ пересекается векторными линиями изнутри наружу, а другая часть – снаружи внутрь, то «количество» может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

4.3. Гидродинамический смысл потока вектора через поверхность

Поток жидкости через поверхность

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости (или газа) в области G. В любой точке $M \in G$ скорость частицы жидкости имеет определённое значение $\overline{V} = \overline{V}(M)$, т. е. в области G задано векторное поле скоростей. Поместим в область G гладкую ориентированную поверхность σ и найдем объем жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени изнутри наружу. Возьмем на поверхности σ элемент $d\sigma$, содержащий точку M и найдем элемент объема жидкости, протекающей через $d\sigma$ изнутри наружу за единицу времени. Он равен объему косого цилиндра с основанием $d\sigma$ и образующей $\left|\vec{V}(M)\right|$.

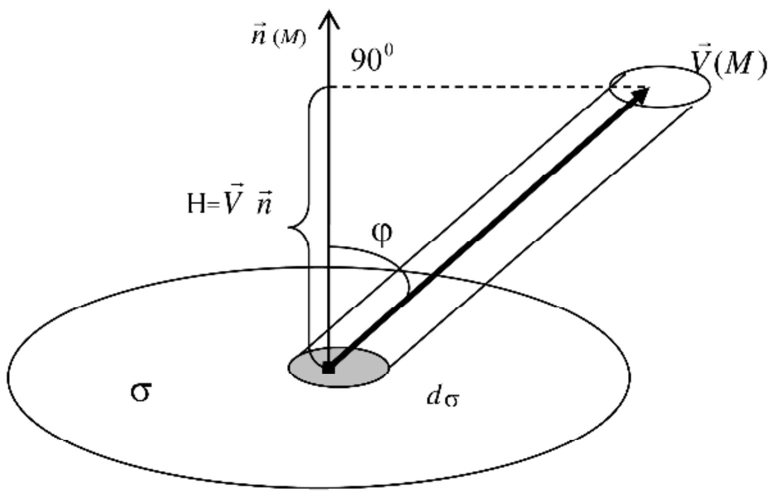


Рис. 4.4

Высота цилиндра равна проекции вектора скорости $\vec{V}(M)$ на единичный вектор внешней нормали $\vec{n}(M)$, т. е. $H = \left|V\right| \cos\varphi = \left|V\right| \cdot \left|n\right| \cos\varphi = V \cdot n$ – скалярному произведению векторов.

Тогда объем цилиндра равен $dV = Hd\sigma = \left(V \cdot n\right) \cdot d\sigma = V \cdot (n \cdot d\sigma) = V \cdot d\sigma$, т. е. элементарный объем жидкости равен скалярному произведению вектора скорости $\vec{V}(M)$ на вектор площадки $d\sigma$. Суммируя элементарные объемы жидкости для всех элементов поверхности σ, получим, что за единицу времени через всю поверхность σ изнутри наружу проходит объем жидкости, равный поверхностному интегралу

$$\iint_\sigma (\bar{v} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_\sigma \bar{v} \cdot \overrightarrow{ds} = \Pi_\sigma(\bar{v}),$$

т. е. равный потоку вектора $\vec{V}$ через поверхность σ.

4.4. Поток вектора через плоскую кривую *L*

Пусть на плоскости *xOy* задано векторное поле $\vec{U}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ и ориентированная дуга *L* гладкой кривой. Возьмем нормальный вектор кривой $\vec{dl} = (-dy, dx)$, составляющий острый угол с *Oy* при возрастании *x* вдоль кривой и будем считать это направление внешней нормалью. Скалярное произведение

$\vec{U} \cdot \vec{dl} = P(x,y)(-dy) + Q(x,y)(dx) = Q(x,y)dx - P(x,y)dy$, тогда

$\Pi_L(\vec{U}) = \int\limits_L \vec{U} \cdot \vec{dl} = \int\limits_L Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ - поток вектора $\vec{U}$ через плоскую кривую *L*.

4.5. Свойства и вычисление потока вектора через поверхность

Свойства

1) Если изменить ориентацию поверхности, то поток изменит только знак

$$\Pi_{\sigma_+}(\bar{u}) = -\Pi_{\sigma_-}(\bar{u}),$$

где σ_+ и σ_- - разные стороны поверхности σ.

2) Если поверхность σ состоит из частей σ_1 и σ_2, то

$$\Pi_{\sigma}(\bar{u}) = \Pi_{\sigma_1}(\bar{u}) + \Pi_{\sigma_2}(\bar{u}).$$

3) Если $\vec{u} = c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2}$,

то

$$\Pi_{\sigma}(\bar{u}) = C_1\Pi_{\sigma}(\overline{u_1}) + C_2\Pi_{\sigma}(\overline{u_2})$$ - свойство линейности потока.

Вычисление потока

Первый способ:

1. Найти проекцию поверхности σ на плоскость *xOy* – получить область *D*.
2. Найти единичный нормальный вектор поверхности σ. Для этого записать уравнение поверхности в виде *F*(*x*, *y*, *z*)=*0*. Найти $\mathrm{grad}F = F'_x\bar{i} + F'_y\bar{j} + F'_z\bar{k}$. Найти $|\mathrm{grad}\,F| = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}$. Так как $\mathrm{grad}F$ направлен по нормали к поверхности σ, то единичный вектор нормали

$$\bar{n} = \pm \frac{\text{grad}F}{|\text{grad}F|} = \pm \frac{F'_x i + F'_y j + F'_z k}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

Знак + или – выбираем в зависимости от заданной стороны поверхности.

3. Найти $d\sigma$.

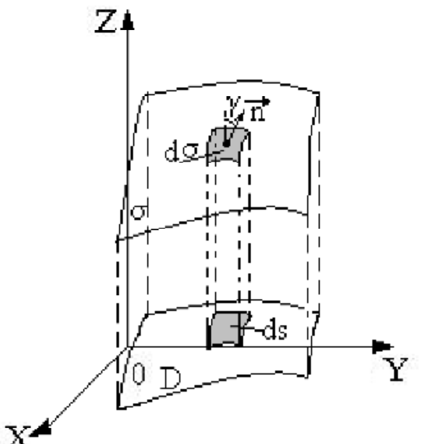


Рис. 4.5

Угол между $\vec{n}$ и осью Oz равен γ. Если считать, что в пределах площадки $d\sigma$ направление $\vec{n}$ не меняется, то угол наклона площадки $d\sigma$ к плоскости xOy (площадке ds) тоже равен γ, тогда площади этих площадок связаны соотношением

$$ds = \cos\gamma \cdot d\sigma \text{ и } d\sigma = \frac{ds}{\cos\gamma}.$$

Вектор $\quad n = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k,$

поэтому
$$\cos\gamma = \pm \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}.$$

Тогда
$$d\sigma = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} ds.$$

4. Уравнение поверхности σ записать в виде $z=z(x,y)$.

5. Вычислить $\Pi_\sigma(\bar{u}) = \iint\limits_\sigma (\bar{u} \cdot n) d\sigma = \iint\limits_D \left(\frac{u \cdot n}{|\cos\gamma|} \Big|_{z=z(x,y)} \right) \cdot ds$, подставив все найденные величины в двойной интеграл по области D и вычислив полученный интеграл.

Замечание

В случае замкнутой поверхности σ, $\vec{n}$ - вектор внешней нормали.

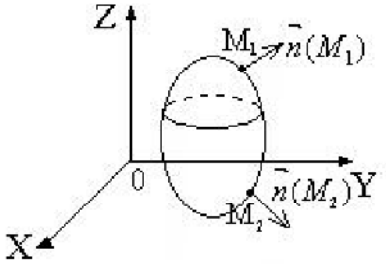


Рис. 4.6

Второй способ:

Пусть $$\bar{u} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$$

$$\bar{n} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$$

$$\bar{u}\cdot\bar{n} = P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma$$

Элемент площади ds в плоскости xOy равен $dxdy$, в плоскости xOz - $dxdz$ и в плоскости yOz - $dydz$.

Мы показали, что при проецировании поверхности σ на плоскость xOy $ds = \cos\gamma \cdot d\sigma$, т. е. $\cos\gamma d\sigma = dxdy$. (Смотри пункт 3 первого способа вычисления потока).

Тогда при проецировании поверхности σ на плоскость xOz $\cos\beta d\sigma = dxdz$, а на плоскость yOz $\cos\alpha d\sigma = dydz$.

Поток вектора $\vec{u}$ через поверхность σ равен

$$\begin{aligned}\Pi_\sigma(\bar{u}) = \iint_\sigma \bar{u}\cdot\bar{n}d\sigma = \iint_\sigma \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)d\sigma = \\ = \iint_\sigma \left(P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy\right).\end{aligned} \tag{23}$$

Полученный интеграл

$$\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

называется поверхностным интегралом второго типа (по координатам).

Предположим, что уравнение поверхности σ можно решить относительно всех переменных

$$\sigma : \Phi(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi(y,z) \\ y = \psi(x,z) \\ z = \eta(x,y) \end{array}\right.$$

Обозначим проекцию поверхности σ на плоскость xOy через σ_{xy}, на плоскость xOz через σ_{xz} и на плоскость yOz через σ_{yz}. Тогда поверхностный интеграл второго типа приводится к сумме двойных интегралов:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\sigma_{yz}} P(\varphi(y,z),y,z)dydz + \\ + \iint\limits_{\sigma_{xz}} Q(x,\psi(x,z),z)dxdz + \iint\limits_{\sigma_{xy}} R(x,y,\eta(x,y))dxdy. \quad (24)$$

Замечание

Поток вектора $\vec{u}(M)$ через кривую L равен криволинейному интегралу по координатам

$$\Pi_L\left(\vec{u}\right) = \int\limits_L Q(x,y)dx - P(x,y)dy\,. \quad (25)$$

5. Оператор Гамильтона «набла»

Английский математик Гамильтон (1805-1865) ввел векторно-дифференциальный оператор $\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$, называемый «набла» (по-гречески – арфа, форму которой напоминает значок ∇). Набла действует только на множитель, который стоит непосредственно за ним. Если $u=f(x, y, z)$ скалярная функция (скалярное поле), то произведение вектора ∇ на скаляр u:

$$\nabla u = \vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial z} = grad u \text{ - вектор.}$$

Если $\vec{u} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ - векторная функция (векторное поле), то скалярное произведение вектора ∇ на вектор $\vec{u}$ равно сумме произведений одноименных координат векторов $\nabla\vec{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ - скаляр, а векторное произведение ∇ на $\vec{u}$:

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \quad \text{- вектор.}$$

С помощью ∇ проще записать некоторые понятия, связанные с полями, и операции над ними.

6. Дивергенция векторного поля

Пусть в трехмерном пространстве (или в области G) определено векторное поле $\vec{U}(M)$. Возьмем произвольную точку M и окружим замкнутой поверхностью σ. Вычислим поток $\Pi_\sigma(\vec{U})$ векторного поля через поверхность σ. Найдем объем v области, ограниченной σ. Дивергенцией (расходимостью) $div\vec{U}(M)$ векторного поля $\vec{U}(M)$ в точке M называется предел отношения потока $\Pi_\sigma(\vec{U})$ векторного поля через замкнутую поверхность σ к объему области, ограниченной σ, вычисленный при условии, что поверхность σ стягивается в точку M:

$$divU(M) = \lim_{\substack{v \to 0 \\ (\sigma \to M)}} \frac{\Pi_\sigma(U)}{V} = \lim_{\substack{v \to 0 \\ (\sigma \to M)}} \frac{1}{v} \iint_\sigma u \cdot d\sigma \cdot \qquad (26)$$

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$ и

$$U(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,j + R(x, y, z)\,k\,,$$

то

$$divU(M) = \nabla U = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

пишут

$$divU(M) = \nabla U = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \qquad (27)$$

Ранее мы говорили, что все эти частные производные существуют. Используя гидродинамическую интерпретацию, считаем поле $\vec{U}(M)$ стационарным полем скоростей несжимаемой текущей жидкости. Это течение может быть обусловлено наличием источников точек, производящих жидкость, и стоков точек, поглощающих жидкость. Величина $\Pi_\sigma(\vec{U})$ дает объем жидкости, протекающей в единицу времени с внутренней стороны σ на внешнюю. Но эта величина равна количеству жидкости, вырабатываемой всеми источниками, находящимися в области, ограниченной σ, т. е. равна суммарной мощности всех источников внутри σ. Тогда предел отношения мощности источников в области к объему области, найденный при условии, что область стягивается (сжимается) в точку M, равен плотности мощности источников жидкости в этой точке.

Итак, в гидродинамической интерпретации дивергенция $divU(M)$ векторного поля $\vec{U}(M)$ в точке M – это плотность мощности источников жидкости в этой точке.

Есть и другие интерпретации. Так, в электрическом векторном поле напряженности, созданном электрическими зарядами, распределенными в пространстве, дивергенция вектора напряженности является плотностью распределения электрических зарядов в данной точке поля.

7. Ротор (вихрь) векторного поля

Пусть в пространстве (или в области G) определена прямоугольная система координат и задано векторное поле:

$$\vec{u}(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Ротором $rot\vec{u}(M)$ поля $\vec{u}$ в точке M называют вектор

$$rot\vec{u}(M) = \nabla\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad (28)$$

Этот вектор характеризует завихренность поля в точке M (тенденцию к вращению). Проведем через точку M плоскость Г, ее ориентацию в пространстве зададим единичным нормальным вектором $\vec{n}$ в точке M.

В плоскости Г возьмем замкнутую кривую L, обходящую точку M, и выберем направление обхода L таким, чтобы с конца $\vec{n}$ обход казался происходящим против движения часовой стрелки.

Обозначим площадь, ограниченную контуром L, через ΔS. Найдем циркуляцию векторного поля $\vec{u}(M)$ вдоль контура L: $Ц_L(\vec{u}) = \oint_L \vec{u}\cdot\vec{dr}$.

Доказывается, что проекция ротора поля $\vec{u}(M)$ в точке M на вектор $\vec{n}$ равна пределу отношения циркуляции поля по контуру L к площади ΔS, ограниченной контуром, при условии, что контур L стягивается в точку M, а $\Delta S \to 0$.

$$np_n\big(rot u(M)\big) = \lim_{\substack{\Delta S\to 0 \\ (L\to M)}} \frac{1}{\Delta S}\oint_L u\cdot dr \qquad (29)$$

8. Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\vec{U}(M)$, заданное в односвязной области *G*, называется потенциальным, если существует такая скалярная функция *f*(*M*), что во всех точках $M \in G$ вектор

$$\bar{U}(M) = \mathrm{grad} f(M) \tag{30}$$

В этом случае функция *f*(*M*)=*f*(*x, y, z*) называется потенциалом векторного поля $\vec{U}(M)$. (Для силовых полей *f*(*M*) называется силовой функцией, потенциалом называется (*-1*)*f*(*M*)=-*f*(*M*).

***Теорема* (признак потенциального поля)**

Для того чтобы векторное поле $\vec{U}(M)$ было потенциальным в односвязной области *G*, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке *M* этой области $rot\vec{U}(M) = 0$.

Необходимость можно формально рассмотреть: $rot\vec{U}(M) = rot(gradf) = \nabla \times (\nabla f)$. «Векторы» ∇ и ∇f коллинеарны, следовательно, их векторное произведение равно нулю:

$$rot\vec{U} = 0 \tag{31}$$

Пусть $\vec{U}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$,

$$rot\vec{U}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Получим, что поле $\vec{U}(M)$ является потенциальным в том и только в том случае, когда

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{32}$$

8.1. Плоское потенциальное поле

Если поле плоское, т. е. $\vec{U}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$

$$rot\vec{U}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} \tag{33}$$

- поле называется потенциальным при $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

В этом случае $\vec{U} = gradf(x,y) = f'_x(x,y)\vec{i} + f'_y(x,y)\vec{j}$, т.е. $P(x,y) = f'_x(x,y),\ Q(x,y) = f'_y(x,y)$ и

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx = \int\limits_{AB} f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dx = \int\limits_{AB} df(x,y) = f(x,y)\Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

для всех дуг, натянутых между точками A и B.

Получили, что при $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Работа силы $\vec{U} = \vec{F}$ не зависит от пути, по которому движется точка. Тогда криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру в заданной области равен нулю:

$$\int\limits_L P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = 0, \tag{34}$$

т. е. циркуляция поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю $Ц_L\left(\vec{U}\right) = 0$.

Потенциал плоского поля $\vec{U}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ находят по формуле

$$f(x,y) + c = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0 M}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{35}$$

где $M(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$ взяты произвольно. Удобнее всего за дугу $\overset{\cup}{M_0 M}$ брать двузвенную ломаную линию, звенья которой параллельны осям координат, так как на вертикальном звене $dx = 0$, а на горизонтальном $dy = 0$.

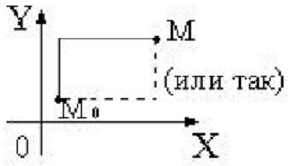


Рис. 8.1

$$f(x,y)+c=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx \qquad (36)$$

$$f(x,y)+c=\int\limits_{x_0}^{x}P\left(x,y_0\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q\left(x,y_0\right)dx$$

IV. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Вычисление и применение двойного интеграла

При решении этих задач используйте следующую схему:

1) сделать чертеж;
2) выбрать подходящие формулы (по условию задачи и по чертежу);
3) найти все элементы выбранных формул;
4) вычислить получившийся повторный интеграл.

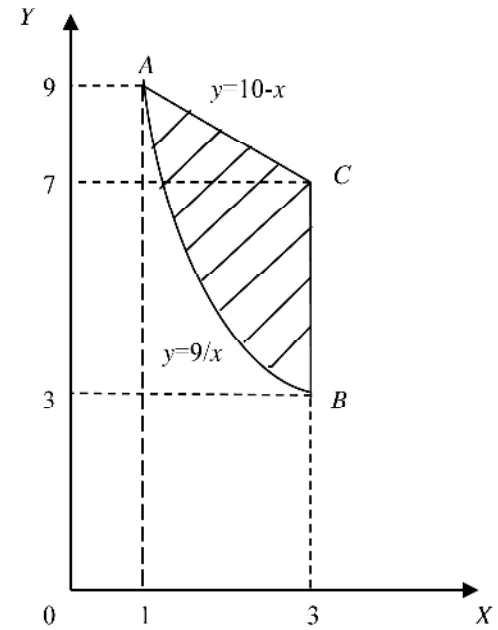
Пример 1

Вычислить $\iint\limits_D (2x+y)dS$, если D: $\begin{cases}1\le x\le 3\\ \dfrac{9}{x}\le y\le 10-x\end{cases}$

Изменить порядок интегрирования в полученном повторном интеграле и еще раз вычислить интеграл

Решение

Построим чертеж:



Уравнения границ области $D: x=1, x=3, y=\dfrac{9}{x}, y=10-x$ (каждое неравенство, задающее D, превращаем в уравнение).

Для вычисления выберем формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \Big) dx.$$

Найдем элементы формулы.

Так как область расположена между прямыми $x = 1$ и $x = 3$, то $a = 1$, $b = 3$. Нижняя граница области – дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана уравнением $y=\dfrac{9}{x}$, следовательно, $g(x)=\dfrac{9}{x}$. Верхняя граница – прямая AC задана уравнением $y = 10 - x$, следовательно, $h(x) = 10 - x$. Получим повторный интеграл.

$$\iint\limits_D (2x+y)dS = \int\limits_1^3 \Big(\int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x} (2x+y)dy \Big) dx.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая x – постоянной.

$$\int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x}(2x+y)dy=\int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x}2xdy+\int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x}ydy=2x\int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x}dy+\left.\frac{y^2}{2}\right|_{\frac{9}{x}}^{10-x}=2xy\Big|_{\frac{9}{x}}^{10-x}+\frac{1}{2}(10-x)^2-\frac{81}{2x^2}=$$

$$2x(10-x)-2x\cdot\frac{9}{x}+\frac{1}{2}(10-x)^2-\frac{81}{2x^2}=20x-2x^2-18+50-10x+\frac{1}{2}x^2-\frac{81}{2x^2}=$$

$$=10x-\frac{3}{2}x^2+32-\frac{81}{2x^2}$$

От полученной функции вычислим внешний интеграл

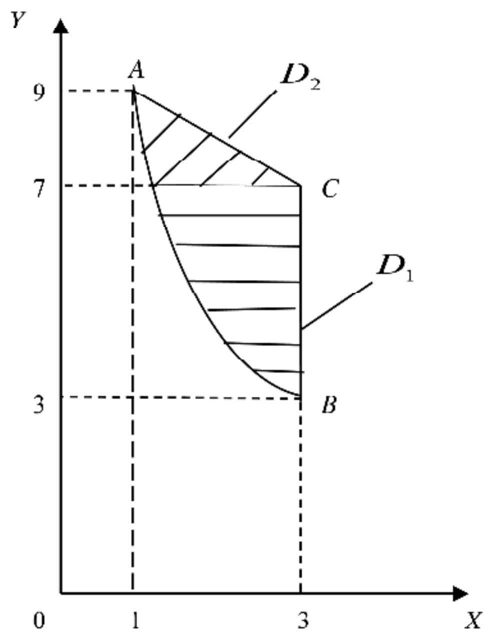
$$\iint\limits_D(2x+y)dS=\int\limits_1^3\left(10x-\frac{3}{2}x^2+32-\frac{81}{2x^2}\right)dx=\left.\left(5x^2-\frac{x^3}{2}+32x+\frac{81}{2x}\right)\right|_1^3=\left(45-\frac{27}{2}+96+\frac{27}{2}\right)-$$

$$-\left(5-\frac{1}{2}+32+\frac{81}{2}\right)=64.$$

Изменить порядок интегрирования в данном случае означает, что внутренний интеграл нужно взять по x, а внешний по y и для вычисления интеграла выбрать формулу:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS=\int\limits_a^b(\int\limits_{g(y)}^{h(y)}f(x,y)dx)dy.$$

Выполним чертеж еще раз:



Найдем координаты точек A, B и C:

$$A:\begin{cases} y=\dfrac{9}{x} \\ y=10-x \end{cases}, A(1;9), \quad B:\begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{9}{x} \end{cases}, B(3;3), \quad C:\begin{cases} x=3 \\ y=10-x \end{cases}, C(3;7).$$

Правая граница области D состоит из отрезков BC и AC различных прямых, следовательно, область D нужно разбить на две части - D_1 и D_2, тогда $\iint\limits_D (2x+y)dS = \int\limits_{D_1} (2x+y)dS + \iint\limits_{D_2} (2x+y)dS$. Уравнения границ нужно решить относительно *x*. Левая граница обеих частей – дуга $\overset{\cup}{AB}$: $y=\dfrac{9}{x} \Rightarrow x=\dfrac{9}{y}$. Правая граница области D_1- отрезок BC: $x = 3$. Правая граница области D_2- отрезок AC: $y=10-x \Rightarrow x=10-y$. Область D_1 расположена между прямыми $y - 3$ и $y = 7$. Внутри области D_1 x изменяется от границы $x=\dfrac{9}{y}$ до границы $x = 3$. Получим $\iint\limits_{D_1} (2x+y)dS = \int\limits_3^7 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3} (2x+y)dx)dy$. Область D_2 расположена между прямыми y=7 и y=*9*. Внутри области D_2 x изменяется от границы $x=\dfrac{9}{y}$ до границы $x = 10 - y$.

Получим:

$$\iint\limits_{D_2} (2x+y)dS = \int\limits_7^9 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} (2x+y)dx)dy.$$

Следовательно:

$$\iint\limits_D (2x+y)dS = \int\limits_3^7 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3} (2x+y)dx)dy + \int\limits_7^9 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} (2x+y)dx)dy -$$

порядок интегрирования изменен.

Вычислим:

$$\iint\limits_{D_1} (2x+y)dS = \int\limits_3^7 (\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3} (2x+y)dx)dy.$$

Внутренний интеграл вычисляем, считая y постоянной.

$$\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3}(2x+y)dx=\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3}2xdx+\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3}ydx=2\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3}xdx+y\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3}dx=x^2\Big|_{\frac{9}{y}}^{3}+yx\Big|_{\frac{9}{y}}^{3}=3y-\frac{81}{y^2},$$

Тогда $$\iint\limits_{D_1}(2x+y)ds=\int\limits_{3}^{7}(3y-\frac{81}{y^2})dy=(\frac{3y^2}{2}+\frac{81}{y})\Big|_{3}^{7}=\frac{312}{7}.$$

Вычислим:

$$\iint\limits_{D_2}(2x+y)dS=\int\limits_{7}^{9}(\int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y}(2x+y)dx)dy=\int\limits_{7}^{9}(x^2+xy)\Big|_{\frac{9}{y}}^{10-y}dy=\int\limits_{7}^{9}((10-y)^2+(10-y)y-\frac{81}{y^2}-9)dy=$$

$$=\int\limits_{7}^{9}(91-10y-\frac{81}{y^2})dy=(91y-5y^2+\frac{81}{y})\Big|_{7}^{9}=\frac{136}{7}.$$

Следовательно:

$$\iint\limits_{D}(2x+y)dS=\frac{312}{7}+\frac{136}{7}=\frac{448}{7}=64.$$

Мы убедились, что в данном случае проще вычислить внутренний интеграл по y, а внешний по x.

Ответ:

$$\iint\limits_{D}(2x+y)dS=\int\limits_{1}^{3}(\int\limits_{\frac{9}{x}}^{10-x}(2x+y)dy)dx=\int\limits_{3}^{7}(\int\limits_{\frac{9}{y}}^{3}(2x+y)dx)dy+\int\limits_{7}^{9}(\int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y}(2x+y)dx)dy=64.$$

Пример 2

Найти статические моменты относительно осей координат однородной фигуры: ограниченной линиями $4x^2+y^2=4$, $2x+y=2$ и расположенной в первой четверти, если поверхностная плотность массы $\delta=1$.

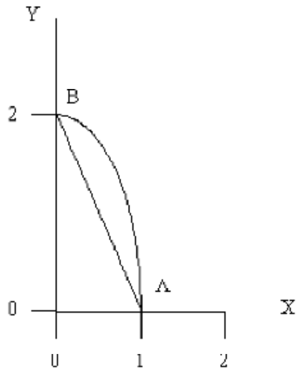
Решение

Выполним чертеж.

Линия $4x^2 + y^2 = 4$ - эллипс

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$2x + y = 2$ – прямая.



При построении получили точки пересечения линий A (1;0), B (0;2). По условию задачи выберем формулы вычисления статических моментов плоской области:

$$M_x = \iint_D ydS, \quad M_y = \iint_D xds.$$

При вычислении M_x внутренний интеграл удобнее брать по y, а при вычислении M_y по x, так как в этом случае внешние интегралы получаются более простыми (проверьте это). Используем обе формулы вычисления двойного интеграла, а значит, уравнения границ области нужно решить и относительно y и относительно x.

Отрезок прямой $2x + y = 2 \Rightarrow y = 2(1-x)$ или $x = \frac{1}{2}(2-y)$.

Дуга эллипса $4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = 2\sqrt{1-x^2}$ или $x = \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$.

$$M_x = \iint_D yds = \int_0^1 \left(\int_{2(1-x)}^{2\sqrt{1-x^2}} ydy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_{2(1-x)}^{2\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 2\int_0^1 (1 - x^2 - (1-x)^2) dx =$$

$$= 2\int_0^1 (2x - 2x^2) dx = 2\left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right)\Big|_0^1 = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

$$M_y = \iint_D xdz = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}(2-y)}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} xdx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_{\frac{1}{2}(2-y)}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 (4 - y^2 - (2-y)^2) dy = \frac{1}{8}\int_0^2 (4y - 2y^2) dy = \frac{1}{8}\left(2y^2 - \frac{2y^3}{3} \right)_0^2 = \frac{1}{4}\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

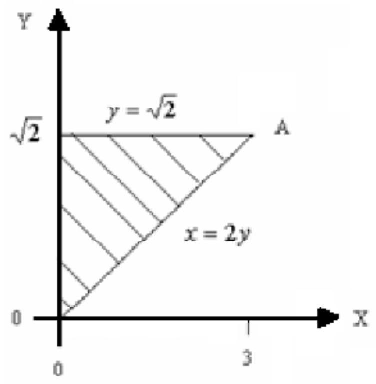
Ответ: $M_x = \frac{2}{3}; M_y = \frac{1}{3}.$

Пример 3

Найти момент инерции относительно оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x = 0, y = \sqrt{2}, y = \frac{x}{2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = \exp\left(-\frac{xy}{2}\right) = e^{-\frac{xy}{2}}$.

Решение

Выполним чертеж:



По условию задачи выберем формулу момента инерции:

$$J_x = \iint_D y^2 \delta(x,y) ds = \iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}} ds.$$

Область D удобна для вычисления повторного интеграла при любом порядке интегрирования. Подынтегральная функция по x интегрируется значительно легче, чем по y, поэтому возьмем внутренний интеграл по x, а внешний по y.

Решим уравнения границ относительно x. Левая граница: $x = 0$ (задана). Правая граница: $y = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y$.

Область D расположена между прямыми $y = 0$ и $y = \sqrt{2}.$ Внутри области x изменяется от границы $x = 0$ до границы $x = 2y,$ значит:

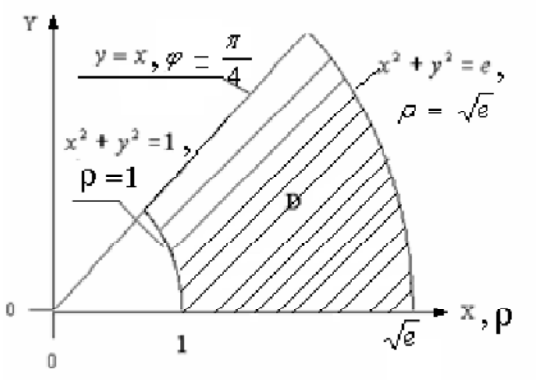
$$J_x = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2y} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx\right)dy = \int_0^{\sqrt{2}}\left(y^2 \int_0^{2y} e^{-\frac{xy}{2}} dx\right)dy = \int_0^{\sqrt{2}}(-y^2 \cdot \frac{2}{y} e^{-\frac{xy}{2}}\Big|_0^{2y})dy = \int_0^{\sqrt{2}}(-2ye^{-y^2} + 2y)dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2} d(-y^2) + y^2\Big|_0^{\sqrt{2}} = e^{-y^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} + 2 = e^{-2} - 1 + 2 = e^{-2} + 1.$$

Ответ: $I_x = 1 + e^{-2}$.

Пример 4

Вычислить $I = \iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)ds$, если $D: \begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le e \\ 0 \le y \le x \end{cases}$.



Решение

Построим область D. Границы области: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = e$ - окружности радиусов 1 и $\sqrt{e}$ с центром в начале координат $y = 0$, $y = x$ – прямые.

Так как. область интегрирования – часть кольца, перейдем к полярным координатам. В подынтегральном выражении заменим x, y и ds по формулам:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $ds = \rho d\varphi d\rho$.

Предварительно заменим

$$x^2 + y^2 = (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho^2.$$

Тогда $I = \iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)ds = \iint\limits_D \ln\rho^2 \cdot \rho d\varphi d\rho = 2\iint\limits_D \rho\ln\rho d\varphi d\rho$

запишем в полярных координатах уравнения границ области

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1,\ \rho = 1$$
$$x^2 + y^2 = e \Rightarrow \rho^2 = e,\ \rho = \sqrt{e}$$
$$y = 0 \Rightarrow \rho\sin\varphi = 0,\ \rho \ne 0,\ \sin\varphi = 0,\ \varphi = 0$$
$$y = x \Rightarrow \rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi,\ tg\varphi = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

В полярных координатах внешний интеграл всегда берем по φ, а внутренний -по ρ. Область расположена в секторе между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Внутри области ρ изменяется от границы $\rho = 1$ до границы $\rho = \sqrt{e}$. Следовательно, по формуле

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho) \right) d\varphi$$

$$I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\int\limits_1^{\sqrt{e}} \rho \ln \rho d\rho) d\varphi \cdot$$

Внутренний интеграл вычислим, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$$

$$\int\limits_1^{\sqrt{e}} \rho \ln \rho d\rho = \left| \begin{array}{l} u = \ln \rho, dv = \rho d\rho \\ v = \int \rho d\rho = \dfrac{\rho^2}{2} \\ du = (\ln \rho)' d\rho = \dfrac{d\rho}{\rho} \end{array} \right| = \frac{\rho^2}{2} \ln \rho \Big|_1^{\sqrt{e}} - \int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = \frac{e}{2} \ln \sqrt{e} - \frac{1}{2} \int\limits_1^{\sqrt{e}} \rho d\rho = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln e - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_1^{\sqrt{e}} =$$

$$= \frac{e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Тогда $J = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{4} d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$

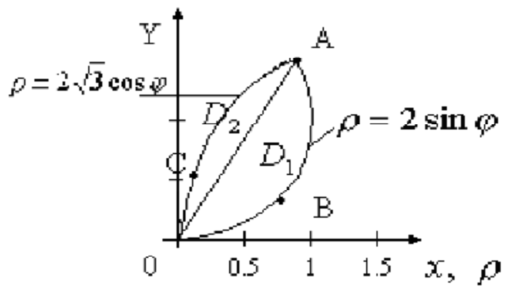
Ответ: $I = \frac{\pi}{8}$.

Пример 5

Вычислить площадь общей части двух кругов: $x^2 + y^2 \le 2y, x^2 + y^2 \le 2x\sqrt{3}$

Решение

Сделаем чертеж



$x^2+y^2=2y$ - окружность $x^2+(y-1)^2=1$ с центром в точке $(0;1)$ радиуса $r=1$. $x^2+y^2=2x\sqrt{3}$ - окружность $(x-\sqrt{3})^2+y^2=3$ с центром в точке $(\sqrt{3};0)$ радиуса $R=\sqrt{3}.$

Выберем формулу площади фигуры в полярных координатах, так как область ограничена окружностями

$$S=\iint\limits_D \rho d\varphi d\rho$$

Граница области состоит из дуг $\overset{\smile}{OBA}$ и $\overset{\smile}{OCA}$ разных окружностей, разобьем область D лучом OA на две части - $OBAO=D_1$ и $OACO=D_2$.

Площадь $OBAO$ обозначим S_1, площадь $OACO-S_2$.

Уравнения окружностей запишем в полярных координатах

$$\overset{\smile}{OBA}: x^2+y^2=2y \Rightarrow \rho^2=2\rho\sin\varphi, \rho=2\sin\varphi,$$

$$\overset{\smile}{OCA}: x^2+y^2=2x\sqrt{3} \Rightarrow \rho=2\sqrt{3}\cos\varphi.$$

Найдем уравнение луча OA, для чего найдем полярный угол точки A пересечения окружностей.

$$A:\begin{cases}\rho=2\sin\varphi\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\varphi.\end{cases}$$

$$2\sin\varphi=2\sqrt{3}\cos\varphi,\ tg\varphi=\sqrt{3},\ \varphi=\frac{\pi}{3}$$

Уравнение луча OA: $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

Так как окружность $\overset{\smile}{OBA}$ касается оси ox, то область D_1 ограничена лучом $\varphi = 0$. Так как окружность $\overset{\smile}{OCA}$ касается оси Oy, то область D_2 ограничена лучом $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Область D_1 расположена в секторе между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$, внутри области D_1 ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = 2\sin\varphi$. Запишем S_1 и вычислим интеграл по формуле

$$S_1 = \iint\limits_{D_1} \rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (\int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho d\rho) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\sin\varphi}) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^2\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= (\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Область D_2 расположена в секторе между лучами $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, внутри области ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$.

$$S_2 = \iint\limits_{D_2} \rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\int\limits_0^{2\sqrt{3}\cos\varphi} \rho d\rho) d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\sqrt{3}\cos\varphi}) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos^2\varphi d\varphi = 3\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 3(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 3(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi) - 3(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}) = \frac{3\pi}{2} - \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}.$$

Ответ: $S = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$.

2. Вычисление и применение тройного интеграла

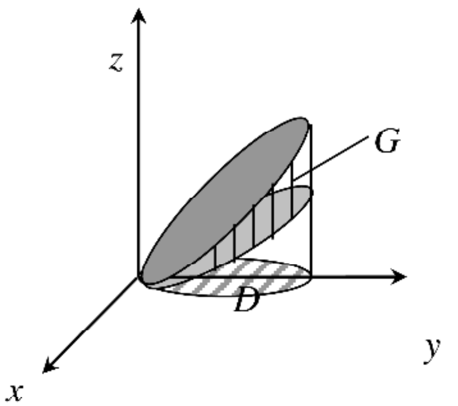
Схема применения тройного интеграла такая же, как двойного: чертеж, выбор формул, поиск всех элементов формул, вычисление полученных интегралов.

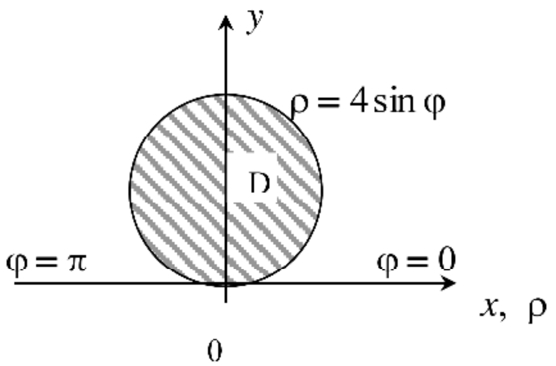
Пример 6

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4y, z = y, z = 2y.$

Решение

Выполним чертеж. Поверхность $x^2 + y^2 = 4y$ - круговой цилиндр, его образующие параллельны оси oz, направляющей служит окружность в плоскости oxy. Плоскости $z = y$, $z = 2y$ проходят через ось ox, но имеют разный наклон к плоскости xoy. Они вырезают из цилиндра слой (область G, тело), объем которого нам нужно вычислить.





Объем области G: $V = \iiint\limits_G dv$.

Вычислим интеграл по формуле

$$V = \iiint\limits_G dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} dz \right) ds.$$

Проекцией области G на плоскость xoy является область D, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 4y$. Снизу область G ограничена плоскостью $z = y$, следовательно, $g(x, y) = y$. Сверху ограничена плоскостью $z = 2y$, следовательно, $h(x, y) = 2y$.

Тогда $V=\iint\limits_D\left(\int\limits_y^{2y}dz\right)ds=\iint\limits_D\left(z\Big|_y^{2y}\right)ds=\iint\limits_D(2y-y)ds=\iint\limits_D yds$.

Полученный двойной интеграл вычислим в полярных координатах:

$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi, ds=\rho d\varphi d\rho,$

$x^2+y^2=4y\Rightarrow\rho^2=4\rho\sin\varphi\Rightarrow\rho=0(\textit{полюс}),\rho=4\sin\varphi.$

Область D расположена в секторе между лучами $\varphi=0$ *и* $\varphi=\pi$, внутри области ρ изменяется от $\rho=0$ до $\rho=4\sin\varphi.$

$$V=\iint\limits_D\rho\sin\varphi\cdot\rho d\varphi d\rho=\iint\limits_D\rho^2\sin\varphi d\varphi d\rho=\int\limits_0^\pi\left(\int\limits_0^{4\sin\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho\right)d\varphi=\int\limits_0^\pi\left(\sin\varphi\int\limits_0^{4\sin\varphi}\rho^2 d\rho\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^\pi\left(\sin\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{4\sin\varphi}\right)d\varphi=\int\limits_0^\pi\frac{64}{3}\sin^4\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^\pi\left(2\sin^2\varphi\right)^2d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^\pi(1-\cos2\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\frac{16}{3}\int\limits_0^\pi(1-2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=\frac{16}{3}\varphi\Big|_0^\pi-\frac{16}{3}\sin2\varphi\Big|_0^\pi+\frac{8}{3}\int\limits_0^\pi(1+\cos4\varphi)d\varphi=\frac{16\pi}{3}+\frac{8}{3}\varphi\Big|_0^\pi+$$

$$+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\sin4\varphi\Big|_0^\pi=\frac{16}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi=8\pi.$$

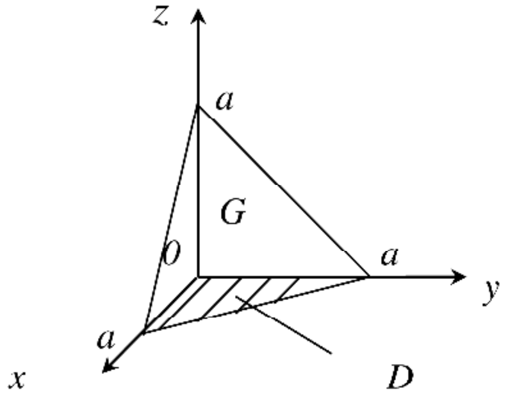
Ответ: $V=8\pi.$

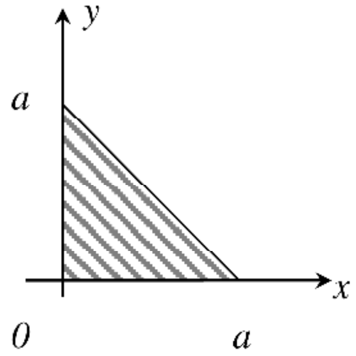
Пример 7

Найти центр массы одородной пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0, y=0, z=0, x+y+z=a.$

Решение

$x=0, y=0, z=0$- координатные плоскости. Найдем точки пересечения плоскости $x+y+z=a$ с осями координат. Например с Оx: $y=0, z=0$ подставим в уравнение плоскости $x+0+0=a,$ получим точку (a ,0, 0).





Проекция пирамиды на плоскость xoy – равнобедренный прямоугольный треугольник, ограниченный осями координат и линией пересечения плоскости $x+y+z=a$ с плоскостью $z=0$. Уравнение этой линии в плоскости xoy $x+y+0=a$ или $y=a-x$. Из соображений симметрии ясно, что все три координаты центра массы одинаковы. Найдем x_c по формуле

$$x_c=\frac{1}{V}\iiint\limits_G xdv\,.$$

G – область, занятая пирамидой. Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H,\quad S_{осн.}=\frac{1}{2}a\cdot a=\frac{a^2}{2},\quad H=a,\quad V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a=\frac{a^3}{6}.$

Внутри пирамиды G переменная z изменяется от $z=0$ (нижняя грань) до $z=a-x-y$ (верхняя грань).

Тогда

$$\iiint\limits_G xdv=\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{a-x-y}xdz\right)ds=\iint\limits_D\left(xz\Big|_0^{a-x-y}\right)ds=\iint\limits_D x\,(a-x-y)\,ds=\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{a-x}(x\,(a-x)-xy)\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^a\left(x(a-x)y-x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a-x}dx=\int\limits_0^a(x(a-x)(a-x)-\frac{x(a-x)^2}{2})dx=\int\limits_0^a\frac{x(a-x)^2}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^a(a^2x-2ax^2+x^3)dx=\frac{1}{2}(a^2\frac{x^2}{2}-2a\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})\Big|_0^a=\frac{1}{2}(\frac{a^4}{2}-\frac{2a^4}{3}+\frac{a^4}{4})=\frac{a^4}{24}$$

$x_c=\frac{a^4}{24}:\frac{a^3}{6}=\frac{6a^4}{24a^3}=\frac{a}{4}$, тогда $y_c=z_c=\frac{a}{4},\quad C(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a}{4}).$

Ответ: $(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a}{4})$.

3. Вычисление и применение поверхностного интеграла первого рода

Схема применения:

1. Выбрать формулу по условию задачи и получить поверхностный интеграл.
2. Найти проекцию поверхности на координатную плоскость. Сделать чертеж получившейся плоской области *D*.
3. Найти формулу элемента $d\sigma$ поверхности.
4. Поверхностный интеграл привести к двойному интегралу и вычислить двойной интеграл.

Пример 8

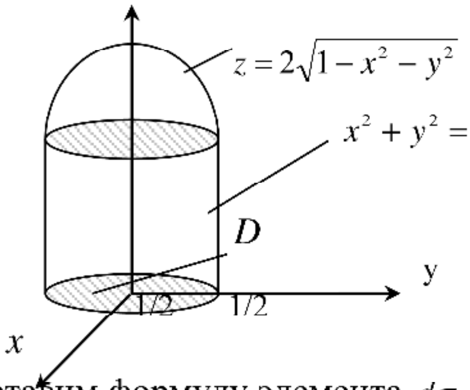
Найти массу, распределенную по части эллипсоида $z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, находящейся внутри цилиндра $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{1}{2}z$.

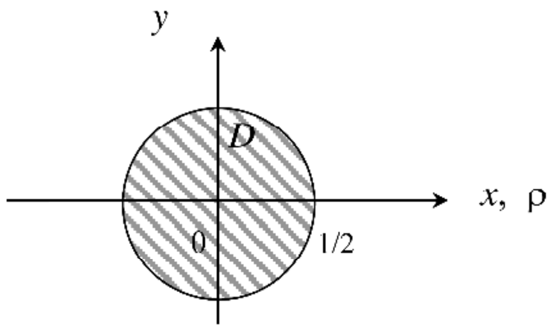
Решение

Масса, распределенная по поверхности σ с плотностью, $\delta = \delta\ (x, y, z)$ равна поверхностному интегралу:

$$m = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \frac{1}{2} z d\sigma.$$

Образующие цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ параллельны оси *oz*, направляющей является окружность в плоскости *xoy* с уравнением $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Центр окружности *O* (0;0), радиус $R = \frac{1}{2}$. Следовательно, проекция заданной части эллипсоида на плоскость *xoy* – круг *D*, ограниченный этой окружностью.





Составим формулу элемента $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,ds$;

$$z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ z'_x = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\ z'_y = \frac{-2y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{4y^2}{1 - x^2 - y^2}}\,ds = \sqrt{\frac{1 + 3x^2 + 3y^2}{1 - x^2 - y^2}}\,ds.$$

Подставим z и $d\sigma$ в поверхностный интеграл и приведем его к двойному интегралу

$$m = \iint\limits_{\sigma} \frac{1}{2} z d\sigma = \iint\limits_{D} \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + 3x^2 + 3y^2}{1 - x^2 - y^2}}\,ds = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 3x^2 + 3y^2}\,ds.$$

Двойной интеграл вычислим в полярных координатах. Возьмем $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, ds = \rho d\varphi d\rho,$ уравнение окружности $x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \rho^2 = \frac{1}{4}, \rho = \frac{1}{2}.$ Полюс *0* находится внутри области *D,* поэтому область D занимает сектор от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$. Внутри области D ρ изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = \frac{1}{2}$.

$$m = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 3\rho^2\cos^2\varphi + 3\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\varphi d\rho = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 3\rho^2}\,\rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 3\rho^2}\,\rho d\rho\Big) d\varphi.$$

Так как внутренний интеграл не зависит от φ, вынесем его за знак внешнего интеграла:

$$m = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+3\rho^2}\,\rho d\rho\right) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+3\rho^2}\,\rho d\rho = \left| \begin{array}{l} \textit{Сделаем подстановку} \\ \sqrt{1+3\rho^2} = t, 1+3\rho^2 = t^2,\ 6\rho d\rho = 2tdt, \rho d\rho = \dfrac{1}{3}tdt, \\ \textit{при}\ \rho = 0, t = 1, \rho = \dfrac{1}{2}, t = \sqrt{1+\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{array} \right. = \int_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} t \cdot \frac{1}{3}tdt = \frac{1}{3}\int_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{7\sqrt{7}}{8} - 1\right) = \frac{7\sqrt{7}-8}{72}, \quad m = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{7}-8}{72} = \frac{\pi(7\sqrt{7}-8)}{36}.$$

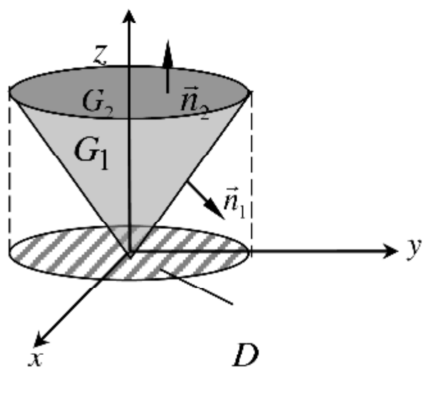
Ответ: $m = \dfrac{\pi(7\sqrt{7}-8)}{36}$.

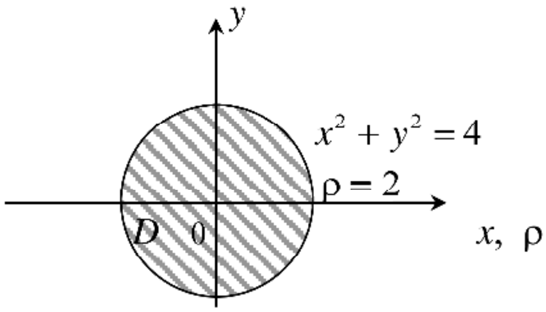
Пример 9

Найти поток векторного поля $\vec{u} = (1-2x)\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ, состоящую из части поверхности конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и плоскости $z = 2$.

Решение

Выполним чертеж.





Найдем линию пересечения поверхностей:

$$\begin{cases} z = 2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x^2+y^2 = 4. \end{cases}$$

В плоскости $z = 2$ получили окружность $x^2 + y^2 = 4$ с центром $C(0,0,2)$ радиуса 2.

Вершина конуса $O(0,0,0)$.

Проекцией обеих поверхностей на плоскость xoy является круг D, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 4$ с центром $O(0,0,0)$ радиуса $R=2$. Поверхность σ состоит из конической поверхности σ_1 и части плоскости σ_2, поэтому $\Pi_\sigma(\vec{u}) = \Pi_{\sigma_1}(\vec{u}) + \Pi_{\sigma_2}(\vec{u})$.

Формула вычисления потока

$$\Pi_\sigma(\vec{u}) = \iint_\sigma (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_D \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\cos\gamma|} \right)_{z = z(x,y)} ds.$$

Для вычисления $\Pi_{\sigma_1}(\vec{u})$ потока вектора $\vec{u}$ через коническую поверхность запишем уравнение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в виде $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$.

Найдем:

$$F'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; F'_z = -1,$$

$$gradF = F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j} + F'_z\vec{k} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} - \vec{k},$$

$$|gradF| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

Вектор $\vec{n}_1$ составляет с oz тупой угол, т. е. $\cos\gamma < 0$, коэффициент перед $\vec{k}$ должен быть отрицательным.

Возьмем

$$\vec{n}_1 = +\frac{gradF}{|gradF|} = \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k},$$

Так как $\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$

Получим: $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}, |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Вычислим:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (1-2x)\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2}} + 2y\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2}} + 2z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x-2x^2+2y^2-2z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$$

Учитывая, что на поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$\vec{u}\cdot\vec{n}\Big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x-2x^2+2y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} = \frac{x-4x^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}},$$

$$\Pi_{\sigma_1}(\vec{u}) = \iint\limits_D \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\cos\gamma|}\right)_{z=\sqrt{x^2+y^2}} ds = \iint\limits_D \frac{x-4x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds\,.$$

Полученный интеграл вычислим в полярных координатах. Заменим $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, ds = \rho d\varphi d\rho$

$$x^2+y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4, \rho = 2$$

$$\Pi_{\sigma_1}(\bar{u}) = \iint\limits_D \frac{\rho\cos\varphi - 4\rho^2\cos^2\varphi}{\sqrt{\rho^2}}\rho d\varphi d\rho = \iint\limits_D (\rho\cos\varphi - 4\rho^2\cos^2\varphi) d\varphi d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^2 (\rho\cos\varphi - 4\rho^2\cos^2\varphi)d\rho\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 - 4\cos^2\varphi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}(2\cos\varphi - \frac{32}{3}\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= 2\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{16}{3}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = -\frac{16}{3}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{32\pi}{3}.$$

Вычислим $\Pi_{\sigma_2}(u)$ поток вектора $\bar{u}$ через круг σ_2 в плоскости $z = 2$. Единичный вектор внешней нормали этой плоскости равен $\vec{k} = (0,0,1)$; $\vec{n} = \vec{k}$; поэтому

$$\bar{u}\cdot\bar{n} = (1-2x)\cdot 0 + 2y\cdot 0 + 2z\cdot 1 = 2z, \cos\gamma = \cos 0 = 1, \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\cos\gamma|}\Bigg|_{z=2} = 2\cdot 2 = 4.$$

$$\Pi_{\sigma_2}(\bar{u}) = \iint\limits_D 4ds = 4\iint\limits_D ds = 4\cdot S = 4(\pi R^2) = 4\pi\cdot 2^2 = 16\pi,$$

(D – круг радиуса 2).

Следовательно, $\Pi_\sigma(\vec{u}) = \Pi_{\sigma_1}(\vec{u}) + \Pi_{\sigma_2}(\vec{u}) = -\dfrac{32\pi}{3} + 16\pi = \dfrac{16\pi}{3}$.

Ответ: $\Pi_\sigma = \dfrac{16\pi}{3}$.

4. Вычисление и применение криволинейного интеграла

Схема решения задач

1. По условию задачи выбрать формулу и записать искомую величину в виде криволинейного интеграла первого или второго рода.

2. Выразить из уравнения кривой все переменные и их дифференциалы через одну переменную и ее дифференциал. Всё подставить в подынтегральное выражение.

3. Найти интервал изменения этой переменной на заданной дуге кривой и вычислить полученный определенный интеграл.

Пример 10

Вычислить $\int\limits_L \dfrac{y^3 dl}{\sqrt{2-y^2}}$, если L – дуга $\breve{OA}$ синусоиды $y = \sin x, O\,(0,0), A\left(\dfrac{\pi}{2}; 1\right)$.

Решение

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода найдем dl. Из уравнения кривой $y = \sin x$ $y' = (\sin x)' = \cos x, dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$. Так как кривая L не ориентирована, возьмем : $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, y и dl подставим в подынтегральное выражение. Получим и вычислим определенный интеграл.

$$\int\limits_L \frac{y^3 dl}{\sqrt{2-y^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \sqrt{1+\cos^2 x}}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, -\sin x dx = dt, \ \sin x dx = -dt \\ x = 0, t = \cos 0 = 1, \ x = \dfrac{\pi}{2}, t = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = \int\limits_1^0 (1-t^2)(-dt) = \int\limits_0^1 (1-t^2) dt =$$

$= (t - \frac{t^3}{3})\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

Пример 11

Вычислить $\int\limits_L x\sqrt[3]{y}dx - 6x^3dy$ по дуге кривой $y = x^3$ от A (1,1) до B (-1,-1).

Решение

Для вычисления криволинейного интеграла второго рода выразим y и dy через x и dx из уравнения кривой $y = x^3, dy = 3x^2dx$. В интегралах второго рода кривая ориентирована. При движении по кривой от A до B переменная x изменяется от 1 до –1. Всё подставим в подынтегральное выражение.

$$\int\limits_L x\cdot\sqrt[3]{y}dy - 6x^2dy = \int\limits_1^{-1}(x\cdot\sqrt[3]{x^3}dx - 6x^3\cdot 3x^2dx) = \int\limits_1^{-1}(x^2 - 18x^5)dx = (\frac{x^3}{3} - 3x^6)\Big|_1^{-1} = (-\frac{1}{3} - 3) - (\frac{1}{3} - 3) = -\frac{2}{3}.$$

Пример 12

Найти массу дуги $\overset{\cup}{OA}$ кривой $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$, если линейная плотность массы в точке M (x,y) пропорциональна длине дуги $\left|\overset{\cup}{OM}\right|$, $O(0,0)$, $A(4, \frac{16}{3})$.

Решение

Выберем формулу $m = \int\limits_L \delta(x,y)dl$, где $\delta = \delta(x,y)$ - линейная плотность массы. По условию задачи $\delta = k\left|\overset{\cup}{OM}\right| = kl$. Найдем длину дуги $\overset{\cup}{OM} : l = \int\limits_{\overset{\cup}{OM}} dl$. Уравнение

$\overset{\cup}{OM} : y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$, тогда $y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1+x}dx.$

$$l = \int\limits_{\overset{\cup}{OM}} \sqrt{1+x}dx = \int\limits_0^x \sqrt{1+x}dx = \int\limits_0^x (1+x)^{\frac{1}{2}}d(1+x) = \left.\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^x = \frac{2}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Получим $\delta = \frac{2k}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1)$,

$m = \int\limits_{\breve{OA}} \frac{2k}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1)dl, \quad dl = \sqrt{1+x}dx = (1+x)^{\frac{1}{2}}dx, \quad 0 \le x \le 4,$ так как $\breve{OM}$ и $\breve{OA}$ - дуги одной кривой.

$$m = \int_0^4 \frac{2k}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1)(1+x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2k}{3}\int_0^4((1+x)^2 - (1+x)^{\frac{1}{2}})dx = \frac{2k}{3}(\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}})\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{2k}{3}(\frac{5^3}{3} - \frac{2}{3}5^{\frac{3}{2}}) - \frac{2k}{3}(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{2k}{9}(125 - 10\sqrt{5} + 1) = \frac{2k}{9}(126 - 10\sqrt{5}).$$

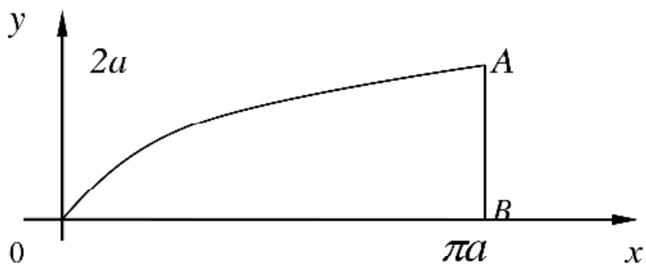
Ответ: $m = \frac{2k}{9}(126 - 10\sqrt{5}).$

Пример 13

Вычислить работу силового поля $\vec{F} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$ при движении точки вдоль первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ от $O(0,0)$ до $A(\pi a; 2a)$. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура $OBAO$, составленного из дуги $\breve{AO}$ циклоиды и двух прямых OB и BA, если $B(\pi a; 0)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\breve{OA}$ циклоиды.

Решение

Сделаем чертеж



1) Обозначим работу поля $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ через W и найдем её по формуле

$$W = \int_L \vec{F}\,\vec{dr} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,;$$

$$W = \int\limits_{\breve{OA}} (2a - y)dx + (y - a)dy.$$

Из уравнения OA:

$$x = a\,(t - \sin t),\ dx = a\,(1 - \cos t)\,dt$$

$$y = a\,(1 - \cos t),\ dy = a \sin t\, dt.$$

В точке $O\,(0, 0)$ $y = 0$, $0 = a\,(1 - \cos t)$, $\cos t = 1$, $t = 0$, в точке $A\,(\pi a;\ 2a)$, $y = 2a$, $2a = a\,(1 - \cos t)$, $2 = 1 - \cos t$, $\cos t = -1$, $t = \pi$ (обязательно проверяем, получаются, ли значения x в этих точках при найденных значениях t).

$$W = \int_0^{\pi}((2a - a + a\cos t)a(1-\cos t)dt + (a - a\cos t - a)a\sin t dt)) =$$

$$= \int_0^{\pi}(a^2(1+\cos t)(1-\cos t) - a^2\cos t\sin t)dt = a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t - \cos t\sin t)dt = a^2\int_0^{\pi}(\sin^2 t - \frac{1}{2}\sin 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt - \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\sin 2t dt = \frac{a^2}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi} = \frac{a^2\pi}{2}.$$

Найдем циркуляцию поля $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура $OBAO$ по формуле

$$Ц_L = \oint_L \vec{F}\cdot\vec{dr} = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_L (2a - y)dx + (y - a)dy.$$

Контур $L = OBAO = OB + BA + A\breve{O}$

$$\oint_L = \int_{OB} + \int_{\breve{BA}} + \int_{AO}$$

$$\int_{OB} = \int_{OB}(2a - y)dx + (y - a)dy$$

Из уравнения OB: $y = 0$ получим $dy = 0,$ x изменяется от 0 до $\pi a.$

$$\int_{OB} = \int_0^{\pi a}(2a - 0)dx = 2ax\Big|_0^{\pi a} = 2\pi a^2$$

$$\int_{BA} = \int_{BA}(2a - y)dx + (y - a)dy$$

Из уравнения BA: $x = \pi a, dx = 0, y$ изменяется от 0 до $2a$.

$$\int_{BA} = \int_0^{2a}(y - a)dy = \left(\frac{y^2}{2} - ay\right)\Big|_0^{2a} = 2a^2 - 2a^2 = 0.$$

$$\int_{AO} = -\int_{\breve{OA}} = -\int_{\breve{OA}}(2a - y)dx + (y - a)dy = -W = -\frac{\pi a^2}{2}$$

$$Ц_L(\vec{F}) = 2\pi a^2 + 0 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

2) Найдем поток поля $\vec{F}$ через кривую $\overset{\cup}{OA}$ по формуле

$$\Pi_L(\vec{F}) = \int\limits_L Q(x,y)dx - P(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\cup}{OA}} (y-a)dx - (2a-y)dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \Big((a - a\cdot\cos\ t - a)\cdot a\cdot(1-\cos\ t)dt - (2a - a + a\cos\ t)\,a\cdot\sin\ t\,dt\Big) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (-a^2\cos\ t\cdot(1-\cos\ t) - a^2\cdot(1+\cos\ t)\cdot\sin\ t)dt =$$

$$= a^2\int\limits_0^{\pi} (-\cos t + \cos^2 t - \sin t - \cos t\cdot\sin t)\,dt =$$

$$= a^2(-\sin\ t\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos 2t)dt + \cos\ t\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin 2t\,dt) =$$

$$= a^2(0 + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi} + (-1-1) + \frac{1}{4}\cos 2t\,\Big|_0^{\pi}\Big) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\right).$$

Ответ: $W = \dfrac{\pi a^2}{2}; Ц_L(\vec{F}) = \dfrac{3\pi a^2}{2}; \Pi_{\overset{\cup}{OA}}(\vec{F}) = a^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\right).$

Пример 14

Найти ротор и дивергенцию векторного поля $\vec{u} = \dfrac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в произвольной точке M (x, y, z) и в точке $M_0(2;-2;1)$.

Решение

По формуле

$$rot\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} - (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k};$$

$$P = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; Q = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; R = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)'_x=(2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}})'_x=2\cdot(-\frac{1}{2})(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{2x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Обозначив $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ запишем

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{2x}{r^3},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{r^3};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{2z}{r^3};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{x}{r^3};\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=-\frac{y}{r^3};\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{z}{r^3};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x}{r^3};\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y}{r^3};\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z}{r^3}.$$

Подставим найденные производные в формулу ротора

$$rot\vec{u}(M)=\left(\frac{y}{r^3}+\frac{z}{r^3}\right)\vec{i}-\left(\frac{x}{r^3}+\frac{2z}{r^3}\right)\vec{j}+\left(-\frac{x}{r^3}+\frac{2y}{r^3}\right)\vec{k}=\frac{(z+y)\vec{i}-(x+2z)\vec{j}+(2y-x)\vec{k}}{r^3}=$$
$$=\frac{(z+y)\vec{i}-(x+2z)\vec{j}+(2y-x)\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

В точке M_0 (2;-2;1)

$$rot\vec{u}(M_0)=\frac{(1-2)\vec{i}-(2+2)\vec{j}+(-4-2)\vec{k}}{\sqrt{(4+4+1)^3}}=\frac{-1\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}}{27}.$$

По формуле

$$div\vec{u}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$div\vec{u}(M)=-\frac{2x}{r^3}-\frac{y}{r^3}+\frac{z}{r^3}=-\frac{2x+y-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$div\vec{u}(M_0)=-\frac{4-2-1}{27}=-\frac{1}{27}.$$

Ответ:

$$rot\vec{u}(M)=\frac{(z+y)\vec{i}-(x+2z)\vec{j}+(2y-x)\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$rot\vec{u}(M_0)=-\frac{1}{27}(\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}),$$

$$div\vec{u}(M)=-\frac{2x+y-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$div\vec{u}(M_0)=-\frac{1}{27}.$$

V. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $y = 2x$, $2y = x$ и расположенной в первой четверти $(x \geq 0, y \geq 0)$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = 3$.

2. Найти площадь фигуры $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}.$

Ответ: $S = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. Найти электрический заряд кривой $y = \frac{x^2}{2}$, $1 \leq x \leq 2$, если плотность заряда $\lambda = \frac{y}{x}$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y(x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по эллипсу $x=2\cos t$, $y = \sin t$ из A (2, 0) в B (0,1). Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, где D(-1,1), BD и DA - прямые. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ эллипса.

Ответ: $W = \frac{\pi}{2}$; Ц $= \frac{\pi}{2}$; П $= \frac{7}{3}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $z = 3$, $2x + y=3$.

Ответ: $C(\frac{1}{2}; 1{,}2)$.

6. Найти массу части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной в первом октанте $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = \frac{1}{8}\pi^2 a^3$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = -(3y^2 + 2x^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - (2x^2 + y^2)\vec{k}$ в точке M (x,y,z) и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -4, rot\vec{a}(M_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}.$

Вариант 2

1. Найти ординату центра массы фигуры, ограниченной линиями $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = e^x$.

Ответ: $y = \dfrac{e^3 - 3e^{-1} - 4}{3e^2 - 9}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \sin\varphi)$ и окружностью $\rho = a$ и расположенной вне кардиоиды.

Ответ: $s = \dfrac{a^2(8 - \pi)}{4}$.

3. Найти массу дуги параболы $y^2 = 2px, 0 \le x \le \dfrac{p}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = |y|$.

Ответ: $m = \dfrac{2p^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ из A (2,0) в B (-2,0). Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BD и DA , где D (-2;-2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 4\pi$, $\Pi = 0$, Ц $= 4\pi + 8$.

5. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \dfrac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = z$.

Ответ: $q = \dfrac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля в точке M (x, y, z) и в точке $M_0(1,2,3)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 0, rot\vec{a}(M_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 3

1. Найти момент инерции относительно оси ох однородной фигуры, ограниченной линиями $\frac{y}{h}-\frac{3x}{a}=1,\ \frac{y}{h}+\frac{3x}{2a}=1, y=0,$ если поверхностная плотность массы $\delta=1.$

Ответ: $J_x=\frac{ah^3}{12}.$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=4(1+\sin\varphi)$ и прямой $\rho\sin\varphi=3$ и расположенной выше прямой.

Ответ: $S=8\pi+9\sqrt{3}$.

3. Найти электрический заряд кривой $y=\ln\cos x, 0\le x\le\frac{\pi}{6},$ если линейная плотность заряда равна $\lambda=\sin x\cdot\cos^2 x.$

Ответ: $q=\frac{1}{8}.$

4. Найти работу поля $\vec{F}=(x^2-y^2)\vec{i}+(x^2+y^2)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x=2\cos t, y=\sin t$ от $A(2;0)$ до $B(0;1)$. Найти циркуляцию $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABDA$, составленному из дуги $\overset{\cup}{AB}$ и прямых BD и DA, если D (0;-1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W=\frac{5}{3};\quad \Pi=\frac{19}{3};\quad Ц=\frac{14}{3}.$

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x}, z=2\sqrt{x}, x+y=6, y=0,$ если плотность массы $\delta=2z.$

Ответ: $m=108$.

6. Найти координаты центра массы части однородной поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=ax.$

Ответ: $C\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{16a}{9\pi}\right).$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k})$ в точке M (x, y, z) и в точке $M_0(1,-2,-2)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=\frac{7}{3};\ rot\vec{a}(M_0)=\frac{1}{3}(12\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}).$

Вариант 4

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2.$

Ответ: $c\left(\frac{45}{28}; \frac{279}{70}\right).$

2. Найти момент инерции относительно начала координат фигуры $x^2 + y^2 \le 2Rx$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $J_0 = \frac{512R^5}{75}.$

3. Найти массу участка кривой $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, 0 \le t \le \pi \end{cases}$, если линейная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = 2.$

4. Найти работу поля $\vec{F} = y(x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2x^2$ от O (0,0) до B (1,2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги $\breve{OB}$ параболы и прямых BD и DO, если D (-1,2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\breve{OB}$.

Ответ: $W = \frac{31}{30}$; $Ц = \frac{241}{30}$; $П = \frac{47}{30}.$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \sqrt{x}, z = 2\sqrt{x}, x + y = 6, y = 0.$

Ответ: $V = \frac{48\sqrt{6}}{5}.$

6. Найти электрический заряд части конической поверхности $z = \sqrt{y^2 + x^2}$, отсеченной цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(x^2 + y^2 + z).$

Ответ: $q = -3\sqrt{2}\pi a^4.$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,2,3).$

Ответ: $div a(M_0) = 36, rot\vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}.$

Вариант 5

1. Найти абсциссу центра массы фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x, y = 0, y = 1, x = 0,$ если поверхностная плотность массы $\delta = e^y$.

Ответ: $\bar{x} = \frac{e}{3} + \frac{1}{3(e+1)}.$

2. Найти электрический заряд фигуры $x^2 + y^2 \le 2Rx, y \ge 0,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = \frac{16}{9}R^3.$

3. Найти момент инерции первого витка однородной винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}t$ относительно оси oz. Линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = a^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = x(y-1)\vec{i} + x^2\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = x^2$ от B (-2;4) до C (2,4). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги $\overset{\cup}{BC}$ параболы и прямой CB. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BC}$ параболы.

Ответ: W = 0, Ц = 0, П = -9,6.

5. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0, \quad z = H,$ если масса тела равна m.

Ответ: $J_y = \frac{m}{12}\left(3R^2 + 4H^2\right).$

6. Найти массу части поверхности $z = \sqrt{4 - x^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = 5$, x=0, z=0 *и расположенной в первой октанте,* если поверхностная плотность массы $\delta = z(x + y)$.

Ответ: m = 70.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$, где $\vec{a} = -(2x^2 + 3y^2)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - (2x^2 + y^2)\vec{k},\ \vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k},\ \ \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ в точке M *(x ,y ,z)* и в точке M_0 (1,-1,1).

Ответ: $div\vec{a} = -4x, \quad rot\vec{a} = -2y\vec{i} + 4x\vec{j} + (4x + 6y)\vec{k}$.

Вариант 6

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $y - \frac{x}{2}, y - \sqrt{\frac{x}{2}}$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(xy^2 + 1)$.

Ответ: $q = -\frac{47}{105}$.

2. Найти массу фигуры $1 \le x^2 + y^2 \le 9, \quad 0 \le x \le y$, если поверхностная плотность массы $\delta = \frac{x}{y}$.

Ответ: $m = 2\ln 2$.

3. Найти момент инерции линии $y = e^x, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$ относительно оси ох, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{1}{3}\left((1+e)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$ от B (0,3) до C (-4,0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, составленному из дуги эллипса $\overset{\smile}{BC}$ и прямых CD и DB, если D (0;-2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{BC}$ эллипса.

Ответ: $W = \frac{25 - 6\pi}{2}$, $\quad$ Ц $= -4 - 3\pi$, $\quad$ П $= -17$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $x = 3 - y^2 - z^2, x = 0$.

Ответ: C (1,0,0).

6. Найти площадь части плоскости $z = 4 - x$, вырезанной поверхностями $z = 0$, $x = y^2$.

Ответ: $S = \frac{32\sqrt{2}}{3}$.

6. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = -\left(3\frac{y}{x} + 2\frac{x}{y}\right)\vec{i} + 2\frac{x}{y}\vec{j} - \left(2\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\vec{k}$ в точке M (x, y, z) и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\bar{a}(M_0) = -1, rot\,\bar{a}(M_0) = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$.

Вариант 7

1. Найти абсциссу центра массы однородной фигуры

Ответ: $x = \frac{(4-\pi)(\sqrt{2}+1)}{4}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 4(1+\cos\varphi)$ и прямой $\rho\cos\varphi = 3$ и расположенной справа от прямой.

Ответ: $S = 8\pi + 9\sqrt{3}$.

3. Найти координаты центра массы однородной кривой $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $C\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2\sqrt{x}$ от *O* (0,0) до *B* (1,2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *OCBO,* состоящему из дуги *BO* параболы и прямых *OC* и *CB*, если *C* (1; -1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{OB}$ параболы.

Ответ: $W = -\frac{8}{15}$, Ц $= \frac{71}{30}$, П $= \frac{13}{6}$.

5. Вычислить электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 3z, x = 0, y = 0, z = 0$ и расположенного в первом октанте $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = -\frac{1}{15}$.

6. Найти массу части плоскости $x + y + z = 4$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, если поверхностная плотность массы $\delta = (x^2 + y^2)^2 + z^2$.

Ответ: $m = \frac{280}{3}\pi\sqrt{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и $M_0(-2,2,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -\frac{11}{3}; rot\vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(6\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k})$.

Вариант 8

1. Найти ординату центра массы однородной фигуры $0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \sin x$.

Ответ: $\bar{y} = \frac{(\pi - 2)(2 + \sqrt{2})}{16}$.

2. Найти момент инерции однородной фигуры $x^2 + y^2 \le 2y, y \ge 1$ относительно оси Ox, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{15\pi + 20}{24}$.

3. Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

Ответ: $l = 6a$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (y + 2x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = \frac{x + x^2}{2}$ от B (-1,0) до O (0,0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OCBO$, состоящему из дуги BO параболы и прямых OC и CB, где C (-1,2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{BO}$.

Ответ: $W = -\frac{7}{12}$; $\text{Ц} = -\frac{13}{12}$; $\text{П} = -\frac{7}{6}$.

5. Вычислить электрический заряд тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 2$, $x = 0$, $z = 0$, $x - y = 0$, если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}$.

6. Найти массу полусферы $z - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = \frac{2}{3}\pi R^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = arctg\frac{z}{x + y}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ в точке $M(x,y,z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -\frac{1}{5}$; $rot\vec{a}(M_0) = \frac{1}{5}(-3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$.

Вариант 9

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{2y} = x, y = 2, x = 0.$

Ответ: $C\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right).$

2. Найти электрический заряд кольца $\frac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = 2\pi - \pi^2.$

3. Найти электрический заряд участка кривой $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t \quad 0 \le t \le 1, \\ z = t^2, \end{cases}$ если линейная плотность заряда $\lambda = \sqrt{1 + 4z + 9xy}$.

Ответ: $q = -\frac{62}{15}.$

4. Найти работу поля $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = 2x - x^2$ от O (0,0) до B (2,0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BO}$ и прямых OC и CB, если C (2;-1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{8}{3}; Ц = \frac{7}{3}; \quad П = \frac{16}{3}.$

5. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = b,$ если плотность массы $\delta = y.$

Ответ: $m = \frac{\pi b^4}{4}.$

6. Найти момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \ge h,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1.$

Ответ: $J_z = \frac{2\pi R}{3}(R - h)(2R^2 - Rh - h^2).$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (2y^2 - 3x^2)\vec{i} - x^2\vec{j} + (y^2 - 3x^2)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_o(1,3,-2).$

Ответ: $div\vec{a}(M_o) = -6, rot\vec{a}(M_o) = +6\vec{i} + 6\vec{j} - 14\vec{k}.$

Вариант 10

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2x}$, $x = 2$, $y = 0$.

Ответ: $C\left(\frac{6}{5},\frac{3}{4}\right)$.

2. Найти момент инерции однородного круга $x^2+y^2\le 2Ry$ относительно оси Ox, если поверхностная плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $J=\frac{5}{4}\pi R^4$.

3. Найти массу кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a, 0<x<a$, если линейная плотность массы $\lambda=\sqrt{\frac{x^3}{x+y}}$.

Ответ: $m=\frac{a^2}{2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=(x+2y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x=\cos t, y=2\sin t$ от B (0;-2) до A (1;0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $BACB$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ и прямых AC и CB, если C (0;1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{BA}$.

Ответ: $W=\frac{5-\pi}{2}$; $Ц=-\frac{1+\pi}{2}$; $\Pi=\frac{9}{2}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного плоскостями $z=0, z=ky$ и цилиндрической поверхностью $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Ответ: $C\left(0; \frac{3}{16}\pi a;\ \frac{3}{32}\pi ak\right)$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $2z=9-x^2-y^2$, отсекаемой плоскостью $z=0$, если поверхностная плотность заряда $\lambda=x^2+y^2+z-2$.

Ответ: $q=\frac{\pi}{15}(500\sqrt{10}-23)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\frac{2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$ в произвольной точке $M(x,y,z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=-\frac{4}{9}; rot\vec{a}(M_0)=\frac{1}{9}(4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k})$;

Вариант 11

1. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, $y = 2x$, $x = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $m = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

2. Найти момент инерции относительно оси Оу однородной фигуры $x^2 + y^2 \le 2x, x \ge 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \frac{15\pi + 32}{24}$.

3. Найти массу кривой $y = \sqrt{x - x^2}$, если линейная плотность массы $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = 1$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге эллипса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ из A (0;-1) в B (2,0). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги AB эллипса и прямых BC и CA, если C (-2,0). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W = \frac{5}{3}$; Ц $= -\frac{10}{3}$; П $= -\frac{13}{3}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2, y = x^2, z = 0, y = 1$, если плотность заряда $\lambda = 3x + 4y$.

Ответ: $q = \frac{160}{63}$.

6. Найти координаты центра массы части однородной конической поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, находящейся между плоскостями $z = 0$, $z = h$.

Ответ: $C\left(0,0,\frac{2h}{3}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$ в точке $M\,(x, y, z)$ и в точке M_0 (2; -2,1).

Ответ: $div a(M_0) = \frac{13}{3}; rot\vec{a}(M_0) = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{j})$.

Вариант 12

1. Вычислить координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной эллипсом $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и осью абсцисс.

Ответ: $C\left(0; \frac{4b}{3\pi}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородного круга $x^2 + y^2 \le 4y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = 24\pi$.

3. Найти электрический заряд линии $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t, 0 \le t \le 2\pi, \\ z = t \end{cases}$ если плотность заряда $\lambda = -z$.

Ответ: $q = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{(2 + 4\pi^2)^3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (2x - 3y)\vec{j}$ при перемещении точки от A (1,0) до B (-1,0) по параболе $y = 1 - x^2$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{AB}$ параболы и прямых BC и CA, если C (-1;-1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{BA}$.

Ответ: $W = \frac{4}{3}$; Ц $= \frac{7}{3}$; П $= -\frac{4}{3}$.

5. Найти статический момент относительно плоскости xOz однородного тела, ограниченного поверхностями $x = \sqrt{y}$, $x = 2\sqrt{y}$, $z = 0$, $y + z = 6$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{xz} = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти массу части поверхности $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, отсеченной плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = z$.

Ответ: $m = \frac{4\pi(6\sqrt{3} + 1)}{15}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (x^2 + 2y^2)\vec{i} - 2y^2\vec{j} + \frac{2y^2 - x^2}{z}\vec{k}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -3, rot\vec{a}(M_0) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

Вариант 13

1. Найти электрический заряд треугольной пластины с вершинами A (-2;-2), B (-1;2), C (-1; $-\frac{3}{2}$), если поверхностная плотность заряда $\lambda = 2x + y$.

Ответ: $q = -\frac{133}{24}$.

2. Найти момент инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой относительно оси ох, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{21\pi a^4}{32}$.

3. Найти координаты центра массы кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: $C\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{\pi}; \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{\pi}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ при перемещении точки по гиперболе $y = \frac{2}{x}$ от A (1,2) до B (2,1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги гиперболы $\breve{AB}$ и прямых BC и CA, если C (2,3). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\breve{AB}$.

Ответ: $W = 0$; $Ц = -\frac{2}{3}$; $П = -4$.

5. Найти статический момент относительно плоскости yoz однородного тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_{yz} = \frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти массу части конической поверхности $z = \sqrt{2xy}$, отсекаемой плоскостью $x + y = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = \sqrt{2xy}$.

Ответ: $m = \frac{1}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 - 3x^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + (2y^2 - 3x^2)\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,-1,1)$.

Ответ: $div a(M_0) = -6, rot\vec{a} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$.

Вариант 14

1. Найти момент инерции относительно оси *оу* однородного треугольника с вершинами *A* (,1); *B* (1,2); *C* (3,3), если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = 3$.

2. Найти статический момент относительно оси *Ox* однородной фигуры $1 \le x^2 + y^2 \le 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \dfrac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12}$.

3. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$ при $-\infty < t \le 0$.

Ответ: $l = \sqrt{3}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = \dfrac{2}{x}$ от *A* (-2,-1) до *B* (-1,-2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *ABCA*, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\smile}{AB}$ и прямых *BC* и *CA*, если *C* (1;-1). Найти поток вектора через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W = 0$; Ц $= 2$; $\Pi = -4$.

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, z = 2, если плотность массы $\delta = x^2 + y^2$.

Ответ: $m = \dfrac{16\pi}{3}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 2ay$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: $q = \dfrac{3\pi a^4}{\sqrt{2}}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = arctg\,\dfrac{z}{x+y}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ в точках

M (x, y, z) и M_0 (1,1,1).

Ответ: $div\bar{a}(M_0) = \dfrac{2}{5}$, $rot\,\bar{a}(M_0) = \dfrac{1}{5}(\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k})$.

Вариант 15

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x, y = x,$ если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{2}\right)$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2a\cos\varphi$, если плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_0 = \frac{3}{2}\pi a^4$.

3. Найти массу участка кривой $y = -\ln\cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, если линейная плотность массы $\delta = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Ответ: $m = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ от $A(\sqrt{3}, 1)$ до $B(1, \sqrt{3}\,)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BA}$ окружности и прямых AC и CB, где $C(\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = 0$, $\quad$ Ц $= 0$, $\quad \Pi = \frac{\pi}{3}$.

5. Найти заряд тела, ограниченного плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a,$ если плотность заряда $\lambda = -x$.

Ответ: $q = -\frac{a^3 h}{6}$.

6. Вычислить массу участка поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченного плоскостью $z = 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2 + y^2 + 3z^2$.

Ответ: $m = 2\pi\sqrt{2}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (\vec{i} + 2\vec{j} + k)\ln(x + 2y + 3z)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_1(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = \frac{4}{3}; rot\vec{a}(M_0) = \frac{-2i + j}{3}$;

Вариант 16

1. Найти координаты центра массы фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 3y$, $x = y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\frac{3}{2};\frac{6}{5}\right)$.

2. Найти массу круга радиуса *R*, плотность массы которого в каждой точке равна расстоянию от этой точки до окружности.

Ответ: $m = \frac{\pi R^3}{3}$.

3. Найти статический момент кривой $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ относительно оси *ox*, если линейная плотность массы $\delta = x$.

Ответ: $M_x = 5{,}6$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \frac{x}{y}\vec{i} - \frac{y}{x}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = -\frac{2}{x}$ от *A* (1;-2) до *B* (2;-1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *ACBA*, состоящему из дуги гиперболы $\overset{\smile}{BA}$ и прямых *AC* и *CB*, где $C(-2;-2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ гиперболы.

Ответ: $W = 0$, $Ц = 0$, $П = 2$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 3$, если плотность заряда $\lambda = -z\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $q = -8$.

6. Найти момент инерции относительно оси *oz* однородной полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z = \frac{4}{3}\pi R^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (y^2 + 3x^2)\vec{i} - 3x^2\vec{j} + (3x^2 - 2y^2)\vec{k}$ в точке *M* (*x, y, z*) и в точке $M_0(2,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 12, rot\vec{a}(M_0) = -4\vec{i} - 12\vec{j} - 14\vec{k}$.

Вариант 17

1. Найти момент инерции относительно оси Ox плоской однородной фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{2x}$, $x + y = 3$, $y = 0$, если поверхностная плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $J_x = 1{,}4$.

2. Найти массу фигуры $x^2 + y^2 \le 4x$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2$.

Ответ: $m = 20\pi$.

3. Найти координаты центра массы однородной полуокружности $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Ответ: $C\left(0;\dfrac{2a}{\pi}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=\dfrac{x\vec{i}-y\vec{j}}{x^2+y^2}$ при перемещении точки по дуге окружности $x=3\cos t$, $y=3\sin t$ от $A(3,0)$ до $B(0,3)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, состоящему из дуги $\breve{BA}$ окружности и прямых AC и CB, если $C(3,3)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\breve{AB}$ окружности.

Ответ: $W=-1$, $\quad$ Ц $=1-\ln 2$, $\quad \Pi = 0$.

5. Найти статический момент относительно плоскости yoz тела, ограниченного поверхностями $z=\dfrac{1}{2}x^2, x=0, y=0, z=0, 3x+2y=12$, если плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $M_{yz}=\dfrac{192}{5}$.

6. Найти электрический заряд части поверхности $z=1-(x^2+y^2)$, отсеченной плоскостью $z=0$, если плотность заряда $\lambda=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$.

Ответ: $q=3\pi$.

7. Найти дивергенцию и ротор поля $\vec{a}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(2\vec{i}+\vec{y}+3\vec{k})$ в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(-1;2;2)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=2$; $\quad rot\vec{a}(M_0)=\dfrac{1}{3}(4\vec{i}+7\vec{j}-5\vec{k})$.

Вариант 18

1. Вычислить массу четверти кольца $4 \le x^2 + y^2 \le 9, \quad x \le 0, \quad y \ge 0$, если поверхностная плотность массы $\delta = \dfrac{y - 2x}{x^2 + y^2}$.

Ответ: $m = 3$.

2. Найти координаты центра массы однородной фигуры, $1 \le x^2 + y^2 \le 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(0; \dfrac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi + 6\sqrt{3}}\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси Oy дуги кривой $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = y$.

Ответ: $M_y = 5{,}6$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = \cos\sqrt{y}\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге $\overset{\cup}{BO}$ параболы $y = x^2$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{BOC}$ параболы $y = x^2$ и прямой CB, B (-1, 1), O (0, 0), C (1, 1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OC}$ параболы.

Ответ: $W = \dfrac{7}{6} + \sin 1, \quad \text{Ц} = \dfrac{4}{3} + 2\sin 1 - 2\cos 1, \quad \Pi = -2(\sin 1 + \cos 1) + \dfrac{1}{6},$

5. Найти момент инерции линии $y = \ln x, 1 \le x \le \sqrt{e},$ относительно оси оу, если линейная плотность $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \dfrac{1}{3}\left((1+e)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right)$

6. Вычислить электрический заряд части поверхности конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, отсеченной плоскостью $x = 2$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = -(5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4)$.

Ответ: $q = -80\pi\sqrt{2}.$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})\cos(2x + y - z)$ в произвольной точке M (x, y, z) и в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -3; rot\vec{a}(M_0) = -7\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}.$

Вариант 19

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ и осями координат, если поверхностная плотность заряда $\lambda.=x$ и фигура расположена при $x\ge 0,\quad y\ge 0.$

Ответ: $q=\frac{100}{3}\cdot$

2. Найти координаты центра массы однородной фигуры $1\le x^2+y^2\le 2x,$ если поверхностная плотность массы $\delta=1.$

Ответ: $C\left(\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{4\pi+6\sqrt{3}};0\right).$

3. Найти статический момент относительно оси ох однородной циклоиды $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi,$ если линейная плотность массы $\delta=1.$

Ответ: $M_x=\frac{32}{3}.$

4. Найти работу поля $\vec{F}=\frac{y^2\vec{i}+x^2\vec{j}}{xy}$ при перемещении точки по дуге кривой $y=\frac{4}{x^2}$ от A (1, 4) до B (2, 1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ кривой $y=\frac{4}{x^2}$ и прямых BC и CA, если C (8, 4). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$ этой кривой.

Ответ: $W=-0{,}5;Ц=8{,}5-\ln 8;П=7{,}1375.$

5. Вычислить момент инерции относительно оси oz однородного цилиндра $x^2+y^2\le 2Ry, 0\le z\le H,$ если масса цилиндра равна m.

Ответ: $J_z=\frac{3}{2}mR^2.$

6. Найти массу части поверхности, $z=\sqrt{9-x^2}$ отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=3$, если поверхностная плотность массы $\delta=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$

Ответ: $m=\frac{\pi^2}{4}.$

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\left(\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}\right)\vec{i}-\frac{3x}{y}\vec{j}+\left(\frac{3x}{y}-\frac{2y}{x}\right)\vec{k}$ в произвольной точке M (x, y, t) и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=5;rot\vec{a}(M_0)=-5\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}.$

Вариант 20

1. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ и осями координат.

Ответ: $C\left(\frac{a}{5};\frac{a}{5}\right)$.

2. Найти статический момент относительно оси Ох однородной фигуры $x^2+y^2\le 2y$, если поверхностная плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $M_x=\pi$.

3. Найти момент инерции относительно оси Ox одной арки однородной циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$. Линейная плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $J_x=\frac{256}{15}a^3$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=(x-y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y=2-x^2$ от A (-1,1) до B (1,1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ACBA$, составленному из дуги $\overset{\smile}{BA}$ параболы и прямых AC и CB, где C (-1; 0). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W=-\frac{142}{15}$; $Ц=\frac{152}{15}$; $П=\frac{4}{3}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $x^2+z^2=1, y=0,$ $y=1$, если плотность заряда $\lambda=-(x^2+y^2+z^2)$.

Ответ: $q=-\frac{3}{2}\pi$.

6. Найти массу полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta=\frac{z}{R}$.

Ответ: $m=\pi R^2$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=arctg\,\frac{x+y}{z}(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=\frac{1}{5}$; $rot\vec{a}(M_0)=\frac{1}{5}(5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})$.

Вариант 21

1. Найти массу фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, если плотность массы $\delta=|y|$.

Ответ: $m=\frac{4}{3}ab^2$.

2. Найти электрический заряд, распределенный с поверхностной плотностью $\lambda=\sqrt{1-x^2-y^2}$ в области $x^2+y^2\le y$.

Ответ: $q=\frac{3\pi-4}{9}$.

3. Найти статический момент относительно оси Ox циклоиды $\begin{cases} x-a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}, 0\le t\le 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta=y$.

Ответ: $M_x=\frac{512}{15}a^3$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=\frac{y^2}{x}\vec{i}+\frac{x^2}{y}\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y=\sqrt{x}$ от $A(1;1)$ до $B(4;2)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги $\overset{\smile}{AB}$ параболы и прямых BC и CA, где $C(1;2)$. Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ параболы.

Ответ: $W=6{,}75$, $Ц=6{,}75-\ln 2-4\ln 4$, $П=\frac{57}{5}$.

5. Найти координаты центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z=1-\sqrt{x^2+y^2}, z=0$.

Ответ: $C\left(0;0;\frac{1}{4}\right)$.

6. Найти момент инерции относительно оси oz , часть однородной поверхности $z=\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченной плоскостью $z=h$.

Ответ: $J_z=\frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{a^2+h^2}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля вектора $\vec{a}$ в точке $M(x,y,z)$ и в точке $M_0(1,1,1)$, если $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$, где $\vec{b}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}-x^2\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=6, rot\vec{a}=(M_0)=-4\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}$.

Вариант 22

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, x=0, y=0,$ если поверхностная плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q=\frac{a^3}{30}$.

2. Найти площадь фигуры $1 \le x^2 + y^2 \le 2x$.

Ответ: $S=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$.

3. Найти моменты инерции однородной окружности $x^2 + y^2 = r^2$ относительно осей координат. Масса окружности равна m.

Ответ: $J_x = J_y = \frac{1}{2}mr^2$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = xy\vec{i} + (y-x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $\begin{cases} x=t \\ y=(t+1)^2 \end{cases}$ от A (-1;0) до B (0,1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ параболы и прямых BC и CA, если C (-1;2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W=\frac{3}{4}; Ц=-\frac{5}{12}; \Pi=\frac{14}{15}$.

5. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями
$2x + z = 4,\ x + z = 2,\ y = \sqrt{2x},$ если плотность $\delta = y$.

Ответ: $m=\frac{4}{3}$.

6. Найти координаты центра массы полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность массы $\delta = x^2 + y^2$.

Ответ: $C\left(0,0,\frac{3}{8}R\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $a = \mathrm{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в произвольной точке и в точке $M_0(2,2,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=\frac{2}{3}; rot\vec{a}(M_0)=0$.

Вариант 23

1. Найти электрический заряд, распределенный в области, ограниченной кривыми $x=0,\ y=\pi,\quad y=x$ с поверхностной плотностью $\lambda=\cos(x+y)$.

Ответ: $q=-2$.

2. Найти статический момент однородного круга $x^2+y^2\le 2x$ относительно оси оу.

Ответ: $M_y=\pi$.

3. Вычислить массу участка винтовой линии $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}, \\ z=bt \end{cases}$ если линейная плотность массы $\delta=xy$.

Ответ: $m=\dfrac{a^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=(y-x)\vec{i}+xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы

y = $(x+1)^2$ от A (-2;1) до B (0;1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $ABCA$, состоящему из дуги $\breve{AB}$ параболы и прямых BC и CA, если C (0;3). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\breve{AB}$ параболы.

Ответ: $W=\dfrac{52}{15}$; Ц $=-\dfrac{8}{5}$; П $=\dfrac{22}{3}$.

5. Найти центр массы однородного конуса, ограниченного поверхностями $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2},\ z=h$.

Ответ: $C=\left(0{,}0,\dfrac{3}{4}h\right)$.

6. Вычислить момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ y\ge 0,$ если поверхностная плотность массы $\delta=1$.

Ответ: $J_z=\dfrac{\pi R^4}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=\vec{i}\sin(y^2+3x^2)-\vec{j}\sin(y^2+3x^2)+\vec{k}\sin(3x^2-2y^2)$ в произвольной точке $M(x,y,z)$ и в точке $M_0(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};\ -\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};0)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=-4\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$; $rot\vec{a}(M_0)=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}(2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})$.

Вариант 24

1. Найти массу, распределенную в области, ограниченной линиями $y=1, y=2, x=0$, $y=e^t$ с поверхностной плотностью $\delta = e^x$.

Ответ: $m=\frac{1}{2}$.

2. Найти момент инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной одним лепестком лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $J_0 - \frac{\pi a^4}{4}$.

3. Найти координаты центра массы однородной циклоиды $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(\pi a, \frac{4}{3}a\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy+x+y)\vec{i} + (xy+x-y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $x=\sqrt{y}$ от O(0,0) до *A*(2,4). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру *OACO*, состоящему из дуги *OA* параболы и прямых *AC* и *CO*, если *C* (0,2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{OA}$ в сторону выпуклости дуги.

Ответ: $W = 18{,}8; \text{П} = 22{,}8; \text{Ц} = \frac{52}{15}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, z=0, x+z=6,$ если плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q=\frac{864\sqrt{6}}{35}$.

6. Найти координаты центра массы части поверхности $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ при $z \le 1$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{6\sqrt{3}+1}{5(3\sqrt{3}-1)}\right)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{b}\times\vec{c}$, где $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ в точках $M(x,y,z)$ и $M_0(1, -1, 1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_o) = -2, rot\vec{a}(M_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 25

1. Найти статический момент относительно оси Ox массы, распределенной с плотностью $\delta = \frac{1}{x}$ в области, ограниченной линиями $y = x, y = 2x, x = 1, x = 2$.

Ответ: $M_x = 2{,}25$.

2. Вычислить момент инерции однородного круга радиуса R массы m относительно начала координат.

Ответ: $J_0 = \frac{1}{2} mR^2$.

3. Вычислить массу участка кривой $y = 0{,}5x^2, 0 \le x \le 1,$ если линейная плотность массы $\delta = \sqrt{2y}$.

Ответ: $m = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (x^3 - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = R\cos t, y = R\sin t$ от $A(R,0)$ до $B(0,R)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{BA}$ окружности и прямых AC и CB, где $C(2R, R)$. Найти поток вектора R через дугу $\overset{\smile}{AB}$ окружности.

Ответ: $W = \frac{\pi R^2}{2}$; $Ц = R^2(3 - \frac{\pi}{2})$; $П = \frac{3\pi R^4}{8}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x}, z = 2\sqrt{x}, y + x = 6, y = 0$, если плотность заряда $\lambda = z$.

Ответ: $q = 54$.

6. Найти координаты центра массы части однородной полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, вырезанной плоскостями $x = 0, y = 0, x + y = R, (x \ge 0, y \ge 0, x + y \le R)$.

Ответ: $C\left(\frac{R\sqrt{2}}{4}, \frac{R\sqrt{2}}{4}, \frac{R}{\pi(\sqrt{2} - 1)}\right)$.

7.Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\,\vec{a}(M_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $rot\,\vec{a}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}\right)$.

Вариант 26

1. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной полукруглой пластинки $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$. Поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_{ox} = \dfrac{\pi R^4}{8}$.

2. Найти координаты центра массы плоской однородной фигуры, ограниченной кривой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Ответ: $C\left(\dfrac{5a}{6};0\right)$.

3. Найти статический момент относительно оси Ox однородной дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x = \dfrac{3a^2}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = y^2 \ln x\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении точки по дуге гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ от A (1;1) до $B\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{BA}$ гиперболы и прямых AC и CB, если C (1; $-\dfrac{1}{2}$). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W = -\dfrac{\ln 2}{2}$; Ц $= \dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{170}{72}$; П $= \dfrac{-3\ln 2 + 79}{72}$.

5. Найти электрический заряд тела, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{1}{2}x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + 2y = 12$, если плотность заряда $\lambda = x$.

Ответ: $q = \dfrac{192}{5}$.

6. Найти площадь части цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, заключенной между плоскостями $y = x$ и $y = 0$.

Ответ: $S = 2a^2$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля:

$\vec{a} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точках M (x, y, z) и $M_0(2,3,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 0; rot\vec{a}(M_0) = -10\vec{k}$.

Вариант 27

1. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$.

Ответ: $C\left(0;\frac{8}{3\pi}\right)$.

2. Найти массу, распределенную в области $2x \le x^2 + y^2 \le 4x$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}$, с поверхностной плотностью $\delta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Ответ: $m=\frac{\pi^2+\pi\sqrt{3}-6}{8}$.

3. Найти статический момент относительно оси Oy однородной дуги астроиды $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1, 0 \le x \le 1$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_y=\frac{3}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F}=x^2y\vec{i}-xy^2\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ от A (-2,0) до B (0,-2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{AB}$ окружности и прямых BC и CA, где C (-2,2). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Ответ: $W=-2\pi$; $\text{Ц}=-\frac{6\pi+8}{3}$; $\Pi=-2$.

5. Найти электрический заряд части шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, расположенной в первом октанте $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, если плотность заряда $\lambda=-z$.

Ответ: $q=-\frac{\pi R^4}{16}$.

6. Найти момент инерции относительно оси Oz части однородной поверхности $x^2+y^2=2az$, $0 \le z \le a$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_z=\frac{4\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}a^4$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=arctg(x-y+z)(\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k})$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0)=\frac{1}{2}, rot\vec{a}(M_0)=\frac{5}{2}\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}-\vec{k}$.

Вариант 28

1. Найти массу, распределенную с поверхностной плотностью $\delta = x^2 + y$ в области, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y^2 = x$.

Ответ: $m = \dfrac{33}{140}$.

2. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного круга $x^2 + y^2 \le 2x$, если поверхностная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $J_y = \dfrac{5}{4}\pi$.

3. Найти статический момент относительно оси ох однородной дуги астроиды $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$, расположенной в первой четверти $(0 \le x \le 1, y \ge 0)$, если линейная плотность массы $\delta = 1$.

Ответ: $M_x - \dfrac{3}{5}$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (y^2 - x)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$ при перемещении точки по дуге окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$ от A (1,0) до B (0,1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\cup}{AB}$ окружности и прямых BC и CA , если C (0;-1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Ответ: $W = 0$; Ц $= \dfrac{2}{3}$; П $= \dfrac{4 - 3\pi}{6}$.

5. Найти координаты центра массы однородной фигуры, ограниченной поверхностями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $C\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$.

6. Найти электрический заряд части плоскости $x + y + z = a$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность заряда $\lambda = z^2$.

Ответ: $q = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi a^4$.

8. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = xyz(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ в точках $M\,(x, y, z)$ и $M_0(1, 2, 3)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 36, rot\vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - 16\vec{j} + 9\vec{k}$.

Вариант 29

1. Найти электрический заряд фигуры, ограниченной линиями $x = 1, \sqrt{y} = x, y = -\sqrt[3]{x}$, если поверхностная плотность заряда $\lambda = xy - (xy)^3$.

Ответ: $q = -\frac{5}{64}$.

2. Найти электрический заряд, распределенный в области $x^2 + y^2 \le 2x$ с поверхностной плотностью $\lambda = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Ответ: $q = \frac{8}{9}(3\pi - 4)$.

3. Найти координаты центра масс дуги окружности $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, если линейная плотность массы $\delta = xy$.

Ответ: $C\left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}\right)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2y\vec{j}$ при перемещении точки по дуге параболы $y = -\sqrt{x}$ от O (0;0) до B (1;-1). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру, состоящему из дуги $\overset{\smile}{OB}$ параболы и прямых BC и CO, если C (1;1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\overset{\smile}{OB}$.

Ответ: $W = \frac{2}{3}; Ц = -\frac{1}{12}; П = -\frac{13}{35}$.

5. Найти ординату центра массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}y^2, x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y = 12$.

Ответ: $y_0 = \frac{12}{5}$.

6. Найти массу части плоскости $2x + 2y + z - 4 = 0$, расположенной в первом октанте $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, если поверхностная плотность массы $\delta = z$.

Ответ: $m = \frac{8}{3}$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + yz\vec{k}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(2,1,1)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = 1, rot\vec{a}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{k}$.

Вариант 30

1. Найти моменты инерции относительно осей координат фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2, y = x^2$, если поверхностная плотность массы в каждой точке фигуры равна ординате точки.

Ответ: $J_x = \dfrac{31}{420}, J_y = \dfrac{1}{15}$.

2. Найти объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостями $z = 0, z = 3, x + y = 0$ и цилиндрической поверхностью $x = \sqrt{-4y - y^2}$.

Ответ: $V = 3\pi - 6$.

3. Найти электрический заряд, распределенный по кривой $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t + t\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$ с линейной плотностью $\lambda = -(x^2 + y^2)$.

Ответ: $q = -2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$.

4. Найти работу поля $\vec{F} = (xy + y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при движении точки (m = 1) по параболе $y = 2\sqrt{x}$ от 0 (0,0) до A (1,2). Найти циркуляцию вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру $OACO$, состоящему из дуги $\breve{OA}$ параболы и прямых AC и CO, где C (1, -1). Найти поток вектора $\vec{F}$ через дугу $\breve{OA}$.

Ответ: $W = \dfrac{52}{15}$; Ц $= \dfrac{29}{30}$; $\Pi = -\dfrac{19}{6}$.

5. Найти центр массы однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = 0$.

Ответ: $C\left(0,0,\dfrac{3}{8}\right)$.

6. Найти площадь части гиперболического параболоида $az = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

Ответ: $S = \dfrac{2\pi}{3a}(\sqrt{(a^2 + R^2)^3} - a^3)$.

7. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = 2x^2 y\vec{i} - yz^2\vec{j} + \dfrac{x}{y}\vec{k}$ в произвольной точке и в точке $M_0(-1,1,2)$.

Ответ: $div\vec{a}(M_0) = -8, rot\vec{a}(M_0) = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учебное пособие для втузов. – 6-е изд., испр.- М.: Высш. шк., 2003. – 416 с.:ил.

Исрапилов Р. Б., Баутин С. П. Курс математики. Часть 3. Математический анализ функций нескольких переменных. – Екатеринбург: УГГГА, 1996.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. -13-е изд.- М.: Айрис-пресс, 2015.- 608 с.: ил.- (Высшее образование).

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____________________ С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению контрольных работ

Б1.О.09 МАТЕМАТИКА

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией факультета
Математики	горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____ *(подпись)*	Председатель _____ *(подпись)*
Сурнев В.Б.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 19.09.2023	Протокол № от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Варианты заданий для контрольных работ и самостоятельной работы студентов всех специальностей по теме: “Дифференцирование функций нескольких переменных” содержат 30 вариантов по 7 заданий в каждом варианте, также задания могут быть использованы на практических занятиях в аудитории.

Вариант 1.

1) Найти область определения функции $z = 2\cdot\sqrt{36-4x^2-9y^2}$ и построить линии уровней $z=0$, $z=3$, $z=6$, $z=12$.

2) Для функции $u=\dfrac{x\cdot y^2}{z}-y\cdot e^{2x-z}$ найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$ в точке $M(1;-1;2)$.

3) Найти экстремумы функции $z = x\cdot\sqrt{y}-x^2+6x-y$.

4) Найти полный дифференциал функции $v(t,z)=\ln\left(arctg\dfrac{t}{z}\right)$ и вычислить его значение при $t=z=1$, $\Delta t = 0{,}2$, $\Delta z = 0{,}1$.

5) Для функции $\omega=\cos(3u-2v)$, где $u=2^{tg(4x)}$, $v=\log_2(3\sqrt{x}+2)$ найти $\dfrac{d\omega}{dx}$ в точке $x=0$.

6) Найти производную $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $\arcsin(zy)+ctg\left(\dfrac{\pi x}{4y}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{z}-x$ при $x=1$, $y=1$, $z=0{,}5$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3+y^3+z^3-xyz-6=0$ в точке $M(1;2;-1)$.

Вариант 2.

1) Найти область определения функции $z=\sqrt{x^2+y^2-4}+3\ln(2x-y^2)$.

2) Для функции $u=\sin^2(2x+3y)$ вычислить $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3) Найти экстремум функции $z=x^2+2y^2-2xy+3x-y+5$.

4) Для функции $z=(2x+1)^{3y-2}$ составить формулу полного дифференциала.

5) Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $y^2-4xy=0$ и вычислить ее значение при $x=1$, $y=4$.

6) Найти градиент функции $u=\dfrac{x\cdot y^2}{z}+\dfrac{z\cdot y}{\sqrt[3]{x}}$ в точке $M(1;2;-1)$.

7) Для функции $u=\ln(2x-y^2)$, где $x=3e^t$, $y=arctg\left(\dfrac{t}{2}\right)$ найти $\dfrac{du}{dt}$ и вычислить ее значение в точке $t=0$.

Вариант 3.

1) Найти и построить область определения функции $z = \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{5}{y}\right)$.

2) Для функции $u = ctg(\sqrt{x^3} + y)$ найти формулу полного дифференциала.

3) Найти экстремумы функции $z = xy - x^2y - xy^2$.

4) Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $arctg\frac{x+2y}{3} = 2x + \frac{y}{5}$ и вычислить ее значение при $x = 0$, $y(0) = 0$.

5) Найти полную производную $\frac{du}{dx}$, если $u = x^y$, где $y = \ln(2x)$.

6) Найти производную функции $\omega = x^2y + 2y^2z + 3z^2x$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M\vec{N}$, где $N(-1;4;-5)$.

7) Найти градиент функции $v = e^{xz^3 - y^2}$ в точке $M(1;2;-1)$ и его величину.

Вариант 4.

1) Найти область определения функции $f(x,y) = \frac{2x-3y}{3x-y}$. Вычислить $f(1,3)$, $f(a,-a)$, $f(-a,a)$, $a \neq 0$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 - x^2y - xy^2$.

3) Для функции $z = arctg\frac{y}{x-1}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 0$, $y = 1$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$.

4) Найти производную $\frac{du}{dt}$ сложной функции $u = \sin(2x + y^2)$, где $x = \ln(2\sqrt{t} + 1)$, $y = ctg\frac{1}{t}$.

5) Найти $\frac{dy}{dx}$ производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ и вычислить ее значение при $x = 0$, $y < -2$.
, если $u = x^y$, где $y = \ln(2x)$.

6) Найти градиент функции $u = z^2e^{x-2y} + \cos\frac{\pi y}{xz^2}$ в точке $M(2;1;-1)$.

7) Вектор $\vec{l}$ составляет с осью OX угол $\alpha = 30^0$, с осью OY $0 \leq \beta \leq 90^0$. Найти производную функции $z = x^3 - 3\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[4]{xy^3}$ в точке $M(1;1)$ по направлению $\vec{l}$.

Вариант 5.

1) Найти и построить область определения функции $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

3) Для функции $u=e^{x^2-y^2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2y}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=-0{,}01$.

4) Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z=arctg(uv)$, где $u=\cos(2x-y)$, $v=tg\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к окружности $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, где $x=4$, $y<0$. Сделать чертеж.

6) В точке $M(4;3;-12)$ вычислить модуль градиента функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7) Найти производную функции $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ в точке $M_1(3;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(6;5)$.

Вариант 6.

1) Найти и построить область определения функции $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. Построить линии уровней $z=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{1}{2}$, $z=1$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^2+2y^2+2xy-2x+4y+15$.

3) Для функции $u=e^{xy}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=-0{,}01$.

4) Найти производную $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ сложной функции $v=ctg\left(\dfrac{y^2}{z}\right)$, где $y=\ln(5x+4u)$, $v=arctg(\sqrt{x\cdot u})$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $3x^2+2y^2-6x-12y+16=0$ в точке, где $x=2$, $y<3$. Сделать чертеж.

6) Найти градиент функции $u=\arccos\dfrac{z}{x+y}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x^2z}}$ в точке $M(1;1;1)$.

7) Найти производную функции $z = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{y}{\sqrt{z}} - xyz^3$ в точке $M_1(1;-2;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-1;4;-2)$.

Вариант 7.

1) Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$.

2) Найти экстремумы функции $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$.

3) Для функции $u = arctg\frac{x}{y}$ вычислить частные производные второго порядка и их значения в точке $M(1;-1)$.

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции, где $z = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

5) Найти частные производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $z \cdot \ln(2y - x) + 2^{x+2z} - \frac{8y}{\sqrt[3]{z}} = 0$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ в точке $M_0(3;4;5)$.

6) В точке $M(4;3;-12)$ вычислить модуль градиента функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7) Найти производную функции $u = xy^{\ln z}$ в точке $M_1(1;1;2)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(3;-1;1)$.

Вариант 8.

1) Найти и построить область определения функции $w = \arcsin(|y| - x)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

3) Для функции $u = e^x\cos(2y)$ вычислить частные производные второго порядка и их значения при $x = 1$, $y = 0$.

4) Для функции $z = x^3 \ln y$, где $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u + 2v$ найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ в точке, где $y = -5$, $x > 0$.

6) Найти градиент функции $u - \arcsin\frac{z}{x + y} - \sqrt[3]{\frac{y}{x^2 z}}$ в точке $M(1;1;1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2(2 - z^2) - y^2 = 0$ в точке $M_0(1;-1;1)$.

Вариант 9.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arccos(|x| + y)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + 2y^2 - 3x + 4y$.

3) Для функции $u = 2^{\arcsin\frac{x}{z}}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 0$, $z = 1$, $\Delta x = \Delta z = 0{,}01$.

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = tg(2x^2 - y)$, где $x = \ln(2t)$, $y = \sqrt{t}$.

5) Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;1)$ $z = f(x, y)$ - неявной функции, заданной уравнением $x\ln(2z - y) + arctg\frac{z}{y} = \frac{\pi}{2x}$.

6) Найти производную функции $u = \frac{1}{\pi}tg\frac{\pi \cdot x^2}{2y} + e^{y-2x}$ в точке $M_1(1;2)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(5;-1)$.

7) Найти градиент функции $u = \frac{2z}{\sqrt[3]{x}} + yz^3 - \sqrt{\frac{x}{y}}$ в точке $M_1(8;2;1)$. Составить уравнение поверхности уровня функции, проходящей через точку M_1.

Вариант 10.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 2x)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2 - 6x + 9y + 20$.

3) Для функции $u = \sqrt{y+1} \cdot \ln(x^2 + 2y)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 1$, $y = 0$, $dx = dy = 0{,}1$.

4) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \lg(x + y^2)$, где $x = arctg\frac{1}{t}$, $y = \sin(\pi \cdot t)$.

5) Уравнение $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ задает неявную функцию $y(x)$. Найти производную $\frac{dy}{dx}$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к графику этой функции в точке, где $y = -1$, $x > 0$.

6) Найти градиент функции $u = e^{\frac{x \cdot y}{z}} - \frac{1}{\pi}tg\frac{\pi \cdot z}{xy^2}$ в точке $M(1;1;1)$.

7) Найти производную функции $u = \frac{xy}{\sqrt{2z}} + \frac{z}{2x^2y} + \sqrt{\frac{2y}{z}}$ в точке $M_1(1;2;4)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-2;0;-2)$.

Вариант 11.

1) Найти и построить область определения функции $z=\dfrac{\ln(x+1)}{1+\ln y}$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+23$.

3) Для функции $z=\sin^2(2x+3y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения при $x=\dfrac{\pi}{4}$, $y=\dfrac{\pi}{6}$.

4) Для функции $z=\dfrac{u}{\ln v}$, где $u=\sqrt{4x-y^2}$, $v=4-x^2-y^2$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $2x^2+3y^2-12x-6y+16=0$ в точке, где $x=4$, $y\neq 0$.

6) Найти модуль градиента функции $u=e^{\frac{2y-x}{z}}-\dfrac{1}{\pi}\cos\dfrac{\pi\cdot z}{xy^2}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Найти производную функции $u=\sqrt[3]{y^2-4z}+arctg\dfrac{x-z}{y}$ в точке $M_1(1;2;-1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-2;-4;1)$.

Вариант 12.

1) Найти область определения функции $z=\sqrt{x-y+1}\cdot\ln(x+y)$.

2) Найти экстремумы функции $z=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}+x$.

3) Найти полный дифференциал функции $v(t,z)=\ln\left(arctg\dfrac{t}{z}\right)$ и вычислить его значение при $t=z=1$, $dt=0{,}01$, $\Delta z=-0{,}01$.

4) Для функции $z=u\cdot e^{\frac{u}{v}}$, где $u=x^2+y^2$, $v=xy$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x^2+y^2=2x-4y+20$ в точке, где $x=4$, $y>0$.

6) Найти производную функции $u=x\cdot\arcsin\dfrac{z-y}{2}-\sqrt[3]{y^2-4z}$ в точке $M_1(-1;1;2)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\dot{M}_2$, где $M_2(0;2;1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2+4y^2+9z^2=21$ в точке, где $x_0=2$, $y_0<0$, $z_0=1$.

Вариант 13.

1) Найти и построить область определения функции $v=\arccos(x-2y)$.

2) Найти экстремумы функции $z=x^3+y^3+6xy$.

3) Для функции $u=ctg(e^{y^2-x^2})$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=1$, $y=-1$, $\Delta x=\Delta y=0{,}1$.

4) Для функции $z=arctg(xy)$, где $y=e^{2x}$ найти $\dfrac{dz}{dx}$.

5) Для функции, заданной уравнением $\dfrac{6}{\pi}\arcsin\dfrac{x+y}{4z}-\sqrt[3]{\dfrac{zx^2}{y}}=0$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти градиент функции $u=y\cdot\ln(x+2z)+z\cdot\sqrt[3]{x^2y^3}$ в точке $M(-1;1;1)$. Найти модуль градиента.

7) Найти производную функции $u=\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{z}}+\dfrac{x+2y}{x-z}+\sqrt[3]{\dfrac{xy^2}{2z}}$ в точке $M_1(2;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(0;-1;2)$.

Вариант 14.

1) Найти и построить область определения функции $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.

2) Найти экстремумы функции $z=e^{-x}(x-y^2)$.

3) Вычислить приближено изменение функции $\varphi=arctg\dfrac{x+1}{y}$, если x изменяется от $x_1=0$ до $x_2=0{,}2$, y изменяется от $y_1=1$ до $y_2=0{,}9$

4) Для функции $z=\ln^2(u)-\ln(2v)$, где $u=tg(3x)$, $v=\sin(3x)$ найти $\dfrac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к окружности $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ в точке, где $y=-6$, $x<0$.

6) Найти градиента функции $u=\dfrac{x}{\ln(y+z)}+\sqrt[3]{2x^2z^5}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Найти производную функции $u=\arcsin(x\sqrt{y})$ в точке $M_1\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Вариант 15.

1) Найти область определения функции $z=\sqrt{x-y+2}+\ln(y-x^2)$.

2) Показать, что функция $z=x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$ имеет экстремум в точке $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u=y\cdot e^{2(1-x)}+\cos\dfrac{\pi\cdot x}{2y^2}$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z=arctg\dfrac{y}{x}$, где $y=\ln(2x+1)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

5) Уравнение $\dfrac{6}{\pi}\arcsin\dfrac{x+z}{4y}-\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{z}}=0$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти частную производную этой функции в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти производную функции $u=ye^{2y-x}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y}$ в точке $M_1(2;1;4)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(0;-2;-2)$.

7) Найти градиент функции $u=\dfrac{1}{\pi}\left(ctg\dfrac{\pi\cdot y^2}{2x}\right)^2$ в точке $M(2;1)$.

Вариант 16.

1) Найти и построить область определения функции $u=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. Вычислить значение функции u в точке $M(1;3)$.

2) Найти экстремумы функции $z=e^{0,5x}(x+y^2)$.

3) Для функции $u=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}2$.

4) Для сложной функции $z=x^2y-xy$, где $x=u\cos v$, $y=v\sin u$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

5) Уравнение $\arccos\dfrac{x}{y}=\dfrac{\pi}{3}+zy-\sqrt{\dfrac{z}{x}}$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ при $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$, $z>0$.

6) Найти производную функции $u=\arcsin\dfrac{2y-x}{z}+\dfrac{\sqrt[3]{2x^2z}}{y^3}$ в точке $M_1(2;1;-1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-1;-5;1)$.

7) Найти модуль градиента функции $u=\dfrac{2x-y}{3y+2z}$ в точке $M(-1;1;-1)$.

Вариант 17.

1) Найти область определения функции $u = \arccos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

2) Показать, что функция $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ имеет экстремум в точке $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u = z\cdot e^{y-2x} + \dfrac{1}{z^2}\cos\dfrac{\pi\cdot x}{y}$ найти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$. Вычислить их значения в точке $M(1;2;1)$.

4) Для функции $z = 2u + \sqrt{v}$, где $u = \arcsin(xy)$, $v = \ln(x^2+2y)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $x\ln(2y-z) + arctg\dfrac{y}{z} = \dfrac{\pi}{2x}$ задает неявную функцию $z = f(x,y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;1)$.

6) Найти модуль градиента функции $u = \dfrac{1}{\pi}tg\left(\dfrac{\pi\cdot x}{y\cdot z}\right) - \dfrac{z-x}{y-x} + x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{y}{z}}$ в точке $M(1;2;2)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду $z = 2x^2 + 4y^2$ в точке, где $y = 1$, $z = 12$, $x < 0$.

Вариант 18.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arcsin(|x| - |y|)$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3y^2 - 3xy + 1{,}75$.

3) Для функции $u = \ln(x^2 + 3y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения при $x = 2$, $y = 0$.

4) Для функции $u = \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = arctg\dfrac{1}{x}$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

5) В точке $M(2;1)$ найти угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + y = 2^{y-2} - 2^x$

6) Найти градиент функции $u = \dfrac{1}{\pi}\cos\dfrac{\pi\cdot x}{yz}\cdot e^{x+y} - \sqrt[3]{\dfrac{zy^2}{2x}}$ в точке $M(-1;1;2)$.

7) Найти производную функции $u = \dfrac{x}{y}\arcsin\dfrac{y}{x}$ в точке $M_1(-2;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(2;4)$.

Вариант 19.

1) Найти и построить область определения функции $u = \frac{\ln(x^2 - 2y)}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

2) Найти экстремумы функции $z = 3x^2 + y^3 - 3xy$.

3) Для функции $u = \frac{ctg\left(2y + \frac{\pi}{4}\right)}{x-1}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 3$, $y = 0$, $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = 0{,}01$.

4) Для функции $z = \ln(y^2 - 2x^2)$, где $y = e^{x+1}$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

5) Уравнение $\arcsin\frac{x}{y} = \frac{\pi}{6} + zy - \sqrt{\frac{z}{x}}$ задает неявную функцию $z = f(x, y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2};1;z_0\right)$, $z_0 > 0$.

6) Найти производную функции $u = \frac{x^2}{yz} - \sqrt{\frac{y}{2x}} + xyz^3$ в точке $M_1(1;2;-1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-2;-4;1)$.

7) Найти градиент функции $z = x^y + y^x$ в точке $M(2;1)$.

Вариант 20.

1) Найти область определения функции $t = \log_2(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

2) Показать, что функция $z = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ имеет экстремум в точке $M_0(1;1)$. Выяснить тип экстремума. Найти этот экстремум.

3) Для функции $u = y \cdot e^{2(1-x)} + \cos\frac{\pi \cdot x}{2y^2}$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Катеты $a = 12$ (см), $b = 5$(см) измерены с точностью $\Delta a = \Delta b = 0{,}1$ (см). Найдите гипотенузу треугольника и относительную погрешность значения гипотенузы $\left(\delta c = \frac{\Delta c}{c} \cdot 100\%\right)$.

4) Для функции $u = x^2 + 2y^2 + \ln(1 + y)$, где $y = \sin(3x)$ найти $\frac{du}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсу $2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ в точке, где $y = -1$, $x < 0$.

6) Найти градиент функции $z = arctg\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$ в точке $M_0(\sqrt{2};1)$.

7) Найти производную функции $u = xe^{2y+z} + z \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$ в точке $M_1(-1;1;2)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(4;3;14)$.

Вариант 21.

1) Найти и построить область определения функции $z = \arcsin\frac{1}{x} + \arccos\frac{1}{y}$.

2) Найти экстремумы функции $z = 3x^2 + y^3 - 6xy$.

3) Для функции $u = (x^2+2)\cdot\arcsin\frac{1}{y}$ найти частные производные второго порядка.

4) Найти производную $\frac{du}{dt}$ сложной функции $u = e^{x-3y}$, где $x = \sin(\pi \cdot t)$, $y = \sqrt[3]{t}$ и ее значение при $t = 1$.

5) Уравнение $x\ln(2y+z) + arctg\frac{z}{y} + \frac{\pi}{2x} = 0$ задает неявную функцию $z = f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;-1)$.

6) Составить уравнения касательных плоскостей к эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ в точках пересечения эллипсоида и прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

7) Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении вектора l_0, составляющего с осью ОУ угол $\beta = 60^0$.

Вариант 22.

1) Найти и построить область определения функции $v = \arccos(x^2 + y^2 - 2y)$. Вычислить z при $x = 0$, $y = 1$.

2) Найти экстремумы функции $z = x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 4x$.

3) Для функции $u = \frac{5x+3y}{9x-2y}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta y = 0{,}3$.

4) Для функции $w = tg\frac{4u}{v^2}$, где $u = \arcsin(t-2z)$, $v = \ln(t^2+z^2)$ найти $\frac{\partial w}{\partial z}$.

5) Уравнение $arctg\frac{x+2y}{3z}-ye^{x-z}+\frac{1}{z}=\frac{\pi}{4}$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(1;1;1)$.

6) Найти модуль градиента функции $u=\frac{2x^2}{9}+\frac{3y^2}{z}-xyz$ в точке $M(1;-2;3)$.

7) Найти производную функции $u=\frac{z}{\sqrt[3]{x-y}}+\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^{3y+z}-\sqrt{x(y^2-z)}$ в точке $M_1(2;1;-3)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(5;-5;-1)$.

Вариант 23.

1) Найти область определения функции $u=\arccos\left(\frac{x}{y}\right)$.

2) Найти экстремум функции $z=x^2+2y^2-xy^2+1$.

3) Для функции $u=x\ln(3x+2y)$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=1$, $y=-1$, $\Delta x=\Delta y=0{,}01$.

4) Для функции $z=u^v$, где $u=\sin(2y)$, $v=arctg\frac{x}{y}$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x\cdot 3^{\frac{x+1}{y}}+tg\frac{\pi x}{4y}-10=0$ в точке $M(1;1)$.

6) Найти производную функции $u=\sqrt{3}\arcsin\frac{x-y}{z}+y^2\cdot\sqrt{\frac{z}{x^3}}$ в точке $M_1(1;2;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-1;5;-10)$.

7) Найти градиент функции $u=\frac{x}{\sqrt[3]{z(2x+y)}}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{z}}+xyz^2$ в точке $M(1;2;-2)$.

Вариант 24.

1) Найти и построить область определения функции $z = x + 2y - \arccos(xy)$.

2) Найти экстремум функции $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$.

3) Для функции $u = e^{1-x} \cdot \ln(2y)$ найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z = (u+1)^{v-1}$, где $u = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $v = \cos(2x+3y)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $x\ln(2z+y) + arctg\dfrac{z}{y} + \dfrac{\pi}{2x} = 0$ задает неявную функцию $z = f(x,y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;-1;1)$.

6) Найти производную функции $u = \sqrt{3}\arccos\dfrac{x-y}{z} + \dfrac{4}{\pi}tg\dfrac{\pi y}{x^2}$ в точке $M_1(2;1;2)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(5;-1;-4)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sin(3x)\cdot\cos y - z = 0$ в точке, где $x = y = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 25.

1) Найти и построить область определения функции $u = \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{y+2}$. Вычислить значение функции u в точке $M(5;-1)$.

2) Найти экстремумы функции $z = e^{0,5y}(x^2 + y)$.

3) Вычислить приближено изменение функции $z - \arcsin\dfrac{y}{x}$, если x изменяется от $x_1 = 5$ до $x_2 = 4{,}5$, y изменяется от $y_1 = 3$ до $y_2 = 3{,}3$

4) Для функции $z = y^{\sqrt{x}}$, где $y = \log_2(x^2 + 2x)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к гиперболе $x^2 - 2y^2 + 4y - 4 = 0$ в точке $M(2;2)$. Сделать чертеж.

6) Найти производную функции $u = \dfrac{1}{\pi}\cos\dfrac{\pi\cdot z}{x^2 y} + \dfrac{x+2y}{z+y}$ в точке $M_1(1;2;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(3;1;-1)$.

7) Найти градиент функции $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ в точке $M\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Вариант 26.

1) Найти и построить область определения функции $u=\dfrac{2x+y}{\cos(y-x)}$.

2) Найти экстремумы функции $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}+y$.

3) Для функции $u=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(2x-y)\right)$ найти частные производные $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ и $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$. Вычислить их значения в точке $M(1;1)$.

4) Для функции $z=u^{v-1}$, где $u=\arcsin(x+2y)$, $v=\ln(x+\sqrt[3]{y})$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5) Уравнение $\dfrac{x-y}{z^2}+e^{2z+x}-x\sqrt{y}=0$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;1;-1)$.

6) Найти градиент функции $u=arcctg\,\dfrac{x}{y+z}+\sqrt[3]{\dfrac{z^5}{2x^2y}}$ в точке $M(2;1;1)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $u=\dfrac{1}{\ln 2}\cdot 2^{x^2-z^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{z}-\dfrac{2x}{\sqrt{y}}=\dfrac{1}{\ln 2}$ в точке $M_1(1;4;1)$

Вариант 27.

1) Найти и построить область определения функции $z=tg\left(y+2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Вычислить z при $x=0$, $y=1$.

2) Найти экстремумы функции $z=2y^2-2y\sqrt{x}+x-4y$.

3) Для функции $z=x^2+2y^2-3xy$ найти формулы частных приращений $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и полного приращения. Вычислить приращения, если x изменяется от $x_1=2$ до $x_2=2{,}1$, y изменяется от $y_1=2$ до $y_2=1{,}9$.

4) Для функции $z=x^y$, где $y=e^{-x}\cdot\sin(2x)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

5) Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу $3x^2+2y^2-6x-12y+7=0$ в точке, где $x=3$, $y>3$.

6) Найти градиент функции $u=y\ln(x+2z)-\sqrt{3}\arccos\dfrac{z}{x^2+y^3}$ в точке $M_1(-1;1;1)$.

7) Найти производную функции $u=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{xz^2}{y-1}}+\dfrac{x+z}{2y-z}-\dfrac{x^2y}{4z^3}$ в точке $M_1(2;3;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(4;1;2)$.

Вариант 28.

1) Найти и построить область определения функции $u = \arcsin \frac{y-2}{x}$.

2) Для функции $u = x^{\frac{y}{z}}$ найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ при $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

3) Найти экстремумы функции $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

4) Высота $H = 4$(см) и образующая $L = 5$(см) конуса измерены с точностью $\Delta = 0{,}1$(см). Найти объем конуса. Найти абсолютную и относительную погрешности объема.

5) Для функции $z = \arcsin \frac{x}{z}$, где $z = \sqrt{x^2+1}$ найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{du}{dx}$ в точке, где $x = 1$.

6) Найти градиент функции $u = \sqrt{2} \cdot \arcsin \frac{x+2y}{x+z} + \sqrt[3]{\frac{2yz^2}{x}}$ в точке $M(1;-1;2)$.

7) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + \ln(y^2 + z^2) - \ln(x^2 + z^2) = 1$ в точке, где $x = 1$, $z = -2$, $y < 0$.

Вариант 29.

1) Найти и построить область определения функции $u = \arccos \sqrt{xy}$.

2) Для функции $z = x^y$ найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Сравнить эти производные.

3) Найти экстремумы функции $z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy$.

4) С помощью дифференциала найти формулу объема стекла, нужного для изготовления цилиндрического стакана с толщиной стенок и дна к, если радиус внутреннего цилиндра R, а высота внутреннего цилиндра H.

5) Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $\ln x + \ln y - \sqrt[3]{y} = 0$ в точке $M(e;1)$.

6) Для функции $z = \ln(2x + y^2)$, где $x = \sin(2t)$, $y = \cos^2 t$ найти $\frac{dz}{dt}$.

7) Найти модуль градиента функции $u = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z$ в точке $M_1(1;1;1)$ и производную в точке M_1 по направлению вектора $\vec{l} = M_1\vec{M}_2$, где $M_2(-1;3;0)$.

Вариант 30.

1) Найти и построить область определения функции $u=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+y^2}{x^2+4x+y^2}}$.

2) Для функции $z=\ln\left(tg\,\dfrac{x}{y}\right)$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3) Найти экстремум функции $z-2x^2+y^2-xy-7x+14$.

4) Для функции $u=\sqrt[3]{x+y^2}$ найти полный дифференциал и вычислить его значение при $x=2$, $y=5$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}01$.

5) Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xe^{2x+y}-e^{3x^2+2y}=0$ в точке $M_1(1;-1)$.

6) Для функции $z=\dfrac{u}{v}arctg(u+v)$, где $u=xy$, $v=x+y$ найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7) Найти градиент функции $u=\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{4y}{z^2}+x^2z^2$ в точке $M_1(1;-1;2)$. Найти производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\vec{l}=M_1\vec{M}_2$, где $M_2(3;-4;-4)$.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_________________________ С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ
К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Б1.О.09 МАТЕМАТИКА

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Автор: Пяткова В.Б., старший преподаватель

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией факультета
Математики	горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой ________ *(подпись)*	Председатель ________ *(подпись)*
Сурнев В.Б.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 05.09.2022	Протокол № 1 от 13.09.2022
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов бакалавриата направлению подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника при организации самостоятельной работы по дисциплине «Математика» в рамках выполнения контрольных работ.

В методических рекомендациях содержатся образцы выполнения контрольных работ, требования к их оформлению, а также критерии оценки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Организация выполнения контрольной работы №1

Выполнение контрольной работы в виде решения ряда задач по линейной алгебре и аналитической геометрии практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умений и навыков всоответствии с компетенциями образовательной программы.

Выполнение контрольной работы призвано стимулировать самостоятельную работу студентов по изучению основ математики; оно направлено на формирование знаний основных категорий линейной алгебры и аналитической геометрии, развитие навыков логического мышления, обобщения и умения делать верные выводы.

Каждый студент получает от преподавателя дисциплины свой вариант контрольной работы. Каждый вариант контрольной работы включает 8 задач.

При этом предлагаются образцы задач с подробными объяснениями и решениями по всем изучаемым темам данного раздела, подобные представленным в контрольной работе.

Требования к оформлению контрольной работы

Контрольная работа должна быть выполнена в рукописном виде. Контрольная работа выполняется либо в ученической тетради, либо на листах формата А4 (сшитых) в той последовательности, которая определена вариантом. Вначале переписывается содержание каждой задачи, затем приводится ее подробное решение и дается ответ.

В случае выполнения контрольной работы на отдельных листах все страницы работы должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится. Титульный лист работы оформляется студентом по образцу, данному в приложении.

В конце работы должен быть представлен список использованной литературы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

В данном разделе приведены подробные решения задач, подобных указанным ввариантах.

Задача 1

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = B^T \cdot A + 4E$.

Решение

Ищем транспонированную матрицу к матрице *B*: $B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Находим произведение матриц $B^T \cdot A$:

$$B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 5 + (-1)\cdot 3 + 7\cdot(-1) & 3\cdot 4 + (-1)\cdot 0 + 7\cdot 2 \\ 0\cdot 5 + 2\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 4 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 26 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу *C:*

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 26 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 26 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

Обозначим заданные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем уравнение в матричном виде:

$A \cdot X = B$,

откуда

$X = A^{-1} \cdot B$.

Находим обратную матрицу к матрице *A*:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задача 3

Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение

Прибавив третью строку ко второй, получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Так как теперь в четвертом столбике только один ненулевой элемент, разложим данный определитель по 4 столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее вычтем третью строку из первой:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

и прибавим вторую строку к третьей, предварительно умножив все ее элементы на 2:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -5 & 0 & -9 \end{vmatrix}.$$

Теперь раскладываем полученный определитель по второму столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -5 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 0 = 1(-18-15) = -33.$$

Задача 4

Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

Решение

а) Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det \mathrm{A} \neq 0$, то система уравнений является совместной и определенной.

Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение находим в виде:

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

б) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24, \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24, \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36.$$

Теперь найдем решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{24}{12} = 2,\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-24}{12} = -2,\ x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{36}{12} = 3.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

в) Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=12\cdot$$

Если определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

Запишем СЛАУ в виде расширенной матрицы и получим решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 2c-1c \\ 3c-3\cdot 1c \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & -5 & 0 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 3c+5\cdot 2c \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ -12 & 0 & 0 & -24 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1c\cdot(-12\ ) \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\begin{array}{c} 1c\cdot(-12\ ) \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{c} 2c+3c \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1c-2\cdot 2c-3\cdot 3c \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Задача 5

Даны три вектора $\vec{p}=(0;\ 2;\ 1)$, $\vec{g}=(0;\ 1;\ -1)$, $\vec{r}=(5;\ -3;\ 2)$. Найти разложение вектора $\vec{c}=(15;\ -20;\ -1)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

Решение

Так как вектор $\vec{c}$ может быть разложен по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$, то $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{p}+\beta\cdot\vec{g}+\gamma\cdot\vec{r}$.

Таким образом задача состоит в нахождении координат этого разложения α,β,γ. Запишем векторное уравнение $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{p}+\beta\cdot\vec{g}+\gamma\cdot\vec{r}$ в виде системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 15=0\cdot\alpha+0\cdot\ \beta+5\cdot\gamma \\ -20=2\cdot\alpha+1\cdot\beta-3\cdot\gamma \\ -1=1\cdot\alpha-1\cdot\beta+2\cdot\gamma \end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases} 15=5\cdot\gamma \\ -20=2\cdot\alpha+1\cdot\beta-3\cdot\gamma \\ -1=1\cdot\alpha-1\cdot\beta+2\cdot\gamma \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha=-6;\ \beta=1;\ \gamma=3$.

Отсюда $\vec{c} = -6\vec{p} + \vec{g} + 3\vec{r}$.

Задача 6

Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-3; 4; -6), B(0; 2; -4), C(-6; 7; -10).

Решение

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{0-(-3);\ \ 2-4;\ -4+6\} = \{3, -2,\ 2\}$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-6-(-3);\ \ 7-4;\ -10+6\} = \{-3;\ 3; -4\}$$

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Найдем длину вектора $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$

$$S = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Задача 7

Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 5; -7), B(-3; 6; 3) и C(-2; 7; 3).

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через три точки, можно записать в виде равенства

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим координаты точек A(1; 5; -7), B(-3; 6; 3) и C(-2; 7; 3) в записанное выше уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -3-1 & 6-5 & 3+7 \\ -2-1 & 7-5 & 3+7 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - (y-5) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} + (z+7) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуя левую часть равенства, получим уравнение плоскости $2x - 2y + z - 15 = 0$

Задача 8

Записать уравнение прямой $\begin{cases} 2x-3y-2z+6=0 \\ x-3y+z+3=0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Решение

По условию прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Восстановим вектора нормалей к каждой из плоскостей.

$\vec{N_1} = \{2,-3,-2\}$; $\vec{N_2} = \{1,-3,\ 1\}$.

Найдем направляющий вектор прямой $\vec{S} = \vec{N_1} \times \vec{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

Найдем координаты какой-нибудь точки, принадлежащей заданной прямой. Выберем произвольно одну из координат. Пусть, например, $z=0$, тогда имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} 2x-3y+6=0 \\ x-3y+3=0 \end{cases}$, решая которую получаем $x=-2$, $y=0$. Итак, нашли точку M(-3; 0; 0), лежащую на прямой. Запишем канонические уравнения прямой с направляющим вектором $\vec{S} = \{-9;-4;-3\}$, проходящей через точку M(-3; 0; 0) :

$$\frac{x+3}{-9} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-3} \text{ или } \frac{x+3}{-9} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-3}$$

Комплект вариантов контрольной работы №1

Вариант 1

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = (A + 3A^T) \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (0;\ 1;\ 2)$, $\vec{g} = (1;\ 0;\ 1)$, $\vec{r} = (-1;\ 2;\ 4)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-2;\ 4;\ 7)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(1; -2; 3), B(0; -1; 2), C(3; -4; 5).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-3; 4; -7), B(1; 5; -1) и C(-5; -2; 0).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 2

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^2 - 3A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 3;\ 0)$, $\vec{g} = (2;\ -1;\ 1)$, $\vec{r} = (0; -1;\ 2)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (6;\ 12;\ -1)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(0; -3; 6), B(-12; -3; -3),C(-9; -3;-6).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-1; 2; -3), B(4; -1; 0) и C(2; 1; -2).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ x + 3y + z + 14 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 3

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A \cdot A^T - 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -41 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (2;\ 1;\ -1)$, $\vec{g} = (0;\ 3;\ 2)$, $\vec{r} = (1; -1;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (1;\ -4;\ 4)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(3; 3;-1), B(5; 5; -2), C(4; 1; 1).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-3; -1; 1), B(-9; 1; -2) и C(3; -5; 4).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + 2y - z - 8 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 4

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T + 2B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (4;\ 1;\ 1)$, $\vec{g} = (2;\ 0;\ -3)$, $\vec{r} = (-1;\ 2;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-9;\ 5;\ 5)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-1; 2; -3), B(3; 4; -6), C(1; 1; -1).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; -1; 1), B(-2; 0; 3) и C(2; 1; -1).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 5

1. Даны матрицы и А= $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ Найти матрицу $X = A^T \cdot A - 4B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (-2;\ 0;\ 1)$, $\vec{g} = (1; 3;\ -1)$, $\vec{r} = (0;\ 4;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-5;\ -5;\ 5)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-4; -2; 0), B(-1; -2; 4), C(3; -2; 1).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 2; 0), B(1; -1; 2) и C(0; 1; -1).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0 \\ x - 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 6

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу С= $A^T \cdot A + 5E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (5;\ 1;\ 0)$, $\vec{g} = (2;\ -1;\ 3)$, $\vec{r} = (1;\ 0;\ -1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (13; 2;\ 7)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(5; 3; -1), B(5; 2; 0), C(6; 4; -1).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 0; 2), B(1; 2; -1) и C(2; -2; 1).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 7

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Найти матрицу $C = (2A^T - \text{B}) \cdot \text{A}$

2. Решить матричное уравнение $\text{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (0;\ 1;\ 1)$, $\vec{g} = (-2;\ 0;\ 1)$, $\vec{r} = (3;\ 1;\ 0)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-19; -1;\ 7)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-3; -7; -5), B(0; -1; -2), C(2; 3; 0).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 2; -3), B(1; 0; 1) и C(-2; -1; 6).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 8

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = \text{B} - 3A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $\text{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1; 0; 2)$, $\vec{g} = (0; 1; 1)$, $\vec{r} = (2; -1; 4)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (3;\ -3;\ 4)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(2; -4; 6), B(0; -2; 4), C(6; -8; 10).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(3; 10; -1), B(-2; 3; -5) и C(-6; 0; -3).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 9

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B \cdot (A^T + 2A)$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (3;\ 1;\ 0)$, $\vec{g} = (-1;\ 2;\ 1)$, $\vec{r} = (-1;\ 0;\ 2)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (3;\ 3;\ -1)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(0; 1; -2), B(3; 1; 2), C(4; 1; 1).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-1; 2; 4), B(-1; -2; -4) и C(3; 0; -1).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 10

1. Дана матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^2 + 2A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 11 & 2 \\ 7 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (-1;\ 2;\ 1)$, $\vec{g} = (2;\ 0;\ 3)$, $\vec{r} = (1;\ 1;\ -1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-1;\ 7;\ -4)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(3; 3; -1), B(1; 5; -2), C(4; 1; 1).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(0; -3; 1), B(-4; 1; 2) и C(2; -1; 5).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 11

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^T \cdot A + 3E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 1;\ 4)$, $\vec{g} = (0; -3;\ 2)$, $\vec{r} = (2;\ 1;\ -1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (6;\ 5;\ -14)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(2; 1; -1), B(6; -1; -4), C(4; 2; 1).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 3; 0), B(4; -1; 2) и C(3; 0; 1).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0 \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 12

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = A^T \cdot A - 2B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & -7 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ -2;\ 0)$, $\vec{g} = (1;\ 1;\ 3)$, $\vec{r} = (1;\ 0;\ 4)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (6; -1;\ 7)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-1; -2; 1), B(-4; -2; 5), C(-8; -2; 2).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-2; -1; -1), B(0; 3; 2) и C(3; 1; -4).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 6 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 13

1.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = B^T \cdot A + 4E$.

2. Решить матричное уравнение X $\cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 9 & 16 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 0;\ 5)$, $\vec{g} = (-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{r} = (0;\ -1;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (5;\ 15;\ 0)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(6; 2; -3), B(6; 3; -2), C(7; 3; -3).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-3; -5; 6), B(2; 1; -4) и C(0; -3; -1).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 6x - 7y - 4z - 2 = 0 \\ x + 7y - z - 5 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 14

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^T \cdot A + 7E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 9 & 4 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 1;\ 0)$, $\vec{g} = (0;\ 1;-2)$, $\vec{r} = (1;\ 0;\ 3)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (2;-1;\ 11)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(0; 0; 4), B(-3; -6; 1), C(-5; -10; -1).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(2; -4; -3), B(5; -6; 0) и C(-1; 3; -3).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 3x - y - 3z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 10 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 15

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T - 3A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 4 & 7 \\ 36 & -7 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 0;\ 2)$, $\vec{g} = (-1;\ 0;\ 1)$, $\vec{r} = (2;\ 5;\ -3)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (11;\ 5;\ -3)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(2; -8; -1), B(4;-6; 0), C(-2; -5; -1).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; -1; 2), B(2; 1; 2) и C(1; 1; 4).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0 \\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 16

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $C = 3B - A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \\ -3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (2; 0; 1)$, $\vec{g} = (1; 1; 0)$, $\vec{r} = (4; 1; 2)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (8;\ 0;\ 5)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(3; -6; 9), B(0; -3; 6), C(9; -12;15).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 3; 6), B(2; 2; 1) и C(-1; 0; 1).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0 \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 17

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3E - A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 12 & 0 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (0;\ 1;\ 3)$, $\vec{g} = (2;\ 2; -1)$, $\vec{r} = (2;\ 0;\ -1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (3;\ 1;\ 8)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(0; 2; -4), B(8; 2; 2), C(6; 2; 4).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-4; 2; 6), B(2; -3; 0) и C(-10; 5; 8).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0 \\ x - 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 18

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $C = A \cdot B + 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 11 \\ -2 & -6 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 2;\ -1)$, $\vec{g} = (3;\ 0;\ 2)$, $\vec{r} = (-1;\ 1;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (8; 1; 12)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(3; 3; -1), B(5; 1; -2), C(4; 1; 1).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(7; 2; 4), B(7; -1; -2) и C(-5; -2; -1).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0 \\ x - y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 19

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = (3B - A^T) \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & -6 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -17 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 4;\ 1)$, $\vec{g} = (-3;\ 2;\ 0)$, $\vec{r} = (1;\ -1;\ 2)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-9;\ -8; -3)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-4; 3; 0), B(0; 1; 3), C(-2; 4; -2).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(2; 1; 4), B(3; 5; -2) и C(-7; -3; 2).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - y - 3z - 8 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 20

1.Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3E - A \cdot A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -13 \\ 3 & -22 & 27 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (0;\ 1;\ -2)$, $\vec{g} = (3;\ -1;\ 1)$, $\vec{r} = (4;\ 1;\ 0)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-5;\ 9; -13)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(1; -1; 0), B(-2; -1; 4), C(8; -1; -1).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-1; -5; 2), B(-6; 0; -3) и C(3; 6; -3).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + z + 6 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 21

1.Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу X= $A^T \cdot A - 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (0;\ 5;\ 1)$, $\vec{g} = (3;\ 2;\ -1)$, $\vec{r} = (-1;\ 1;\ 0)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-15;\ 5;\ 6)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(7; 0; 2), B(7; 1; 3), C(8; -1; 2).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(0; -1; -1), B(-2; 3; 5) и C(1; -5; -3).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 22

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3B - A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 0;\ 1)$, $\vec{g} = (0;\ -2;\ 1)$, $\vec{r} = (1;3;\ 0)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (8;\ 9;\ 4)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(2; 3; 2)$, $B(-1; -3; -1)$, $C(-3; -7; -3)$.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ и $C(1; 2; 4)$.
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x + 5y - z + 11 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 23

1. Дана матрица $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $A = 3E - B^T \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 24 & 11 \\ -28 & -8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (2;\ 1;\ 0)$, $\vec{g} = (1;\ -1;\ 0)$, $\vec{r} = (-3;\ 2;\ 5)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (23; -14; -30)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(2; 2; 7), B(0; 0; 6), C(-2; 5; 7).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(2; -1; -2), B(1; 2; 1) и C(5; 0; -6).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x - 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 24

1. Даны матрицы $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $A = Y - 2X^T \cdot X$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 38 \\ 8 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

   а) матричным методом

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (2;\ 1;\ 0)$, $\vec{g} = (1;\ 0;\ 1)$, $\vec{r} = (4;\ 2;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (3;\ 1;\ 3)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-1; 2; -3), B(0; 1; -2), C(-3; 4; -5).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(-2; 0; -4), B(-1; 7; 1) и C(4; -8; -4).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0 \\ x + 7y - 4z - 5 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 25

1. Дана матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $Y = X - 3X \cdot X^T$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 15 & 7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (0;\ 3;\ 1)$, $\vec{g} = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{r} = (2; -1;\ 0)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-1;\ 7;\ 0)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(0; 3; -6)$, $B(9; 3; 6)$, $C(2; 3; 3)$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(14; 4; 5)$, $B(-5; -3; 2)$ и $C(-2; -6; -3)$.

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x + 5y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - 5y - z + 5 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 26

1. Дана матрица А= $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3A^T - A^2$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ -1;\ 2),\ \vec{g} = (3;\ 2;\ 0),\ \vec{r} = (-1;\ 1;\ -1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (11; -1;\ 4)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(3; 3; -1), B(5; 1; -2), C(4; 1; -3).
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 2; 0), B(3; 0; -3) и C(5; 2; 6).
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0 \\ x + 3y + 2z + 14 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 27

1. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X= $3E - A \cdot A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 1;\ 4)$, $\vec{g} = (-3;\ 0;\ 2)$, $\vec{r} = (1;\ 2; -1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (-13; 2; 18)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-2; 1; 1), B(2; 3; -2), C(0; 0; 3).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(2; -1; 2), B(1; 2; -1) и C(3; 2; 1).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 2x + 3y - 2z + 6 = 0 \\ x - 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 28

1. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу С= $A \cdot A^T + 2B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -2 \\ -2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 7x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (0;\ -2;\ 1)$, $\vec{g} = (3;\ 1;\ -1)$, $\vec{r} = (4;\ 0;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (0;\ -8;\ 9)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(1; 1; -1), B(-2; 4; -5), C(8; 4; 0).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 1; 2), B(-1; 1; 3) и C(2; -2; 4).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0 \\ 2x-4y-2z+4=0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 29

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=5B-A^T\cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 10 & 33 \\ 1 & -17 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-11 \\ 2x_1+x_2-2x_3=-2 \\ 3x_1+2x_2-x_3=3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p}=(0;\ 1;\ 5)$, $\vec{g}=(3;-1;\ 2)$, $\vec{r}=(-1;\ 0;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c}=(8;\ -7;\ -13)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 1)$, $C(1;\ 2;\ 0)$.
7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$ и $C(6;\ 3;\ 7)$.
8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 3x+3y+z-1=0 \\ 2x-3y-2z+6=0 \end{cases}$ в каноническом виде.

Вариант 30

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B=3E-A\cdot A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 19 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Даны три вектора $\vec{p} = (1;\ 0;\ 1)$, $\vec{g} = (1;\ -2;\ 0)$, $\vec{r} = (0;\ 3;\ 1)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (2;\ 7;\ 5)$ по базису $\vec{p},\ \vec{g},\ \vec{r}$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-4; 0; 4), B(-1; 6; 7), C(1; 10; 9).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1; 1; -1), B(2; 3; 1) и C(3; 2; 1).

8. Записать уравнение прямой $\begin{cases} 6x - 5y + 3z + 8 = 0 \\ 6x + 5y - 4z + 4 = 0 \end{cases}$ в каноническом виде.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Проверяемые компетенции: ОПК-1

Уметь:

- производить различные действия с матрицами; упрощать и находить определители;
- решать системы линейных алгебраических уравнений;
- применять векторы для решения практических задач;

Владеть:

- методами алгебры матриц;
- различными методами решения систем линейных алгебраических уравнений.
- методами векторного анализа;

Критерии оценивания:

- правильность выбора расчетных формул;
- верность выполнения расчетов;
- полнота и последовательность расчетов;

- соответствие требованиям оформления.

Правила оценивания:

правильность выбора расчетных формул – 20 баллов;
верность выполнения расчетов – 15 баллов;
полнота и последовательность расчетов – 10 баллов;
соответствие требованиям оформления – 5 баллов.

Критерии оценки:

45-50 баллов (90-100%) - оценка «отлично»
35-44 балла (70-89%) - оценка «хорошо»
25-34 балла (50-69%) - оценка «удовлетворительно»
0-24 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2 ПО ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Организация выполнения контрольной работы №2

Выполнение контрольной работы в виде решения ряда задач по интегральному исчислению функций одной переменной практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умений и навыков в соответствии с компетенциями образовательной программы.

Выполнение контрольной работы призвано стимулировать самостоятельную работу студентов по изучению основ математики; оно направлено на формирование знаний основных категорий интегрального исчисления функций одной переменной, развитие навыков логического мышления, обобщения и умения делать верные выводы.

Каждый студент получает от преподавателя дисциплины свой вариант контрольной работы. Каждый вариант контрольной работы включает 9 задач.

При этом предлагаются образцы задач с подробными объяснениями и решениями по всем изучаемым темам данного раздела, подобные представленным в контрольной работе.

Требования к оформлению контрольной работы

Контрольная работа должна быть выполнена в рукописном виде. Контрольная работа выполняется либо в ученической тетради, либо на листах формата А4 (сшитых) в той последовательности, которая определена вариантом. Вначале переписывается содержание каждой задачи, затем приводится ее подробное решение и дается ответ.

В случае выполнения контрольной работы на отдельных листах все страницы работы должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится. Титульный лист работы оформляется студентом по образцу, данному в приложении.

В конце работы должен быть представлен список использованной литературы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

В данном разделе приведены подробные решения задач, подобных указанным в вариантах.

Задача 1

Проинтегрировать по частям:

$$а)\ \int x\cos\frac{x}{3}\,dx; \qquad б)\ \int \frac{\ln 9x}{x^3}\,dx; \qquad в)\ \int x\,\mathrm{arctg}\, x\,dx.$$

Решение

$$а)\int x\cos\frac{x}{3}dx = \left[\begin{array}{l}\text{Выбираем}\quad u = x,\ \ d\nu = \cos\frac{x}{3}dx\\ \text{и находим}\qquad du = x'dx = dx,\\ \nu = \int\cos\frac{x}{3}dx = 3\int\cos\frac{x}{3}d\frac{x}{3} = 3\sin\frac{x}{3}\end{array}\right] =$$

$$= x\cdot 3\sin\frac{x}{3} - \int 3\sin\frac{x}{3}dx = 3x\sin\frac{x}{3} - 3\cdot 3\int\sin\frac{x}{3}d\frac{x}{3} = 3x\cdot\sin\frac{x}{3} + 9\cos\frac{x}{3} + C;$$

$$б)\int\frac{\ln 9x}{x^3}dx = \int\frac{1}{x^3}\cdot\ln 9xdx = \int x^{-3}\cdot\ln 9xdx =$$

$$= \left[\begin{array}{l}u = \ln 9x,\ \ d\nu = x^{-3}dx,\ \ \text{тогда}\\ du = (\ln 9x)'dx = \frac{9}{9x}dx = \frac{dx}{x},\ \nu = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2}\end{array}\right] = -\frac{\ln 9x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln 9x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = -\frac{\ln 9x}{2x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2} + C = -\frac{2\ln 9x + 1}{4x^2} + C;$$

$$в)\int x\operatorname{arctg} xdx = \int\operatorname{arctg} x\cdot xdx = \left[\begin{array}{l}u = \operatorname{arctg} x,\ \ d\nu = xdx,\ \ \text{тогда}\\ du = (\operatorname{arctg} x)'dx = \frac{dx}{1+x^2},\\ \nu = \int xdx = \frac{x^2}{2}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx == \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x\right) + C.$$

Задача 2

Проинтегрировать рациональные дроби:

$$а)\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx\,; \qquad б)\int \frac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}\,dx.$$

Решение

Рассмотрим подынтегральную функцию:

$f(x)=\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$ – неправильная рациональная дробь, преобразуем её

$$
\begin{array}{l|l}
-\;x^5+x^4-8 & x^3-4x \\
\quad\underline{x^5-4x^3} & \overline{x^2+x+4} \\
\qquad -\;x^4+4x^3-8 & \\
\qquad\quad \underline{x^4-4x^2} & \\
\qquad\qquad -\;4x^3+4x^2-8 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{4x^3-16x} & \\
\qquad\qquad\quad 4x^2+16x-8\,. &
\end{array}
$$

Таким образом, имеем

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$$

Следовательно

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\int x^2dx+\int xdx+\int 4dx+\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx.$$

Последний интеграл рассмотрим отдельно. Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ является правильной рациональной дробью.

Разложим знаменатель этой дроби на множители

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{4x^2+16x-8}{x(x^2-4)} = \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Определим коэффициенты *A, B* и *C*. Для этого приведём полученную сумму дробей к общему знаменателю

[illegible]

и приравняем числители

[illegible]

Определим коэффициенты *A, B* и *C* методом частных значений, для этого подставим конкретные значения *x* в обе части вышестоящего выражения; в качестве конкретных значений *x* рассмотрим те значения, при которых знаменатель рассматриваемой дроби обращается в нуль.

$$x=0 \quad -8=-4A \Rightarrow A=2,$$

$$x=2 \quad 40=8B \Rightarrow B=5,$$

$$x=-2 \quad -24=8C \Rightarrow C=-3$$

Итак, имеем: $$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}$$

Интегрируем данную функцию:

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x\cdot(x-2)(x+2)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}\right)dx =$$

$$= 2\int\frac{dx}{x} + 5\int\frac{dx}{x-2} - 3\int\frac{dx}{x+2} = 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C.$$

Возвращаемся к исходному интегралу

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C.$$

б) Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x) = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1)}$ – правильную рациональную дробь.

Разложим знаменатель на множители

$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1) = (x-1)^2 (x-1)(x+1) = (x-1)^3 (x+1).$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{(x-1)^3 (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1}.$$

Определим коэффициенты *A*, *B*, *C* и *D*, для этого приведем сумму простейших дробей к общему знаменателю

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{(x-1)^3 \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 \cdot (x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1) + D(x-1)^3}{(x-1)^3 \cdot (x+1)}$$

и приравняем числители

$$2x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = A(x-1)^2(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1) + D(x-1)^3.$$

Определим коэффициенты *A*, *B*, *C* и *D* методом частных значений, подставив эти значения в обе части, в качестве конкретных значений *x* выбираем $x = 1$; $x = -1$ (это те значения *x* при которых знаменатель рассматриваемой дроби равен 0) и два значения $x = 0$ и $x = 2$ выбираем произвольно.

$$x = 1: \quad 6 = 2C \Rightarrow C = 3;$$
$$x = -1: \quad -8 = -8D \Rightarrow D = 1;$$
$$x = 0: \quad 1 = A - B + C - D;$$
$$x = 2: \quad 19 = 3A + 3B + 3C + D$$

подставив значения $C = 3$ и $D = 1$ в последние два уравнения получаем

$$\begin{cases} A-B=-1 \\ 3A+3B=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=2 \end{matrix}$$

Итак, имеем

$$\frac{2x^3-2x^2-5x+1}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{x+1}.$$

Интегрируем данную функцию:

$$\int\frac{2x^3-2x^2-5x+1}{(x-1)^3(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+\ln|x+1|+C.$$

Задача 3

Найти интегралы от тригонометрических функций:

$$\text{а)}\int\sin^2\frac{x}{3}dx;\quad \textit{б)}\int\cos^5 3x\,dx;\quad \textit{в)}\int\sin 5x\cdot\cos 2x\,dx\cdot$$

Решение

$$\text{а)}\int\sin^2\frac{x}{3}dx=\int\frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos\frac{2x}{3}dx=$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3}+C=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3}+C;$$

$$\textit{б)}\int\cos^5 3x\,dx=\int\cos^4 3x\cdot\cos 3x\,dx=\int(\cos^2 3x)^2\cdot\cos 3x\,dx=$$

$$=\int(1-\sin^2 3x)^2\cdot\cos 3x\,dx=\left|\begin{matrix}\sin 3x=t\\ 3\cos 3x\,dx=dt\\ \cos 3x\,dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int (1-t^2)^2\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int (1-2t^2+t^4)dt=\frac{1}{3}\left(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{2}{9}\sin^3 3x+\frac{1}{15}\sin^5 3x+C;$$

в) $\int \sin 5x\cdot\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int (\sin 7x+\sin 3x)dx=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{7}\cos 7x)+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3}\cos 3x)+C$

$$=-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

Задача 4

Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^4 \sqrt{x}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\cos 3x dx$; в) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.

Решение

а) $\int_0^4 \sqrt{x}dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^4=\left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^4=\frac{2\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2\cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{2\cdot 8}{3}=\frac{16}{3}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\cos 3x dx=7\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x d3x=\left.\frac{7\cdot\sin 3x}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{7}{3}\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin 0\right)=-\frac{7}{3}$;

в) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e \ln x\frac{dx}{x}=\int_1^e \ln x d\ln x=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e=\frac{\ln^2 e}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{0}{2}=\frac{1}{2}.$

Задача 5

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13}$; б) $\int_{-2}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}$.

Решение

а) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x^2-4x+13}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{(x-2)^2+9}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+9}=$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\left.\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}\right|_2^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-2}{3}-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6},$$

т.е. интеграл сходится;

$$б)\ \int_{-2}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}=\lim_{\xi\to0}\int_{-2+\xi}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}=\lim_{\xi\to0}\int_{-2+\xi}^{0}\frac{\frac{1}{3}d(x^3+8)}{x^3+8}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to0}\ln\left|x^3+8\right|\Big|_{-2+\xi}^{0}=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to0}\left(\ln8-\ln\left|(-2+\xi)^3+8\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to0}\left(\ln8-\ln\left(-8+12\xi-6\xi^2+\xi^3+8\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to0}\left(\ln8-\ln\left(12\xi-6\xi^2+\xi^3\right)\right)=\infty,$$

т.е. интеграл расходится.

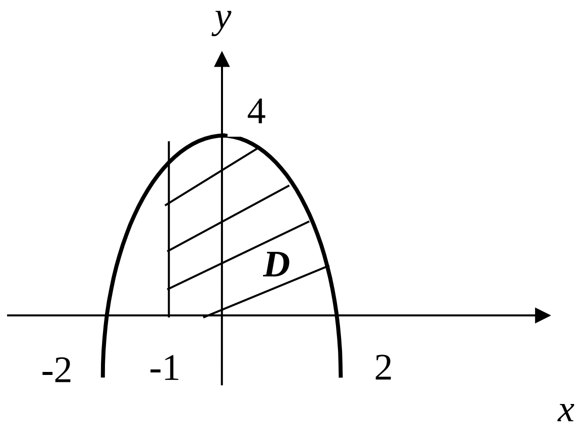
Задача 6

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

$$y=4-x^2;\quad x=-1;\quad y=0;$$

Решение

Построим фигуру. Верхняя граница: $y=4-x^2$, нижняя граница: $y=0$, левая граница $x=-1$, правая граница $x=2$.



Найдем площадь полученной фигуры:

$$S=\int_{-1}^{2}(4-x^2-0)\,dx=4x\Big|_{-1}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=4(2+1)-\frac{1}{3}(8+1)=12-3=9\ ед^2.$$

Задача 7

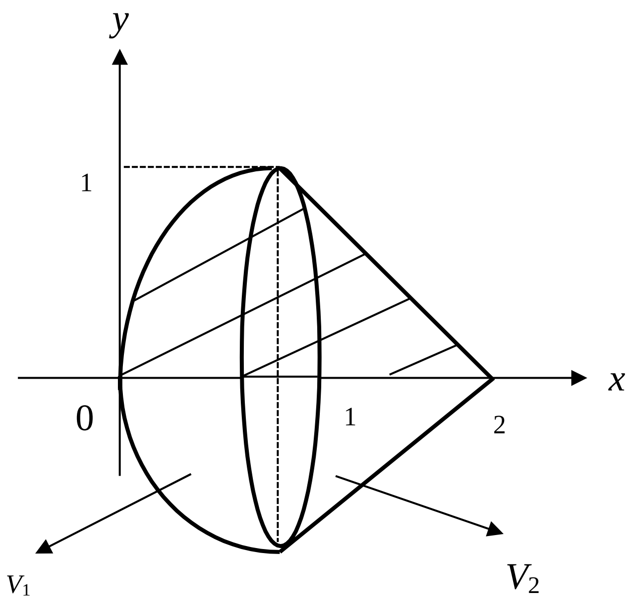
Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$y=\sqrt{x}\ ,\quad y=2-x,\quad y=0$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение

а)



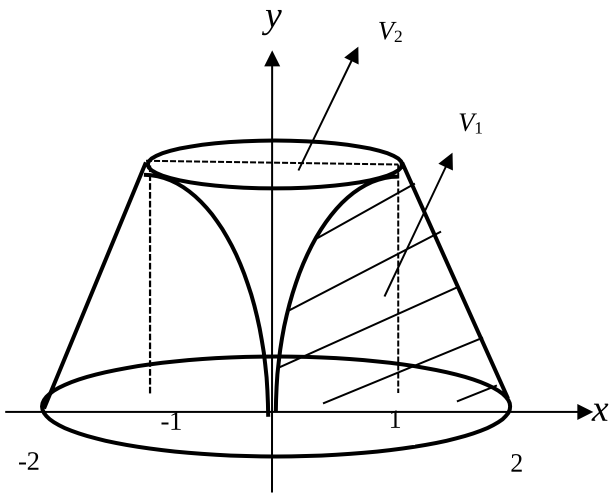
$$V_{0x}=V_1+V_2$$

$$V_1=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}\ \text{ед}^3$$

$$V_2=\pi\int_1^2\left(2-x\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(x-2\right)^2d\left(x-2\right)=\pi\left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_1^2=\frac{\pi}{3}\left(0-(-1)^3\right)=\frac{\pi}{3}\ \text{ед}^3$$

$$V_{0x}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}\ \text{ед}^3.$$

б)



$$V_{0y} = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi\int_0^1 \left(2-y\right)^2 dy = \pi\int_0^1 \left(y-2\right)^2 d\left(y-2\right) = \pi\left.\frac{(y-2)^3}{3}\right|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{3}\left((-1)^3-(-2)^3\right) = \frac{\pi}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\pi \text{ ед}^3$$

$$V_2 = \pi\int_0^1 y^4 dy = \pi\left.\frac{y^5}{5}\right|_0^1 = \frac{\pi}{5} \text{ ед}^3$$

$$V_{0y} = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{32\pi}{15} \text{ ед}^3.$$

Задача 8

Найти длины дуг плоских кривых:

$$a)\; y = \frac{1}{3}\left(3-x\right)\cdot\sqrt{x},\quad 0 \le x \le 3; \qquad б)\begin{cases} x = e^{3t}\cos 4t \\ y = e^{3t}\sin 3t \end{cases},\; 0 \le t \le \ln 2.$$

Решение

а) Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{3}(3-x)'\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{3}(3-x)\cdot(\sqrt{x})' =$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\frac{2}{3}x + 1 - \frac{1}{3}x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}},$$

тогда длина дуги равна:

$$l=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+\frac{1-2x+x^2}{4x}}\,dx=\int_0^3\sqrt{\frac{4x+1-2x+x^2}{4x}}\,dx=$$

$$=\int_0^3\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}\,dx=\int_0^3\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^3 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^3=\frac{1}{3}\sqrt{27}-0+\sqrt{3}-0=2\sqrt{3}.$$

б) Найдем производные x'_t и y'_t:

$$x'_t=\left(e^{3t}\cdot\cos 4t\right)'=\left(e^{3t}\right)'\cos 4t+e^{3t}\cdot(\cos 4t)'=3e^{3t}\cos 4t-4e^{3t}\sin 4t;$$

$$y'_t=\left(e^{3t}\cdot\sin 4t\right)'=\left(e^{3t}\right)'\sin 4t+e^{3t}\cdot(\sin 4t)'=3e^{3t}\sin 4t+4e^{3t}\cos 4t.$$

Тогда

$$\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2=\left(3e^{3t}\cdot\cos 4t-4e^{3t}\cdot\sin 4t\right)^2+\left(3e^{3t}\cdot\sin 4t+4e^{3t}\cdot\cos 4t\right)^2=$$

$$=9e^{6t}\cos^2 4t-24e^{6t}\cos 4t\cdot\sin 4t+16e^{6t}\sin^2 4t+9e^{6t}\sin^2 4t+$$

$$+\quad 24e^{6t}\cdot\sin 4t\cos 4t+16e^{6t}\cos^2 4t=25e^{6t}\cos^2 4t+25e^{6t}\sin^2 4t=$$

$$=25e^{6t}\left(\cos^2 4t+\sin^2 4t\right)=25e^{6t},$$

откуда

$$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt=\int_0^{\ln 2}\sqrt{25e^{6t}}\,dt=\int_0^{\ln 2}5e^{3t}\,dt=\frac{5}{3}e^{3t}\Big|_0^{\ln 2}=$$

$$=\frac{5}{3}e^{3\ln 2}-\frac{5}{3}e^0=\frac{5}{3}e^{3\ln 2}-\frac{5}{3}e^0=\frac{5}{3}e^{\ln 8}-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\cdot 8-\frac{5}{3}=\frac{40-5}{3}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}.$$

Комплект вариантов контрольной работы №2

Вариант № 1

1. Найти неопределенные интегралы

   а) $\int\frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int(2x+3)\sin\frac{x}{3}dx$ в) $\int\frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}\, dx}{x}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2x;\ y = 6 - x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad y = \pm 2$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{2}{3}(x+4)^{3/2} \quad ; \ -1 \le x \le 4$$

Вариант № 2

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int (2x+1)\sin 3x\, dx$ в) $\int \frac{2x^2+3x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln x}\, dx}{x}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2;\ y = -x - 2$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad x = 8$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{4}{3}(x-1)^{3/2} \quad ; \ 1 \le x \le 3$$

Вариант № 3

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9+x^2}}$ б) $\int (2x+3)\cos 2x\,dx$ в) $\int \frac{4x^2-4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+\mathrm{x}}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x;\ y = x + 10$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1;\quad y=2$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = 4 - 3\ln(x^2-9)\ ;\quad 4 \le x \le 6$$

Вариант № 4

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$ б) $\int (2x-1)\cos 3x\,dx$ в) $\int \frac{2x^2-6x-2}{x^3+x^2-2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_5^{10} \frac{xdx}{\sqrt{\mathrm{x}-1}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 9 - x^2;\ y = 3x - 1$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;\quad x=1$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = 3 + \ln(x^2 - 1)\ ;\ \ 2 \le x \le 3$$

Вариант № 5

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16 + x^3}}$ б) $\displaystyle\int (2x+1)\cos\frac{x}{3}dx$ в) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - 4x^2 + 3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^7 \frac{xdx}{\sqrt{\mathrm{x} + 2}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2x;\ y = 12 - 3x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y^2 = 2x; \quad x = 2$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = 5 - 3\ln(x^2 - 9)\ ;\ \ 4 \le x \le 5$$

Вариант № 6

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9 - x^3}}$ б) $\displaystyle\int (3x+2)\cos\frac{x}{2}dx$ в) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 6x - 6}{x^3 - x^2 - 6x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_3^6 \frac{xdx}{\sqrt{\mathrm{x} - 2}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x;\ y = 2x + 3$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y^2 = -3x; \quad x = -3$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = 3 + 2\ln(x^2 - 4)\ ; \ \ 3 \le x \le 5$$

Вариант № 7

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin^5 x}}$ б) $\int arctg\frac{x}{2}dx$ в) $\int \frac{4x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^7 \frac{xdx}{1 + \sqrt{x + 2}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4x;\ y = 4 - x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = x^2 + 1; \quad y = 2$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} ; \ \ \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$$

Вариант № 8

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin^3 x}}$ б) $\int arctg2xdx$ в) $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1 + \sqrt{x}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2;\ y = 2x + 1$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = x^2 - 8; \quad y = -4$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Вариант № 9

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{sin^5 x}}$ б) $\int arcctg \frac{x}{2} dx$ в) $\int \frac{2x^2 - 9x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^5 \frac{xdx}{1 + \sqrt{6 - \mathrm{x}}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 1 - x^2; \ y = -3x - 3$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = \sin x, \ y = 2 - \frac{2}{\pi} x, \ y = 0$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}; \quad \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

Вариант № 10

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin^3 x}}$ б) $\int arctg 2x dx$ в) $\int \frac{2x - 2}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^3 \frac{xdx}{1 + \sqrt{\mathrm{x} + 1}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2x;\ y = 4 - 5x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = \cos x,\ y = 1,\ x = -\frac{\pi}{2}$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases};\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Вариант № 11

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{xdx}{x^4+9}$ б) $\int arcsin2xdx$ в) $\int \frac{6x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^3 \frac{dx}{\cancel{x^2-4x+5}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 9 - x^2;\ y = 3x + 5$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1;\quad y = \pm 3$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases};\quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$$

Вариант № 12

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$ б) $\int x \ln 3x\, dx$ в) $\int \frac{2x^2+9x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x-2)^2}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 6x;\ y = x - 4$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad x = 6$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3(cost + tsint) \\ y = 3(sint - tcost) \end{cases}; \quad \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$$

Вариант № 13

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{1 + tgx}}{\cos^2 x} dx$ б) $\int (3x + 1)e^{-x} dx$ в) $\int \frac{2 - 3x}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4x;\ y = 10 - x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y^2 = 5x,\ x = 5$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad ; \quad -1 \le x \le 1$$

Вариант № 14

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{1 - ctgx}}{sin^2 x} dx$ б) $\int (2x - 3)e^{2x} dx$ в) $\int \frac{4x^2 - 6}{x^3 - x^2 - 6x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 9 - x^2;\ y = -1 - 3x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y^2 = -4x,\ x = -4$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad ;\ -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$$

Вариант № 15

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x} dx$ б) $\int (3 - 2x + 1) e^{3x} dx$ в) $\int \frac{8x - 6}{x^3 + x^2 - 6x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\, dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 2x;\ y = x + 6$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad y = 1$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad ;\ -2 \le x \le 2$$

Вариант № 16

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{5-\ln x}}{x}dx$ б) $\int (5-3x)e^{-2x}dx$ в) $\int \frac{4x^2-7x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\, dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(3+x^2)^3}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2;\ y = x - 2$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad x = 3$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad ; \ -\frac{5}{2} \le x \le \frac{5}{2}$$

Вариант № 17

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$ б) $\int (3x+1)e^{-x}dx$ в) $\int \frac{2-3x}{x^3-3x^2+2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4x;\ y = 10 - x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = x^2 + 4; \quad y = 8$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad ; \quad -1 \le x \le 1$$

Вариант № 18

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{1 - ctgx}}{sin^2 x} dx$ б) $\int (2x - 3)e^{2x} dx$ в) $\int \frac{4x^2 - 6}{x^3 - x^2 - 6x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{x}\, dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x + 4}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 9 - x^2; \; y = -1 - 3x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = x^2 - 2; \quad y = -1$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad ; \; -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$$

Вариант № 19

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x} dx$ б) $\int (3 - 2x + 1)e^{3x} dx$ в) $\int \frac{8x - 6}{x^3 + x^2 - 6x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \mathrm{x}\, dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 2x; \; y = x + 6$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = \sin x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad ; \quad -2 \le x \le 2$$

Вариант № 20

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt{5 - \ln x}}{x} dx$ б) $\int (5 - 3x) e^{-2x} dx$ в) $\int \frac{4x^2 - 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x \, dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(3 + x^2)^3}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2;\ y = x - 2$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = \cos x,\ y = 1,\ x = \frac{\pi}{2}$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad ; \quad -\frac{5}{2} \le x \le \frac{5}{2}$$

Вариант № 21

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1 + x^2} dx$ б) $\int (2x + 1) \sin 3x \, dx$ в) $\int \frac{8x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{x}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x;\ y = 5x + 12$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1; \quad y = \pm 1$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \quad ; \ -1 \le x \le 2$$

Вариант № 22

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sqrt[3]{arcctgx}}{1+x^2}dx$ б) $\int (3x-2)\sin\frac{x}{2}dx$ в) $\int \frac{4x^2-7x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{(3+\ln x)\,dx}{x}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 1;\ y = x + 11$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$x^2 - \frac{y^2}{9} = 1; \quad x = 2$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} \quad ; \ -2 \le x \le 1$$

Вариант № 23

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int (2x+3)\sin\frac{x}{3}dx$ в) $\int \frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2x;\ y = 6 - x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$x^2 - \frac{y^2}{9} = 1; \quad x = 2$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{2}{3}(x+4)^{3/2} \quad ;\ -1 \le x \le 4$$

Вариант № 24

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int (2x+1)\sin 3x\,dx$ в) $\int \frac{2x^2+3x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln x}\,dx}{x}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2;\ y = -x - 2$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1; \quad x = 2$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{4}{3}(x-1)^{3/2} \quad ;\ 1 \le x \le 3$$

Вариант № 25

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9+x^2}}$ б) $\int (2x+3)\cos 2x\,dx$ в) $\int \frac{4x^2-4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+\mathrm{x}}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2+4x;\ y = x+10$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y^2 = 7x; \quad x = 7$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = 4 - 3\ln(x^2-9)\ ; \ \ 4 \le x \le 6$$

Вариант № 26

1. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$ б) $\int (2x-1)\cos 3x\,dx$ в) $\int \frac{2x^2-6x-2}{x^3+x^2-2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_5^{10} \frac{xdx}{\sqrt{\mathrm{x}-1}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 9 - x^2;\ y = 3x-1$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y^2 = 6x; \quad x = -6$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = 3 + \ln(x^2-1)\ ; \ \ 2 \le x \le 3$$

Вариант № 27

1. Найти неопределенные интегралы

   а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16+x^3}}$ б) $\int (2x+1)\cos\frac{x}{3}dx$ в) $\int \frac{2x^2-3x-3}{x^3-4x^2+3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^7 \frac{xdx}{\sqrt{\mathrm{x}+2}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2x;\ y = 12 - 3x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = x^2 + 9; \quad y = 18$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = 5 - 3\ln(x^2 - 9)\ ;\ \ 4 \le x \le 5$$

Вариант № 28

1. Найти неопределенные интегралы

   а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^3}}$ б) $\int (3x+2)\cos\frac{x}{2}dx$ в) $\int \frac{2x^2+6x-6}{x^3-x^2-6x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_3^6 \frac{xdx}{\sqrt{\mathrm{x}-2}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x;\ y = 2x + 3$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = x^2 - 18; \quad y = -9$$

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$y = 3 + 2\ln(x^2 - 4)\ ;\ \ 3 \le x \le 5$$

Вариант № 29

1. Найти неопределенные интегралы

   а) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin^5 x}}$ б) $\int arctg\frac{x}{2}dx$ в) $\int \frac{4x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^7 \frac{xdx}{1+\sqrt{x+2}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4x;\ y = 4 - x$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = \sin x,\ y = 1,\ y = 0,\ x = 2$$

   а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases};\quad \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$$

Вариант № 30

1. Найти неопределенные интегралы

   а) $\int \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int (2x+1)\sin 3x\,dx$ в) $\int \frac{2x^2+3x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_5^{10} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$$

3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{-2}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x;\ y = 2x + 3$$

5. Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями:

$$y = \cos x,\ y = 1,\ y = 0, x = 2$$

   а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

6. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; \quad \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$$

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Проверяемые компетенции: ОПК-1

Уметь:

- находить неопределенные, определенные и несобственные интегралы от различных функций;
- вычислять геометрические и технические величины с помощью интегралов.

Владеть:

- навыками нахождения интегралов от функций одной переменной;
- навыками использования интегрального исчисления функций одной переменной для решения практических задач.

Критерии оценивания:

- правильность выбора расчетных формул;
- верность выполнения расчетов;
- полнота и последовательность расчетов;
- соответствие требованиям оформления.

Правила оценивания:

правильность выбора расчетных формул – 20 баллов;
верность выполнения расчетов – 15 баллов;
полнота и последовательность расчетов – 10 баллов;
соответствие требованиям оформления – 5 баллов.

Критерии оценки:

45-50 баллов (90-100%) - оценка «отлично»
35-44 балла (70-89%) - оценка «хорошо»
25-34 балла (50-69%) - оценка «удовлетворительно»
0-24 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3 ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Организация выполнения контрольной работы №3

Выполнение контрольной работы в виде решения ряда задач по теории вероятностей и элементам математической статистики практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умений и навыков в соответствии с компетенциями образовательной программы.

Выполнение контрольной работы призвано стимулировать самостоятельную работу студентов по изучению основ математики; оно направлено на формирование знаний основных категорий теории вероятностей и элементов математической статистики, развитие навыков логического мышления, обобщения и умения делать верные выводы.

Каждый студент получает от преподавателя дисциплины свой вариант контрольной работы. Каждый вариант контрольной работы включает 12 задач.

При этом предлагаются образцы задач с подробными объяснениями и решениями по всем изучаемым темам данного раздела, подобные представленным в контрольной работе.

Требования к оформлению контрольной работы

Контрольная работа должна быть выполнена в рукописном виде. Контрольная работа выполняется либо в ученической тетради, либо на листах формата А4 (сшитых) в той последовательности, которая определена вариантом. Вначале переписывается содержание каждой задачи, затем приводится ее подробное решение и дается ответ.

В случае выполнения контрольной работы на отдельных листах все страницы работы должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится. Титульный лист работы оформляется студентом по образцу, данному в приложении.

В конце работы должен быть представлен список использованной литературы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

В данном разделе приведены подробные решения задач, подобных указанным в вариантах.

Задача 1

При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке 0,2. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов ровно 84 будут бракованными?

Решение

Так как n = 400 представляет собой достаточно большое число и p = 0,2, то можно считать, согласно локальной теореме Лапласа, что случайная величина $X = k$ распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно k раз, приближённо равна

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

По условиям задачи k = 84; q = 0,8, p = 0,2, n = 400, тогда

$$P\,(X = 84) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\varphi\left(\frac{84 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\varphi\,(0{,}5) = \frac{1}{8}0{,}3521 \approx 0{,}044.$$

Таблица функции $\varphi\,(x)$ для положительных значений x приводится в приложениях к учебникам (см., например, В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике). Для отрицательных значений x пользуются той же таблицей, так как функция $\varphi\,(x)$ – чётная.

Задача 2

Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}4; \;\; p_2 = 0{,}5; \;\; p_3 = 0{,}7.$$

Найти вероятности того, что в результате этих трёх выстрелов по мишени будет:

а) ровно одно попадание;

б) хотя бы одно попадание;

в) ровно два попадания.

Решение

а) Пусть событие A – одно попадание в мишень. Обозначим $A_1 - A_3$ – события, означающие попадания в мишень соответственно при первом, втором и третьем выстрелах. Событие A выражается так

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

где $\overline{A}_1 - \overline{A}_3$ – события, противоположные соответственно событиям $A_1 - A_3$.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, получим

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

б) Пусть событие B – хотя бы одно попадание в мишень, тогда

$$B = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Но легче подсчитать вероятность противоположного события $\overline{B}$ – ни одного попадания при трёх выстрелах:

$$\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

Тогда $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$

в) Пусть событие C равно двум попаданиям, тогда

$$C = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3,$$

$$P(C) = 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}41.$$

Задача 3

По каналу связи передаётся один из двух возможных сигналов x_1 или x_2. Сигнал x_2 передаётся в среднем в два раза чаще, чем сигнал x_1. Из-за наличия помех возможны искажения: вместо сигнала x_1 на приёме может быть получен сигнал x_2 и наоборот. Свойства канала связи таковы, что сигнал x_1 подвергается искажениям в 10 %, а сигнал x_2

– в 20 % случаев. Предположим, что получен сигнал x_1. Какова вероятность, что передан этот же сигнал?

Решение

Введём обозначения:

событие A – передан сигнал x_1;

событие B – получен сигнал x_1.

Тогда событие $\overline{A}$ – передан сигнал x_2. Событие B может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) A и $\overline{A}$.

По условиям задачи:

$$P(A) = \frac{1}{3}; \quad P(\overline{A}) = \frac{2}{3}.$$

Вероятность того, что получен сигнал x_1, при условии, если передали этот же сигнал:

$$P(B/A) = 0{,}9.$$

Вероятность того, что получен сигнал x_1, если передали сигнал x_2:

$$P(B/\overline{A}) = 0{,}2.$$

Искомую вероятность $P(A/B)$ находим по формуле Бейеса:

$$P(A/B) = \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(A)\cdot P(B/A) + P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}2} \approx 0{,}692.$$

Задача 4

"n" стрелков независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для каждого стрелка равна $p = 0{,}004$. Определить количество стрелков, которое потребуется для поражения цели с вероятностью не меньшей, чем $P = 0{,}98$.

Решение

Пусть событие A – поражение цели стрелками, тогда $\overline{A}$ – промахи всех стрелков. Так как выстрелы производятся независимо друг от друга, то по теореме умножения вероятностей

$$P(\overline{A}) = (1-p)^n,$$

а вероятность наступления события A

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1-(1-p)^n.$$

По условию задачи необходимо, чтобы

$$1-(1-p)^n \geq P$$

или

$$1-P \geq (1-p)^n.$$

Отсюда $$\lg(1-P) \geq n\cdot\lg(1-p)$$

и с учетом того, что

$$\lg(1-p) < 0:$$

$$n \geq \frac{\lg(1-P)}{\lg(1-p)}.$$

При $p = 0{,}004$ и $P = 0{,}98$ получим:

$$n \geq \frac{\lg 0{,}02}{\lg 0{,}996} \approx 976.$$

Ответ:

Для поражения цели требуется не менее 976 стрелков.

Задача 5

Из партии, состоящей из 50 изделий, среди которых имеется 5 бракованных, выбраны случайным образом четыре изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке, и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

Решение

Возможными значениями случайной величины X будут

$x_1 = 0$ (в выборке нет бракованных изделий);

$x_2 = 1$ (в выборке одно бракованное изделие);

$x_3 = 2;\ x_4 = 3;\ x_5 = 4$ (все четыре выбранных изделия бракованные).

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет эти значения.

а) $x_1 = 0$.

Согласно классическому определению вероятности, вероятностью события A называется отношение числа благоприятных случаев m к общему числу случаев n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Общее число состоит из возможных комбинаций, которые можно образовать из 50 изделий по четыре, т. е.

$$n = C_{50}^4,$$

где число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Из этого числа случаев благоприятными являются только те выборки, которые не содержат бракованных изделий. Так как имеется 45 не бракованных изделий, то число благоприятных случаев – это число способов, которыми можно выбрать 4 изделия из 45, т. е.

$$m = C_{45}^4,$$

тогда для $x_1 = 0$

$$p_1 = \frac{C_{45}^4}{C_{50}^4} = \frac{\frac{45!}{4!\cdot 41!}}{\frac{50!}{4!\cdot 46!}} = \frac{42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{47\cdot 48\cdot 49\cdot 50} = 0{,}64696.$$

б) $x_2 = 1$.

Общее число случаев $n = C_{50}^4$.

Благоприятными случаями являются те выборки, которые содержат одно бракованное изделие и три не бракованных.

Число способов, которыми можно выбрать одного бракованное изделие из пяти, равно числу сочетаний из 5 по 1, т. е. C_5^1.

Кроме того, число способов, которыми можно выбрать остальные три не бракованных изделия из 45, равно C_{45}^3. А так как каждое выбранное бракованное изделие может оказаться в одной выборке с каждой из троек не бракованных изделий, то число всех выборок по 4 изделия, в которых одно бракованное, а три не бракованных, равно: $C_5^1 \cdot C_{45}^3$,

тогда

$$p_2 = \frac{C_5^1 \cdot C_{45}^3}{C_{50}^4} = 0{,}30807.$$

в) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное 2, равна ($x_3 = 2$)

$$p_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_{45}^2}{C_{50}^4} = 0,043.$$

г) $x_4 = 3$; $$p_4 = \frac{C_5^3 \cdot C_{45}^1}{C_{50}^4} = 0,00195.$$

д) $x_5 = 4$; $$p_5 = \frac{C_5^4 \cdot C_{45}^0}{C_{50}^4} = 0,00002.$$

Получим следующий ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	0,64696	0,30807	0,043	0,00195	0,00002

Определяем математическое ожидание (округлим до 0,001).

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 0 \cdot 0,647 + 1 \cdot 0,308 + 2 \cdot 0,043 + 3 \cdot 0,002 + 4 \cdot 0 = 0,398 \approx 0,4.$$

Дисперсию вычислим по формуле

$$D(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - \left(M(X)\right)^2.$$

Для нахождения дисперсии составим ряд распределения для величины x^2 (вероятности округлены до 0,001):

X^2	0	1	4	9	16
P	0,647	0,308	0,043	0,002	0

тогда

$$D(X) = 0 \cdot 0,647 + 1 \cdot 0,308 + 4 \cdot 0,043 + 9 \cdot 0,002 + 16 \cdot 0 - (0,4)^2 \approx 0,338 \approx 0,34.$$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma(x)$ рассчитывается по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,34} \approx 0,58.$$

Найдём функцию распределения $F(x)$. Согласно определению, функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем заданное x:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

1. Пусть $x \le 0$; так как число изделий отрицательным быть не может, то для любого $x \le 0$ (включая 0) $F(x) = 0$.
2. Пусть $0 < x \le 1$ (например, $x = 1/2$):

$$F(x) = P\{X = 0\} = 0,64696.$$

3. Пусть $1 < x \le 2$ (например, 1,75):

$$F(x) = P\{X < 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0,64696 + 0,30807 = 0,95503.$$

Очевидно, что и $F(2) = 0,95503$.

4. Пусть $2 < x \le 3$, тогда

$$F(x) = P\{X < 3\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} + P\{x = 2\}$$
$$0,95503 + 0,043 = 0,99803.$$

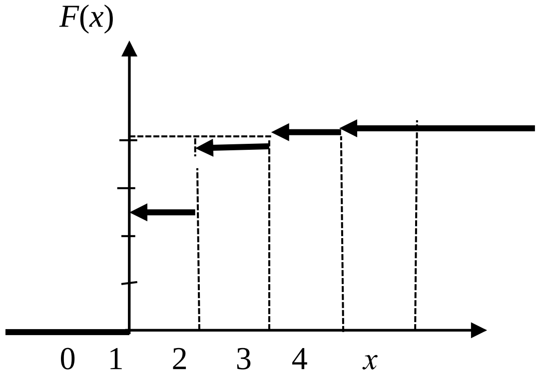
5. Пусть $3 < x \le 4$: $F(x) = P\{X < 4\} = 0,99803 + 0,00195 = 0,999.$

Тогда и $F(4) = 0,99998$.

6. Пусть $x > 4: F(x) = 0,99998 + 0,00002 = 1.$

Итого: $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,64696, & 0 < x \le 1, \\ 0,95503, & 1 < x \le 2, \\ 0,99803, & 2 < x \le 3, \\ 0,99998, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

Изобразим графические функции $F(x)$:



Задача 6

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$. Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{12}\right)$, если

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad \mathrm{x} < 0 \\ \sin 4x, & \text{при} \quad 0 \le \mathrm{x} \le \frac{\pi}{8} \\ 1, & \text{при} \quad \mathrm{x} > \frac{\boldsymbol{\pi}}{8} \end{cases}.$$

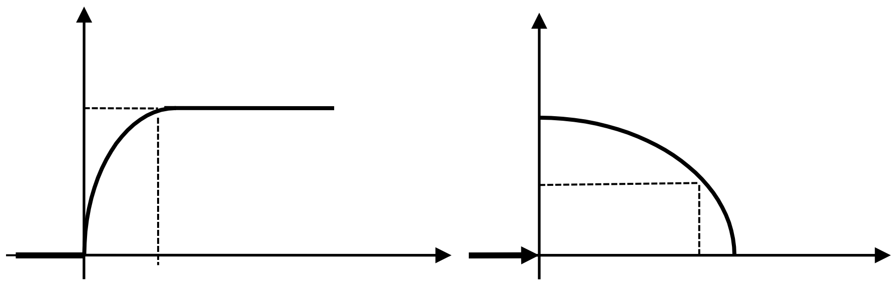
Решение

Для нахождения плотности вероятности $f(x)$ воспользуемся формулой $f(x) = F'(x)$. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad \mathrm{x} < 0 \\ 4\cos 4x, & \text{при} \quad 0 < \mathrm{x} \le \frac{\pi}{8} \\ 0, & \text{при} \quad \mathrm{x} > \frac{\pi}{8} \end{cases}.$$

Графики $F(x)$ и $f(x)$ таковы:

$F(x)$ $f(x)$



x

0 $\qquad \dfrac{\pi}{8}$

0 $\qquad \dfrac{\pi}{12} \quad \dfrac{\pi}{8}$

Для нахождения математического ожидания используем формулу

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx,$$

где a и b – границы интервала, которому принадлежат все возможные значения X.

Подставив $a = 0$; $b = \dfrac{\pi}{8}$; $f(x) = 4\cos 4x$, получим

$$M(X) = \int_0^{\pi/8} x \cdot 4\cos 4x dx = 4\int_0^{\pi/8} x \cdot \cos 4x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x; & dv = \cos 4x dx \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{4}\sin 4x \end{vmatrix} =$$

$$= 4x\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\pi/8} - 4\int_0^{\pi/8}\frac{1}{4}\sin 4x =$$

$$= x\sin 4x\Big|_0^{\pi/8} - 4\int_0^{\pi/8}\sin 4x dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{4\pi}{8} + \frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\pi/8} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X),$$

тогда
$$D(X) = 4\int_a^b x^2 \cos 4x dx - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^2, & \cos 4xdx = dv \\ du = 2xdx, & v = \frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix} \right| =$$

$$4\frac{1}{4}\sin 4x \cdot x^2 \Big|_0^{\pi/8} - 4\frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} 2x \sin 4x - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$x^2 \sin 4x \Big|_0^{\pi/8} - 2\int_0^{\pi/8} x \sin 4xdx - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = u, & \sin 4xdx = dv \\ dx = du, & v = -\frac{1}{4}\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$\frac{\pi^2}{64} - 2(-\frac{1}{4}x\cos 4x \Big|_0^{\pi/8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} \cos 4xdx) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{64} - 2\frac{1}{16}\sin 4x \Big|_0^{\pi/8} - -\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{8} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi - 3}{16}.$$

Вероятность того, что заданная величина X примет значения, заключённые в интервале $\left(\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{12}\right)$, находится по формуле

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

тогда
$$P\left(\frac{\pi}{16} < X < \frac{\pi}{12}\right) = \sin 4x \Big|_{\pi/16}^{\pi/12} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \approx 0{,}159.$$

Задача 7

Найти вероятность того, что в четырёх независимых испытаниях событие A повторится:

а) ровно два раза;

б) не менее двух раз;

в) не более двух раз;

г) хотя бы один раз,

если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,4.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой Бернулли: вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$; тогда вероятность того, что в четырёх испытаниях событие A наступит:

а) ровно два раза, равна

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}3456;$$

б) не менее двух раз:

$$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 0{,}3456 + 0{,}1536 + 0{,}0256 = 0{,}5248;$$

в) не более двух раз:

$$P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = 1 - P_4(3) - P_4(4) =$$
$$= 1 - 0{,}1536 - 0{,}0256 = 0{,}8208;$$

г) хотя бы один раз:

$$P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) =$$
$$= 1 - C_4^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^4 = 1 - 0{,}1296 = 0{,}8704.$$

Задача 8

Известны математическое ожидание $a = 7$ и среднее квадратичное отклонение σ нормально распределённой величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (4, 13).

Решение

Вероятность того, что нормально распределённая величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Подставив $\alpha = 4$, $\beta = 13$, $a = 7$ и $\sigma = 3$, получим

$$P(4 < X < 13) = \Phi\left(\frac{13-7}{3}\right) - \Phi\left(\frac{4-7}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1).$$

По таблиц значений функций Лапласа (смотреть, например Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, прил. 2) находим:

$$\Phi(2) = 0{,}4772; \quad \Phi(1) = 0{,}3413,$$

тогда

$$P(4 < X < 13) = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185.$$

Задача 9

В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на четвёртом этаже;

B – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение

Общее число случаев $n = 6^3 = 216$, $P(A) = \dfrac{1}{216}$. Вероятность события B вшестеро больше вероятности события A (так как этажей, на которых можно выйти, 6);

$m=6$ и $P(B)=\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$. Для события C число способов, которыми можно распределить трёх пассажиров по шести этажам: $m=C_6^3=20$;

$P(C)=\dfrac{20}{216}=\dfrac{5}{54}.$

Задача 10

Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Решение

Вероятность выигрыша для игроков обозначим p_1 и p_2.

$$p_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots=\frac{2}{3}.$$

Имеем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где

$$b_1=\frac{1}{2},\quad q=\frac{1}{4},\ S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{2}{3}.$$

Аналогично

$$p_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{3},$$

$$\text{где } b_1=\frac{1}{4},\quad q=\frac{1}{4}.$$

Другое решение:

$$p_1+p_2=1,\ p_2=\frac{1}{2}p_1,\quad \text{т. е.}\quad p_1=\frac{2}{3},\ p_2=\frac{1}{3}.$$

Задача 11

Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x)=\gamma e^{-x^2+2x+3}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $-\frac{1}{3}<X<\frac{4}{3}$.

Решение

Используем формулы для нормального распределения. Плотность нормального распределения: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Преобразуем заданную функцию:

$$f(x)=\gamma e^{-((x^2-2x+1)-1-3)}=\gamma e^{-(x-1)^2+4}=\gamma e^4 e^{-(x-1)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$2\sigma^2=1,\quad D(X)=\sigma^2=\frac{1}{2},\quad \sigma=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma e^4=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}};\quad \gamma=\frac{1}{e^4\sqrt{\pi}};$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{1}{2}+\Phi(\sqrt{2}(x-1));$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right);$$

$$P\left(-\frac{1}{3}<X<\frac{4}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)-\Phi\left(\frac{-\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+\Phi\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=$$

$$=\Phi(0{,}4714)+\Phi(1{,}8856)=0{,}1808+0{,}4706=0{,}6514.$$

Комплект вариантов контрольной работы №3

ВАРИАНТ 1

1. Два брата входят в состав двух различных спортивных команд, состоящих из 12 человек каждая. В двух урнах имеется по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат номер 6.

2. Радиолампа может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий, соответственно, 0,1; 0,2; 0,5. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

3. Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей 6 очков появится хотя бы один раз?

4. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя:

а) не менее 20 конденсаторов;

б) менее 28 конденсаторов;

в) от 14 до 26 конденсаторов.

5. Опыт состоит из трёх бросаний монеты, из которых герб выпадает с вероятностью p = 0,5. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения**.**

ВАРИАНТ 2

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два; в) только один вопрос.

2. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

3. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в соотношении 5/3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажён.

4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах, стрелок поразит мишень 8 раз. Результат, полученный применением локальной теоремы Лапласа, сравнить с результатом, полученным по формуле Бернулли.

5. Опыт состоит из четырех независимых бросаний монеты, в каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0{,}5$. Для случайного числа появлений герба построить:

а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения.

ВАРИАНТ 3

1. В каждой из двух урн находится 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется чёрным.

2. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

3. В лотерее 1000 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 500 рублей, на 10 билетов – по 100 рублей, на 50 билетов – по 20 рублей, на 100 билетов – по 5 рублей, остальные билеты невыигрышные. Некто покупает 1 билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.

4. Для определения содержания полезных компонентов на металлургическом комбинате проводится опробование вагонов с товарной рудой. Найти вероятность того, что из 400 вагонов опробование пройдут ровно 80 вагонов, если из 5 вагонов опробуется только один.

5. Производится 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. Для случайного числа попаданий построить: а) ряд распределения; б)

многоугольник распределения; в) функцию распределения, г) найти математическое ожидание.

ВАРИАНТ 4

1. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях производят по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадает в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

2. Наборщик пользуется двумя кассами. В первой кассе – 90 %, а во второй – 80 % отличного шрифта. Найти вероятность того, что любая извлечённая литера из наудачу взятой кассы будет отличного качества.

3. Студент знает 70 из 90 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 3 вопроса.

4. Имеются 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включённым в течение $p = 0{,}8$ всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 80 станков?

5. Производится взрывание пяти скважин. Вероятность высокой эффективности объёма взорванной массы одной скважины равна 0,7. Построить ряд распределения эффективности объёма взорванной массы и найти её математическое ожидание.

ВАРИАНТ 5

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

2. Автомат штампует детали. Вероятность того, что за один час не будет выпущено ни одной нестандартной детали, равна 0,9. Найти вероятность того, что будут стандартными все детали, выпущенные за 3 часа.

3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин как 3/2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

4. Из цифр 1 – 5 выбирается наудачу одна, затем из оставшихся также наудачу выбирается вторая. Найти вероятности следующих событий:

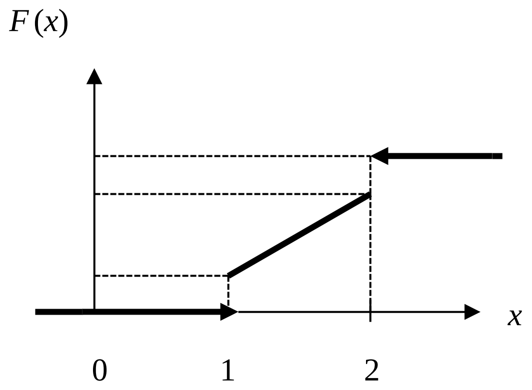
событие A – первая цифра чётная;

событие $Б$ – вторая цифра чётная;

событие B – обе цифры чётные;

событие D – хотя бы одна цифра чётная.

5. Случайная величина X имеет функцию распределения, заданную графически.



Значения $x=1$ и $x=2$ имеют отличные от нуля вероятности:

$$P\{x=1\}=0{,}25,$$
$$P\{x=2\}=0{,}75,$$

при $x<1$ $F(x)=0$, при $x>2$ $F(x)=1$.

На участке $1\le x\le 2$ $F(x)$ изменяется по линейному закону. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

ВАРИАНТ 6

1. Для сигнализации об аварии установили три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9; второе – 0,95 и третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

2. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02; для второго – 0,03; для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего – в два раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

3. Какова вероятность того, что квадрат выбранного наудачу целого числа будет оканчиваться цифрой 1.

4. В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий окажется стандартных не менее 84.

5. Производятся последовательные испытания приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

ВАРИАНТ 7

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1400 испытаниях событие наступит ровно 28 раз.

2. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,06, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна.

3. Из колоды в 52 карты вынимается наудачу три карты. Найти вероятность того, что это тройка, семёрка и туз.

4. Монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность следующих событий:

событие A – все пять раз появится герб;

событие $Б$ – хотя бы один раз появится герб;

событие $В$ – герб появится ровно два раза.

5. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб.; четыре выигрыша по 25 руб.; десять – по 10 руб.; остальные невыигрышные. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета (случайная величина X – стоимость возможного выигрыша) и найти математическое ожидание.

ВАРИАНТ 8

1. В партии из 100 деталей имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 5 изделий, наудачу взятых из этой партии, только 2 окажутся дефектными.

2. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причём из них в первом ящике 17, а во втором – 15 нестандартных деталей. Из второго ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из первого ящика будет стандартной.

3. Данное предприятие в среднем даёт 21 % продукции высшего сорта и 70 % продукции первого сорта. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта.

4. Вероятность того, что в результате четырёх независимых опытов событие A произойдёт хотя бы один раз, равна 0,5. Определить вероятность появления события A при одном опыте, если она во всех опытах остаётся неизменной.

5. Игральная кость брошена 2 раза. Написать ряд распределения числа появлений «тройки» и найти математическое ожидание.

ВАРИАНТ 9

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

2. Две сотрудницы набили по одинаковому комплекту перфокарт, вероятность того, что первая сотрудница допустит ошибку, равна 0,05, для второй эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая сотрудница.

3. Два студента ищут нужную им книгу в букинистических магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом, равна 0,6, а вторым – 0,7. Какова вероятность того, что только один из студентов найдет книгу?

4. С помощью карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность, что сложится слово «ракета».

5. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить ряд и многоугольник распределения вероятностей числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

ВАРИАНТ 10

1. На трёх станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляется 10 %, на втором – 30 %, на третьем – 60 % всех деталей. Для каждой детали вероятность быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 – если она изготовлена на втором станке; 0,9 – на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

2. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено 2 залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из 1-го орудия равна 0,3, а из второго – 0,4.

3. На столе лежат 36 экзаменационных билетов с номерами 1, 2, …, 36. Преподаватель берёт три любых билета. Какова вероятность того, что они из первых четырёх?

4. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна 0,6. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

5. Энергосистема состоит из четырёх блоков, работающих независимо. Вероятность исправного состояния блоков в течение времени T равна 0,6. Рассматривается случайная величина X – число блоков, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Построить ряд распределения, функцию распределения величины X. Найти её математическое ожидание.

ВАРИАНТ 11

1. Из трёх орудий произведены залпы по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,9, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадает в цель.

2. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат даёт 0,2 % брака, а второй – 0,3 % брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 3000, а со второго 2000 деталей.

3. На экзамене студенту предлагается 20 билетов. В каждом билете 3 вопроса. Из 60 вопросов, вошедших в билеты, студент знает 50. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять из известных ему вопросов?

4. Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа от каждого из которых равна $p = 0{,}0005$. Какова вероятность отказа: а) одного элемента; б) хотя бы одного элемента.

5. В техническом устройстве работают независимо 2 блока. Вероятность безотказной работы первого блока 0,4; второго – 0,7. Случайная величина X – число работающих блоков. Построить ряд распределения, многоугольник распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

ВАРИАНТ 12

1. Из 50 проб химического состава рудной массы в 35 пробах обнаружено наличие тяжелых металлов. Найти вероятность того, что тяжёлые металлы содержатся в двух взятых наудачу пробах.

2. Детали проходят три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02; на второй – 0,03; на третьей – 0,02. Найти вероятность получения не бракованной детали после трёх операций, предполагая, что получение брака на отдельных операциях являются событиями независимыми.

3. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1: 3: 6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9; средний – 0,3; мелкий – 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьёт её?

4. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Найти $M(X); D(X); \sigma(X)$. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

ВАРИАНТ 13.

1. В каждой из двух урн содержатся 3 чёрных и 7 белых шаров. Из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в первую урну, после чего из первой урны наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется белым.

2. Охотники Александр, Виктор и Павел попадают в летящую утку с вероятностями, соответственно равными: 2/3, 3/4 и 1/4. Все одновременно стреляют по пролетающей утке. Какова вероятность того, что утка будет убита?

3. Детали могут быть изготовлены с применением двух технологий: в первом случае деталь проходит 3 технологических операции, вероятность получения брака при каждой из которых равны, соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Во втором случае имеются 2 операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,3. Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если

в первом случае вероятность получения продукции первого сорта для не бракованной детали равна 0,9, а во втором – 0,8.

4. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что в течение 1 минуты не будет ни одного вызова?

5. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 руб., четыре – по 50 руб., 5 – по 40 руб. и десять по 10 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета (случайная величина X – стоимость возможного выигрыша). Найти $M(X)$, $D(X)$, составить функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

ВАРИАНТ 14.

1. Три автомата изготовляют детали, которые поступают на общий контейнер. Производительность первого, второго и третьего автоматов относится как 2/3/5. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, отличного качества, равна 0,9, для второго и третьего автоматов эти вероятности, соответственно, равны 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь окажется отличного качества.

2. В записанном номере телефона оказалась стёртой последняя цифра. Какова вероятность того, что, наудачу набирая последнюю цифру телефонного номера, Вы сразу позвоните нужному лицу? Вычислить эту вероятность, предлагая, что Вы вспомнили, что последняя цифра: а) нечётная; б) не больше 5.

3. Производится выстрел по трём складам боеприпасов. Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй – 0,008, в третий – 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

4. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратичное отклонение этой величины. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 родившихся детей мальчиков и девочек будет поровну.

ВАРИАНТ 15.

1. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии первое устройство сработает, рана 0,8, для второго и третьего устройства эти вероятности, соответственно, равны 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработают: а) только одно устройство, б) только два устройства; в) все три устройства.

2. На сборку поступают детали с трёх автоматов. Первый автомат даёт 0,3 % брака, второй – 0,2 % брака, третий – 0,4 % брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступает
1000 деталей, со второго – 2000, а с третьего – 2500.

3. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделён на 6 секторов, отмеченных определёнными цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, когда цифры образуют определённую комбинацию. Какова вероятность открыть замок, установив определённую комбинацию цифр?

4. Игральная кость брошена 3 раза. Написать ряд распределения числа появлений шестёрки. Найти $M(X)$, $D(X)$, составить функцию распределения $F(x)$.

5. Вероятность изделия некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10000, наудачу взятых изделий, бракованных окажется ровно 40?

ВАРИАНТ 16.

1. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,96. Найти вероятность двух попаданий при трёх выстрелах.

2. На сборку поступают детали с четырёх автоматов. Первый даёт 40 %, второй – 30 %, третий – 20 %, а четвёртый 10 % всех деталей данного типа, которые поступают на сборку. Первый автомат даёт 0,1 % брака, второй – 0,2 %, третий – 0,25 %, четвёртый – 0,5 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали.

3. Каждая из букв Т, М, Р, О, Ш написана на одной из пяти карточек. Карточки перемешиваются и раскладываются наугад. Какова вероятность того, что образуется слово «ШТОРМ»?

4. Случайная величина X принимает только два значения + С и - С, каждые с вероятностью 0,5. Найти дисперсию этой случайной величины.

5. На склад магазина поступают изделия, из которых 80 % оказывается высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 взятых наугад изделий не менее 85 изделий окажутся высшего сорта.

ВАРИАНТ 17.

1. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трёх выстрелах равна 0,992. Найти вероятность четырёх попаданий при пяти выстрелах.

2. Однотипные детали поступают на сборку с двух автоматов. Первый автомат даёт 80 % необходимых для сборки деталей, а второй – 20 %. Вероятность детали быть бракованной, если она изготовлена на первом автомате, равна 1 %, если на втором – 4 %. Поступившая на сборку деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена: а) на первом автомате; б) на втором автомате?

3. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятность того, что все цифры различны.

4. При ведении горных работ происходит загрязнение атмосферы газовыми выбросами в 9 из 10 случаев. Найти вероятность того, что при 50 массивных взрывах загрязнение атмосферы наступит не более, чем в 40 случаях.

5. В урне находится 15 белых, 10 чёрных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что: а) при первом испытании появится белый шар (событие А), при втором – чёрный (событие В) и при третьем – синий (событие С); б) при первом испытании появится белый шар, а при втором и третьем – чёрные шары.

ВАРИАНТ 18.

1. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 120 раз в 144 испытаниях.

2. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3; второй – 0,4; третий – 0,7; четвёртый – 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего.

3. Литьё в болванках поступает с двух заготовительных цехов – 70 % из первого и 30 % из второго. При этом материал первого цеха имеет 10 % брака, а второго – 20 %. Найти вероятность того, что одна наудачу взятая болванка без дефектов.

4. Случайная величина принимает только два значения – +10 и -10, каждое с вероятностью 0,5. Найти среднее квадратичное отклонение этой величины.

5. В урне 15 белых и 20 чёрных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что: 1) оба шара будут чёрными; 2) оба шара будут разного цвета.

ВАРИАНТ 19.

1. Партия деталей изготовлена двумя рабочими. Первый рабочий изготовил 2/3 партии, второй – 1/3 партии. Вероятность брака для первого рабочего 1 %, для второго – 10 %. На контроль взяли одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

2. Из зенитного орудия производится три выстрела по снижающемуся самолёту. Вероятность попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны, соответственно, 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность не менее двух попаданий в самолёт.

3. Найти функции распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, если известен ряд распределения случайной величины X:

X	2	3	5
P	0,3	0,1	0,6

4. На восьми одинаковых карточках написаны, соответственно, числа 2, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократится.

5. Имеется три одинаковых урны, из которых в первой находится два белых и два чёрных шара, во второй и третьей – по три белых и четыре черных шара. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Найти вероятность того, что шар извлечён: а) из второй урны; б) из первой урны.

ВАРИАНТ 20.

1. Сборщик получил 3 ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором – 50, из них 10 окрашенных; в третьем – 30, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлечённая деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной.

2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Вычислить вероятность того, что, хотя-бы два экзамена будут сданы.

3. Производится два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0{,}4;\ p_2 = 0{,}3$. а) записать ряд распределения случайной величины X – общего числа попаданий при двух выстрелах; б) найти математическое ожидание общего числа попаданий при двух выстрелах; в) найти дисперсию и построить многоугольник распределения.

4. Из колоды карт (36) наудачу вынимается две карты. Найти вероятность того, что среди них одна «дама» и один «король».

5. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,6. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,7. На обоих станках изготовлено по две детали. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

ВАРИАНТ 21.

1. Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных изделий. Найти вероятность того, что среди трёх наугад вынутых из ящика деталей нет дефектных.

2. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, равна 0,6. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

3. Имеется 5 урн: в двух урнах – по 2 белых и 1 чёрному шару; в одной 10 чёрных и ещё в двух – по 3 белых и 1 чёрному шару. Найти вероятность того, что вынутый из наудачу взятой урны шар окажется белым.

4. Из колоды в 36 карт вынимается наудачу две карты. Найти вероятность того, что это шестёрка и семёрка.

5. В лотерее 100 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 25 руб.; на 5 билетов – 20 руб.; на 10 билетов – 5 руб.; на 20 билетов – 1 руб.; остальные билеты невыигрышные. Найти вероятность выигрыша не менее 5 руб. на 1 билет. Составить ряд распределения случайной величины X – стоимости выигрыша на 1 билет. Найти математическое ожидание и дисперсию.

ВАРИАНТ 22.

1. Чему равна вероятность того, что дни рождения трёх человек придутся на разные месяцы: июнь, июль и август? Вероятности попадания дня рождения на данный месяц считаются равными для всех месяцев года.

2. Студент знает 40 вопросов из 50. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает:

а) все три вопроса; б) только два вопроса.

3. Имеются три одинаковые урны: первая содержит 1 белый и 6 чёрных шаров; вторая – 3 белых и 2 чёрных шара; третья – 7 белых и 8 чёрных шаров. Из одной урны, наудачу выбранной, вынут шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынут из первой урны?

4. Прибор, обладающий надёжностью (вероятностью безотказной работы за время t), равной $p = 0{,}8$, представляется недостаточно надёжным. Для повышения надёжности он дублируется ещё одним точно таким же работающим прибором. Если первый прибор за время t отказал, происходит автоматическое переключение на дублирующий. Приборы отказывают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что система из двух приборов прорабатывает безотказно время t.

5. Электронная аппаратура имеет три дублирующих линии. Вероятность выхода из строя каждой линии за время гарантированного срока работы аппаратуры равна 0,1. Найти закон распределения случайного числа вышедших из строя линий за время гарантийного срока, если выход из строя одной линии не зависит от рабочего состояния других линий. Найти $M(X), \sigma(X)$.

ВАРИАНТ 23

1. При разведке медно-колчеданных месторождений в 7 из 10 случаев опознавательным признаком может служить присутствие ярозита или барита. Найти вероятность присутствия минералов хотя бы в одном из трёх месторождений.

2. Студент знает 25 вопросов из 30. Каждый экзаменационный билет содержит два вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) оба вопроса; б) хотя бы один вопрос.

3. В урне A белых, B чёрных и C красных шаров. Наугад вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары будут разных цветов.

4. Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 2 чёрных и по 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 чёрный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечён из урны, содержащей 5 белых шаров?

5. Противник стремится сорвать связь, создавая помехи в двухчастотных диапазонах со средними частотами f_1 и. f_2 С этой целью мешающий передатчик настраивается попеременно на частоты f_1 и f_2 через равные промежутки времени. Вероятность сбоя от помехи на частоте f_1 составляет 0,3, а на частоте f_2 – 0,6. Какова вероятность того, что связь будет сорвана?

ВАРИАНТ 24

1. При установке одного пылеуловителя вероятность выброса в атмосферу вредных веществ составляет 0,8. Сколько пылеуловителей нужно поставить последовательно, чтобы сократить вероятность выбросов в 1,5 раза?

2. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что две наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

3. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, переложили 1 шар в урну, содержащую 4 белых и 4 чёрных шара. Вычислить вероятность вынуть белый шар из второй урны.

4. Вероятность изделия некоторого производства оказаться доброкачественным равна 0,996. Чему равна вероятность того, что из 1000, наудачу взятых изделий, бракованных окажется ровно 5?

5. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,6. За каждое попадание стрелку засчитывается 3 очка. Построить ряд распределения числа выбитых очков и многоугольник распределения. Найти математическое ожидание.

ВАРИАНТ 25

1. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 11. Чему равна вероятность того, что первые два дня августа будут дождливыми?

2. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлено две детали, на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

3. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, причём каждый из них делает по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

4. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдёт 120, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8.

5. Производятся последовательные испытания четырёх приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9. Найти математическое ожидание $M(X)$.

ВАРИАНТ 26

1. Сборщик получил 2 коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом № 1, и три коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,9, а завода № 2 – 0,7. Из наудачу взятой коробки сборщик наудачу извлёк деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

2. Брошены две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятёрки, если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.

3. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны, соответственно, 0,4; 0,5; 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих трёх выстрелов в мишени будет одна пробоина.

4. ОТК проверяет детали на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) три первых проверенных изделия стандартны; 2) нестандартным окажется третье по порядку проверки изделие; 3) из трёх проверенных изделий только одно стандартно.

5. Дискретная случайная величина X задана следующим рядом распределения:

X	0	1	3	4
P	0,1	0,2	0,6	0,1

Найти функцию распределения и построить её график. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

ВАРИАНТ 27

1. В урне A белых и B черных шаров. Из урны вынимается шар, отмечается его цвет, и шар возвращается в урну. После этого из урны берётся ещё один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шары – белые.

2. Вероятность попасть в цель равна 0,01. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы иметь хотя бы одно попадание: а) с вероятностью, не меньшей 0,5; б) с вероятностью, не меньшей 0,9?

3. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что из 300 родившихся детей будут 160 мальчиков.

4. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно, равны 0,5; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. Найти вероятность того, что он принадлежит второй группе.

5. Вероятность появления случайного события A в одном испытании равна 0,6. Проведено два независимых испытания. Составить ряд распределения случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях и найти математическое ожидание и дисперсию.

ВАРИАНТ 28

1. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится 76 раз.

2. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подмётки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 1 % каблуков, 4 % подмёток и 5 % верхов. Произведённые каблуки, подмётки и верхи случайным образом комбинируются в цехе, где и шьются ботинки. Найти вероятность не быть испорченным одному ботинку. Какой процент ботинок будет испорченным, т. е. будет содержать дефекты?

3. По танку производятся два одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом – 0,5, при втором – 0,8. Для вывода танка из строя достаточно двух попаданий. При одном попадании танк выходит из строя с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что в результате двух выстрелов танк будет выведен из строя.

4. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них три стандартные); во втором – 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали окажутся стандартными; 2) только одна из двух деталей стандартная; 3) хотя бы одна из двух деталей стандартная.

5. Случайная величина задана законом распределения:

X	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратичное отклонение этой величины.

ВАРИАНТ 29

1. Сколько нужно передать одинаковых сообщений, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что сообщение принято не менее одного раза правильно, если вероятность правильного приёма сообщения составляет 0,5?

2. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предполагается упрощённая схема испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, и 0,05 для изделий, которые ему не удовлетворяют. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?

3. В студии телевидения имеется 3 телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включена хотя бы одна камера; б) включена только одна камера; в) включены все три камеры; г) выключены все камеры.

4. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причём в каждой партии по два изделия бракованных. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность бракованного изделия из второй партии.

5. Найти математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть при одном бросании игральной кости. Записать закон распределения в виде таблицы. Найти $D(X)$.

ВАРИАНТ 30

1. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна 0,64. Произведено144 испытания. Найти вероятность того, что событие A появится не менее 100 раз.

2. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

3. В урне 5 белых и 7 чёрных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

4. В батарее из 10 орудий одно не пристрелянное. Вероятность попадания из пристрелянного орудия равна 0,73, а из не пристрелянного – 0,23. Производили один выстрел и промахнулись. Найти вероятность того, что выстрел произведён из не пристрелянного орудия.

5. Построить ряд распределения, многоугольник распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания $p = 0{,}3$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Задача 6

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$.

Таблица 1

Данные для выполнения задачи 6

Номер варианта	Функция $F(x)$	Номер варианта	Функция $F(x)$
1	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le \frac{3}{4}\pi \\ \cos 2x, & \frac{3}{4}\pi < x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{3}{4}\pi;\ \frac{5}{6}\pi\right)$	2	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x^2, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$
3	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1 \\ \frac{x^2 - x}{2}, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1{,}5;\ 1{,}8)$	4	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x^3, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$
5	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 3x^2 + 2x, & \text{при } 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right)$	6	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2 \\ 0{,}5x - 1, & \text{при } 2 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $(1;\ 3)$
7	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{1}{9}x^2, & \text{при } 0 < x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;\ 2)$	8	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1;\ 2)$

9	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{3};\ -\frac{\pi}{6}\right)$	10	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 2\sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{6}\right)$
11	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -2 \\ \frac{x+2}{4}, & \text{при } -2 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(-1;\ 1)$	12	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$
13	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1-\cos x}{2}, & 0 \le x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right)$	14	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{25}, & \text{при } 0 < x \le 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $(4; 5)$
15	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ \frac{3}{4}(x+1), & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$	16	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \sin 2x, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$

17	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 1-\cos x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$	18	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ \frac{x+1}{3}, & \text{при } -1 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ (0,5; 1,5)
19	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{36}, & \text{при } 0 < x \le 6 \\ 1, & \text{при } x > 6 \end{cases}$ $(2;\ 4)$	20	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^2}{100}, & \text{при } 0 < x \le 10 \\ 1, & \text{при } x > 10 \end{cases}$ $(5;10)$
21	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ \frac{x+1}{2}, & \text{при } -1 < x \le 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$	22	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, & \text{при } 1 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;2)$
23	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{x^3}{8}, & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $(1;2)$	24	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{3}x, & \text{при } 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;2)$

25	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{4}x, & \text{при } 0 \le x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $(1;\,2)$	26	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{5}x, & \text{при } 0 \le x \le 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$ $(1;\,3)$
27	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$	28	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{2} \\ \cos 3x, & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{3};\ 0\right]$
29	$\begin{cases} 0, & \text{при } x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$	30	$\begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & \text{при } 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ $(1;\,2)$

Задача 7

Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A повторяется:

а) ровно k раз; б) не менее k раз; в) не более k раз; г) хотя бы один раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события A равна p.

Таблица 2

Данные для выполнения задачи 7

Номер варианта	n	k	p	Номер варианта	n	k	p
1	6	3	0,7	2	7	2	0,2
3	6	4	0,2	4	5	3	0,1
5	4	3	0,7	6	6	4	0,1
7	5	4	0,5	8	6	2	0,8

9	4	3	0,8	10	3	2	0,8
11	4	2	0,9	12	4	2	0,8
13	5	2	0,7	14	5	3	0,6
15	4	2	0,5	16	4	3	0,4
17	5	2	0,3	18	5	3	0,4
19	4	2	0,3	20	4	3	0,2
21	5	2	0,1	22	5	2	0,2
23	4	3	0,3	24	3	2	0,4
25	5	3	0,5	26	6	3	0,6
27	4	2	0,7	28	5	4	0,8
29	6	4	0,9	30	6	5	0,1

Задача 8

Известны математическое ожидание a и среднеквадратичное отклонение σ нормально распределённой величины *X*. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α, β).

Таблица 3

Данные для выполнения задачи 8

Номер варианта	a	σ	α	β	Номер варианта	a	σ	α	β
1	2	4	6	10	2	10	4	2	13
3	9	5	5	14	4	8	1	4	9
5	7	2	3	10	6	6	3	2	11
7	5	1	1	12	8	4	5	2	11
9	3	2	3	10	10	2	5	4	9
11	2	2	1	5	12	3	2	2	6
13	4	3	3	7	14	7	3	4	8
15	6	3	5	9	16	4	1	1	5
17	4	2	2	6	18	5	2	3	7
19	5	3	4	8	20	6	3	5	9
21	3	4	6	10	22	5	3	5	9
23	2	2	4	6	24	3	2	1	5
25	7	2	3	13	26	9	5	7	14
27	6	2	2	12	28	2	2	4	7

29	8	4	4	13	30	6	3	2	12

Исходные данные к расчётным задачам 10 – 15 приведены в таблице 5 после всех задач.

Задача 9

Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит *n*; б) произведение числа очков не превосходит *n*; в) произведение числа очков делится на *n*.

Задача 10

Среди *n* лотерейных билетов *k* выигрышных. Наудачу взяли *m* билетов. Определить вероятность того, что среди них *l* выигрышных.

Задача 11

Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$.

Варианты $1–8$: $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma - a}, & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Варианты $9–16$: $$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma; b], \\ 0, & x \notin [\gamma; b]. \end{cases}$$

Варианты $17–24$: $$f(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Варианты $25–30$: $$f(x) = \begin{cases} a, & x \in \left[\dfrac{b-\gamma}{2}; \dfrac{b+\gamma}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[\dfrac{b-\gamma}{2}; \dfrac{b+\gamma}{2}\right]. \end{cases}$$

Указание

Использовать формулы равномерного распределения.

Задача 12

Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $F(x) = \gamma e^{ax^2 + bx + c}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$.

Указание

Использовать формулы для нормального распределения.

Таблица 4

Исходные данные к расчётным задачам

Номер варианта	Задача 9	Задача 10			
	n	*n*	*l*	*m*	*k*
1	3	10	2	4	6
2	4	10	2	3	6
3	5	10	3	5	7
4	6	10	3	5	6
5	7	11	2	5	7
6	8	11	3	4	8
7	9	11	3	5	7
8	10	12	3	8	5
9	3	12	2	8	3
10	4	12	2	5	4
11	5	9	2	4	6
12	6	9	3	5	6
13	7	9	2	3	7
14	8	8	2	4	5
15	9	8	2	5	4
16	10	8	3	4	5
17	11	10	4	6	5
18	12	10	5	7	7
19	13	10	4	6	7
20	14	12	4	8	6
21	15	8	2	3	4
22	16	8	2	3	5
23	17	8	2	4	3
24	18	8	3	5	4

25	19	8	1	4	2
26	20	9	2	3	5
27	3	9	3	4	4
28	4	9	2	6	3
29	5	9	4	5	5
30	6	9	3	5	4

В первой горизонтальной строке указаны номера задач; в левом столбце – номера вариантов.

Таблица 5

Исходные данные к расчётным задачам

Номер варианта	Задача 11				Задача 12				
	a	b	x_1	x_2	a	b	c	x_1	x_2
1	2,5	4	3	3,3	-2	8	-2	1	3
2	1,5	3	2	2,6	-2	4/3	-2/3	1/3	2/3
3	1,5	2,5	2	2,3	-2	-8	2	-3/2	-1
4	1	3,5	2	2,8	-4	6	2	0	3/4
5	-1	2	-0,7	1,1	-3	3	-2	1/2	3/2
6	-2	1	-1,5	0,3	-4	-6	-2	-3/4	1/4
7	-3	5	-2	2	-3	-3	2	-1/2	3/2
8	-1,5	2,5	-1	0	-3	-4	2	1/3	4/3
9	1	1,8	1,3	1,6	-2	-4/3	2/3	-1/3	2/3
10	1	2,4	1,5	2	-3	4	-2	-1/3	5/3
11	2	3,5	2,5	3	-2	8	0	1	3
12	2	2,8	2,1	2,5	-2	1,3	0	1/3	2/3
13	1	2,8	-1	3	-2	-8	0	-3/2	-1
14	1	2,6	1,5	3	-4	6	0	0	3/4
15	2	3	1	3	-3	3	0	1/2	3/2
16	2	4,8	4,5	5	-4	-6	0	-3/4	1/4
17	-4	-2	-1	0	-3	-3	0	-1/2	3/2
18	-3	-1	-2	0	-3	-4	0	1/3	4/3
19	2	4	0	3	-2	-4/3	0	-1/3	2/3
20	1	3	0	2	-3	4	0	-1/3	5/3
21	1	1,5	0	0,5	-2	8	-1	1	3

22	-1	1,5	0	1	-4	6	1	0	3/4
23	-1,5	-1	-1	2	-2	-8	-1	-3/2	-1
24	-1,5	1	-1	1	-4	-6	-1	-3/4	1/4
25	0,5	1	0	3	-3	3	-1	1/2	3/2
26	0,2	2	0	4	-3	-4	1	1/3	4/3
27	0,5	3	0	0,5	-3	-3	1	-1/2	3/2
28	0,4	4	1	5	-3	4	-1	-1/3	5/3
29	1/4	1	0	3	-2	-4/3	1/3	-1/3	2/3
30	0,02	2	0	3	-2	4/3	-1/3	1/3	2/3

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

Проверяемые компетенции: ОПК-1

Уметь:
- находить вероятности элементарных и составных событий;
- производить обработку и находить основные характеристики случайных величин;
- работать со статистическими выборками и гипотезами.

Владеть:
- навыками работы с вероятностными методами и моделями;
- навыками применения современного инструмента теории вероятностей и математической статистики для решения практических задач.

Критерии оценивания:

- правильность выбора расчетных формул;
- верность выполнения расчетов;
- полнота и последовательность расчетов;
- соответствие требованиям оформления.

Правила оценивания:

правильность выбора расчетных формул – 20 баллов;
верность выполнения расчетов – 15 баллов;
полнота и последовательность расчетов – 10 баллов;
соответствие требованиям оформления – 5 баллов.

Критерии оценки:

45-50 баллов (90-100%) - оценка «отлично»
35-44 балла (70-89%) - оценка «хорошо»
25-34 балла (50-69%) - оценка «удовлетворительно»
0-24 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно»

Приложение

Образец оформления титульного листа контрольной работы №1

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Институт геологии и геофизики

Кафедра математики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

по дисциплине
«Математика»

по разделу:

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Преподаватель:

Студент гр.
Кузнецов Юрий Сергеевич

Екатеринбург – 2023

Образец оформления титульного листа контрольной работы №2

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Институт геологии и геофизики

Кафедра математики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

по дисциплине
«Математика»

по разделу:

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Преподаватель:

Студент гр.
Кузнецов Юрий Сергеевич

Екатеринбург – 2024

Образец оформления титульного листа контрольной работы №3

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Институт геологии и геофизики

Кафедра математики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

по дисциплине
«Математика»

по разделу:

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Преподаватель:

Студент гр.
Кузнецов Юрий Сергеевич

Екатеринбург – 2024

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

Д. В. Исламгалиев
Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания
и варианты контрольныхи
самостоятельных работ
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения

Екатеринбург

2019

Рецензент: В. Я. Раевский, доцент, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории теоретической физики ИФМ.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры математики 28.05.2019 г. (протокол № 141) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Исламгалиев Д. В., Петровских Г. В., Пяткова В. Б.,

П МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: методические указания и варианты контрольных и самостоятельных работ по разделу дисциплины «Математика» для студентов всех специальности очного обучения”

– Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – с.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам всех специальностей для изучения темы: «Матрицы. Определители. Стстемы линейных алгебраических уравнений».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания по теме «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений» могут быть использованы как для проведения контрольных работ, так и для самостоятельной работы студентов. Они удовлетворяют всем требованиям государственного образовательного стандарта по подготовке дипломированных специалистов всех специальностей.

В методических указаниях представлены основные теоретические сведения и разобраны примеры решения задач по теме «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений» для студентов всех специальностей. Приведены решения большого количества типовых задач и варианты контрольных работ.

После изучения теории и решений типовых задач студенту рекомендуется самостоятельно решить один из вариантов контрольных работ.

МАТРИЦЫ

Матрица – это прямоугольная таблица чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C и т.д.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Числа ,входящие в таблицу называются ее элементами и обозначаются символом a_{ij} , где первый индекс i определяет номер строки, второй индекс j – номер столбца. Выражение $m \times n$ и называют размерностью матриц.

Например, матрица А имеет размерность 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

а матрица B имеет размерность 3×2:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если в матрице число строк совпадает с числом столбцов, то матрица называется квадратной. Понятие размерности матрицы для квадратной матрицы заменяют понятием порядок матрицы. Порядок квадратной матрицы равен числу строк или столбцов этой матрицы.

Для квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. Главная диагональ состоит из элементов a_{ij} с одинаковыми индексами, побочная диагональ состоит из элементов a_{ij} сумма индексов которых равна $n+1$.

Если элементы квадратной матрицы, стоящей на главной диагонали, равны единице, а все остальные равны нулю, то матрица называется единичной и обозначается

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

1.1. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц , имеющих одинаковые размерности .Суммой двух матриц называют такую матрицу, у которой каждый элемент равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23}\end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

***Пример* 1.1.** Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\\ 6 & -2\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & -5\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Найти $A+B$; $B-A$.

Решение: $A+B=\begin{pmatrix}10 & 7\\ 6 & -4\\ 6 & -3\end{pmatrix}$; $B-A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & -6\\ -6 & 1\end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число

Для того чтобы умножить матрицу на число следует каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\lambda\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

***Пример* 1.2.** Дана матрица $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $-3A$. $A\cdot B$

Решение:

$$-3\cdot A=-3\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -15 & 9\\ -21 & -15 & 3\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Произведение двух матриц определяется тогда, когда количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы. Элемент c_{ij} матрицы произведения, стоящий на пересечении i–той строки и j–того столбца равен сумме произведений элементов i–той строки первой матрицы на элементы j–того столбца второй матрицы, т.е. по формуле $c_{ij}=\sum_k a_{ik}\cdot b_{kj}$.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

***Пример* 1.3.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}$. Найти произведение матриц: $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение:

$$A.\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 3+5\cdot(-1)+1\cdot 7 & 4\cdot 0+5\cdot 2+1\cdot 1\\ 3\cdot 3+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 7 & 3\cdot 0+2\cdot 2+(-1)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 11\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$B.\cdot A=\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4+0\cdot 3 & 3\cdot 5+0\cdot 2 & 3\cdot 1+0\cdot(-1)\\ -1\cdot 4+2\cdot 3 & -1\cdot 5+2\cdot 2 & -1\cdot 1+2\cdot(-1)\\ 7\cdot 4+1\cdot 3 & 7\cdot 5+1\cdot 2 & 7\cdot 1+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 15 & 3\\ 2 & -1 & -3\\ 31 & 37 & 6\end{pmatrix}$$

Отметим, что произведение матриц некоммутативное, т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Транспонирование матрицы

Транспонированной к матрице A называется матрица, полученная из матрицы A путем замены строки на столбец с такими же индексами. Транспонированная матрица обозначается A^{T}.

Если
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \text{ то } A^{T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

***Пример* 1.4.** Найти транспонированную матрицу, к матрице $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^{T}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определитель – это числовая характеристика квадратной матрицы. Определители в литературе обозначаются $\det A$, ΔA, $|A|$.

Определитель первого порядка

Определителем матрицы первого порядка, составленной из числа a_{11}, называется само число a_{11}

$$\det A = a_{11} \qquad (1.6)$$

Определитель второго порядка

Определителем матрицы второго порядка, составленной из чисел $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, называется число, определяемое равенством

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.7)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя, причем элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{12}, a_{21} – побочную диагональ. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

***Пример* 1.5.** Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14$$

***Пример* 1.6.** Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 = 7 .$$

Определитель третьего порядка

Рассмотрим определитель третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, который получается вычеркиванием из данного определителя *i*–той строки и *j*–того столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} – минор для элемента со строкой i и столбцом j.

Определителем третьего порядка, составленным из чисел $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, называется число:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \cdot A_{ik}\,; \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{kj} \cdot A_{kj} \quad (1.8)$$

для фиксированного значения i–той строки или j–того столбца.

Такие равенства называют разложением определителя по элементам строки или столбца.

Тогда разложение определителя третьего порядка по первой строке примет вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \quad (1.9)$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

а разложение по второму столбцу принимает вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \div a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \quad (1.10)$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

***Пример* 1.7.** Вычислить определитель $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

а) разложением по элементам первой строки;

б) разложением по элементам третьего столбца

Решение:

$$a)\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = .$$

$$= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

$$б)\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 3\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 6\cdot\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 9\cdot\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(4\cdot 8-5\cdot 7)-6\cdot(1\cdot 8-2\cdot 7)+9(1\cdot 5-2\cdot 4)=$$

$$=3\cdot(-3)-6(-6)+9\cdot(-3)=0$$

***Пример* 1.8.** Вычислить определитель $\det A=\begin{vmatrix}2&1&5\\2&7&0\\3&-1&0\end{vmatrix}$.

Решение: Так как наибольшее количество нулей в третьем столбце, то воспользуемся разложением по третьему столбцу (при этом второе и третье слагаемые будут равны нулю):

$$\det A=\begin{vmatrix}2&1&5\\2&7&0\\3&-1&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}2&7\\3&-1\end{vmatrix}+0+0=5(-2-21)=-115\,.$$

1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n. Если существует квадратная матрица B такая, что $AB=BA=E$, то матрица B называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}. Обратную матрицу A^{-1} можно найти по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(A^*\right)^T \qquad (\det A\neq 0), \qquad (1.11)$$

где A^* – матрица алгебраических дополнений A_{ij}:

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix},\quad A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

M_{ij} – миноры для элементов a_{ij} со строкой i и столбцом j.

После нахождения обратной матрицы можно воспользоваться проверкой,

$$A\cdot A^{-1}=E, \text{ т.е.} \qquad (1.12)$$

должна получиться единичная матрица E.

***Пример* 1.9.** Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 4\\ -1 & 4 & 3\\ -3 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Решение:

1) Найдем определитель матрицы

$$\det A=\begin{vmatrix}0 & 4 & 4\\ -1 & 4 & 3\\ -3 & 2 & 0\end{vmatrix}=4$$

2) Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-6 \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=8 \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix}=-9 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ -3 & 0\end{vmatrix}=12 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix}=10 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-12 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-6 & -9 & 10\\ 8 & 12 & -12\\ -4 & -4 & 4\end{pmatrix},\ \left(A^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix}-6 & 8 & -4\\ -9 & 12 & -4\\ 10 & -12 & 4\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-6 & 8 & -4\\ -9 & 12 & -4\\ 10 & -12 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5 & 2 & -1\\ -2.25 & 3 & -1\\ 2.5 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 4\\ -1 & 4 & 3\\ -3 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1.5 & 2 & -1\\ -2.25 & 3 & -1\\ 2.5 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.4. РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим матрицу размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы *rang*(A) называют наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля.

***Пример* 1.10.** Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение:

Для большего понимания миноры будем обозначать M_k, где k – количество строк и столбцов для выбранного минора.

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \quad \text{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3, \text{ то } \text{rang}(A) \geq 2$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

Так как больше нет M_3, то $\text{rang}(A) = 2$.

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей *m* уравнений и *n* неизвестных, называется система вида

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

где a_{ij}– коэффициенты системы, b_i – свободные члены, x_j – неизвестные, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Такую систему удобно записывать в матричной форме:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ или } AX = B,
\tag{2.2}
$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основная матрица, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из свободных членов.

Расширенной матрицей $\bar{A}$ называют матрицу A с присоединенной матрицей B:

$$
\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).
\tag{2.3}
$$

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае – система несовместна.

***Теорема* 2.1: СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы.**

***Пример* 2.1.** Дана расширенная матрица СЛАУ: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{array}\right)$. Найти ранг основной и расширенных матриц. Определить совместна ли соответствующая СЛАУ.

Решение:

1) Найдем ранг основной матрицы СЛАУ:

$$M_1 = |1| = 1,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(A) \geq 1.$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(A) = 1.$$

2) Так как все миноры основной матрицы включаются в расширенную, то найдем оставшиеся миноры для расширенной:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(\overline{A}) = 2.$$

Так как $\operatorname{rang}(A) = 2$ и $\operatorname{rang}(\mathrm{A}) = 1$, то СЛАУ несовместна **и не имеет решения.**

***Пример* 2.2.** Дана расширенная матрица СЛАУ: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right)$. Найти ранг основной и расширенных матриц. Определить совместна ли СЛАУ.

Решение:

1) Найдем ранг основной матрицы СЛАУ:

$$M_1 = |1| = 1,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(A) \geq 1.$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(A) = 1.$$

2) Так как все миноры основной матрицы включаются в расширенную, то найдем оставшиеся миноры для расширенной:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ \text{то}\ \operatorname{rang}(\overline{A}) = 1.$$

Так как $\mathrm{rang}(\bar{A})=1$ и $\mathrm{rang}(A)=1$, то СЛАУ совместна.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если имеет более одного решения.

Если все свободные члены равны нулю $b_i = 0$, то СЛАУ называется однородной, в противном случае – неоднородной.

2.1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая n уравнений и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

.

Метод Крамера

***Теорема* 2.2. Если ранг основной и расширенной матриц системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.**

Схема метода Крамера

1) Найти определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Если определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2) Найти определители $\det \mathrm{A}_1$, $\det \mathrm{A}_2, \ldots, \det \mathrm{A}_n$:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

3) Найти решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

***Пример* 2.3.** Решить СЛАУ, используя метод Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение:

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = -1 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение.

2) Найдем определители $\det A_1$, $\det A_2$:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

3) Найдем решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1}{-1} = 1;\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

***Пример* 2.4.** Решить СЛАУ, используя метод Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение:

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24, \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24, \ \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36.$$

3) Найдем решение определенной неоднородной СЛАУ:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{24}{12} = 2, \ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-24}{12} = -2, \ x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{36}{12} = 3.$$

***Ответ*:** $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Матричный метод (метод обратной матрицы)

1) Найти определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2) Найдем обратную матрицу A^{-1}.

3) Решение находится в виде

$$X = A^{-1}B.$$

***Пример* 2.5.** Решить СЛАУ, используя матричный метод :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = -1 \neq 0,$$

то система имеет единственное решение.

2) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Тогда решение находим в виде:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

***Пример* 2.6.** Решить СЛАУ, используя матричный метод:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений является совместной и определенной.

2) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3) Тогда решение находим в виде:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса

1) Найти определитель основной матрицы A неоднородной СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если определитель основной матрицы А неоднородной СЛАУ отличен от нуля, то СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2)Запишем СЛАУ в расширенном матричном виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim .$$

3) Преобразуем вторую, третью и т.д. строчки, чтобы получить нули вместо a_{21}, a_{31}, a_{n1}, то есть по формуле $\overline{a}_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ij}}{a_{1j}} a_{1j}$ и $\overline{b}_j = b_j - \dfrac{b_j}{a_{1j}} a_{1j}$:

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \overline{a}_{n2} & \dots & \overline{a}_{nn} & b_n \end{pmatrix} \sim .$$

4) Продолжая данные преобразования, получим со второй, третьей и т.д. строками, получим

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & \overline{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{nn} & \overline{b}_n \end{array}\right) \sim .$$

5) После чего можно найти x_n, т.е. требуется разделить последнюю строку на a_{nn}, тогда

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{pmatrix} \sim .$$

6) Тогда преобразуя элементы a_{ij}, если $i \neq j$, и преобразуя a_{ii} в единицы, получим решение СЛАУ:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \overline{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{array}\right).$$

Пример 2.7. Решить СЛАУ, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-3)\cdot(-1) = -1 \neq 0,$$

то система имеет единственное решение.

2) Запишем СЛАУ в виде расширенной матрицы и получим решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{1c\cdot(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{2c-2\cdot 1c}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{2c\cdot(-1)}{\sim}$$

$$\overset{2c\cdot(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{1c+2c}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

или

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{1c+3\cdot 2c}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{1c\cdot(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{2c+1c}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

***Пример* 2.8.** Решить СЛАУ, используя метод Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Если определитель основной матрицы A неоднородной СЛАУ отличен от нуля, но СЛАУ является определенной (имеет единственное решение).

2) Запишем СЛАУ в виде расширенной матрицы и получим решение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix} \underset{3c-3\cdot 1c}{\overset{2c-1c}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & -5 & 0 & -4 \end{array}\right) \overset{3c+5\cdot 2c}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ -12 & 0 & 0 & -24 \end{array}\right) \overset{1c\cdot(-12)}{\sim}$$

$$\overset{1c\cdot(-12)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{2c+3c}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{1c-2\cdot 2c-3\cdot 3c}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.2. МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СЛАУ

***Теорема* 2.3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.**

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая m уравнений и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

1) Найдем ранг основной матрицы для неоднородной СЛАУ.

2) Найдем ранг расширенной матрицы для неоднородной СЛАУ. Проверим СЛАУ на совместность и на неопределенность. Будем обозначать найденные миноры n-ого порядка расширенной матрицы $\widetilde{M}_{\mathrm{n}}$.

3) Если СЛАУ совместно и неопределенно решим СЛАУ, например, методом Гаусса.

Решение неопределенных неоднородных СЛАУ называют общим решением.

***Пример* 2.9.** Дано СЛАУ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ или } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \operatorname{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{ то } \operatorname{rang}(A) = 2.$$

2) Так как строк в основной и расширенной матриц две, то и ранг расширенной матрицы $\operatorname{rang}(A) = 2$. СЛАУ совместна и неопределенна.

3) Найдем общее решение СЛАУ. Так как $\operatorname{rang}(A) = 2$, требуется две строки (два уравнения):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim |\mathrm{x}_3 = a| \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+3a \\ 1 & 2 & 4+a \end{array}\right) \overset{2c-1c}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+3a \\ 0 & 1 & 3-2a \end{array}\right) \overset{1c-2c}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2+5a \\ 0 & 1 & 3-2a \end{array}\right).$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5a \\ 3-2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} a,\ a \in R.$$

***Пример* 2.10.** Дано СЛАУ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ или } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \operatorname{rang}(\mathrm{A}) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \operatorname{rang}(A) = 1.$$

2) Найдем ранг расширенной матрицы:

$$\overline{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \overline{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \overline{M}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \operatorname{rang}(A) = 1.$$

СЛАУ совместна и неопределенна.

3) Найдем общее решение СЛАУ. Так как $\operatorname{rang}(\overline{\mathrm{A}}) = 1$, требуется одна любая строчка (любое уравнение):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\,2 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{matrix} x_1 = a \\ x_2 = b \end{matrix} \right. \sim \begin{pmatrix} 1\,2 - a - b \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 - a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} b;\ a, b \in R.$$

2.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая m уравнений и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{\text{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

Воспользовавшись теоремой 3.2, если

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то однородное СЛАУ имеет единственное нулевое решение. Такое решение называют тривиальным.

***Пример* 2.11.** Решить СЛАУ, используя матричный метод:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

СЛАУ имеет тривиальное решение, т.е. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ СЛАУ

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащая m уравнений и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{\text{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

Заметим, что ранги основной и расширенной матриц в однородной СЛАУ всегда совпадают, то есть однородная СЛАУ всегда совместна.

***Теорема* 2.4. Если в совместной системе ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.**

1) Найдем ранг основной и расширенной матриц для однородной СЛАУ. Проверим СЛАУ на неопределенность.

2) Если СЛАУ совместна и неопределенна решим СЛАУ, например, методом Гаусса.

Решение неопределенных однородных СЛАУ называют фундаментальной системой решений.

***Пример* 2.12.** Дана СЛАУ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$. Найти решение СЛАУ.

Решение: Представим СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

1) Найдем ранг основной матрицы:

$$M_1 = |1| = 1, \text{ то } \operatorname{rang}(A) \geq 1$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ то } \operatorname{rang}(A) = 1 \text{ и } \operatorname{rang}(\overline{A}) = 1.$$

СЛАУ неопределенна.

2) Найдем фундаментальную систему для однородной СЛАУ. Так как $\operatorname{rang}(A) = 1$, требуется одна любая строчка (любое уравнение):

$$(1 \quad 1 \quad 1|0) \sim \left| \begin{matrix} x_1 = \text{a} \\ x_2 = \text{b} \end{matrix} \right. \sim (1 - \text{a} - \text{b}).$$

Тогда общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} b; a,\ b \in R.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений.

<table>
<tr><th colspan="5">СЛАУ</th></tr>
<tr><td colspan="2">ОДНОРОДНАЯ СЛАУ</td><td colspan="3">НЕОДНОДНАЯ СЛАУ</td></tr>
<tr><td colspan="2">СОВМЕСТНАЯ СЛАУ</td><td colspan="2">СОВМЕСТНАЯ СЛАУ</td><td>НЕСОВМЕСТНАЯ СЛАУ</td></tr>
<tr><td>ОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ</td><td>НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ</td><td>ОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ</td><td>НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СЛАУ</td><td>—</td></tr>
<tr><td>ТРИВИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ</td><td>ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА</td><td>ЕДИНСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ</td><td>ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ</td><td>НЕТ РЕШЕНИЯ</td></tr>
</table>

2. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = (A + 3A^T) \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 6 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 10x_5 = 14 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 2

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^2 - 3A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 3

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A \cdot A^T - 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{matrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{matrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -41 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

.

Вариант 4

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T + 2B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 5

1. Даны матрицы и A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ Найти матрицу $X = A^T \cdot A - 4B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 6

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу C= $A^T \cdot A + 5E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 7

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Найти матрицу $C = (2A^T - B) \cdot A$

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 8

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B - 3A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -5 \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 9

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B \cdot (A^T + 2A)$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ 5 & 2 & 22 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 10

1. Дана матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^2 + 2A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 11 & 2 \\ 7 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 11

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^T \cdot A + 3E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 12

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = A^T \cdot A - 2B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & -7 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 13

1.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = B^T \cdot A + 4E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 9 & 16 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 14

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = A^T \cdot A + 7E$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 9 & 4 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 15

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A\cdot A^T - 3A$.

2. Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 4 & 7\\ 36 & -7\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-7 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 7 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 6\\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9\\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3\end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -3\\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 2\\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = -7\\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -6\end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 16

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3B - A \cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \\ -3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 17

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3E - A\cdot A^T$

2. Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 12 & 0 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 18

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $C = A \cdot B + 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 11 \\ -2 & -6 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

   а) матричным методом;

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7 \end{cases}$

   а) проверить, является ли система уравнений совместной;

   б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

   в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 19

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&2\\3&1&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\3&1&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C=(3B-A^T)\cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}4&3\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&9\\1&-6\\10&21\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&4&0&-1\\-3&0&1&0\\2&3&2&3\\3&-1&-2&1\end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases}3x_1-4x_2-x_3=-17\\2x_1+x_2-x_3=0\\2x_1-3x_2-5x_3=-8\end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3+4x_4+6x_5=5\\3x_1-x_2-x_3=1\\2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+3x_5=3\\4x_1-4x_2-2x_4-3x_5=-1\end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 20

1.Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3E - A \cdot A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -13 \\ 3 & -22 & 27 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 21

1.Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу X= $A^T \cdot A - 2E$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -4 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 22

1.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 3B - A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 23

1. Дана матрица $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $A = 3E - B^T \cdot B$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 24 & 11 \\ -28 & -8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

   а) матричным методом;

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

   а) проверить, является ли система уравнений совместной;

   б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

   в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 24

1. Даны матрицы $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Найти матрицу $A = Y - 2X^T \cdot X$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 38 \\ 8 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

   а) матричным методом

   б) методом Крамера;

   в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 6 \end{cases}$

   а) проверить, является ли система уравнений совместной;

   б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

   в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 25

1. Дана матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $Y = X - 3X \cdot X^T$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 15 & 7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 26

1. Дана матрица А= $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B = 3A^T - A^2$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 27

1. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X= $3E - A \cdot A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 28

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A \cdot A^T + 2B$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -2 \\ -2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 7x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 29

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 5B - A^T \cdot A$.

2. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 10 & 33 \\ 1 & -17 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -11 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Вариант 30

1. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу B= $3E - A \cdot A^T$.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 19 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

а) матричным методом;

б) методом Крамера;

в) методом Гаусса.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = -5 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$

а) проверить, является ли система уравнений совместной;

б) если система уравнений совместна, то найти её общее решение;

в) найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. / Д. Т. Письменный // – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2015. – 281 с.

Дополнительная литература

2. Красс М. С. Математика для экономистов. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов // –СПб.; Питер. 2005. – 464 е.: ил. – (Серия «Учебное пособие»).
3. Сурнев В.Б. Алгебра и аналитическая геометрия :учеб. пособие /В.Б. Сурнев// Екатеринбург, УГГГА. 2003 – 656 с.

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный
университет»

**Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова,
О. Е. Турова**

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
**по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения**

**Екатеринбург
2019**

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии представлены основные теоретические сведения по теме “Неопределенный интеграл”, рассмотрены основные методы интегрирования, разобраны примеры решения задач.

Работа содержит 30 вариантов наборов задач для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы для контрольных работ.

Рекомендуется для всех специальностей УГГУ.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная для функции

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x)=f(x)$

Примеры

1. Функции $F(x)=-\cos x$, $F_1(x)=-\cos x+1$, $F_2(x)=-\cos x-3$ являются первообразными для функции $f(x)=\sin x$.

2. Функции $F(x)=\ln x$, $F_1(x)=\ln kx$ являются первообразными для функции $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$.

3. Функции $F(x)=\arcsin x$, $F_1(x)=\arcsin x-0{,}5$ являются первообразными для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Теорема

Если $F(x)$ и $F_1(x)$ - первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $F_1(x)=F(x)+C$, где $C=\text{const}$.

Таким образом, множество всех первообразных для функции $f(x)$ имеет вид $\{F(x)+C\}$.

1.2. Неопределенный интеграл и его свойства

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ на (a,b) называется множество всех её первообразных и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где $F(x)$ - одна из первообразных для функции $f(x)$.

Примеры

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1.$

Свойства неопределённого интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3. $\int df(x) = f(x) + C.$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ где $k = \text{const}.$

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = u(x)$ - дифференцируемая на (a,b) функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

1.3. Таблица основных интегралов

1. $\int 0dx = C \quad (C = \text{const}).$

2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0, \ \alpha \neq -1.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C, \quad \cos x \neq 0.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C, \quad \sin x \neq 0.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C, \quad k \neq 0.$

2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Непосредственное интегрирование

Выполняется с использованием тождественных преобразований подынтегральных функций, свойств и таблицы неопределённых интегралов.

Примеры

1. $\int 2\sqrt{x^3}dx = 2\int x^{\frac{3}{2}}dx = 2\dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = 2\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \dfrac{4}{5}\sqrt{x^5} + C.$

2. $\int \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(1 + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$

$= x + 2\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x + 4\sqrt{x} + C.$

3. $\int(7x-1)\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)dx = \int\left(7x\cdot x^3 - x^3 + 7x\cdot\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\right)dx = \int\left(7x^4 - x^3 - \dfrac{1}{x} + 7\right)dx =$

$= 7\int x^4 dx - \int x^3 dx - \int\dfrac{1}{x}dx + 7\int dx = \dfrac{7x^5}{5} - \dfrac{x^4}{4} - \ln|x| + 7x + C.$

4. $\int\dfrac{x^2-5}{x^4-25}dx = \int\dfrac{x^2-5}{\left(x^2\right)^2 - 5^2}dx = \int\dfrac{x^2-5}{\left(x^2-5\right)\left(x^2+5\right)}dx = \int\dfrac{dx}{x^2+5} = \int\dfrac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{5}} + C.$

5. $\int\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}dx = \begin{bmatrix} x^2-2x-3=0 \\ x_{1,2} = \dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \\ x_1 = 3, \quad x_2 = -1 \end{bmatrix} = \int\dfrac{(x-3)(x+1)}{x+1}dx = \int(x-3)dx = \dfrac{x^2}{2} - 3x + C.$

$$6. \int \frac{(3x-1)^2}{x}dx = \int \frac{9x^2-6x+1}{x}dx = \int\left(9x-6+\frac{1}{x}\right)dx = 9\cdot\int xdx - 6\cdot\int dx + \int\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{9x^2}{2} - 6x + \ln|x| + C.$$

$$7. \int e^x \cdot \left(\frac{3e^{-x}}{2}+\frac{4}{5}\right)dx = \int\left(\frac{3e^x\cdot e^{-x}}{2}+\frac{4}{5}e^x\right)dx = \int\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{5}e^x\right)dx = \frac{3}{2}\cdot\int dx - \frac{4}{5}\cdot\int e^x dx =$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{4}{5}e^x + C.$$

$$8. \int x^2\cdot\left(\frac{3\sin x}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)dx = \int\left(3\sin x + \frac{5}{x}\right)dx = 3\cdot\int \sin x dx + 5\cdot\int\frac{1}{x}dx = -3\cos x + 5\ln|x| + C.$$

$$9. \int 4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx = \int 2\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx = 2\cdot\int\sin xdx = -2\cos x + C.$$

$$10. \int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C.$$

$$11. \int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\frac{x+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx =$$

$$= \int\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \int x^{\frac{7}{6}}dx - \int x^{\frac{1}{6}}dx = \frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13} - \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + C = \frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13} - \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} + C.$$

$$12. \int\frac{2e^{5x}-e^{4x}}{e^{4x}}dx = \int\left(2e^x-1\right)dx = 2\cdot\int e^x dx - \int dx = 2e^x - x + C.$$

2.2. Подведение под знак дифференциала

В этом методе используют таблицу интегралов и свойство неопределённого интеграл: если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = u(x)$ - дифференцируемая на (a, b) функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$, а также определение дифференциала функции $f(x)$: $df(x) = f'(x)dx.$

Например:

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$ так как $\frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}(ax)'dx = \frac{1}{a} \cdot adx = dx$.
2. $dx = d(x + b)$.
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax + b)$.
4. $\sin x dx = -d(\cos x)$.
5. $\cos x dx = d(\sin x)$.
6. $e^x dx = d(e^x)$.
7. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.
8. $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2 + b\right)$.
9. $x^2 dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}d\left(x^3 + b\right)$.
10. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$.
11. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$.
12. $\frac{dx}{1 + x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$.
13. $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = d(\arcsin x)$.
14. $d\varphi(x) = \frac{1}{a}d(a\varphi(x) + b)$.

Примеры

1. $\int \sin 3x dx = \left[dx = \frac{1}{3} d(3x) \right] = \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

2. $\int \cos \frac{x}{5} dx = \left[dx = 5 d\left(\frac{x}{5}\right) \right] = 5 \int \cos \frac{x}{5} d\left(\frac{x}{5}\right) = 5 \sin \frac{x}{5} + C$.

3. $\int \frac{dx}{7x-2} = \left[dx = \frac{1}{7} d(7x-2) \right] = \frac{1}{7} \int \frac{d(7x-2)}{7x-2} = \frac{1}{7} \ln |7x-2| + C$.

4. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = [\sin x dx = -d(\cos x)] = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$.

5. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln x) \right] = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

6. $\int \frac{x dx}{x^2+9} = \left[x dx = \frac{1}{2} d(x^2+9) \right] = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{1}{2} \ln \left| x^2+9 \right| + C$.

7. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4} = \left[e^x dx = d\left(e^x\right) \right] = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C$.

8. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x} = \left[\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x) \right] = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C$.

9. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} = \left[\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x) \right] = \int \frac{d(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} = \ln \left| \operatorname{arctg} x \right| + C$.

$$10. \int \sqrt{4x^3-8}\cdot x^2dx = \left[x^2dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right) = \frac{1}{12}d\left(4x^3-8\right)\right] = \frac{1}{12}\int \left(4x^3-8\right)^{\frac{1}{2}} d\left(4x^3-8\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\frac{\left(4x^3-8\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(4x^3-8)^3} + C = \frac{1}{18}\sqrt{(4x^3-8)^3} + C.$$

2.3. Замена переменной

Этот метод является продолжением метода подведения под знак дифференциала в более сложных случаях.

Пусть $x = x(t)$ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале изменения t, а $f(x)$ – непрерывная функция на соответствующем интервале изменения x.

Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

Примеры

1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2} = \begin{bmatrix} \text{Замена :} \\ x = t^2 \\ dx = \left(t^2\right)' dt = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t+2} = 2\int \frac{(t+2)-2}{t+2}dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{2}{t+2}\right)dt = 2\int dt - 4\int \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t - 4\int \frac{d(t+2)}{t+2} = 2t - 4\ln|t+2| = \begin{bmatrix} \text{обратная} \\ \text{замена : } t = \sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x} - 4\ln\left|\sqrt{x}+2\right| + C.$$

2.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x+20} = \left[\begin{array}{l}\text{Выделим в знаменателе полный квадрат.} \\ x^2+4x+20=(x^2+4x+4)+16=(x+2)^2+16. \\ \text{Замена}: x+2=t;\ x=t-2;\ dx=dt; \\ x+1=t-2+1=t-1\end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{(t-1)dt}{t^2+16} = \int \frac{tdt}{t^2+16} - \int \frac{dt}{t^2+16} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+16)}{t^2+16} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+16\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{обратная замена}: \quad t=x+2; \\ t^2+16=x^2+4x+20\end{array}\right] = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+20\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.$$

3.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{Замена}: x=3\sin t,\ \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}= \\ =\sqrt{9(1-\sin^2 t)}=3\sqrt{\cos^2 t}=3\cos t; \quad dx=3\cos t\,dt\end{array}\right] =$$

$$= \int 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt = 9\int \cos^2 t\,dt = 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{9}{2}\int dt + \frac{9}{2}\int \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\int \cos 2t\,d(2t) = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C = \left[\text{Обратная замена}: \quad t=\arcsin\frac{x}{3}\right] =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right) + C.$$

4.

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Замена :} & \\ e^x = t & e^{2x} = t^2 \\ x = \ln t & dx = \frac{1}{t}dt \end{array}\right] = \int \frac{t^2 \frac{1}{t}dt}{t+1} = \int \frac{tdt}{t+1} = \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{t+1} = t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = t - \ln|t+1| + C = e^x - \ln\left|e^x+1\right| + C.$$

2.4. Интегрирование по частям

Пусть функции $u=u(x),\ v=v(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

или в укороченном виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Формула применяется для нахождения, например, интегралов вида *а)* $\int x^n \cos x dx,\ \int x^n \sin x dx,\ \int x^n e^x dx$ с выбором функции $u = x^n$;

б) $\int x^n \ln x dx$ с выбором функции $u = \ln x$;

в) $\int x^n \arcsin x dx,\ \int x^n \arccos x dx,\ \int x^n \mathrm{arctg}\, x dx,$ с выбором функции $u = \arcsin x$ и т.п.

После выбора функции $u=u(x)$ и дифференциала $dv = v'(x)dx$ находим дифференциал $du = u'(x)dx$ и функцию $v = \int v'(x)dx = \int dv\ (C=0)$. Подставив $u(x), v(x)$ и $du(x)$ в правую часть формулы, находим $\int v(x)du$.

Применение формулы интегрирования по частям не ограничивается интегралами приведённых типов.

Примеры

$$1. \int x\cos\frac{x}{3}dx = \begin{bmatrix} \text{Выбирасм} \quad u = x,\ dv = \cos\frac{x}{3}\,dx \\ \text{и находим} \quad du = x'\,dx = dx, \\ v = \int\cos\frac{x}{3}\,dx = 3\int\cos\frac{x}{3}d\,\frac{x}{3} = 3\sin\,\frac{x}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= x\cdot 3\sin\,\frac{x}{3} - \int 3\sin\,\frac{x}{3}\,dx = 3x\sin\,\frac{x}{3} - 3\cdot 3\int\sin\,\frac{x}{3}d\,\frac{x}{3} = 3x\cdot\sin\,\frac{x}{3} + 9\cos\,\frac{x}{3} + C.$$

$$2. \int(2x-5)\cdot e^{-7x}dx = \begin{bmatrix} \text{Выбираем} \quad u = 2x-5,\ dv = e^{-7x}dx \\ \text{и находим} \quad du = (2x-5)'dx = 2dx, \\ v = \int e^{-7x}dx = -\frac{1}{7}\int e^{-7x}d(-7x) = -\frac{1}{7}e^{-7x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x} + \int\frac{1}{7}e^{-7x}\cdot 2dx = -\frac{2x-5}{7}e^{-7x} + \frac{2}{7}\int e^{-7x}dx =$$

$$= -\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x} + \frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)e^{-7x} + C == -\frac{2x-5}{7}\cdot e^{-7x} - \frac{2}{49}e^{-7x} + C.$$

$$3. \int\frac{\ln 9x}{x^3}dx = \int\frac{1}{x^3}\cdot\ln 9xdx = \int x^{-3}\cdot\ln 9xdx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \ln 9x,\ dv = x^{-3}dx,\ \text{тогда} \\ du = (\ln 9x)'\,dx = \frac{9}{9x}dx = \frac{dx}{x},\ v = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2} \end{bmatrix} = -\frac{\ln 9x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln 9x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = -\frac{\ln 9x}{2x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2} + C = -\frac{2\ln 9x + 1}{4x^2} + C.$$

$$4. \int x\operatorname{arctg} x dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot x dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \;\; dv = xdx, \;\; \text{тогда} \\ du = (\operatorname{arctg} x)' dx = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx == \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \left(x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x \right) + C.$$

$$5. \int x^2 \cdot 3^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2, \;\; dv = 3^x dx, \quad \text{тогда} \\ du = 2xdx, \;\; v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{array} \right] = \frac{x^2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} \cdot 2xdx =$$

$$= \frac{x^2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \cdot \int x \cdot 3^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \;\; dv = 3^x dx, \quad \text{и} \\ du = dx, \;\; v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x^2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \cdot \left(\frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} dx \right) = \frac{x^2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \cdot \left(\frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C \right) =$$

$$= \frac{x^2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2x \cdot 3^x}{\ln^2 3} + \frac{2 \cdot 3^x}{\ln^3 3} + C.$$

Рассмотрим два нетиповых примера.

$$6. \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u=\sqrt{1+x^2};\ dv = dx,\ \text{тогда} \\ du = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};\ v=\int dx = x \end{array}\right] =$$

$$= x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int x\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int\left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{x^2+1}\,dx + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|,$$

тогда из равенства

$$\int\sqrt{1+x^2}dx = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}dx + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$$

находится

$$\int\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right) + C.$$

$$7)\ \int e^x\cdot\sin 2xdx = \left[\begin{array}{l} u=e^x,\ dv=\sin 2xdx,\ \text{тогда} \\ du = e^x dx,\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right] = -\frac{e^x\cdot\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int e^x\cdot\cos 2xdx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u=e^x,\ dv=\cos 2xdx \\ du=e^x dx,\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right] = -\frac{e^x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int e^x\sin 2x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{e^x\cos 2x}{2} + \frac{e^x\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^x\sin 2x\,dx$$

Из равенства

$$\int e^x \cdot \sin 2xdx = -\frac{e^x \cdot \cos 2x}{2} + \frac{e^x \cdot \sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^x \cdot \sin 2xdx$$

находится

$$\frac{5}{4}\int e^x \cdot \sin 2xdx = -\frac{e^x \cdot \cos 2x}{2} + \frac{e^x \cdot \sin 2x}{4}$$

или

$$\int e^x \cdot \sin 2xdx = \frac{1}{5}e^x \cdot \sin 2x - \frac{2}{5}e^x \cdot \cos\ 2x + C.$$

2.5. Интегрирование рациональных дробей

Функция $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется рациональной дробью, где

$$P_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$Q_m(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m -$$

многочлены степени n и m соответственно.

Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ будет правильной, если $n < m$; в противном случае $(n \geq m)$ дробь будет неправильной.

Дроби: $\frac{x^2+1}{x^3+[illegible]}$; $\frac{3x+1}{x^2+[illegible]}$ являются правильными, а дроби $\frac{x^3+[illegible]x^2+1}{x^3+[illegible]}$; $\frac{x^4+[illegible]x^3+[illegible]}{x^2+[illegible]}$ - неправильными.

Если дробь неправильная, то путём деления числителя на знаменатель её можно представить в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби.

Пример

Представить дробь $\dfrac{x^4+8x^3+5}{x^2+5x+2}$ в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби.

Решение

Дробь является неправильной, так как степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе.

Произведём деление двух многочленов:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^4+8x^3+5 \\ x^4+5x^3+2x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+5x+2 \\ \hline x^2+3x-17 \end{array} \\
\quad -\begin{array}{l} 3x^3-2x^2+5 \\ 3x^3+15x^2+6x \end{array} & \\
\quad\quad -\begin{array}{l} -17x^2-6x+5 \\ -17x^2-85x-34 \end{array} & \\
79x+39 &
\end{array}
$$

Деление производится до тех пор, пока степень многочлена в остатке не будет меньше степени делителя.

Таким образом, $\dfrac{x^4+8x^3+5}{x^2+5x+2}=x^2+3x-17+\dfrac{79x+39}{x^2+5x+2}$. Очевидно, что интегрирование целой части (т. е. многочлена) не представляет никаких трудностей, поэтому интегрирование любой рациональной дроби сводится к интегрированию правильной рациональной дроби.

Интегрирование правильной рациональной дроби можно разделить на несколько этапов:

1. Разложить знаменатель правильной рациональной дроби на множители вида $(x-a)^k$ и $\left(x^2+px+q\right)^l$, где $a, p, q -$ действительные числа, k и l – натуральные числа, корни квадратного трёхчлена $x^2+px+q -$ комплексные числа.

2. По виду множителей в знаменателе разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей по правилу:

всякому множителю вида $(x-a)^k$ в разложении соответствует сумма k – дробей вида

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

всякому множителю вида $(x^2+px+q)^l$ в разложении соответствует сумма l – дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_l, N_l$ – неопределённые коэффициенты.

3. Найти неопределённые коэффициенты

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_l, N_l;$$

для этого полученную сумму простейших дробей привести к общему знаменателю и сравнить числители заданной и полученной дробей. Найти неопределённые коэффициенты можно двумя способами:

а) приравнять коэффициенты двух многочленов (числителей) при одинаковых степенях x и решить полученную систему уравнений;

б) сравнить многочлены (числители) при конкретных значениях x; удобнее выбрать такие значения x, при которых знаменатель рассматриваемой дроби равен нулю или любые другие значения (метод частных значений).

4. Проинтегрировать полученные простейшие дроби. При интегрировании получаются интегралы следующего вида:

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int\frac{A_k}{(x-a)^k}dx = A_k\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx$ (см. интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен).

$\int \frac{B_l x + C_l}{(x^2 + px + q)^l} dx$ (интегрирование таких дробей в данном методическом пособии не рассматривается).

Примеры

1. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} -$$

неправильная рациональная дробь, преобразуем её

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{r} x^5 + x^4 - 8 \\ x^5 - 4x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x^3 - 4x \\ \hline x^2 + x + 4 \end{array} \\
\quad -\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 - 8 \\ x^4 - 4x^2 \end{array} & \\
\qquad -\begin{array}{r} 4x^3 + 4x^2 - 8 \\ \underline{4x^3 - 16x} \end{array} & \\
\qquad\qquad 4x^2 + 16x - 8. &
\end{array}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

Следовательно

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \int \left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} \right) dx =$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx.$$

Последний интеграл рассмотрим отдельно. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ является правильной рациональной дробью.

Разложим знаменатель этой дроби на множители

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x^2-4)}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Определим коэффициенты A, B и C. Для этого приведём полученную сумму дробей к общему знаменателю

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

и приравняем числители

$$4x^2+16x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Определим коэффициенты A, B и C методом частных значений, для этого подставим конкретные значения x в обе части вышестоящего выражения; в качестве конкретных значений x рассмотрим те значения, при которых знаменатель рассматриваемой дроби обращается в нуль.

$$x=0 \quad -8=-4A,\ A=2,$$
$$x=2 \quad 40=8B,\ B=5,$$
$$x=-2 \quad -24=8C,\ C=-3.$$

Итак, имеем

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}.$$

Интегрируем данную функцию

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x\cdot(x-2)(x+2)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx=$$

$$=2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Возвращаемся к исходному интегралу

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

2. $\int\frac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}\,dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x)=\dfrac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}$ – правильную рациональную дробь.

Разложим знаменатель на множители

$$(x^2-2x+1)(x^2-1)=(x-1)^2(x-1)(x+1)=(x-1)^3(x+1).$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

$$\frac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+1}.$$

Определим коэффициенты A, B, C и D, для этого приведем сумму простейших дробей к общему знаменателю

$$\frac{2x^3-2x^2+5x+1}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x-1)^2(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x+1)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)}$$

и приравняем числители

$$2x^3-2x^2+5x+1=A(x-1)^2(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x+1)+D(x-1)^3.$$

Определим коэффициенты A, B, C и D методом частных значений, подставив эти значения в обе части, в качестве конкретных значений x выбираем $x = 1$; $x = -1$ (это те значения x при которых знаменатель рассматриваемой дроби равен 0) и два значения $x = 0$ и $x = 2$ выбираем произвольно.

$$\begin{aligned}
x=1:&\quad 6=2C \Rightarrow C=3;\\
x=-1:&\quad -8=-8D \Rightarrow D=1;\\
x=0:&\quad 1=A-B+C-D;\\
x=2:&\quad 19=3A+3B+3C+D.
\end{aligned}$$

подставив значения $C = 3$ и $D = 1$ в последние два уравнения получаем

$$\begin{cases} A-B=-1 \\ 3A+3B=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=2 \end{matrix}$$

Итак, имеем

$$\frac{2x^3-2x^2-5x+1}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{x+1}$$

Интегрируем данную функцию

$$\int\frac{2x^3-2x^2-5x+1}{(x-1)^3(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+\ln|x+1|+C.$$

3. $\int\frac{x^2-7x+15}{x^3-2x^2+5x}\,dx.$

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x)=\frac{x^2-7x+15}{x^3-2x^2+5x}$ Это правильная рациональная дробь.

Разложим знаменатель дроби на множители

$$\frac{x^2-7x+15}{x^3-2x^2+5x}=\frac{x^2-7x+15}{x(x^2-2x+5)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{x^2-7x+15}{x(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$

Определим коэффициенты A, B и C

$$\frac{x^2-7x+15}{x(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}=\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)x}{x(x^2-2x+5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-7x+15=A(x^2-2x+5)+(Bx+C)x;$$

$$x^2-7x+15=Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx;$$

$$x^2-7x+15=(A+B)x^2+(C-2A)x+5A$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{aligned}
x^2:&\quad 1=A+B;\\
x:&\quad -7=C-2A;\\
x^0:&\quad 15=5A\Rightarrow A=3\\
&\qquad\qquad\qquad B=-2\\
&\qquad\qquad\qquad C=-1.
\end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\frac{x^2-7x+15}{x(x^2-2x+5)}=\frac{3}{x}+\frac{-2x-1}{x^2-2x+5}=\frac{3}{x}-\frac{2x+1}{x^2-2x+5}$$

Проинтегрируем данную функцию

$$\int\frac{x^2-7x+15}{x(x^2-2x+5)}\,\mathrm{dx}=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{2x+1}{x^2-2x+5}\right)dx=$$

$$=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx=3\ln|x|-\int\frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx.$$

Рассмотрим второй интеграл отдельно.

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)^2+4}\,dx = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t+1)+1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{2t+3}{t^2+4}\,dt =$$

$$= \int \frac{2tdt}{t^2+4} + 3\int \frac{dt}{t^2+4} = \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \ln\left|t^2+4\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \ln\left|(x-1)^2+4\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Тогда окончательно имеем

$$\int \frac{x^2-7x+15}{x(x^2-2x+5)}\,\mathrm{dx} = 3\ln|x| - \ln\left|x^2-2x+5\right| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

2.6. Интегрирование тригонометрических функций

а) $\int \sin^m ax \cdot \cos^n axdx$

Пусть хотя бы одно из чисел m или n является нечетным положительным числом. Интеграл находится методом замены переменной; при этом

если m – нечетное число, то нужно сделать замену $\cos ax = t$,

если n – нечетное число, то нужно сделать замену $\sin ax = t$.

При таких подстановках нужно предварительно представить функцию, имеющую нечетную положительную степень в виде произведения первой и четной степени и преобразовать четную степень тригонометрической функции с помощью основного тригонометрического тождества: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Если оба числа m и n являются нечетными положительными числами, то за новую переменную обозначить ту из функций $\cos ax$ и $\sin ax$, степень которой больше, а оставшийся множитель преобразовать так же, как указано выше.

Примеры

$$1.\ \int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos^5 x}} = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin xdx}{\sqrt{\cos^5 x}} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot \sin xdx}{(\cos x)^{5/2}} = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \\ \sin xdx = -dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\cdot(-dt)}{t^{5/2}} = -\int \frac{dt}{t^{5/2}} + \int \frac{t^2 dt}{t^{5/2}} = -\int t^{-5/2}dt + \int t^{-1/2}dt = -\frac{t^{-3/2}}{-3/2} + \frac{t^{1/2}}{1/2} + C =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{t^3}} + 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{3\sqrt{\cos^3 x}} + 2\sqrt{\cos x} + C.$$

$$2.\ \int \cos^5 3xdx = \int \cos^4 3x \cdot \cos 3xdx = \int (\cos^2 3x)^2 \cdot \cos 3xdx =$$

$$= \int (1-\sin^2 3x)^2 \cdot \cos 3xdx = \left| \begin{array}{l} \sin 3x = t \\ 3\cos 3\, xdx = dt \\ \cos 3\, xdx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (1-t^2)^2 \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int (1-2t^2+t^4)dt = \frac{1}{3}\left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + \frac{1}{15}\sin^5 3x + C.$$

3. $\int \cos^9 2x \cdot \sin^3 2xdx = \int \cos^9 2x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin 2xdx =$

$$= \int \cos^9 2x \cdot (1 - \cos^2 2x) \cdot \sin 2xdx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2\sin 2xdx = dt \\ \sin 2xdx = -\dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int t^9 \cdot (1 - t^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^9 - t^{11})dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{t^{12}}{12} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{20}\cos^{10} 2x + \frac{1}{24}\cos^{12} 2x + C.$$

б) $\int \sin^m ax \cdot \cos^n axdx$

Если оба числа m и n являются четными положительными числами, то воспользуемся формулами понижения степени:

$$\sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2},$$

$$\cos^2 ax = \frac{1 + \cos 2ax}{2}$$

Примеры

$$1.\ \int \sin^2 \frac{x}{3}\, dx = \int \frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos\frac{2x}{3}\, dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3} + C = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3} + C.$$

$$2.\ \int \cos^4 3x dx = \int (\cos^2 3x)^2\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+2\cos\ 6x + \cos^2 6x}{4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos\ 6x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 6x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin\ 6x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos\ 12x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\int \cos\ 12x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{12}\sin\ 6x + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12}\sin\ 12x + C =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{12}\sin\ 6x + \frac{1}{96}\sin\ 12x + C.$$

$$3.\ \int \sin^4 \frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}\, dx = \int \left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)^4 dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin x\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (\sin^2 x)^2\, dx = \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int dx - \frac{2}{64}\int \cos 2x dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{64} - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{64} - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{128}\int dx + \frac{1}{128}\int \cos 4x dx =$$

[illegible]

в) $\int \sin ax \cdot \cos bx dx;$ $\int \cos ax \cdot \cos bx dx;$ $\int \sin ax \cdot \sin bx dx,$

где $a \neq b$.

При интегрировании указанных выше произведений синусов и косинусов нужно предварительно преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Примеры

1. $\int \sin 5x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x)dx = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{7}\cos 7x) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}\cos 3x) + C$

$= -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

2. $\int \cos 3x \cdot \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 4x)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}\sin 10x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + C =$

$= \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

г) $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$

Здесь $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. В этом случае нужно использовать универсальную тригонометрическую подстановку

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

а затем ввести новую переменную

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};\quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t;\quad x = 2\operatorname{arctg} t;\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример

$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Преобразуем знаменатель подынтегральной функции

$$5-4\sin x+3\cos x = 5 - \frac{8\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{3\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{5+5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-8\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-8\operatorname{tg}\frac{x}{2}+8}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\right)^2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Возвращаемся к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\int \frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-4\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4\right)}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t \\ \frac{x}{2}=\mathrm{arctg}\,t \\ x=2\mathrm{arctg}\,t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|=\int \frac{(1+t^2)}{2(t^2-4t+4)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2-4t+4}=\int \frac{dt}{(t-2)^2}=\int (t-2)^{-2}\,dt=\frac{(t-2)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t-2}+C=-\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}+C.$$

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Непосредственное интегрирование

1. $a)\ \int \sqrt{x}\cdot(x+1)(2x+3)dx;$ б) $\int \frac{5e^{2x}+\sqrt{x^3}\cdot e^x}{e^x}dx.$

2. $a)\ \int \frac{(x+3)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int \frac{4-\sin^2 x}{2-\sin x}dx.$

3. $a)\ \int \frac{1}{x^3}\left(3x^2-\frac{1}{x^6}\right)dx;$ б) $\int \frac{x^2-6}{x^4-36}dx.$

4. $a)\int \frac{5x^2-4x+12}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{1-4\sin^2 x}{\sin^2 x}dx.$

5. $a)\int \frac{(\sqrt{x}+2)x}{\sqrt[3]{x}}dx;$ б) $\int \frac{x^2-4x+3}{x-3}dx.$

6. $a)\int x(\sqrt{x}-9)(\sqrt{x}+9)\,dx;$ б) $\int \frac{5x\sin x+2}{x}dx.$

7. $a)\int \frac{5}{x^2}\left(\frac{x}{25}-x^2\right)dx;$ б) $\int \frac{(81-x^2)dx}{x-9}.$

8. $a)\int \left(\frac{3}{x}+4\right)\cdot(\sqrt{x}+1)dx;$ б) $\int \frac{6+x^2}{36-x^4}\,dx.$

9. $a)\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot xdx;$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2+3}\,dx}{x^2+3}.$

10. $a)\int \frac{7x^2+6x-5}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{x^2-6x+5}{x-5}dx.$

11. $a)\int \frac{7\sqrt{x}+x\cdot\sqrt[3]{x}}{x^2}dx;$ б) $\int \frac{(1-\cos^2 x)dx}{x^2\cdot\sin^2 x}.$

12. $a)\int (x+2)(1-x)\sqrt{x}\,dx;$ б) $\int \frac{4e^{5x}-x^4\cdot e^{4x}\,dx}{e^{4x}}dx.$

13. $a)\int x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^4}\,dx;$ б) $\int \frac{\sin^2 5x+\cos^2 5x}{\sqrt{16-x^2}}dx.$

14. $a)\int (x^2\cdot\sqrt{x}-4x^3+3)dx;$ б) $\int (1+x+tg^2 x)dx.$

15. $a)\int x\cdot\left(\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^2}+3\right)dx;$ б) $\int(4+ctg^2x)\,dx$.

16. $a)\int\frac{(x^3\sqrt{x}-2x)dx}{x^3};$ б) $\int\frac{\sqrt{64-x^2}}{64-x^2}dx$.

17. $a)\int\frac{\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}{x}dx;$ б) $\int 4\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}dx$.

18. $a)\int\frac{16x^4-1(x^3\sqrt{x}-2x)}{(2x-1)(2x+1)}dx;$ б) $\int\frac{20dx}{\cos(1+tg^2x)}dx$.

19. $a)\int\frac{x^3-2x^2+x}{x-1}dx;$ б) $\int e^x(12e^{-x}+3)\,dx$.

20. $a)\int x\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\frac{9}{x}\,dx;$ б) $\int\frac{(x-3)(x+3)}{x^4-81}dx.$

21. $a)\int(7x+2)\left(\frac{7}{x}-1\right)dx;$ б) $\int\frac{x^2\cdot\cos x\,dx}{2\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$.

22. $a)\int x^3\left(x^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx;$ б) $\int\frac{x^2-6x-8}{x-2}dx.$

23. $a)\int\frac{x^3-16x}{x+4}dx;$ б) $\int\frac{x^3e^x+3e^{2x}}{e^x}dx.$

24. $a)\int\frac{x^3-2\sqrt[3]{x}+3}{x}dx;$ б) $\int\frac{1+x\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

25. $a)\int\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int\frac{x\cdot(x^2+1)}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx.$

26. $a)\int\frac{3}{x^3}\left(\frac{x^2}{3}+x^3+1\right)dx;$ б) $\int\left(e^x+4e^{2x}\right)e^{-x}\,dx.$

27. $a)\int\frac{3x^2+1}{x\sqrt{x}}dx;$ б) $\int 3x^2\cdot\left(\frac{1}{x^3\sin x}+\frac{1}{3x^2}\right)dx.$

28. $a)\int(3x^2-1)\cdot x\sqrt{x}\,dx;$ б) $\int\frac{x^2+3}{x^4-9}dx.$

29. $a)\int\frac{2x\sqrt{x}+3x+12}{x}dx;$ б) $\int\frac{3x^2}{\cos x}\left(\frac{2\cos x}{x^3}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)dx\,.$

30. $a)\int\frac{(3x+4)(x-1)}{\sqrt{x}}dx;$ б) $\int\frac{2dx}{1+\cos 2x}\,.$

3.2. Подведение под знак дифференциала

1. $a)\int 3\cos 7x dx;$ $б)\int\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{3}+1\right)};$ $в)\int e^{\sin x-2}\cos x dx.$

2. $a)\int 4e^{-5x}dx;$ $б)\int\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+7\right)};$ $в)\int\frac{\sin x dx}{\cos x+1}.$

3. $a)\int 2\sin\frac{x}{10}dx;$ $б)\int\frac{dx}{(5x+8)^2};$ $в)\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

4. $a)\int \frac{7dx}{\cos^2 3x}$; б) $\int e^{\frac{x}{2}+3}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{\ln x+2}}{x}dx$.

5. $a)\int \frac{3dx}{\sin^2 \frac{x}{4}}$; б) $\int \cos(2-5x)dx$; в) $\int \frac{xdx}{x^2+3}$.

6. $a)\int \frac{5dx}{9+4x^2}$; б) $\int \sin\left(\frac{1}{3}x+4\right)dx$; в) $\int \cos\left(x^3+3\right)x^2dx$.

7. $a)\int \frac{6dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; б) $\int (5x+1)^8\,dx$; в) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx}{\cos^2 x}$.

8. $a)\int 2\cos\frac{x}{4}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}}$; в) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^3 x\cdot\sin^2 x}$.

9. $a)\int 3e^{\frac{x}{7}}dx$; б) $\int \frac{dx}{(5x+2)^3}$; в) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 x dx}{1+x^2}$.

10. $a)\int 5\sin 8x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{4}+1\right)}$; в) $\int \frac{\operatorname{arsin}^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $a)\int \frac{3dx}{\cos^2 \frac{x}{10}}$; б) $\int (7x-2)^5 dx$; в) $\int \operatorname{ctg}\, xdx$. .

12. $a)\int \frac{4dx}{\sin^2 10x}$; б) $\int e^{\frac{x}{5}+2}dx$; в) $\int \cos^2 x\sin x\,dx$. .

13. а) $\int \frac{7dx}{25+9x^2}$; б) $\int \cos\left(\frac{x}{4}-7\right)dx$; в) $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+5}$.

14. а) $\int \frac{3dx}{\sqrt{36-25x^2}}$; б) $\int \sin\left(\frac{x}{7}+4\right)dx$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$.

15. а) $\int 2\cos 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{3}+1}}$; в) $\int \frac{x^2dx}{x^3+4}$.

16. а) $\int 3e^{-\frac{x}{7}}dx$; б) $\int e^{-3x^2}xdx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x-5)}$.

17. а) $\int 25\sin\frac{x}{9}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}\cdot\cos^2 x}$; в) $\int \frac{dx}{\cos^2(4x+7)}$.

18. а) $\int \frac{6dx}{\cos^2 5x}$; б) $\int \frac{e^{-2ctgx}dx}{\sin^2 x}$; в) $\int e^{-\frac{x}{7}+2}dx$.

19. а) $\int \frac{4dx}{\sin^2\frac{x}{6}}$; б) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^2 x}$; в) $\int \frac{dx}{5x-3}$.

20. а) $\int \frac{3dx}{16+25x^2}$; б) $\int \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int \left(3x+\frac{1}{7}\right)^4 dx$.

21. а) $\int \frac{5dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; б) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$; в) $\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$.

22. $a) \int 5\cos 9x dx;$ $\quad б) \int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{5}+3\right)};$ $\quad в) \int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}.$

23. $a) \int 5e^{5x} dx;$ $\quad б) \int \frac{e^x dx}{e^x - 4};$ $\quad в) \int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{8}-3\right)}.$

24. $a) \int 3\sin\frac{2}{5}x dx;$ $\quad б) \int \frac{dx}{\sqrt{x+7}};$ $\quad в) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$

25. $a) \int \frac{4dx}{\cos^2\frac{x}{12}};$ $\quad б) \int e^{-3x^2} x dx;$ $\quad в) \int e^{-4x+5} dx.$

26. $a) \int \frac{dx}{\sin^2\frac{4x}{5}};$ $\quad б) \int e^{2x^3} x^2 dx;$ $\quad в) \int \cos(3x+8) dx.$

27. $a) \int \frac{6dx}{9+16x^2};$ $\quad б) \int \frac{\cos(tgx)dx}{\cos^2 x};$ $\quad в) \int \sin\left(\frac{x}{10}+10\right) dx.$

28. $a) \int \frac{7dx}{\sqrt{64-25x^2}};$ $\quad б) \int \frac{dx}{7x-5};$ $\quad в) \int \frac{e^{\mathrm{ctgx}} dx}{\sin^2 x}.$

29. $a) \int \sin\frac{3x}{7} dx;$ $\quad б) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-7}};$ $\quad в) \int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\, x}}{1+x^2} dx.$

30. $a) \int e^{-\frac{2x}{5}} dx;$ $\quad б) \int \sqrt{4x-5} dx;$ $\quad в) \int \frac{dx}{\arcsin^3 x \cdot \sqrt{1-x^2}}.$

3.3. Замена переменной

1. $a)\ \int \frac{dx}{e+2\sqrt{x}}$; $\quad$ $б)\ \int \frac{e^{3x}dx}{e^x+3}$ $\quad$ $[e^x=t]$.

2. $a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$; $\quad$ $б)\ \int x(5x-1)^{19}dx$ $\quad$ $[5x-1=t]$.

3. $a)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$; $\quad$ $б)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ $\quad$ $\left[x=\frac{2}{t}\right]$.

4. $a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; $\quad$ $б)\ \int \frac{xdx}{(3-x)^7}$ $\quad$ $[3-x=t]$.

5. $a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$; $\quad$ $б)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ $\quad$ $\left[x=\frac{2}{t}\right]$.

6. $a)\ \int \frac{dx}{x-3\sqrt{x}}$; $\quad$ $б)\ \int \frac{dx}{e^x-2}$ $\quad$ $[e^x=t]$.

7. $a)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$; $\quad$ $б)\ \int x(1-3x)^8dx$ $\quad$ $[1-3x=t]$.

8. $a)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; $\quad$ $б)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ $\quad$ $\left[x=\frac{3}{t}\right]$.

9. $a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$; $\quad$ $б)\ \int \frac{xdx}{(4x+5)^{10}}$ $\quad$ $[4x+5=t]$.

10. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}+4\sqrt{x}}$; $\quad$ б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$ $\quad \left[x=\frac{3}{t}\right]$.

11. $a)\int\frac{dx}{x+3\sqrt{x}}$; $\quad$ б) $\int\frac{dx}{e^x+5}$ $\quad [x=\ln t]$.

12. $a)\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{3x+2}}$; $\quad$ б) $\int x(3-2x)^{11}dx$ $\quad [3-2x=t]$.

13. $a)\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+36}}$; $\quad$ б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+25}}$ $\quad \left[x=\frac{5}{t}\right]$.

14. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$; $\quad$ б) $\int\frac{xdx}{(3x+4)^6}$ $\quad [3x+4=t]$.

15. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}-4\sqrt{x}}$; $\quad$ б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$ $\quad \left[x=\frac{5}{t}\right]$.

16. $a)\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$; $\quad$ б) $\int\frac{e^{3x}dx}{e^x-4}$ $\quad [x=\ln t]$.

17. $a)\int\frac{(1-x)dx}{\sqrt{x-5}}$; $\quad$ б) $\int x(3x+1)^8dx$ $\quad [3x+1=t]$.

18. $a)\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+16}}$; $\quad$ б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$ $\quad \left[x=\frac{4}{t}\right]$.

19. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}}$; $\quad$ б) $\int\frac{xdx}{(5-x)^8}$ $\quad [5-x=t]$.

20. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}+9\sqrt{x}}$; $\quad$ б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$. $\quad \left[x=\frac{3}{t}\right]$.

21. $a)\int\frac{dx}{x-7\sqrt{x}}$; $\quad$ $б)\int\frac{dx}{e^x-4}$ $\quad[x=\ln t]$.

22. $a)\int\frac{(x-3)dx}{\sqrt{5x-1}}$; $\quad$ $б)\int x(5x+3)^9\,dx$ $\quad[5x+3=t]$.

23. $a)\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-25}}$; $\quad$ $б)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$ $\quad\left[x=\frac{4}{t}\right]$.

24. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}$; $\quad$ $б)\int\frac{xdx}{(3-x)^9}$ $\quad[3-x=t]$.

25. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}-9\sqrt{x}}$; $\quad$ $б)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-49}}$ $\quad\left[x=\frac{7}{t}\right]$.

26. $a)\int\frac{dx}{x-7\sqrt{x}}$; $\quad$ $б)\int\frac{e^{3x}dx}{e^x-3}$ $\quad[e^x=t]$.

27. $a)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7x+5}}$; $\quad$ $б)\int x(2x-5)^5\,dx$ $\quad[2x-5=t]$.

28. $a)\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+25}}$; $\quad$ $б)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+64}}$ $\quad\left[x=\frac{8}{t}\right]$.

29. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}}$; $\quad$ $б)\int\frac{xdx}{(3x+1)^7}$ $\quad[3x+1=t]$.

30. $a)\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}+49\sqrt{x}}$; $\quad$ $б)\int\frac{dx}{x\sqrt{81-x^2}}$ $\quad\left[x=\frac{9}{t}\right]$.

3.4. Интегрирование по частям

1. $a)\int x\cos\frac{x}{3}dx;$ $б)\int \ln(x+4)dx;$ $в)\int\sqrt{x^2+9}\,dx.$

2. $a)\int (2x+1)e^{-3x}dx;$ $б)\int \arcsin 5x dx;$ $в)\int \cos\ln 2x dx.$

3. $a)\int\left(\frac{x}{2}-1\right)\sin 2x dx;$ $б)\int (x+4)\ln x dx;$ $в)\int e^{3x}\cos x dx.$

4. $a)\int (8x+3)\cos 8x dx;$ $б)\int \ln 8x dx;$ $в)\int \sin(15\ln x)dx.$

5. $a)\int (x+4)\ln 5x dx;$ $б)\int (x^2-1)5^{-x}dx;$ $в)\int\sqrt{x^2-1}\,dx.$

6. $a)\int\left(1-\frac{5}{2}x\right)\sin 5x dx;$ $б)\int (2x-5)\ln x dx;$ $в)\int e^x\sin\frac{x}{4}dx.$

7. $a)\int x\cos\left(\frac{x}{5}-1\right)dx;$ $б)\int \operatorname{arctg} 2x dx;$ $в)\int e^{4x}\sin x dx.$

8. $a)\int\left(\frac{x}{5}+7\right)e^{0,1x}dx;$ $б)\int x\operatorname{arctg} x dx;$ $в)\int \sin\ln x dx.$

9. $a)\int (7x+1)\sin\frac{x}{7}dx;$ $б)\int x^{-5}\ln x dx;$ $в)\int \operatorname{arctg}^2 x dx.$

10. $a)\int x\cos\left(5-\frac{x}{10}\right)dx;$ $б)\int \arccos 3x dx;$ $в)\int e^x\sin 2x dx.$

11. $a)\int (x^2-2x)\ln x dx;$ $б)\int x\cdot 10^{5x}dx;$ $в)\int e^{3x}\cdot\cos x dx.$

12. $a)\int \ln 12x dx;$ $б)\int x(\cos^2 x-\sin^2 x)dx;$ $в)\int\sqrt{x^2+7}\,dx.$

13. $a)\int x^2\sin x dx;$ $б)\int \ln(7x+9)dx;$ $в)\int \arcsin^2 x dx.$

14. $a)\int (2x+7)\cos\frac{1}{7}x dx;$ $б)\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx;$ $в)\int e^{5x}\cdot\sin x dx.$

15. $a) \int x \cdot e^{x+100} dx$; $\quad$ $б) \int \ln 12x\, dx$; $\quad$ $в) \int \cos \ln 5x dx$.

16. $a) \int (12x+1) \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$; $\quad$ $б) \int \left(x^2 - 4x + 4\right) \ln x dx$; $\quad$ $в) \int \sin(5 \ln x) dx$.

17. $a) \int (x+7) \cdot \sin 7x dx$; $\quad$ $б) \int x^{100} \cdot \ln x\, dx$; $\quad$ $в) \int e^{20x} \cdot \cos x dx$.

18. $a) \int x \cdot \cos(7x+9)\, dx$; $\quad$ $б) \int \ln(10-x)\, dx$; $\quad$ $в) \int \sqrt{x^2 - 10}\, dx$.

19. $a) \int 2x \sin 4x \cdot \cos 4x\, dx$; $\quad$ $б) \int x^2 \cdot \ln x dx$; $\quad$ $в) \int e^x \cdot \cos 12x dx$.

20. $a) \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x dx$; $\quad$ $б) \int x^2 \cdot e^{3x} dx$; $\quad$ $в) \int \sqrt{x^2 + 12}\, dx$.

21. $a) \int x \cdot \sin \pi x dx$; $\quad$ $б) \int x^5 \cdot \ln 5x dx$; $\quad$ $в) \int \arccos^2 x\, dx$.

22. $a) \int x \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$; $б) \int x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$; $\quad$ $в) \int \sin 3x dx$.

23. $a) \int (7x-4) \cdot e^{4-x} dx$; $\quad$ $б) \int \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$; $\quad$ $в) \int \cos(3 \ln x)\, dx$.

24. $a) \int (x+10) \ln 10x dx$; $\quad$ $б) \int (1+x)^2 \cdot e^x dx$; $\quad$ $в) \int \sin \ln 7x\, dx$.

25. $a) \int \lg(10x + 0{,}5)\, dx$; $\quad$ $б) \int x \cdot \cos \frac{2x}{\pi} dx$; $\quad$ $в) \int 2 \sin \ln x \cdot \cos \ln x\, dx$.

26. $a) \int (x+9) \cdot \sin \frac{x}{9} dx$; $\quad$ $б) \int \left(1 + x^2\right)^2 \cdot \ln x\, dx$; $\quad$ $в) \int 2e^x \cdot \sin x \cos x dx$.

27. $a) \int \left(9 - \frac{7}{2} x \right) \cdot \sin 2x dx$; $\quad$ $б) \int \arccos 2x\, dx$; $\quad$ $в) \int \frac{e^x \cdot \sin x}{\operatorname{tg} x} dx$.

28. $a) \int x \cdot \sin\left(9 - \frac{7x}{2} dx \right)$; $\quad$ $б) \int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$; $\quad$ $в) \int \cos \ln x\, dx$.

29. $a)\int (x+7)\cdot\cos(x+7)dx$; $\quad б)\int x\cdot\ln x^7\,dx$; $\quad в)\int e^x\cdot(1+\cos 3x)dx$.

30. $a)\int \left(x^2-2x-3\right)\cdot\ln x dx$; $\quad б)\int \frac{x\cdot\sin^3 x}{1-\cos^2 x}dx$; $\quad в)\int \frac{\sin 2x}{e^{2x}}dx$.

3.5. Интегрирование рациональных дробей

1. $a)\int \frac{2x+3}{x^2-2x+5}dx$; $\quad б)\int \frac{8x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

   $в)\int \frac{2x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; $\quad г)\int \frac{x^5+7x^3+x^2+12x+1}{x^4+5x^2+4}dx$.

2. $a)\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$; $\quad б)\int \frac{4x^2-11x+3}{x^3-4x^2+3x}dx$;

   $в)\int \frac{2x^2+4x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; $\quad г)\int \frac{x^5+6x^3+x^2+5x+3}{x^4+4x^2+3}dx$.

3. $a)\int \frac{1-2x}{x^2-2x+2}dx$; $\quad б)\int \frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

   $в)\int \frac{2x^2-5x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; $\quad г)\int \frac{x^5+5x^3+x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2}dx$.

4. $a)\int \frac{2-3x}{x^2+2x+2}dx$; $\quad б)\int \frac{2x^2+3x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

   $в)\int \frac{2x^2+7x+4}{x^3+4x^2+4x}dx$; $\quad г)\int \frac{x^5+7x^3+x^2+10x+3}{x^4+5x^2+6}dx$.

5. $a)\int \frac{3-2x}{x^2+4x+5}dx$; $\quad б)\int \frac{4x^2-7x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2 - 8x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx$; *г)* $\int \frac{x^5 + 8x^3 + x^2 + 16x + 2}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$.

6. *а)* $\int \frac{3x - 4}{x^2 + 4x + 5} dx$; *б)* $\int \frac{8x - 6}{x^3 + x^2 - 6x} dx$;

в) $\int \frac{2x^2 + 10x + 9}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx$; *г)* $\int \frac{x^5 + 9x^3 + x^2 + 20x + 3}{x^4 + 7x^2 + 12} dx$.

7. *а)* $\int \frac{5 + 2x}{x^2 - 6x + 10} dx$; *б)* $\int \frac{4x^2 - 6}{x^3 - x^2 - 6x} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$; *г)* $\int \frac{x^5 + 6x^3 + x^2 + 8x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

8. *а)* $\int \frac{2 - 5x}{x^2 + 6x + 10} dx$; *б)* $\int \frac{4x^2 - 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$; *г)* $\int \frac{x^5 + 6x^3 - x^2 + 5x - 3}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$.

9. *а)* $\int \frac{1 - 4x}{x^2 - 2x + 10} dx$; *б)* $\int \frac{4x^2 - 4x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 - 7x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$; *г)* $\int \frac{x^5 + 5x^3 - x^2 + 4x - 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$.

10. *а)* $\int \frac{5x + 3}{x^2 + 2x + 10} dx$; *б)* $\int \frac{2x^2 - 6x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 + 9x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$; *г)* $\int \frac{x^5 + 7x^3 - x^2 + 10x - 3}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$.

11. $а)\int\frac{5x+2}{x^2-6x+13}dx;$ $б)\int\frac{2x^2-3x-3}{x^3-4x^2+3x}dx;$

$в)\int\frac{3x^2-11x+9}{x^3-6x^2+9x}dx;$ $г)\int\frac{x^5+8x^3-x^2+16x-2}{x^4+6x^2+8}dx.$

12. $а)\int\frac{4-2x}{x^2+6x+13}dx;$ $б)\int\frac{2-3x}{x^3-3x^2+2x}dx;$

$в)\int\frac{2x^2+8x+9}{x^3+6x^2+9x}dx;$ $г)\int\frac{x^5+9x^3+x^2+18x+4}{x^4+7x^2+12}dx.$

13. $а)\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx;$ $б)\int\frac{-8x-6}{x^3-x^2-6x}dx;$

$в)\int\frac{3x^2-3x+2}{x^3-2x^2+x}dx;$ $г)\int\frac{x^5+6x^3-x^2+8x-1}{x^4+5x^2+4}dx.$

14. $а)\int\frac{3x-5}{x^2+4x+8}dx;$ $б)\int\frac{2x^2-6x-6}{x^3+x^2-6x}dx;$

$в)\int\frac{2x^2+5x+1}{x^3+2x^2+x}dx;$ $г)\int\frac{x^5+5x^3+2x^2+4x+6}{x^4+4x^2+3}dx.$

15. $а)\int\frac{2x+3}{x^2-4x+13}dx;$ $б)\int\frac{-5x-3}{x^3+2x^2-3x}dx;$

$в)\int\frac{2x^2-4x+4}{x^3-4x^2+4x}dx;$ $г)\int\frac{x^5+4x^3+2x^2+3x+4}{x^4+3x^2+2}dx.$

16. $а)\int\frac{3x-7}{x^2+4x+13}dx;$ $б)\int\frac{2x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2x}dx;$

[illegible]

17. а) $\int \frac{2x+1}{x^2-6x+18}dx$; б) $\int \frac{2x^2+6x-6}{x^3-x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-7x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; г) $\int \frac{x^5+4x^3+x^2+2}{x^4+6x^2+8}dx$.

18. а) $\int \frac{2x-1}{x^2+6x+18}dx$; б) $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+7x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; г) $\int \frac{x^5+9x^3-x^2+20x-3}{x^4+7x^2+12}dx$.

19. а) $\int \frac{3x-4}{x^2-2x+17}dx$; б) $\int \frac{4x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; г) $\int \frac{x^5+6x^3+x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

20. а) $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+17}dx$; б) $\int \frac{2x^2-9x+3}{x^3-4x^2+3x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2+6x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; г) $\int \frac{x^5+5x^3-2x^2+4x-6}{x^4+4x^2+3}dx$.

21. а) $\int \frac{3x-4}{x^2-4x+20}dx$; б) $\int \frac{2x-2}{x^3-2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{3x^2-9x+8}{x^3-4x^2+4x}dx$; г) $\int \frac{x^5+4x^3-2x^2+3x-4}{x^4+3x^2+2}dx$.

22. а) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+20}dx$; б) $\int \frac{4x^2+7x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

в) $\int \frac{2x^2+3x+4}{x^3+4x^2+4x}dx$; г) $\int \frac{x^5+7x^3-x^2+12x-2}{x^4+5x^2+6}dx$.

23. $a)\int\frac{2x+3}{x^2-4x+29}dx$; $б)\int\frac{2x^2-2x+6}{x^3+x^2-6x}dx$;

$в)\int\frac{2x^2-11x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$; $г)\int\frac{x^5+8x^3+x^2+12x+4}{x^4+6x^2+8}dx$.

24. $a)\int\frac{2x-3}{x^2+4x+29}dx$; $б)\int\frac{3x^2+2x+6}{x^3-x^2-6x}dx$;

$в)\int\frac{5x+9}{x^3+6x^2+9x}dx$; $г)\int\frac{x^5+5x^3+x^2+4x+3}{x^4+7x^2+12}dx$.

25. $a)\int\frac{4x-7}{x^2-2x+26}dx$; $б)\int\frac{2x^2+9x-3}{x^3+2x^2-3x}dx$;

$в)\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; $г)\int\frac{x^5+6x^3-x^2+5x-4}{x^4+5x^2+4}dx$.

26. $a)\int\frac{4x+5}{x^2+2x+26}dx$; $б)\int\frac{2x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x}dx$;

$в)\int\frac{2x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}dx$; $г)\int\frac{x^5+6x^3+7x}{x^4+4x^2+3}dx$.

27. $a)\int\frac{5x-1}{x^2-6x+25}dx$; $б)\int\frac{2x^2-9x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

$в)\int\frac{2x^2-9x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$; $г)\int\frac{x^5+2x^3+2x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}dx$.

28. $a)\int\frac{5x-3}{x^2+6x+25}dx$; $б)\int\frac{6x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x}dx$;

$в)\int\frac{x^2+3x+8}{x^3+4x^2+4x}dx$; $г)\int\frac{x^5+3x^3+x^2+2}{x^4+5x^2+6}dx$.

29. $a)\int\frac{4x-3}{x^2-8x+17}dx$; $б)\int\frac{4x^2-6}{x^3+x^2-6x}dx$;

в) $\int \frac{x^2 - 11x + 18}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx$; *г*) $\int \frac{x^5 + 8x^3 - x^2 + 12x - 4}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$.

30. *а*) $\int \frac{2x + 7}{x^2 + 8x + 17} dx$; *б*) $\int \frac{x + 3}{x^3 - 4x^2 + 3x} dx$;

в) $\int \frac{x^2 + 7x + 18}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx$; *г*) $\int \frac{x^5 + 9x^3 - x^2 + 18x - 4}{x^4 + 7x^2 + 12} dx$.

3.6. Интегрирование тригонометрических функций

1. *а*) $\int \cos^2 \frac{x}{3} dx$; *б*) $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$; *в*) $\int \sin 4x \cdot \cos 5x dx$.

2. *а*) $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx$; *б*) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$; *в*) $\int \sin 3x \cdot \sin 7x dx$.

3. *а*) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx$; *б*) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x}\, dx$; *в*) $\int \cos 3x \cdot \cos 8x dx$.

4. *а*) $\int \cos^2 \frac{x}{5} dx$; *б*) $\int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x}\, dx$; *в*) $\int \sin 7x \cdot \cos 5x dx$.

5. *а*) $\int \sin^2 \frac{x}{5} dx$; *б*) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; *в*) $\int \sin 6x \cdot \sin 2x dx$.

6. *а*) $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4} dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}} dx$; *в*) $\int \cos 5x \cdot \cos 7x dx$

7. *а*) $\int \sin^2 \frac{x}{6} dx$; *б*) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; *в*) $\int \cos 4x \cdot \cos 7x dx$.

9. *а*) $\int \sin^2 \frac{x}{6} \cdot \cos^2 \frac{x}{6} dx$; *б*) $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x dx$; *в*) $\int \cos 7x \cdot \sin 4x dx$.

10. *а*) $\int \cos^2 \frac{2x}{5} dx$; *б*) $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$; *в*) $\int \sin 11x \cdot \sin 5x dx$.

11. *а*) $\int \sin^2 \frac{2x}{5} dx$; *б*) $\int \cos^3 x \cdot x \sqrt[4]{\sin^3}\, dx$; *в*) $\int \cos 9x \cdot \cos 6x dx$.

12. $a)\int \sin^2\frac{x}{5}\cdot\cos^2\frac{x}{5}dx;$ $\quad б)\int \sin^3 x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx;$ $\quad в)\int \cos 6x\cdot\sin 4x\,dx.$

13. $a)\int \cos^2\frac{x}{7}dx;$ $\quad б)\int \cos^3 x\cdot\sqrt[3]{\sin x}\,dx;$ $\quad в)\int \sin 12x\cdot\cos 8x dx.$

14. $a)\int \sin^2\frac{x}{7};$ $\quad б)\int \sin^3 x\cdot\sqrt[4]{\cos x}\,dx;$ $\quad в)\int \cos 8x\cdot\cos 5x\,dx.$

15. $a)\int \sin^2\frac{x}{7}\cdot\cos^2\frac{x}{7}dx;$ $\quad б)\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x\sqrt{\sin x}}dx;$ $\quad в)\int \sin 7x\cdot\cos 3x\,dx.$

16. $a)\int \cos^2\frac{x}{8}dx;$ $\quad б)\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt{\cos x}};$ $\quad в)\int \sin 5x\cdot\sin 8x\,dx.$

17. $a)\int \sin^2\frac{x}{8}dx;$ $\quad б)\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx;$ $\quad в)\int \cos 7x\cdot\cos 10x dx.$

18. $a)\int \sin^2\frac{x}{8}\cdot\cos^2\frac{x}{8}dx;$ $\quad б)\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx;$ $\quad в)\int \cos 5x\cdot\sin 6x\,dx.$

19. $a)\int \cos^2\frac{x}{9}dx;$ $\quad б)\int \cos^3 x\cdot\sqrt[7]{\sin^4 x}\,dx;$ $\quad в)\int \sin 7x\cdot\sin 11x dx.$

20. $a)\int \sin^2\frac{x}{9}dx;$ $\quad б)\int \sin^3 x\cdot\sqrt[7]{\cos^4 x}\,dx;$ $\quad в)\int \cos 9x\cdot\cos 11x\,dx.$

21. $a)\int \sin^2\frac{x}{9}\cdot\cos^2\frac{x}{9}dx;$ $\quad б)\int \cos^3 x\cdot\sqrt[5]{\sin^4 x}\,dx;$ $\quad в)\int \cos 11x\cdot\sin 5x\,dx.$

22. $a)\int \cos^2\frac{2x}{3}dx;$ $\quad б)\int \sin^3 x\cdot\sqrt[5]{\cos^4 x}\,dx;$ $\quad в)\int \sin 12x\cdot\sin 7x dx.$

23. $a)\int \sin^2\frac{2x}{3}dx;$ $\quad б)\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x\sqrt{\sin x}};$ $\quad в)\int \cos 13x\cdot\cos 5x\,dx.$

24. $a)\int \sin^2\frac{2x}{3}\cdot\cos^2\frac{2x}{3}dx;$ $\quad б)\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}};$ $\quad в)\int \cos 9x\cdot\sin 4x\,dx.$

25. $a)\int \cos^2\frac{3x}{4}dx;$ $\quad б)\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x}};$ $\quad в)\int \sin 13x\cdot\sin 8x\,dx.$

26. $a)\int \sin^2\frac{3x}{4}dx;$ $\quad б)\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}};$ $\quad в)\int \sin 12x\cdot\sin 8x\,dx.$

27. $а)\int \sin^2\frac{3x}{4}\cdot\cos^2\frac{3x}{4}dx;$ $б)\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[7]{\sin^5 x}};$ $в)\int \sin 5x\cdot\cos 8x\,dx.$

28. $а)\int \cos^2\frac{3x}{5}dx;$ $б)\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[7]{\sin^5 x}};$ $в)\int \sin 14x\cdot\sin 9x\,dx.$

29. $а)\int \sin^2\frac{3x}{5}dx;$ $б)\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[6]{\sin^5 x}};$ $в)\int \cos 15x\cdot\cos 11x\,dx.$

30. $а)\int \sin^2\frac{3x}{5}\cdot\cos^2\frac{3x}{5}dx;$ $б)\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[6]{\cos^5 x}};$ $в)\int \sin 9x\cdot\cos 3x\,dx.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнниях и задачах. Часть 1. – М.: ООО “Изд-во Оникс”, 2008. – 368 с.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2012. – 281 с.

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Г. В. Петровских, В. Б. Пяткова,
О. Е. Турова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
**по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного обучения**

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии представлены основные теоретические сведения по теме “Определенный интеграл”, рассмотрены основные методы интегрирования, некоторые приложения к геометрическими задачам, разобраны примеры решения задач.

Работа содержит 30 вариантов наборов задач для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы для контрольных работ.

Рекомендуется для всех специальностей УГГУ.

1. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие определённого интеграла

Определённым интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ является число, обозначаемое символом $\int\limits_a^b f(x)dx$ и определяемое как предел интегральной суммы функции на заданном отрезке, а именно

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i,$$

где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$; $\bar{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

1. 2. Свойства определённого интеграла

1. $\int\limits_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int\limits_a^b f(x)dx, \quad A = \text{const};$

2. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx;$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad c \in (a;b).$

1. 3. Вычисление определённого интеграла

1. Для вычисления определённого интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)-$ первообразная функции $f(x)$.

2. Если для нахождения первообразной используется введение новой переменной $x = \varphi(t)$ (замена переменной), то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt,$$

где $t(a)$ и $t(b)$ новые пределы интегрирования, соответствующие переменной t.

При подстановке $u = u(x)$ формула замены переменной имеет вид

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

3. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла принимает вид

$$\int_a^b u d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon du.$$

Примеры

1. $\int\limits_0^4 \sqrt{x}dx = \int\limits_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^4 = \left.\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^4 = \dfrac{2\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} - \dfrac{2\cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3} = \dfrac{2\cdot 8}{3} = \dfrac{16}{3}.$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 7\cos 3x dx = 7\cdot\dfrac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x d3x = \left.\dfrac{7\cdot\sin 3x}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{7}{3}\left(\sin\dfrac{3\pi}{2} - \sin 0\right) = -\dfrac{7}{3}.$

3. $\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx = \int\limits_1^e \ln x\dfrac{dx}{x} = \int\limits_1^e \ln x d\ln x = \left.\dfrac{\ln^2 dx}{2}\right|_1^e = \dfrac{\ln^2 e}{2} - \dfrac{\ln^2 1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{0}{2} = \dfrac{1}{2}.$

4. $\int\limits_1^4 \dfrac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x^3}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t, \\ x = t^2, \\ dx = \left(t^2\right)' dt = 2tdt, \\ t(1) = \sqrt{1} = 1;\ t(4) = \sqrt{4} = 2 \end{bmatrix} = \int\limits_1^2 \dfrac{t\cdot 2tdt}{1+t^3} = 2\int\limits_1^2 \dfrac{t^2dt}{1+t^3} =$

$= \dfrac{2}{3}\int\limits_1^2 \dfrac{3t^2dt}{1+t^3} = \dfrac{2}{3}\int\limits_1^2 \dfrac{d(1+t^3)}{1+t^3} = \dfrac{2}{3}\ln\left|1+t^3\right|\Big|_1^2 = \dfrac{2}{3}\left(\ln\left|1+8\right| - \ln\left|1+1\right|\right) = \dfrac{2}{3}\ln\dfrac{9}{2}.$

2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2. 1. Интегрирование по бесконечному промежутку

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом первого рода и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, т. е.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится; если указанный предел не существует или равен бесконечности, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ является расходящимся.

Аналогично определяются и другие интегралы по бесконечному промежутку

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

В последнем случае интеграл является сходящимся, если сходятся оба интеграла, его составляющие.

Примеры

Найти несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1.\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2-4x+13}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{(x-2)^2+9}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+9}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}\Bigg|_2^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-2}{3}-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6},$$

интеграл сходится.

$$2.\int_e^{\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_e^{b}\frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_e^{b}(\ln x)^{\frac{1}{2}}d(\ln x)=\lim_{b\to\infty}\frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_e^b=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{b\to\infty}\sqrt{(\ln x)^3}\Big|_e^b=\frac{2}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{(\ln b)^3}-\sqrt{(\ln e)^3}\right)=\infty,$$

интеграл расходится.

$$3.\ \int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(x-2)^3}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1}\frac{dx}{(x-2)^3}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1}\frac{d(x-2)}{(x-2)^3}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1}(x-2)^{-3}d(x-2)=\lim_{a\to-\infty}\left.\frac{(x-2)^{-2}}{-2}\right|_{a}^{1}=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left.\frac{1}{(x-2)^2}\right|_{a}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(a-2)^2}\right)=-\frac{1}{2},$$

интеграл сходится.

2. 2. Интеграл от разрывной функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b)$, точка $x=b$ является точкой разрыва второго рода. Предел $\lim\limits_{\xi\to0}\int\limits_{a}^{b-\xi}f(x)\,dx$ называют несобственным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$, т. е.

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx=\lim_{\xi\to0}\int\limits_{a}^{b-\xi}f(x)\,dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\xi\to0}\int\limits_{a}^{b-\xi}f(x)\,dx$, интеграл является сходящимся.

Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b]$, а точка $x = a$ является точкой разрыва второго рода, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to 0} \int\limits_{a+\xi}^b f(x)dx.$$

Если точка $x = c$ является точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, где $c \in (a,b)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

В последнем случае $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будет сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части.

Примеры

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1. \int\limits_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}} = \lim_{\xi\to 0} \int\limits_4^{5-\xi} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5}} = \lim_{\xi\to 0} \int\limits_4^{5-\xi} (x-5)^{-\frac{1}{3}} d(x-5) =$$

$$= \lim_{\xi\to 0} \left. \frac{(x-5)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right|_4^{5-\xi} = \frac{3}{2} \lim_{\xi\to 0} \left. \sqrt[3]{(x-5)^2} \right|_4^{5-\xi} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\xi\to 0} \left(\sqrt[3]{(5-\xi-5)^2} - \sqrt[3]{(4-5)^2} \right) = \frac{3}{2} \lim_{\xi\to 0} \left(\sqrt[3]{\xi^2} - \sqrt[3]{1} \right) = -\frac{3}{2},$$

интеграл сходится.

$$2.\ \int_{-2}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}=\lim_{\xi\to 0}\int_{-2+\xi}^{0}\frac{x^2dx}{x^3+8}=\lim_{\xi\to 0}\int_{-2+\xi}^{0}\frac{\frac{1}{3}d(x^3+8)}{x^3+8}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\ln\left|x^3+8\right|\Big|_{-2+\xi}^{0}=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left|(-2+\xi)^3+8\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left(-8+12\xi-6\xi^2+\xi^3+8\right)\right)=$$

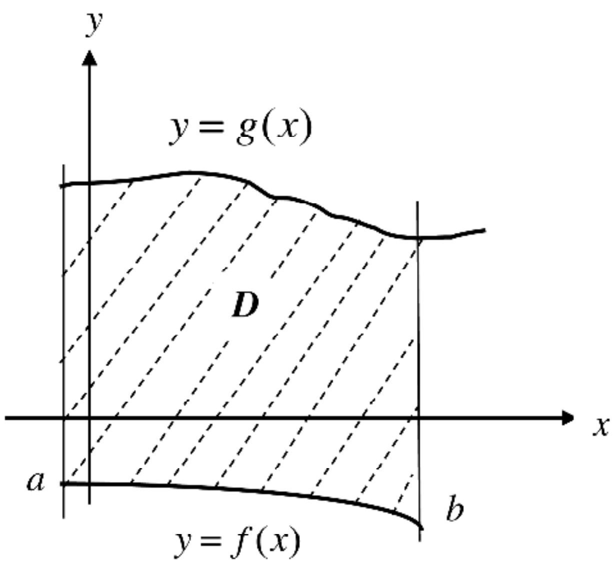
$$=\frac{1}{3}\lim_{\xi\to 0}\left(\ln 8-\ln\left(12\xi-6\xi^2+\xi^3\right)\right)=\infty,$$

интеграл расходится.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

3. 1. Площадь плоской фигуры

а) Площадь криволинсйной трапсции D, ограничснной кривыми $y=f(x),\ y=g(x),$ где $f(x)\le g(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a<b$ (см. рис.),



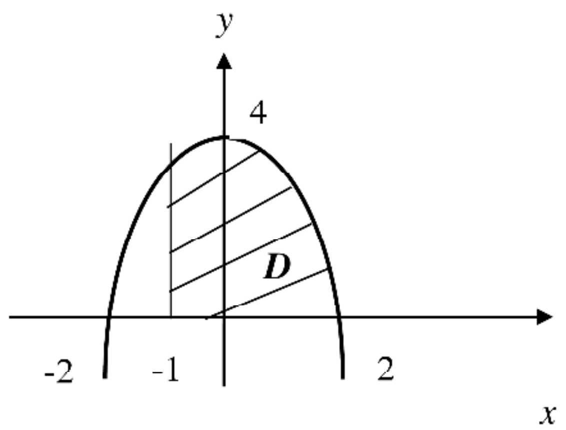
находится по формуле

$$S = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx .$$

Примеры

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$; $x = -1$; $y = 0$.

Построим фигуру. Верхняя граница: $y = 4 - x^2$, нижняя граница: $y = 0$, левая граница $x = -1$, правая граница $x = 2$.

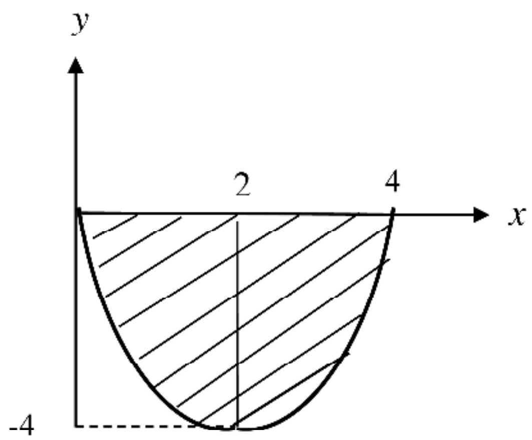


Найдем площадь:

$$S = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - 0)\,dx = 4x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= 4(2+1) - \frac{1}{3}(8+1) = 12 - 3 = 9\ ед^2.$$

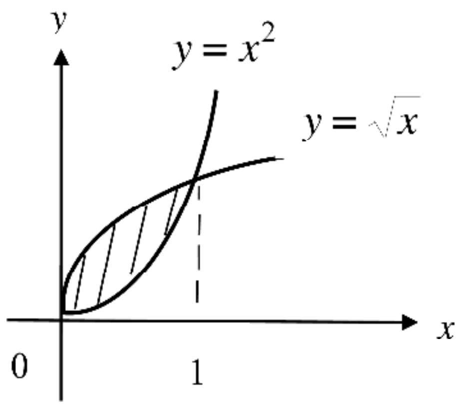
2. Найти площадь фигуры: $y = x^2 - 4x$; $y = 0$.



$$S=\int_0^4 (0-(x^2-4x))dx=\int_0^4(-x^2+4x)dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}\bigg|_0^4+\frac{4x^2}{2}\bigg|_0^4=-\frac{64}{3}+32=\frac{160}{3}\,ed^2.$$

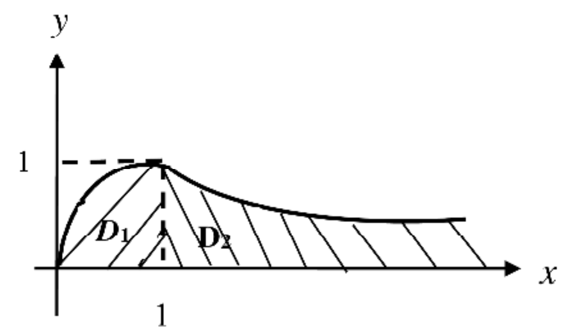
3. Найти площадь фигуры: $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$.



$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx-\int_0^1 x^2dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\,ed^2.$$

4. Найти площадь: $y = \sqrt{x}, \;\; y = \dfrac{1}{x^2}, \; y = 0.$



Найдем площадь как сумму площадей двух фигур D_1 и D_2.

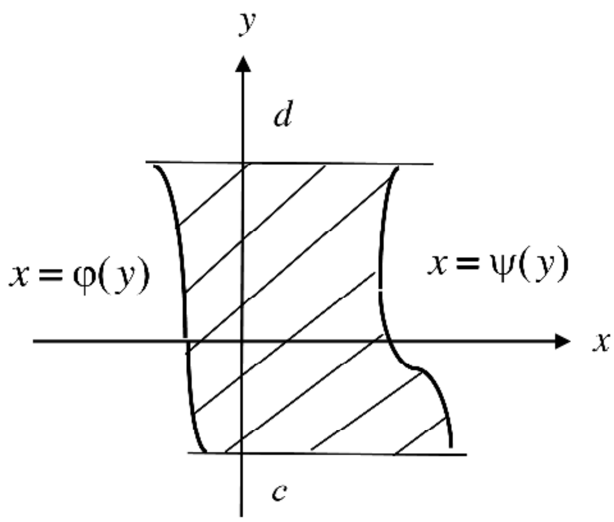
$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 = \left. \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right|_0^1 = \frac{2}{3} \, ed^2,$$

$$S_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \to \infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^b = - \lim_{b \to \infty} \left. \frac{1}{x} \right|_1^b = - \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{b} - 1 \right) = 1 \, ed^2,$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \, ed^2.$$

b) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$x = \varphi(y), \;\; x = \Psi(y), \;\; y = c, \quad y = d,$ где $\varphi(y) \le \Psi(y), \quad c < d$



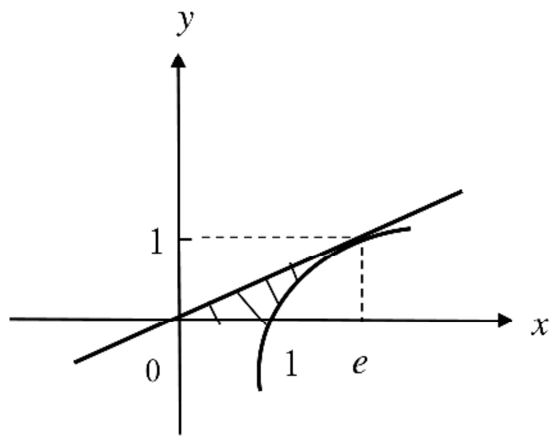
равна:

$$S=\int_c^d(\Psi(y)-\varphi(y))dy.$$

Пример

Найти площадь фигуры: $y=\ln x;\quad y=\frac{1}{e}x;\quad y=0.$

Построим область:



Запишем её границы: $y=\ln x\Rightarrow x=e^y;\quad y=\frac{1}{e}x\Rightarrow x=ey;\quad y=0,\quad y=1.$

$$S=\int_0^1(e^y-ey)dy=e^y\Big|_0^1-e\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=e-1-\frac{e}{2}=\frac{e}{2}-1.$$

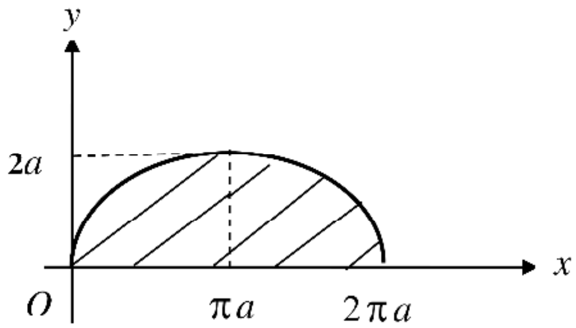
c) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, находим по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dx,$$

где α и β определяются из условий $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а $y(t) \geq 0$ при $\alpha \geq t \leq \beta$.

Пример

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.



Здесь $dx = a(1 - \cos t)\,dt$, а t изменяется от 0 до 2π.

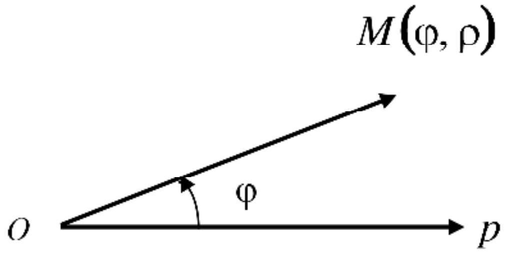
$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt =$$

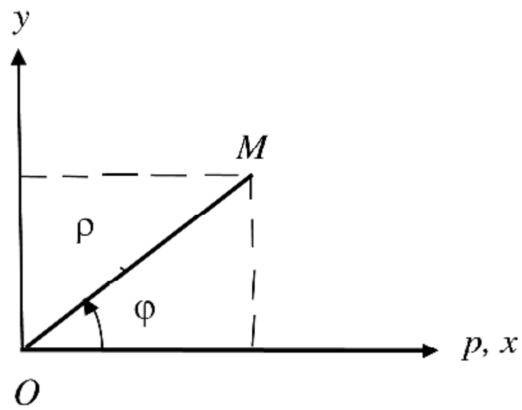
$$= a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2t\Big|_0^{2\pi} \right) = a^2 (2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

d) Площадь фигуры, границы которой заданы в полярных координатах.

Полярная система координат состоит из точки O – полярного полюса и полярной оси Op. Положение точки M определяется двумя координатами: ρ – полярным радиусом – расстоянием от точки M до полюса O и полярным углом φ – углом между радиус-вектором точки M и полярной осью.



Переход от полярных координат к прямоугольным



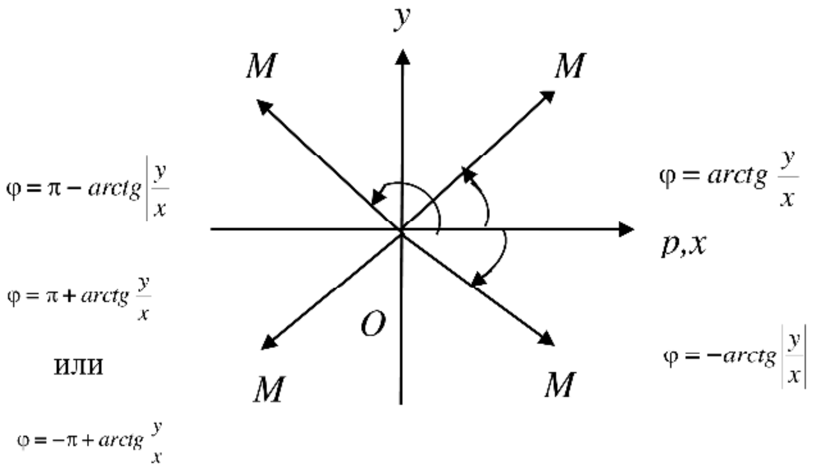
выполняется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Переход от прямоугольных координат к полярным

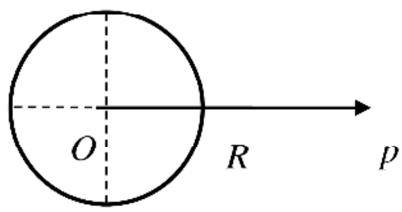
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Угол φ определяется с учетом четверти, в которой лежит точка M (см. рис.).

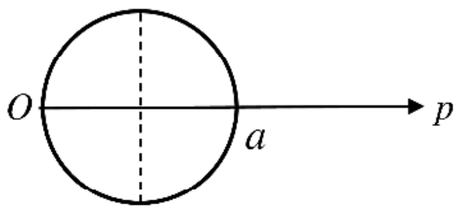


Уравнения некоторых линий в полярных координатах

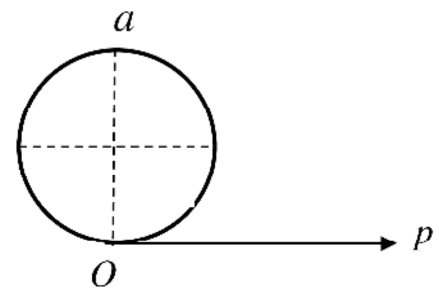
а) $\rho = R$ – уравнение окружности радиуса R с центром в точке O;



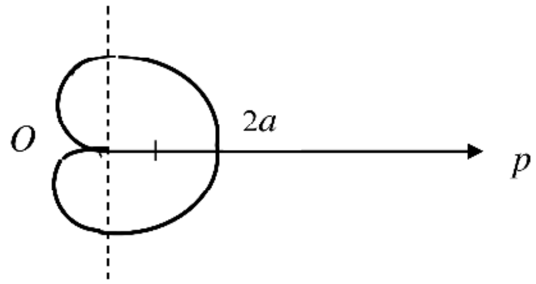
б) $\rho = a\cos\varphi$ – уравнение окружности радиуса $\frac{|a|}{2}$, с центром в точке $\frac{a}{2}$ на полярной оси;



в) $\rho = a\sin\varphi$ – уравнение окружности радиуса $\frac{|a|}{2}$, с центром в точке $\frac{a}{2}$ на прямой, перпендикулярной полярной оси;

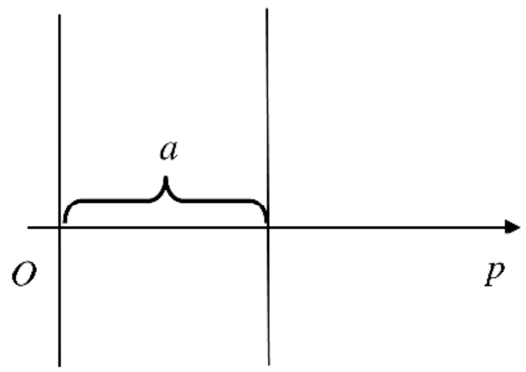


г) $\rho = a(1+\cos\varphi)$ – уравнение кардиоиды.

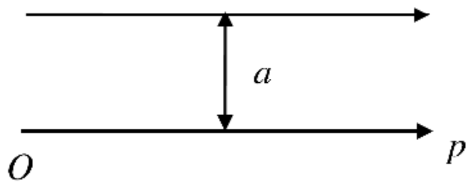


Уравнения $\rho = a(1-\cos\varphi)$; $\rho = a(1+\sin\varphi)$; $\rho = a(1-\sin\varphi)$ – также задают различные кардиоиды.

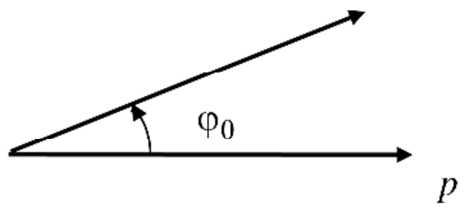
д) $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ – уравнение прямой, перпендикулярной оси Op, отстоящей от точки O на расстояние $|a|$;



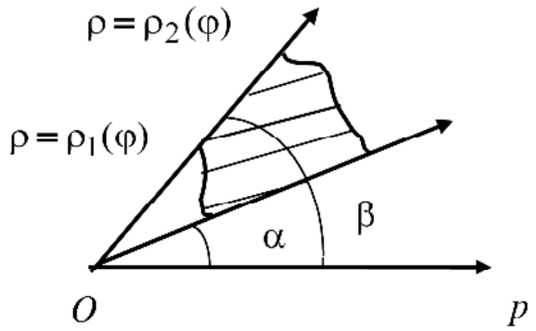
е) $\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi}$ – уравнение прямой, параллельной оси Op, отстоящей от неё на расстоянии $|a|$;



ё) $\varphi = \varphi_0$ – уравнение луча, проходящего через точку O под углом φ_0 к оси Op;



Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$, и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где $\alpha < \beta$

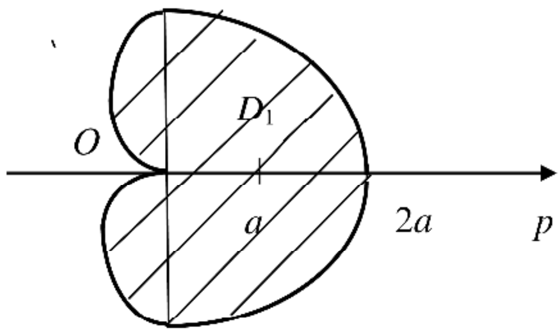


находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right)d\varphi.$$

Примеры

1. Найти площадь фигуры, заключенной внутри кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$

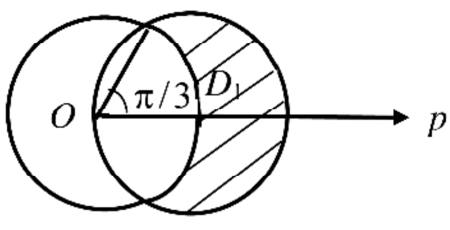


$$S = 2S_{D_1} = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right) = a^2\left(\pi + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= a^2\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}\ \text{ед}^2.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\cos\varphi$; $\rho = 1$ (вне окружности $\rho = 1$).



$$S = 2S_{D_1}$$

Найдем точку пересечения окружностей

$$\begin{cases}\rho = 2\cos\varphi\\ \rho = 1\end{cases} \Rightarrow 2\cos\varphi = 1,\ \cos\varphi = \frac{1}{2},\quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

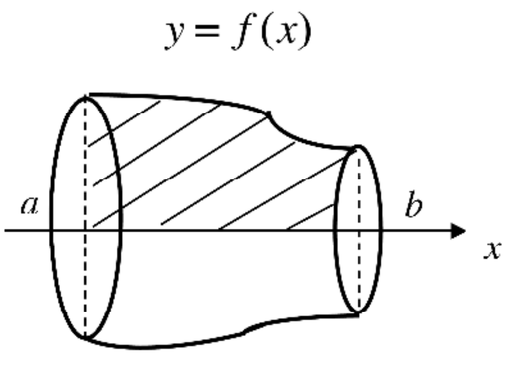
$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\varphi - 1)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - 1)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + 2\cos 2\varphi - 1)\, d\varphi = \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} - \sin 0 = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ед}^2.$$

3. 2. Объем тела вращения

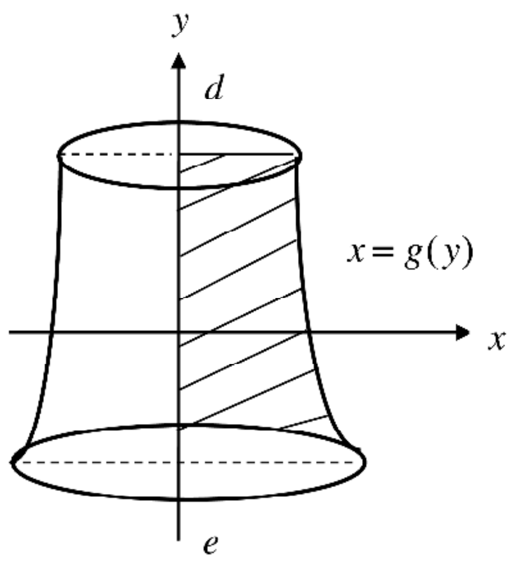
a) Объем тела вращения плоской фигуры с границами $y = f(x), \quad x = a,$ $x = b, \quad y = 0 \quad (a < b)$ вокруг оси Ox



вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx.$$

b) Объем тела вращения плоской фигуры с границами $x = g(y), \quad y = c,$ $y = d, \quad x = 0 \quad (c < d)$ вокруг оси Oy



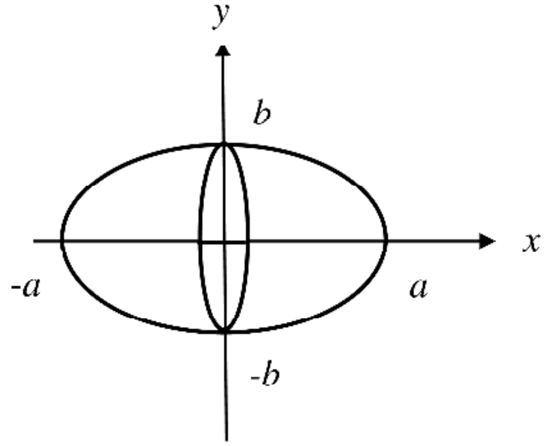
вычисляется по формуле

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy.$$

ПРИМЕРЫ

1. Найти объем тела, полученного вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.

Построим чертеж.



Выразим y^2 из уравнения эллипса

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V_{ox} = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\int_{0}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

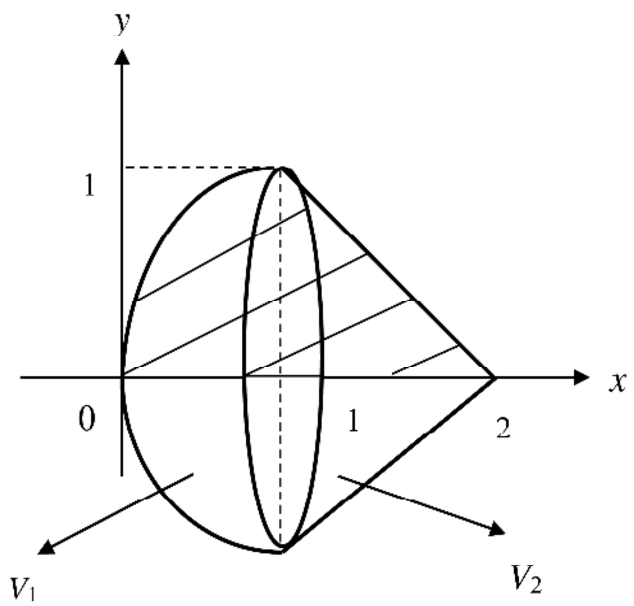
$$= 2\pi b^2\left(x\Big|_0^a - \frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right) = 2\pi b^2\left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ ед}^3.$$

Заметим, что, если $a = b = R$, то получим объем шара

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ ед}^3 .$$

2. Найти объем тел вращения вокруг оси Ox и Oy фигуры с границами $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$.

а)



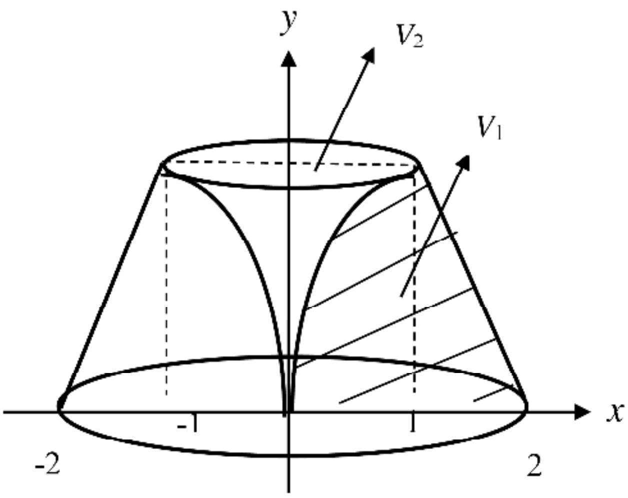
$$V_{0x} = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ ед}^3$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \int_1^2 (x-2)^2 d(x-2) = \pi \frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{\pi}{3}\left(0-(-1)^3\right) = \frac{\pi}{3} \text{ ед}^3$$

$$V_{0x} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \text{ ед}^3.$$

б)



$$V_{0y} = V_1 - V_2$$

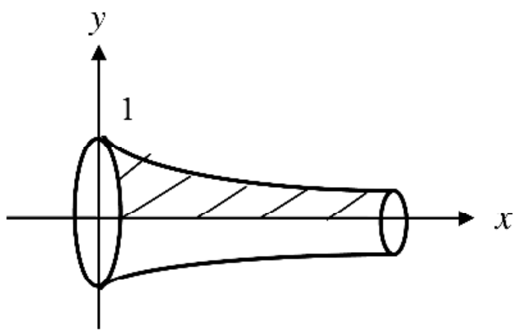
$$V_1 = \pi \int_0^1 (2-y)^2 dy = \pi \int_0^1 (y-2)^2 d(y-2) = \pi \frac{(y-2)^3}{3}\Bigg|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{3}\left((-1)^3 - (-2)^3\right) = \frac{\pi}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\pi \text{ ед}^3$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 y^4 dy = \pi \frac{y^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{5} \text{ ед}^3$$

$$V_{0y} = \frac{7\pi^{(5}}{3} - \frac{\pi^{(3}}{5} = \frac{32\pi}{15} \text{ ед}^3.$$

3. Вычислить объем тела вращения фигуры с границами $y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0$ вокруг оси $0x$



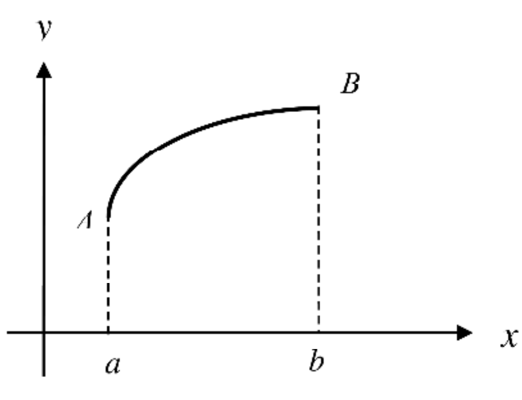
$$V_{ox} = \pi \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-2x} d(-2x) = -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} e^{-2x}\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \lim_{b\to\infty} \left(e^{-2b} - e^{0}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ед}^2.$$

3.3. Длина дуги плоской кривой

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина дуги кривой от точки A до точки B определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$



Пример

Найти длину дуги кривой: $y = \frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}$; $0 \le x \le 3$.

Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{3}(3-x)'\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{3}(3-x)\cdot(\sqrt{x})' =$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\frac{2}{3}x + 1 - \frac{1}{3}x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}.$$

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1-2x+x^2}{4x}}\,dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{4x+1-2x+x^2}{4x}}\,dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}\,dx = \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^3 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^3 + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^3 = \frac{1}{3}\sqrt{27} - 0 + \sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3}.$$

b) Если кривая AB задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dx.$$

Пример

2. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^{3t}\cos 4t \\ y = e^{3t}\sin 3t \end{cases}$, $0 \le t \le \ln 2$,

Найдем производные x'_t и y'_t

$$x'_t = \left(e^{3t}\cdot\cos 4t\right)' = \left(e^{3t}\right)'\cos 4t + e^{3t}\cdot(\cos 4t)' = 3e^{3t}\cos 4t - 4e^{3t}\sin 4t$$

$$y'_t = \left(e^{3t}\cdot\sin 4t\right)' = \left(e^{3t}\right)'\sin 4t + e^{3t}\cdot(\sin 4t)' = 3e^{3t}\sin 4t + 4e^{3t}\cos 4t$$

$$\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = \left(3e^{3t}\cdot\cos 4t - 4e^{3t}\cdot\sin 4t\right)^2 + \left(3e^{3t}\cdot\sin 4t + 4e^{3t}\cdot\cos 4t\right)^2 =$$

$$= 9e^{6t}\cos^2 4t - 24e^{6t}\cos 4t\cdot\sin 4t + 16e^{6t}\sin^2 4t + 9e^{6t}\sin^2 4t +$$

$$+ 24e^{6t}\cdot\sin 4t\cos 4t + 16e^{6t}\cos^2 4t = 25e^{6t}\cos^2 4t + 25e^{6t}\sin^2 4t =$$

$$= 25e^{6t}\left(\cos^2 4t + \sin^2 4t\right) = 25e^{6t}.$$

$$l = \int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\,dt = \int_0^{\ln 2}\sqrt{25e^{6t}}\,dt = \int_0^{\ln 2}5e^{3t}\,dt = \frac{5}{3}e^{3t}\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{5}{3}e^{3\ln 2} - \frac{5}{3}e^0 = \frac{5}{3}e^{3\ln 2} - \frac{5}{3}e^0 = \frac{5}{3}e^{\ln 8} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\cdot 8 - \frac{5}{3} = \frac{40-5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3};$$

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4. 1. Вычисление определённых интегралов

Вычислить интегралы, выбрав нужный метод.

1. а) $\int_0^4 \sqrt{4x+1}dx$; б) $\int_{-2}^1 f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2 \le x \le 0 \\ 4, & 0 < x \le 1 \end{cases}$;

в) $\int_0^{\frac{1}{4}} xe^{4x}dx$; г) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}dx$.

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3\cos 3x dx$; б) $\int_1^2 f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 0, & 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 4x-1, & \frac{3}{2} < x < 2 \end{cases}$;

в) $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$; г) $\int_1^0 \frac{xdx}{\sqrt{4-5x}}$.

3. а) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$; б) $\int_0^\pi f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$;

в) $\int_0^1 \mathrm{arctg} x dx$; г) $\int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

4. 3. а) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{5}} \frac{e^x dx}{e^{6x-1}}$; б) $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases} 1-x, & -1 \le x < 0 \\ 1+x, & 0 \le x < 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{x}\sin\frac{\mathrm{x}}{3}dx$; г) $\int\limits_{1}^{9} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

5. а) $\int\limits_{8}^{20} \left(\frac{x}{2}+5\right)^{\frac{1}{2}} dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases} 4, & -2 \le x < 1 \\ x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi} (x-\pi)\cos x dx$; г) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\left(e^x+1\right)^2}$.

6. а) $\int\limits_{8}^{0,5} \frac{dx}{(6x-1)^2}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases} 0, & -1 < x \le 0 \\ 2x^3, & 0 < x \le 1 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{xdx}{e^{2x}}$; г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx$.

7. а) $\int\limits_{-0,5}^{1} 2\sin \pi x dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases} 5, & -2 \le x \le -1 \\ -5x, & -1 < x \le 0 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x dx}{x^2}$; г) $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{(x+1)^2}$.

8. а) $\int\limits_{-3}^{0} (x+4)^{-2} dx$; б) $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx,$ если $f(x)=\begin{cases} -2x, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x+4)\sin 2x dx$; г) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

9. а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{5dx}{\cos^2 \frac{x}{4}}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & -1 \le x < 0 \\ e^{2x}, & 0 \le x \le 1 \end{array}\right.$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} x^2 \ln x dx$; г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$.

10. а) $\int\limits_0^{0,1} \frac{5dx}{e^{1-5x}}$; б) $\int\limits_{-4}^{0} f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & -4 \le x < -2 \\ x^2, & -2 \le x \le 0 \end{array}\right.$;

в) $\int\limits_0^{e-1} (x+1) \cdot \ln(x+1) dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

11. а) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{16x+9}}$; б) $\int\limits_0^{5} f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}, & 0 \le x < 4 \\ -2, & 4 \le x \le 5 \end{array}\right.$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos 2x dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\mathrm{arctg} x}{x^2+1} dx$.

12. а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(3x+4)^2}$; б) $\int\limits_0^{2} f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} x-1, & 0 \le x \le 1 \\ 10, & 1 < x \le 2 \end{array}\right.$;

в) $\int\limits_0^{1} x e^{9x} dx$; г) $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2+8x+15}$.

13. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 x\right) dx$; б) $\int\limits_{-2}^{3} f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} 6x, & -1 \le x \le 0 \\ 0, & 1 < x \le 3 \end{array}\right.$;

в) $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin \frac{x}{3} dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{3+\sqrt{x+1}}$.

14. а) $\int\limits_{0,25}^{0,5} \frac{5dx}{\sin^2 \pi x}$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 6, & -2 \le x < 0 \\ 6 - x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{e^x}$; г) $\int\limits_{0}^{5} x \cdot \sqrt{x+4}\, dx$.

15. а) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{\sqrt{3}dx}{x^2+3}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} x_1 - 1, & -1 < x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} x \sin\frac{\pi x}{4} dx$; г) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{(2x-1)^3}$.

16. а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{16-9x}}$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ \frac{1}{\pi}, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} (2x+1)\ln(x+1)dx$; г) $\int\limits_{-3}^{5} x \cdot \sqrt{x+4}\, dx$.

17. а) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; б) $\int\limits_{-10}^{0} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 0, & -10 \le x \le -1 \\ (x+1)^2, & -1 < x \le 0 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-3}^{-2} (x+3)\, e^{x+3} dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+2}$.

18. а) $\int\limits_{0}^{4\pi} 6\cos\frac{x}{12} dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \le x \le -1 \\ 0, & -1 < x \le 1 \\ 4, & 1 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\, dx$; г) $\int\limits_{2}^{7} \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$.

19. а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0} 12\sin 6x dx$; б) $\int\limits_{-10}^{10} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 0, & -10 \le x \le 0 \\ 5x, & 0 < x \le 10 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} x e^{1-x} dx$; г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+2x+1)^2}$.

20. а) $\int\limits_{0}^{9} \sqrt[3]{1-x}\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x \cdot \sin x dx$; г) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x+1} dx$.

21. а) $\int\limits_{0}^{2\pi} 5\sin\frac{x}{4} dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} x+4, & 0 \le x \le 1 \\ 4, & 1 < x \le 2 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{1-e} \ln(x+e)dx$; г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{x^2+6x+9}$.

22. а) $\int\limits_{0}^{\ln 2} e^x(e^x+1)dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} 5, & 1 \le x \le 2 \\ 5x, & 2 < x \le 3 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}$.

23. а) $\int\limits_{0}^{1} 12(1+x)^5 dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & -1 < x \le 0 \\ e, & 0 < x \le 1 \end{cases}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} (3\text{x}+4)\sin x dx$; г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

24. а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{4}}$; б) $\int\limits_{-1}^{\ln 3} f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} x, & -1 < x \le 0 \\ e^x, & 0 < x \le \ln 3 \end{array} \right.$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (4x-3)\cos x dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3 x dx$.

25. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 3\sin 6x dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} 7, & -2 \le x \le 0 \\ 7x, & 0 < x \le 2 \end{array} \right.$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{e^{2x}}$; г) $\int\limits_5^6 \frac{dx}{(x^2-8x+16)^2}$.

26. а) $\int\limits_0^{e-1} \frac{5dx}{x+1}$; б) $\int f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} \cos 3x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \frac{\pi}{10} \end{array} \right.$;

в) $\int\limits_{-0,25}^{0} xe^{4x+1} dx$; г) $\int\limits_{-5}^{3} x \cdot \sqrt[3]{x+5}\, dx$.

27. а) $\int\limits_5^6 \sqrt[3]{x-5}\, dx$; б) $\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, если $f(x) = \left[\begin{array}{ll} 1, & -1 \le x \le \frac{\pi}{6} \\ \sin 2x, & \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$;

в) $\int\limits_{\frac{1}{9}}^{\frac{e}{9}} \ln 9x dx$; г) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{dx}{e^x+4}$.

28. а) $\int\limits_{10}^{\frac{1}{2}} e^{1-0,1x}dx;$ б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$ если $f(x)=\left[\begin{array}{ll} 0, & -\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos 2x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{array}\right.;$

в) $\int\limits_{-1}^{0} \operatorname{arctg} x dx$; г) $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{4x+1}}$.

29. а) $\int\limits_{0}^{6} \left(\frac{x}{6}+1\right)^3 dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx,$ если $f(x)=\left[\begin{array}{ll} 4, & -2 \le x \le 0 \\ 4x, & 0 < x \le 2 \end{array}\right.;$

в) $\int\limits_{-\frac{1}{6}}^{0} x \cdot e^{6x+1}dx$; г) $\int\limits_{0}^{3} x \cdot \sqrt{4-x}\, dx.$

30. а) $\int\limits_{0}^{0,1\pi} 10\cos 5x dx;$ б) $\int\limits_{-10}^{2} f(x)dx,$ если $f(x)=\left[\begin{array}{ll} 2, & -10 < x \le 0 \\ 3x^2, & 0 < x \le 2 \end{array}\right.;$

в) $\int\limits_{0}^{1} (4 - x) \cdot e^x\, dx$; г) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{1+\sqrt{4-x}}$.

4. 2. Несобственные интегралы

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2};$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{(2-x)^3}};$

2. а) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+3};$ б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}};$

3. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$;

4. а) $\int\limits_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{x^2-4}$;

5. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2dx}{x^3+1}$;

6. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{(2+x^2)^2}$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+8}}$;

7. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

8. а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

9. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{arctg^2\, x}{1+x^2} dx$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$;

10. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

11. а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$;

12. а) $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx;$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)^3}};$

13. а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x};$ б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{xdx}{x^2-9};$

14. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{(3+x^2)^3};$ б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}};$

15. а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x};$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$

16. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5};$ б) $\int\limits_{-3}^{1} \frac{dx}{(3+x)^3};$

17. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}};$ б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-3};$

18. а) $\int\limits_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2-6x+10};$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)^4};$

19. а) $\int\limits_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2-2x+5};$ б) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{(x+1)^3};$

20. а) $\int\limits_{1}^{\infty} x \cdot e^{-2x^2} dx;$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$

21. а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$; б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}$;

22. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$; б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{xdx}{x^2 - 16}$;

23. а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$;

24. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{arctg^3 x}{1 + x^2} dx$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$;

25. а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$; б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$;

26. а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+4}}$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2}$;

27. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln^3 xdx}{x}$; б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{\sqrt[6]{5-x}}$;

28. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$; б) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$;

29. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+9}$; б) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+27}}$;

30. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x+9}}$;   б) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\ln x}$.

3. 3. Площадь

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями.

1. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -x + 10;$

   б) $y = 3^x, \quad y = 1 - x, \quad y = 0;$

   в) $y = \log_2 x, \quad y = x, \quad y = 0, \quad y = 1;$

   г) $\rho = \sqrt{3}, \quad \rho = 2\cos\varphi.$

2. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = -3x - 1;$

   б) $y = 2^{-x}, \quad y = x + 1, \quad y = 0;$

   в) $y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = 2x, \quad y = -2$ (правая фигура);

   г) $\rho = 2, \quad \rho = 4\sin\varphi$ (верхняя фигура).

3. а) $y = x^2 + 2x, \quad y = x + 6;$

   б) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = x^2, \quad y = 0;$

   в) $y = \log_3 x, \quad y = -3x, \quad y = 1;$

   г) $\rho = 1 + \cos\varphi, \quad \rho = 1$ (правая фигура).

4. а) $y = -x^2 + 4, \quad y = x - 2;$

   б) $y = \frac{1}{x^3}, \quad y = x^2, \quad y = 0;$

   в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = -x, \quad y = 2, \quad y = 0;$

   г) $\rho = 4\cos\varphi, \quad \rho = 4\sin\varphi.$

5. а) $y = x^2 + 4, \quad y = 5x + 12;$

б) $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \dfrac{1}{x^4}, \quad y = 0;$

в) $y = \log_4 x, \quad y = \dfrac{1}{2}, \quad y = 0, \quad y = 2;$

г) $\rho = 4\cos\varphi, \quad \rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

6. а) $y = x^2 + 1, \quad y = -x - 11;$

б) $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad y = x, \quad y = 0, \quad (x \geq 0);$

в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = 3x, \quad y = 0;$

г) $\rho = 6\sin\varphi, \quad \rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

7. а) $y = x^2 - 2x, \quad y = -x + 6;$

б) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = x + 1, \quad y = 0$ (правая фигура);

в) $y = \log_5 x, \quad y = -5x, \quad y = 0;$

г) $\rho = 2(1 - \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (левая фигура).

8. а) $y = -x^2 + 4, \quad y = -x - 2;$

б) $y = e^x, \quad y = 1 - x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_{\frac{1}{4}} x, \quad y = -2x, \quad y = 0, \quad y = 2;$

г) $\rho = 4(1 + \sin\varphi), \quad \rho = 4$ (верхняя фигура).

9. а) $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 10;$

б) $y = e^{-x}, \quad y = x + 1, \quad y = 0;$

в) $y = \log_6 x, \quad y = 3x, \quad y = 0, \quad y = 2;$

г) $\rho = 2(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 2$ (нижняя фигура).

10. а) $y=-x^2+9, \quad y=3x-1;$

б) $y=\dfrac{1}{x^5}, \quad y=x, \quad y=0, \quad (x\le 0);$

в) $y=\log_{\frac{1}{5}} x, \quad y=5x, \quad y=-1;$

г) $\rho=1+\cos\varphi, \quad \rho=\dfrac{3}{4\cos\varphi}$ (правая фигура).

11. а) $y=x^2-2x, \quad y=-3x+12;$

б) $y=4^{x-1}, \quad y=x, \quad y=0;$

в) $y=\log_7 x, \quad y=-7x, \quad y=1;$

г) $\rho=1, \quad \rho=4\cos\varphi$ (правая фигура).

12. а) $y=-x^2+25, \quad y=-x+13;$

б) $y=5^{-x+1}, \quad y=1-x, \quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{7}} x, \quad y=-2x, \quad y=-1, \quad y=1;$

г) $\rho=2, \quad \rho=2\sqrt{2}\sin\varphi$ (верхняя фигура).

13. а) $y=x^2-8x, \quad y=x;$

б) $y=\dfrac{16}{x^2}, \quad y=x^2, \quad y=0, \quad (x\ge 0);$

в) $y=\log_6 x, \quad y=3x, \quad y=-1 \quad y=2;$

г) $\rho=1+\cos\varphi, \quad \rho=\dfrac{3}{2}$ (правая фигура).

14. а) $y=-x^2+4, \quad y=-5;$

б) $y=\dfrac{32}{x^3}, \quad y=x^2, \quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{6}} x, \quad y=6x, \quad y=-2;$

г) $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi, \quad \rho=\sin\varphi.$

15. а) $y = x^2 + 2x, \quad y = 2x + 16;$

б) $y = \sqrt{x-2}, \quad y = \dfrac{81}{x^4}, \quad y = 0;$

в) $y = \log_8 x, \quad y = -8x, \quad y = 2;$

г) $\rho = \cos\varphi, \quad \rho = \dfrac{3}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

16. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = -7;$

б) $y = \dfrac{1}{(x-3)^3}, \quad y = x - 3, \quad y = 0, \quad (x \ge 3);$

в) $y = \log_{\frac{1}{9}} x, \quad y = -2x, \quad y = 3, \quad y = 0;$

г) $\rho = 4\sin\varphi, \quad \rho = \dfrac{3}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

17. а) $y = x^2 - 6x, \quad y = -6x + 4;$

б) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y = -x + 1, \quad y = 0$ (левая фигура);

в) $y = \lg x, \quad y = \dfrac{1}{3}x, \quad y = -1, \quad y = 0;$

г) $\rho = 1 - \cos\varphi, \quad \rho = 1$ (левая фигура).

18. а) $y = -x^2 + 1, \quad y = -3;$

б) $y = 2e^x, \quad y = 2 - x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_{0,1} x, \quad y = 10x, \quad y = -4;$

г) $\rho = 4(1 + \sin\varphi), \quad \rho = 4$ (верхняя фигура).

19. а) $y = x^2 + 6x, \quad y = 6x - 25;$

б) $y = 3e^{-x}, \quad y = x + 3, \quad y = 0;$

в) $y = \lg x, \quad y = -2x, \quad y = 3;$

г) $\rho = 2(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 1$ (нижняя фигура).

20. а) $y=-x^2+4, \quad y=-2x+1;$

б) $y=\dfrac{1}{(x-5)^5}, \quad y=x-1, \quad (x\le 1);$

в) $y=\log_{0,1}x, \quad y=-x, \quad y=1, \quad y=2;$

г) $\rho=1-\cos\varphi, \quad \rho=-\dfrac{3}{4\sin\varphi}.$

21. а) $y=x^2-4x, \quad y=-2x+5;$

б) $y=3^{x-2}, \quad y=3-x, \quad y=0;$

в) $y=\log_2 x, \quad y=3x, \quad y=1,\ y=3;$

г) $\rho=\sqrt{2}, \quad \rho=2\cos\varphi$ (правая фигура).

22. а) $y=-x^2+16, \quad y=-9;$

б) $y=3\cdot 2^{-x}, \quad y=3-x, \quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{3}}x, \quad y=3x, \quad y=-3;$

г) $\rho=2\sqrt{2}, \quad \rho=4\sin\varphi$ (верхняя фигура).

23. а) $y=x^2+4x, \quad y=2x+3;$

б) $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}, \quad y=(x+2)^2, \quad y=0, \quad (x\ge -2);$

в) $y=\log_3 x, \quad y=-3x, \quad y=4;$

г) $\rho=3(1+\cos\varphi), \quad \rho=3$ (правая фигура).

24. а) $y=-x^2+4, \quad y=2x+1;$

б) $y=\dfrac{1}{(x+1)^3}, \quad y=(x+1)^2, \quad y=0;$

в) $y=\log_{\frac{1}{4}}x, \quad y=-4x, \quad y=-2, \quad y=2;$

г) $\rho=\cos\varphi, \quad \rho=\sqrt{3}\sin\varphi.$

25. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -x + 4;$

б) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = \dfrac{2}{x^4}, \quad y = 0;$

в) $y = \log_4 x, \quad y = 2x, \quad y = -2, \quad y = 1;$

г) $\rho = 2\cos\varphi, \quad \rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ (правая фигура).

26. а) $y = -x^2 + 1, \quad y = -3x - 3;$

б) $y = \dfrac{5}{x^3}, \quad y = 5x, \quad y = 0, \quad (x \le 0);$

в) $y = \log_{\frac{1}{5}} x, \quad y = 5x, \quad y = -4;$

г) $\rho = 3(1 - \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (левая фигура).

27. а) $y = x^2 - 2x, \quad y = -5x + 4;$

б) $y = \dfrac{3}{1 + x^2}, \quad y = 3 + x, \quad y = 0$ (правая фигура);

в) $y = \log_6 x, \quad y = -6x, \quad y = 1;$

г) $\rho = 4\sin\varphi, \quad \rho = \dfrac{2}{\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

28. а) $y = -x^2 + 9, \quad y = 3x + 5;$

б) $y = e^{x-3}, \quad y = 4 - x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_{\frac{1}{5}} x, \quad y = -2x, \quad y = -2, \quad y = 2;$

г) $\rho = 3(1 + \cos\varphi), \quad \rho = 3$ (верхняя фигура).

29. а) $y = x^2 - 4x, \quad y = -2x + 8;$

б) $y = e^{-x+2}, \quad y = \dfrac{1}{2}x, \quad y = 0;$

в) $y = \log_5 x, \quad y = 4x, \quad y = -2, \quad y = 1;$

г) $\rho = 3(1 - \sin\varphi), \quad \rho = 3$ (нижняя фигура).

30. а) $y=-x^2+9, \quad y=2x+1;$

б) $y=\dfrac{4}{x^5}, \quad y=4x, \quad y=0, \quad (x\le 0);$

в) $y=\log_{\frac{1}{6}} x, \quad y=6x, \quad y=-2;$

г) $\rho=1+\sin\varphi, \quad \rho=\dfrac{3}{4\sin\varphi}$ (верхняя фигура).

4. 4. Объем тела вращения

Найти объемы тел вращения фигур, ограниченных заданными линиями,

а) вокруг оси Ox

б) вокруг оси Oy

1. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1; \quad y=\pm 2$

2. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1; \quad x=8$

3. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1; \quad y=2$

4. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1; \quad x=1$

5. $y^2=2x; \quad x=2$

6. $y^2=-3x; \quad x=-3$

7. $y=x^2+1; \quad y=2$

8. $y=x^2-8; \quad y=-4$

9. $y=\sin x,\ y=2-\dfrac{2}{\pi}x,\ y=0$

10. $y=\cos x,\ y=1,\ x=-\dfrac{\pi}{2}$

11. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1; \quad y=\pm 3$

12. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1; \quad x=6$

13 $y^2=5x,\ x=5$

14 $y^2=-4x,\ x=-4$

15. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1; \quad y=1$

16. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1; \quad x=3$

17. $y=x^2+4; \quad y=8$

18. $y=x^2-2; \quad y=-1$

19. $y=\sin x,\ y=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$

20. $y=\cos x,\ y=1,\ x=\dfrac{\pi}{2}$

21. $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1;\quad y=\pm 1$

22. $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1;\quad x=2$

23. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1;\quad y=2$

24. $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1;\quad x=2$

25. $y^2=7x;\quad x=7$

26. $y^2=6x;\quad x=-6$

27. $y=x^2+9;\quad y=18$

28. $y=x^2-18;\quad y=-9$

29. $y=\sin x,\ y=1,\ y=0,\ x=2$

30. $y=\cos x,\ y=1,\ y=0,x=2$

4. 5. Длина дуги плоской кривой

1. *а)* $y=\sqrt{4-x^2}$
$-1\le x\le 1;$

б) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$
$0\le t\le 2\pi.$

2. *а)* $y=\ln\sin x$
$\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{2};$

б) $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$
$0\le t\le \pi/2.$

3. *а)* $y=\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$
$0\le x\le 3;$

б) $\begin{cases} x=4\sin t+3\cos t \\ y=3\sin t-4\cos t \end{cases}$
$0\le t\le \pi.$

4. *а)* $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$
$0\le x\le 4;$

б) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$
$0\le t\le 2\pi.$

5. $a)\ y=\ln\cos x$

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$

$б)\begin{cases}x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t\\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t\end{cases}$

$0\le t\le\pi.$

6. $a)\ y=4-3\ln(x^2-9)$

$4\le x\le 6;$

$б)\begin{cases}x=2\cos t-\cos 2t\\ y=2\sin t-\sin 2t\end{cases}$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}.$

7. $a)\ y=\sqrt{9-x^2}$

$-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2};$

$б)\begin{cases}x=2t^3+1\\ y=\frac{t^3}{3}-2\end{cases}$

$0\le t\le 3.$

8. $a)\ y=\ln(2\sin x)$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2};$

$б)\begin{cases}x=\frac{t^3}{3}+1\\ y=\frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}}-3\end{cases}$

$0\le t\le 2.$

9. $a)\ y=\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$

$-1\le x\le 2;$

$б)\begin{cases}x=3(t-\sin t)\\ y=3(1-\cos t)\end{cases}$

$0\le t\le\pi.$

10. $a)\ y=\frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$

$0\le x\le 3$

$б)\begin{cases}x=4\cos^3 t\\ y=4\sin^3 t\end{cases}$

$\frac{\pi}{2}\le t\le\pi.$

$11.\ а)\ y = \ln(5\cos x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3};$

$б)\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

$12.\ а)\ y = 3 + \ln(x^2 - 1)$

$2 \le x \le 3;$

$б)\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\pi \le t \le 2\pi.$

$13.\ а)\ y = \sqrt{16 - x^2}$

$-2 \le x \le 2;$

$б)\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$\pi \le t \le 2\pi.$

$14.\ а)\ y = \ln(3\sin x)$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3};$

$б)\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

$15.\ а)\ y = 2(x + 3)^{\frac{3}{2}}$

$-2 \le x \le 1;$

$б)\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - 1 \\ y = 2t^2 + 3 \end{cases}$

$0 \le t \le 3.$

$16.\ а)\ y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$

$0 \le x \le 4;$

$б)\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

17. $a)\ y = \ln(4\cos x)$

$0 \le x \le \dfrac{\pi}{6};$

$б)\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$

$\pi \le t \le \dfrac{3\pi}{2}.$

18. $a)\ y = 5 - 3\ln(x^2 - 9)$

$4 \le x \le 5;$

$б)\begin{cases} x = 8\sin t - 6\cos t \\ y = 6\sin t + 8\cos t \end{cases}$

$\pi \le t \le \dfrac{3\pi}{2}.$

19. $a)\ y = \sqrt{25 - x^2}$

$-\dfrac{5}{2} \le x \le \dfrac{5}{2};$

$б)\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$

$\dfrac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi.$

20. $a)\ y = \ln(4\sin x)$

$\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{4};$

$б)\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2}.$

21. $a)\ y = \dfrac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}$

$-3 \le x \le 0;$

$б)\begin{cases} x = 4\cos t - \cos 4t \\ y = 4\sin t - \sin 4t \end{cases}$

$\pi \le t \le \dfrac{3\pi}{2}.$

22. $a)\ y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$

$0 \le x \le 1;$

$б)\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t^2 - 2 \\ y = \dfrac{t^3}{3} + 5 \end{cases}$

$0 \le t \le 4.$

23. $a)\ y=\ln(3\cos x)$

$0\le x\le \frac{\pi}{4};$

$б)\begin{cases} x=6(t-\sin t)\\ y=6(1-\cos t)\end{cases}$

$\pi\le t\le \frac{3\pi}{2}.$

24. $a)\ y=3+2\ln(x^2-4)$

$3\le x\le 5;$

$б)\begin{cases} x=3\cos^3 t\\ y=3\sin^3 t\end{cases}$

$\frac{3\pi}{2}\le t\le 2\pi.$

25. $a)\ y=\sqrt{36-x^2}$

$-3\le x\le 3;$

$б)\begin{cases} x=4\sin t-3\cos t\\ y=3\sin t+4\cos t\end{cases}$

$\frac{3\pi}{2}\le t\le 2\pi.$

26. $a)\ y=\ln(5\sin x)$

$\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2};$

$б)\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t)\\ y=4(\sin t-t\cos t)\end{cases}$

$\frac{3\pi}{2}\le t\le 2\pi.$

27. $a)\ y=\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

$1\le x\le 2;$

$б)\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t\end{cases}$

$\frac{3\pi}{2}\le t\le 2\pi.$

28. $a)\ y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

$0\le x\le 2;$

$б)\begin{cases}x=5\cos t-\cos 5t\\ y=5\sin t-\sin 5t\end{cases}$

$0\le t\le \frac{\pi}{2}.$

29. $a)\ y=\ln(2\cos x)$

$\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{\pi}{4};$

$б)\begin{cases}x=\frac{t^{3}}{3}+2\\ y=\frac{3}{2}t^{2}+7\end{cases}$

$0\le t\le 4.$

30. $a)\ y=1-\ln(x^{2}-1)$

$3\le x\le 4;$

$б)\begin{cases}x=\frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}}+3\\ y=\frac{t^{3}}{3}-2\end{cases}$

$0\le t\le 2.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнниях и задачах. Часть 1. – М.: ООО “Изд-во Оникс”, 2008. – 368 с.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по математике. Часть 1. – М.: Изд.-во Айрис-пресс, 2012. – 281 с.

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный
университет»

Т. И. Королюк

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей:
очного и заочного обучения

Екатеринбург
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей. В пособии приведены теоретические сведения по теме « Функции комплексной переменной» в объеме курса лекций по этому разделу дисциплины «Математика». Теоретический материал сопровождается решением задач с подробными объяснениями, а также даны варианты заданий, которые могут быть использованы как для самостоятельной работы студентов в аудитории в присутствии преподавателя, так и в качестве домашних и аудиторных контрольных работ.

Целью работы является активация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению одного из разделов курса математики.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Число вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица $(i^2 = -1)$, называется комплексным числом. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются: $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = Jmz$, где Re – начальные буквы латинского слова *realis* – действительный, Jm – начальные буквы слова *imaginarius* мнимый.

Два комплексных числа считаются равными, если равны одновременно их действительные и мнимые части.

Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображается либо точкой плоскости xOy с координатами (x, y), либо вектором, направленным из начала координат в эту точку. Если комплексное число z – действительное, т. е. $z = x$, то соответствующая ему точка лежит на оси Ox, поэтому ось абсцисс называется действительной осью. Чисто мнимые числа $z = iy$ изображаются точками оси Oy, поэтому ось ординат называется мнимой осью.

Если $z = x + iy$, то сопряженное с ним есть $\bar{z} = x - iy$.

Комплексная величина $z = x + iy$, где x и y – действительные переменные, называется комплексной переменной. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа или комплексная переменная z, называется комплексной плоскостью C.

Введем понятие функции комплексной переменной.

Пусть дано некоторое множество D комплексных чисел. Если каждому значению переменной $z \in D$ ставится в соответствие вполне определенное значение переменной w, то переменная w называется функцией комплексной переменной z, в записи: $w = f(z)$. Если каждому значению $z \in D$ соответствует несколько значений w, то функция называется многозначной.

Множество D, состоящее из всех значений независимой переменной z, называется областью определения функции $w = f(z)$, а о функции говорят, что она определена или задана на множестве D. Геометрически область определения функции изображается некоторым множеством точек на комплексной плоскости z.

Примеры

1. Функция $w = z^2$ определена на всей плоскости z, функция однозначная.
2. Функция $w = \sqrt{z}$ определена на всей плоскости и двузначна.
3. Функция $w = \dfrac{1}{z-3}$ определена при всех значениях z, кроме $z = 3$, поэтому область ее определения есть вся комплексная плоскость z, из которой удалена точка $z = 3$. Функция однозначная.

2. ВЫДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть дана функция $w = f(z)$. Обозначим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда $w = f(z)$ перепишется в виде $u + iv \ = f(x+iy)$.

Отсюда видно, что действительная и мнимая части u, v переменной w являются функциями действительной и мнимой частей x, y переменной z:
$u = u\,(x, y), \quad v = v\,(x, y)$.

Итак, задание функции комплексной переменной $w = f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций от двух действительных переменных.

Примеры

1. Для функции $w = z^2$, при $z = x + iy$, $w = u + iv$ имеем $w = u + iv = (x+iy)^2$ или $u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$, откуда $u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$.

2. $w = \dfrac{1}{z}, \ z \neq 0$.

$$z = x + iy,\ w = u + iv, \text{ тогда } u + iv = \frac{1}{x+iy}$$

или $u + iv = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, откуда $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

3. $w = Jmz$

$$u + iv = y, \text{ откуда } \quad u = y, \quad v = 0.$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Геометрическую интерпретацию функции одной действительной переменной $y = f(x)$ можно получить с помощью ее графика в плоскости Oxy, строя для каждой пары соответствующих друг другу значений x и y точку с координатами (x, y).

В случае же комплексных переменных, поступая аналогично, нужно было бы строить точку для каждой пары соответствующих друг другу комплексных чисел $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Такая точка (z, w) должна определяться четырьмя действительными координатами (x, y, u, v). В трехмерном пространстве построить такую точку нельзя. Поэтому поступим так.

Возьмем две плоскости: на одной – плоскости аргумента (плоскость Oxy, плоскость (z)) – будем изображать комплексные числа $z = x + iy$, $z \in D$, D – область определения функции $w = f(z)$, а на другой – плоскости функции (пл. 0, uv, плоскость (w)) – соответствующие им комплексные числа w (рис. 1). Получим, что задание функции $w = f(z)$ позволяет каждой точке $z \in D$ плоскости аргумента поставить в соответствие точку $w \in D_1$ плоскости функции,

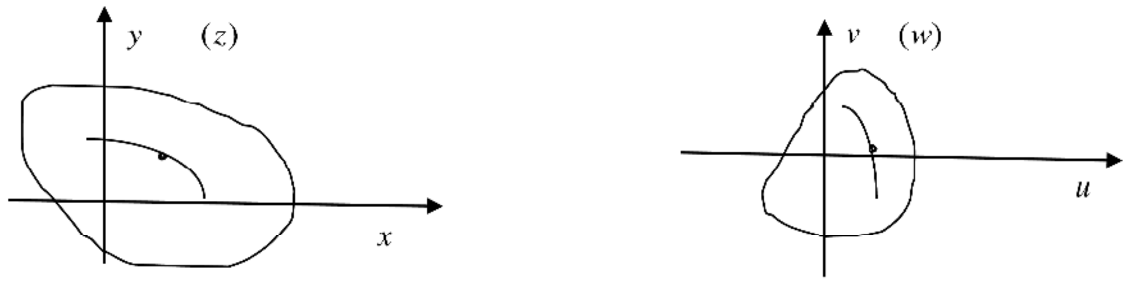


Рис. 1. Геометрическое изображение функции комплексной переменной

т. е. отображает множество D на множество D_1.

Иногда удобно плоскости Oxy и $O_1\,uv$ совместить (ось $O_1\,u$ с осью Ox, ось O_1v с осью Oy). Тогда значения незави симой переменной z и функции w изображаются точками одной и той же плоскости.

Пусть $w = f(z)$ – функция комплексной переменной. Если точка $z = x + iy$ описывает какую-либо кривую L в плоскости Oxy, все точки кривой принадлежат множеству D, то соответствующая точка $w = u + iv$ описывает в плоскости $O_1\,uv$, как правило, тоже некоторую линию L_1 (рис. 1). Можно сказать, что при отображении $w = f(z)$ кривая L переходит в кривую L_1.

Но не всякая функция комплексной переменной отображает кривую в кривую, а область в область. Так функция $w=\operatorname{Re} z$ отображает всю плоскость z в действительную ось плоскости w.

Для «хороших» функций (например, аналитических, которые мы рассмотрим позже), как правило, образ кривой – кривая, образ области – область.

Поставим вопрос: как, зная кривую L, найти кривую L_1. Если кривая L задана уравнением в комплексной форме $z=g(t)$, то, заменив в равенстве $w=f(z)$ переменную z функцией $g(t)$, мы получим уравнение $w=f(g(t))$ кривой L_1 в комплексной форме. Однако чаще кривая L задается уравнением в прямоугольных координатах $\varphi(x, y)=0$.

Для кривой L_1 обозначим текущие координаты через u и v, поскольку эта кривая описывается точкой $w=u+iv$. Уравнение кривой L_1 мы должны получить в форме $\Psi(u, v)=0$. Возьмем на кривой L_1 некоторую точку $w=u+iv$. Она соответствует некоторой точке $z=x+iy$ кривой L. Так как z и w связаны соотношением $w=f(z)$, то $u=u(x, y), \quad v=v(x, y)$. Решая эту систему уравнений относительно x и y, получим $x=x(u, v), \quad y=y(u, v)$. Подставляя эти выражения для x и y в уравнение $\varphi(x, y)=0$, получим уравнение $\varphi(x(u, v), \quad y(u, v)=0$. Это уравнение и будет уравнением $\psi(u, v)=0$ кривой L_1.

Если плоскости Oxy и $O_1\,uv$ совмещены, то кривые L и L_1 расположены на одной плоскости. Линия L_1 называется образом линии L.

Иногда удобно выразить из уравнения $w=f(z)$ сначала z без w, а затем x и y через u и v.

Пример 1

Кривая L задана на плоскости Oxy уравнением $x^2+y^2=4$. Найти ее образ при отображении $w=2\,i\,z-1$.

Решение

Положим $z=x+iy$, $w=u+iv$. Тогда равенство $w=2\,i\,z-1$ перепишется в виде $u+iv=2i\,(x+iy)-1$, откуда $u=-2y-1, \quad v=2x$. Выражаем x и y через u и v: $x=\dfrac{v}{2}, \quad y=-\dfrac{u+1}{2}$. Подставляем найденные выражения для x и y в уравнение $x^2+y^2=4$ кривой L: $\left(\dfrac{v}{2}\right)^2+\dfrac{(u+1)^2}{4}=4$. После упрощения получаем уравнение кривой L_1 в виде $(u+1)^2+v^2=16$.

Итак, кривая L – окружность с центром в начале координат радиуса 2 – преобразуется с помощью заданной функции $w = 2\,i\,z - 1$ в кривую L_1 – окружность с центром $(-1;\,0)$ радиуса 4.

Пример 2

При отображении $w - \dfrac{1}{z}$ найти образ прямой линии $y - x + 1$.

Решение

Из уравнения $w = \dfrac{1}{z}$ находим $z = \dfrac{1}{w}$. Подставим $z = x + iy$,

$w = u + iv : x + iy = \dfrac{1}{u + iv}$, $x + iy = \dfrac{u - iv}{u^2 + v^2}$, откуда $x = \dfrac{u}{u^2 + v^2}$, $y = -\dfrac{v}{u^2 + v^2}$.

Найденные выражения для x и y подставим в уравнение линии

$L \quad y = x + 1$: $\quad -\dfrac{v}{u^2 + v^2} = \dfrac{u}{u^2 + v^2} + 1$, после преобразования имеем $u^2 + v^2 + u + v = 0$

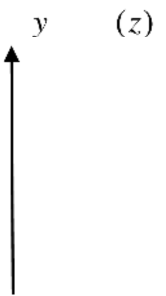
или $\left(u + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. Это уравнение в плоскости $O_1\,u\,v$ определяет линию L_1

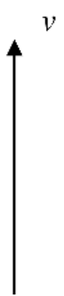
- окружность с центром $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

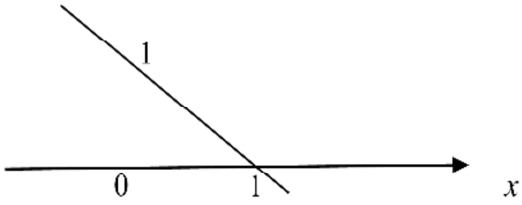
Пример 3

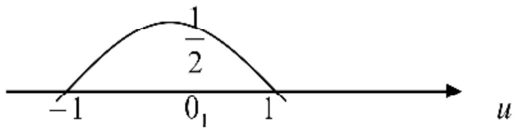
Пусть $w = z^2$. Найти образ прямой $x + y = 1$.

Выделяя действительную и мнимую части функции $w = z^2$, получим $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Далее из трех уравнений $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $x + y = 1$ исключаем x и y: $u = (x - y)(x + y)$ или $u = (x - y)$, так как $x + y = 1$, тогда $u^2 + 2v = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy = (x + y)^2 = 1$. Получили уравнение образа $u^2 + 2v = 1$ – это уравнение параболы в плоскости $O_1\,u\,v$, вершина которой – точка $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.









Пример 4

Построить на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих условиям:

а) $|z-3+2i|=1$; б) $-1<\operatorname{Re}z<1$; в) $Jmz=-2$; г) $|z-1|+|z+1|<3$;

д) $1<|z+2i|<2$; е) $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\pi$; ж) $|z|<1$; $-\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$.

Решение

а) $|z-3+2i|=|z-(3-2i)|$ есть расстояние от точки z до точки $3-2i$. Значит, уравнению *а*) удовлетворяют все точки z, лежащие на окружности радиуса 1 с центром $(3;-2)$.

б) Полагая $z=x+iy$, имеем $\operatorname{Re}z=\operatorname{Re}(x+iy)=x$. Значит, условие *б*) можно записать так: $-1<x<1$. Очевидно, этому условию удовлетворяют точки z, лежащие в полосе между прямыми $x=-1$ и $x=1$, параллельными оси Oy.

в) Полагая $z=x+iy$, имеем $Jmz=Jm(x+iy)=y$. Значит, условие *в*) можно записать так: $y=-2$. Этому условию удовлетворяют точки прямой $y=-2$, параллельной оси Oy.

г) Равенство $|z-1|+|z+1|<3$ выражает, что сумма расстояний от точки z до точек $+1$ и -1 равна 3. Множество таких точек есть эллипс с фокусами в точках $+1$ и -1 $(c=1)$ и с большой осью $2a=3$. Значит, неравенству *г*) удовлетворяют точки, лежащие внутри этого эллипса с полуосями $a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

д) Неравенству *д*) удовлетворяют все точки кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $(0,-2)$.

е) Неравенство *е*) определяет множество точек z, лежащих внутри угла, вершина которого находится в начале координат, а сторонами являются лучи, наклоненные к положительному направлению оси Ox под углами $\frac{\pi}{4}$ и π.

ж) Система неравенств *ж*) определяет сектор, ограниченный окружностью с центром в начале координат радиуса 1 и радиусами, образующими с осью Ox углы $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$.

Для проверки усвоения пройденного материала на практических занятиях студентам можно предложить выполнить самостоятельные работы.

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1) Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$$z_1 = -2\,; \quad z_2 = 1 - i\,; \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}\,i\,; \quad z_4 = 5.$$

2) Построить на комплексной плоскости (z) кривые, заданные уравнениями:

а) $|\,z\,| = 3$; б) $|\,z + 1 - 2\,i\,| = 2$; в) $Jmz = 4$; г) $\arg z = \frac{\pi}{6}$.

Вариант 2

1) Найти модули и аргументы комплексных чисел:

$z_1 = -2\,i\,; \quad z_2 = -\sqrt{3} + i\,; \quad z_3 = -2 - 2i\,; \quad z_4 = -4.$

2) Построить на комплексной плоскости (z) кривые, заданные уравнениями:

а) $|\,z - 3 + 2\,i\,| = 1$; б) $|\,z\,| = 2$; в) $\operatorname{Re} z = 4$; г) $\arg z = \frac{2\pi}{3}$.

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

1) Найти образ линии $x^2 + y^2 = 1$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

2) Построить на комплексной плоскости (z) множества точек z, удовлетворяющих неравенствам:

а) $2<|z+2i|<4$; б) $\operatorname{Re} z<-1$; в) $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$; г) $|z+1|<1$ и $Jmz<0$.

Вариант 2

1) Найти образ линии $y=x^2$ при отображении $w=iz+1$.
2) Построить на комплексной плоскости (z) множества точек z, удовлетворяющих неравенствам:

а) $-1<Jmz<2$; б) $|z+3+i|>1$; в) $\arg z>\frac{\pi}{3}$; г) $|z+1|<1$ и $\operatorname{Re} z<-1$.

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть $w=f(z)$ – однозначная функция, определенная для любого $z\in D$ за исключением, может быть, точки z_0.

Говорят, что функция $f(z)$ стремится к пределу $A\,(A\neq\infty)$, когда $z\to z_0$ (конечному), и пишут $\lim_{z\to z_0} f(z)=A$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ξ можно найти положительное число $\delta=\delta(\xi)$ такое, что для всех z, отличных от z_0 и удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\xi$. Геометрически это означает, что как только z попадет в δ – окрестность точки z_0, то $w=f(z)$ попадет в ξ- окрестность точки A.

Полагая $A=B+iC$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$, докажем теорему, устанавливающую связь между пределом функции и пределами ее действительной и мнимой частей.

Теорема

Если существует $\lim_{z\to z_0} f(z)=A=B+iC$, то существуют

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=B$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=C$.

Доказательство

$$f(z) - A = u(x, y) - B + i(v(x, y) - C).$$

Тогда $|f(z) - A| = \sqrt{(u(x, y) - B)^2 + (v(x, y) - C)^2} < \xi$

при $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ по определению предела.

Отсюда следует, что $|u(x, y) - B| < \xi$ и $|v(x, y) - C| < \xi$

при $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$.

А это означает, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C$.

Справедливо и обратное утверждение.

Из доказанной теоремы следует: если $f(z) \to A$, то $|f(z)| \to |A|$, $\arg f(z) \to \arg A$ при условии $A \neq 0, \infty$.

Действительно,

$$|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} \to \sqrt{B^2 + C^2} = |A|; \ \arg f(z) = arc\,tg\,\frac{v}{u} \to arc\,tg\,\frac{C}{B} = \arg A.$$

Поэтому основные теоремы о пределах функций действительных переменных распространяются без изменения на пределы функций комплексной переменной.

Например, если функции $f(z)$ и $g(z)$ определены в некоторой области D и для них $\lim_{z \to z_0} f(z) = A_1$; $\lim_{z \to z_0} q(z) = A_2$, то $\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm q(z)) = A_1 \pm A_2$; $\lim_{z \to z_0} f(z)\,q(z) = A_1 A_2$; $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{q(z)} = \dfrac{A_1}{A_2}$, если $A_2 \neq 0$.

Говорят, что $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, $A \neq \infty$, если для любого $\xi > 0$ существует $N(\xi)$ такое, что при $|z| > N(\xi)$ выполняется неравенство $|f(z) - A| < \xi$.

Говорят, что $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, если для любого $N > 0$ можно указать такую окрестность точки z_0, что если $z \in D$ и $z \neq z_0$ принадлежит этой окрестности, то $|f(z)| > N$.

Часто применяется понятие о пределе функции по кривой. Говорят, что $f(z) \to A$ при $z \to z_0$ по кривой L, если выполнение условия $|f(z) - A| < \xi$ при $|z - z_0| < \delta$ рассматривается только для точек z, лежащих на кривой L.

Очевидно, если $f(z) \to A$ при $z \to z_0$, то $f(z) \to A$ и по любой кривой. Если же по двум кривым функция имеет разные пределы или по какой-нибудь кривой предела вовсе нет, то $\lim_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и в некоторой ее окрестности.

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Как и в анализе функций действительных переменных, назовем $z - z_0 = \Delta z$ приращением аргумента, а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ – приращением функции. Тогда функция $f(z)$ будет непрерывной в точке z_0, если $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$. Условие непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентно двум следующим: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ и $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$, выражающим непрерывность двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в той же точке (x_0, y_0). Справедливо и обратное утверждение. Отсюда следует, что теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций действительных переменных будут справедливы и для непрерывных функций комплексной переменной.

Если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества D, то она называется непрерывной на этом множестве.

Точками разрыва функции $f(z)$ называются точки, в которых нарушается непрерывность функции.

Функция $w = \dfrac{z}{z - i}$ непрерывна на всей комплексной плоскости, кроме точки $z = i$, а функция $w = \dfrac{2z + 1}{|z - 2| - 3}$ непрерывна на всей комплексной плоскости, кроме точек окружности $|z - 2| = 3$.

6. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Показательная функция e^z

Показательная функция e^z, где $z = x + iy$, определяется так:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\,(\cos\,y + i\sin\,y)\,.$$

Функция $e^z \neq 0$ на всей комплексной плоскости. Для e^z сохраняются правила действий с показателями:

$$(e^z)^m = e^{nz}; \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}\,.$$

Показательная функция e^z имеет основной период $2\pi\, i$, т. е. любой другой ее период равен $2\pi\, k\, i$, где k – целое число.

Действительно, $e^{z+2\pi\, i} = e^z e^{2\pi\, i} = e^z(\cos\,2\pi + i\,\sin\,2\pi) = e^z$.

Пример

Вычислить значение $e^{-1+\frac{\pi}{4}i}$, записать его модуль, действительную и мнимую части.

Решение

$$e^{-1+\frac{\pi}{4}i} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e}\,(1+i), \quad \mathrm{Re}\left(e^{-1+\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e};$$

$$Jm\left(e^{-1+\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e}, \quad \left| e^{-1}e^{\frac{\pi}{4}i} \right| e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

6.2. Тригогометрические функции $\sin z, \ \cos z$

Тригонометрические функции $z = \sin z, \ \ z = \cos z$ определяются так:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in C.$$

$\sin z$ и $\cos z$ сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительной переменной.

Например, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$, $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

Так как показательная функция e^z имеет основной период $2\pi i$, то показательная функция e^{iz} имеет основной период 2π, тогда $\sin z$ и $\cos z$ тоже имеют основной период 2π.

Пример

Вычислить $\cos(2 + 3i)$.

Решение

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Подставляя $z = 2 + 3i$, получим

$$\cos(2+3i) = \frac{e^{i(2+3i)} + e^{-i(2+3i)}}{2} = \frac{e^{2i-3} + e^{2i+3}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-3}(\cos 2 + i\sin 2) + e^{3}(\cos 2 - i\sin 2)) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{3} + e^{-3})\cos 2 - i\,\frac{1}{2}(e^{3} - e^{-3})\sin 2 = ch\,3 \cdot \cos 2 - i\,sh3 \cdot \sin 2.$$

6.3. Логарифмическая функция $Ln\, z$

Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, $z \neq \infty$, то число w называется логарифмом комплексного числа z (по основанию e) и обозначается $w = Ln\, z$.

Чтобы получить формулу для вычисления логарифма комплексного числа в равенстве $e^w = z$, положим $w = u + iv$, а $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда $e^{u+iv} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ или $e^u = r(\cos v + i\sin v) = r(\cos v + i\sin v) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. По определению, два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно, $e^u = r$, а $v = \varphi + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, откуда $u = \ln r = \ln|z|$.

Итак,

$$Ln\, z = w = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2\pi k).$$

Окончательно

$$Ln\, z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi k i, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Значение логарифма при $k = 0$ называется главным, его обозначают $\ln z$, оно равно $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Из изложенного следует, что логарифмы можно находить не только для положительных чисел, но и для произвольных комплексных чисел. При этом обнаружилось, что логарифмическая функция не однозначная, а многозначная, то есть каждое комплексное число имеет бесконечное множество логарифмов. В частности, имеют логарифмы и отрицательные числа, но при этом все значения логарифма комплексные.

Если $z = x-$ действительное положительное число, то $|z| = x$, а $\arg z = 0$. Поэтому главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает со значением $\ln z$, приводимым обычно в таблицах натуральных логарифмов. Но, кроме этих действительных значений, логарифмы положительных чисел имеют еще и бесконечное множество комплексных значений.

Все значения логарифма комплексного числа имеют одну и ту же действительную часть $\ln|z|$, поэтому геометрически значения логарифма изображаются на плоскости (w) точками вертикальной прямой $u = \ln|z|$.

Пример

Найти $Ln(-1+i)$ и $\ln(-1+i)$.

Решение

$|-1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Поэтому $Ln(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi ki, k = 0,\pm 1,\pm 2,...;$ $\ln(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \dfrac{3\pi}{4}i$.

6.4. Общая степенная функция z^{γ}

Если $w = z^{\gamma}$, где z – произвольное, отличное от 0 и ∞ комплексное число, а γ – любое комплексное число, то полагают по определению

$$w = z^{\gamma} = e^{\gamma Lnz}.$$

Пусть $z = re^{i\varphi}, \gamma = a + bi$ тогда

$$w = z^{\gamma} = e^{\gamma Lnz} = e^{(a+bi)(\ln r + i\varphi + 2\pi ki)} = e^{a\ln r - b\varphi - 2\pi kb} \cdot e^{i(b\ln r + a\varphi + 2\pi ka)}, k = 0, \pm 1, \pm 2,...$$

Так как логарифм комплексного числа имеет бесконечное множество значений, то и выражение z^{γ} имеет бесконечное множество значений, но в частных случаях они могут все совпадать (если γ – целое число) или среди них может быть только конечное число различных значений (если γ – дробное число).

Пример

Вычислить: а) 2^{3+5i}; б) i^{i}.

Решение

а)

$$2^{3+5i} = e^{(3+5i)Ln2} = e^{(3+5i)(\ln 2+2\pi ki)} = e^{(3\ln 2-10\pi k)+i(5\ln 2+6\pi k)}$$
$$= e^{3\ln 2-10\pi k}\cdot e^{i5\ln 2} == e^{3\ln 2-10\pi k}(\cos(5\ln 2)+i\sin(5\ln 2)); k=0,\pm 1,\pm 2,...$$

б) $i^i = e^{iLni} = e^{i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki)} = e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}, k=0,\pm 1,\pm 2,...$

Видно, что все полученные значения i^i – действительные числа.

Например, при $k=0$ имеем $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,2079$.

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1

1) Выделить действительную и мнимую части функции $w = ie^{\pi - i}$.
2) Вычислить:

а) $\sin(4-i)$; б) $Ln(-\sqrt{3}-i)$; в) $(1-i)^{2+i}$.

Вариант 2

1) Выделить действительную и мнимую части функции $w = \sin z$.
2) Вычислить:

а) $\cos(2+5i)$; б) $\ln(-\sqrt{3}-i)$; в) $(1+i)^{3-i}$.

7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Определение производной

Пусть $w = f(z)$ есть однозначная функция, определенная в области D плоскости комплексной переменной (z).

1. $z \in D, z+\Delta z \in D, w = f(z), w+\Delta w = f(z+\Delta z)$.

2. $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$ есть приращение функции $f(z)$ при переходе от точки z к точке $z+\Delta z$.

3. $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

4. Если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при произвольном стремлении $\Delta z \to 0$, то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ в точке z и обозначается $w' = f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z.

Из дифференцируемости $f(z)$ в точке z следует ее непрерывность в этой точке: $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Тогда $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z$, откуда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$, что означает непрерывность $f(z)$ в точке z.

Из непрерывности $f(z)$ в точке z дифференцируемость $f(z)$ не следует.

Если функция $f(z)$ имеет производную в каждой точке области D, то она называется *дифференцируемой в этой области.*

7.2. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексной переменной (условия Коши-Римана)

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция, определенная в области D плоскости комплексной переменной (z). Точки $z = x+iy$ и $z+\Delta z = (x+\Delta x)+i(y+\Delta y)$ принадлежат области D.

Тогда

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y; \Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) =$$
$$= (u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)) - (u(x,y) + iv(x,y)) = \Delta u + i\Delta v,$$

где $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$ и $\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)$ есть полные приращения функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Теорема

Для того, чтобы однозначная функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы в точке (x, y) существовали частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, причем эти производные удовлетворяли условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти условия называют условиями Коши - Римана.
Так как эти условия значительно раньше были найдены Даламбером и Эйлером, то их называют также условиями Даламбера - Эйлера.

Доказательство

Необходимость

Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z, поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z)$, предел не зависит от того, как точка $z + \Delta z \to z$.

Предположим, что точка $z + \Delta z$ приближается к точке z, например, по прямой, параллельной оси $0x$, тогда $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$ и

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если точка $z + \Delta z \to z$ по прямой, параллельной оси $0y$, то $\Delta x = 0, \Delta z = i\Delta y$, поэтому

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, то, приравнивая полученные выражения для $f'(z)$, находим $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ откуда по определению равенства двух комплексных чисел получаем условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Необходимость доказана.

Достаточность

Так как функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), то их полные приращения в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 ; \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2 ,$$

где α_1 и $\alpha_2 \to 0$ при $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, причем $\frac{\alpha_1}{\Delta z} \to 0$ и $\frac{\alpha_2}{\Delta z} \to 0$.

Тогда при условии, что частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x, y) удовлетворяют условиям Коши-Римана, приращение функции $w = f(z)$ запишется в виде

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 + i(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2) =$$
$$= (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta x + i\Delta y(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) + \alpha = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})\Delta z + \alpha = A\Delta z + \alpha,$$

где А$=\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ - некоторое постоянное комплексное число, не зависящее от Δz, а $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $|\Delta z|$, т. е. $\to 0$ при $|\Delta z| \to 0$.

Найдем $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{A\Delta z + \alpha}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (A + \frac{\alpha}{\Delta z}) = A$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ существует, конечен и не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, а значит, существует производная функции $w = f(z)$ в точке $z = x + iy$.

Если функция $w = f(z)$ в некоторой точке удовлетворяет условиям Коши-Римана, то производная в этой точке может быть вычислена по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

7.3. Правила дифференцирования

Из определения производной, правил алгебраических действий и теорем о пределах функций комплексной переменной следует, что основные правила дифференцирования функций действительного аргумента остаются справедливыми и для функций комплексной переменной.

7.4. Аналитические функции

Определение 1

Если однозначная функция $w = f(z)$ дифференцируема в области D, то она называется аналитической в этой области.

Определение 2

Однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Пример

Является ли аналитической а) $w = e^z$; б) $w = (\bar{z})^2$?

Решение

а) $w = u + iv, z = x + iy$

$$w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y),\ \text{тогда}\ u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$$

Найдем частные производные этих функций

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y..$$

Условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются в любой (x, y), следовательно, функция $w = e^z$ дифференцируема на всей комплексной плоскости (z), а значит и аналитическая на всей комплексной плоскости.

б) $w = u + iv, z = x + iy; u + iv = (x - iy)^2; u + iv = x^2 - 2xyi - y^2;$

тогда $u = x^2 - y^2; v = -2xy;\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y;\ \frac{\partial v}{\partial x} = -2y;\ \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$

Условия Коши-Римана выполняются только в точке $z = 0$, так как равенства $2x = -2x$ и $-2y = 2y$ имеют место лишь при $x = y = 0$.

Следовательно, функция $w = (\bar{z})^2$ дифференцируема лишь в точке $z = 0$. Но, так как в окрестности точки $z = 0$ заданная функция не дифференцируема, она не будет аналитической в точке $z = 0$.

7.5. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной

Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в области D плоскости (z), отображает эту область в область G плоскости (W). Пусть, далее, точка $z_0 \in D$, а соответствующая ей при отображении точка $w_0 \in G$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда величина $k = |f'(z_0)| = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}$ есть коэффициент искажения или масштаб в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Если $k > 1$, то дуги при отображении растягиваются, если $k < 1$, то дуги сжимаются, если $k = 1$, то масштаб при отображении не меняется. Так как производная в точке z_0 не зависит от того, по какой кривой $z \to z_0$, то все бесконечно малые дуги, проходящие через точку z_0, при отображении будут подвергаться одинаковому искажению.

$\arg f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0))$ - это угол, на который нужно повернуть касательную к некоторой линии L в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к преобразованной кривой L_1 в точке $w_0 = f(z_0)$.

При отображении с помощью аналитической функции углы между кривыми сохраняются не только по величине, но и по направлению, во всех точках, где $f'(z_0) \neq 0$.

Определение

Всякое отображение, обладающее в некоторой точке свойством постоянства углов и свойством постоянства растяжений, называется конформным в этой точке.

Отображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$ в точке z_0, для которой $f'(z_0) \neq 0$, является конформным отображением.

Самостоятельная работа № 4

Вариант 1

1) Найти область дифференцируемости функции $w = z^2 + (3 - i)z + i$ и ее производную.
2) Вычислить:

   а) $\cos(1 - 3i)$; б) $Ln(\sqrt{3} + i)$; в) $(2i)^{5+i}$.

Вариант 2

1) Найти область дифференцируемости функции $w = \cos z$ и её производную.
2) Вычислить:

   а) $(i - \sqrt{3})^{2i+1}$; б) $\ln(-3 - \sqrt{3}i)$; в) $\sin(i - 2)$

Самостоятельная работа № 5

Вариант 1

1) Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости функции $f(z)$.
2) Дифференцируема ли функция $w = \frac{1}{z}$?
3) Вычислить:

а) $\ln(-4-4i)$; б) 5^{4-3i}; в) $\sin 3i$.

Вариант 2

1) Какая функция называется аналитической в точке и в области?
2) Установить, дифференцируема ли функция $w = e^{\bar{z}}$.
3) Вычислить:

а) 2^{1+5i}; б) $Ln(-5i)$; в) $\cos(4+i)$.

Самостоятельная работа № 6

Вариант 1

1) Найти область аналитичности функции $w = e^{2z} + iz$.
2) Найти образ линии $x^2 + y^2 = 4$ при отображении $w = iz + 2$.

Вариант 2

1) Найти образ линии $x^2 + (y-1)^2 = 1$ при отображжении $w = \frac{2}{z}$.
2) Проверить условия Коши-Римана для функции $w = e^{z^2}$.

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1. Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть в некоторой области D плоскости комплексной переменной (z) задана однозначная и непрерывная функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, и пусть γ – произвольная гладкая или кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D.

Выберем на дуге γ направление обхода от точки a к точке b.

1) Разобьем дугу γ произвольно на n частичных дуг точками $z_0 = a, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = b;$; обозначим $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k$.
2) Выберем на каждом участке (z_{k-1}, z_k) дуги γ по точке $\varsigma_k = \xi_k + i\eta_k$.
3) Образуем сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k))\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k) +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k),$$

которую назовем интегральной суммой функции $f(z)$.

Предел интегральной суммы σ_n, вычисленный при стремлении к нулю длины наибольшей из частичных дуг (при $n \to \infty$), не зависящий ни от способа разбиения дуги γ на частичные дуги (z_{k-1}, z_k), ни от выбора точек ς_k, называется интегралом от функции $f(z)$ по дуге γ и обозначается

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k .$$

При указанных выше требованиях к функции $f(z)$ и контуру γ этот предел всегда существует.

Действительно,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k-1}^{n}(u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) + i \lim_{n\to\infty}\sum_{k-1}^{n}(u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k).$$

По условию $f(z)$ непрерывна в области D, значит, в этой области непрерывны и функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а γ – гладкая или кусочно-гладкая кривая. Поэтому пределы сумм, стоящих в правой части последнего равенства, существуют и являются криволинейными интегралами по координатам от функций действительных переменных.

Таким образом,

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{\gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy\,.$$

Эта формула дает выражение интеграла от функции комплексной переменной через два криволинейных интеграла от действительных функций. Отсюда же следует, что основные свойства криволинейных интегралов по координатам распространяются и на интегралы от функций комплексной переменной.

Некоторые из этих свойств есть:

1) $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$;

2) $\int\limits_{\gamma} af(z)dz = a\int\limits_{\gamma} f(z)dz$;

3) $\int\limits_{\gamma} (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int\limits_{\gamma} f_1(z)dz + \int\limits_{\gamma} f_2(z)dz$;

4) $\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$.

8.2. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной

1. Пусть дуга γ задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$.

Тогда криволинейные интегралы сводим к определенным и получим

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u\,(x\,(t),\, y\,(t))\; x'(t)\; dt - v\;(x\,(t), y\,(t))\;\; y'(t)\; dt +$$

$$+ i\int\limits_{\alpha}^{\beta} v\;(x\,(t),\, y\,(t))\; x'(t)\; dt + u\;(x\,(t),\, y\,(t))\;\; y'(t)\; dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (u\;(x\,(t),\, y\,(t)) + iv\;(x\,(t),\, y\,(t)))\; x\,'(t)\; dt +$$

$$+ \int\limits_{\alpha}^{\beta} (u\;(x\,(t),\, y\,(t)) + iv\;(x\,(t),\, y\,(t)))\;\, iy'(t)\; dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (u\;(x\,(t),\, y\,(t)) + iv\;(x\,(t),$$

$$y\,(t)))\;(x'(t) + iy'(t))\; dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\;\,(z\,(t))\;\, z'(t)\; dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\;\,(z\,(t))\; dz\,(t),$$

то есть $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\,(z\,(t))\,dz\,(t)$, где $z\,(t) = x\,(t) + iy\,(t)$.

2. Если дуга γ задана уравнением $y = g\,(x)$, где $a \le x \le b$, то, принимая за параметр x и записывая $z = x + ig(x)$, задачу сводим к случаю 1.

3. Если дуга γ задана уравнением $x = \varphi\,(y)$, где $x = \varphi\,(y)$, где $c \le y \le d$, то за параметр принимаем y и записываем $z = \varphi\,(y) + iy$. Задачу сводим к случаю 1.

Пример 1

Вычислить $\int\limits_{\gamma} (\bar{z})^2\,dz$ по отрезку, соединяющему точки $z = 0$ и $z = 1 + i$.

Решение

На прямой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = 1 + i$, контур γ задается уравнением $z = x + ix = x\,(1 + i)$, где $0 \le x \le 1$. Тогда $\bar{z} = x\,(1 - i),\ dz = (1 + i)\,dx$ и

$$\int\limits_{\gamma} (\bar{z})^2\,dz = \int\limits_{0}^{1} x^2\,(1 - i)^2\,(1 + i)\,dx = 2\,(1 - i)\int\limits_{0}^{1} x^2\,dx = 2\,(1 - i)\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\,(1 - i)..$$

Пример 2

По ломаной γ с вершинами в точках $O\,(0,0),\ A\,(1,1),\ B\,(2,1)$ вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{\gamma} z^2\,dz$; б) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z\,dz$; в) $\int\limits_{\gamma} Jmz\,dz$; г) $\int\limits_{\gamma} |z|\,dz$.

Решение

а) Уравнение стороны OA: $y = x$, тогда $z = x + ix$ или $z = x\,(1 + i)$, где $0 \le x \le 1$, $dz = (1 + i)\,dx$, а

$$\int\limits_{OA} z^2\,dz = \int\limits_{0}^{1} x^2(1 + i)^2(1 + i)dx = (1 + i)^3\int\limits_{0}^{1} x^2\,dx = (1 + i)^3\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}(1 + 3i - 3 - i) = \frac{1}{3}(2i - 2) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i\,.$$

Уравнение стороны AB: $y = 1$, тогда $z = x + i$, $dz = dx$, $1 \le x \le 2$, а

$$\int_{AB} z^2 dz = \int_1^2 (x+i)^2\,dx = \left.\frac{(x+i)^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}((2+i)^3 - (1+i)^3) =$$

$$= \frac{1}{3}(2+i-1-i)((2+i)^2 + (2+i)(1+i) + (1+i)^2) = \frac{1}{3}(4+9i) = \frac{4}{3} + \frac{9}{3}i = \frac{4}{3} + 3i.$$

Окончательно, интеграл по всей ломаной равен

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{4}{3} + 3i = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

б) $\operatorname{Re} z dz$. Для стороны $OA: z = x\,(1+i)$, $0 \le x \le 1$, $dz = (1+i)\,dx$. Тогда

$$\int_{OA} \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^1 x\,(1+i)\,dx = (1+i)\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Для стороны

$AB:\ z = x+i,\quad 1 \le x \le 2,\quad dz = dx$, а $\displaystyle\int_{AB} \operatorname{Re} z\, dz = \int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

Тогда

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z dz = \int_{OA} \operatorname{Re} z dz + \int_{AB} \operatorname{Re} z dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} = 2 + \frac{1}{2}i.$$

в) $J\,m\,z\,dz$.

$$\int_\gamma Jmzdz = \int_{OA} Jmzdz + \int_{AB} Jmzdz = \int_0^1 x\,(1+i)\,dx + \int_1^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

г) $|\,z\,| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Для стороны $OA: y = x$, $z = x\,(1+i)$, $dz = (1+i)dx$, $0 \le x \le 1$

$$\int_{OA} |\,z\,|\,dz = \int_0^1 x\sqrt{2}\,(1+i)\,dx = \sqrt{2}\,(1+i)\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Для стороны $AB: y = 1$, $z = x+i, dz = dx$, $1 \le x \le 2$,

$$\int\limits_{AB} |\, z \,|\, dz = \int\limits_1^2 \sqrt{x^2+1}\; dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+1}\,\Bigg|_1^2 + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,\Bigg|_1^2 =$$

$$= \sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\,(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln\,(1+\sqrt{2}).$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} |\, z \,|\, dz = \int\limits_{OA} |\, z \,|\, dz + \int\limits_{AB} |\, z \,|\, dz = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\,(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln\,(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} i \approx 2{,}518 + 0{,}707i.$$

8.3. Основная теорема Коши

Теорема

Если $f(z)$ есть аналитическая функция односвязной области $\overline{D}$, то интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, целиком лежащему в области $\overline{D}$, равен нулю, т. е.

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0\,.$$

Доказательство

Известно, что $\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \oint\limits_{\gamma} u\,(x,y)\, dx - v\,(x,y)\, dy + i \oint\limits_{\gamma} v\,(x,y)\, dx + u\,(x,y)\, dy.$

Из аналитичности $f(z)$ в области D следует, что частные производные функций $u\,(x,y)$ и $v\,(x,y)$ существуют, удовлетворяют условиям Коши-Римана, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, а из предположения о непрерывности $f'(z)$ в области D следует непрерывность частных производных. Поэтому, применяя к криволинейным интегралам формулу Грина, получим

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \iint\limits_{D_1} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy + i \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Из условий Коши-Римана подынтегральное выражение в каждом двойном интеграле равно нулю, поэтому

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0..$$

Теорема доказана.

Следствие

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $\overline{D}$, то $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$ не зависит от пути, соединяющего точки A и B, если дуга AB целиком лежит внутри области $\overline{D}$.

Пример 1

Вычислить по ломаной OAB (см. пример 2 раздела 8) и по отрезку OB интегралы:

а) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz;$ б) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z dz;$

Решение

а) $\int\limits_{OAB} z^2 dz = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$ (см. пример 2 раздела 8)

$$\int\limits_{OB} z^2 dz = \int\limits_0^2 x^2 (1+\frac{i}{2})^2 (1+\frac{i}{2}) dx = (1+\frac{i}{2})^3 \int\limits_0^2 x^2 dx =$$

$$= (1+\frac{i}{2})^3 \left. \frac{x^3}{3} \right|_9^2 = \frac{8}{3}(1+\frac{i}{2})^3 = \frac{8}{3}(1+\frac{3i}{2} - \frac{3}{4} - \frac{i}{8}) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i.$$

Получили, что $\int\limits_{OAB} z^2 dz = \int\limits_{OB} z^2 dz$, т. е. интеграл не зависит от пути, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$, так как $f(z)=z^2$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

б) $w = \operatorname{Re} z,\quad u+iv = x$, тогда $u=x,\quad v=0;\quad \frac{\partial u}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0.$

Условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ не выполняется ни в одной точке на комплексной плоскости, так как $1 \neq 0$, поэтому $w = \operatorname{Re} z$ не является аналитической на всей комплексной плоскости.

$$\int\limits_{OAB} \operatorname{Re} z dz = 2 + \frac{1}{2} i \qquad \text{(см. пример 2 раздела 8),}$$

$$\int\limits_{OB} \operatorname{Re} z\, dz = \int\limits_0^2 x\,(1+\frac{i}{2})\, dx = (1+\frac{i}{2})\int\limits_0^2 x\, dx = (1+\frac{i}{2}) \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2+i.$$

Так как функция $w = \operatorname{Re} z$ не является аналитической, интеграл $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z dz$ зависит от пути, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$.

8.4. Теорема Коши для многосвязной области

Сначала рассмотрим двусвязную область (рис. 2), ограниченную простыми замкнутыми кривыми γ_1 и γ_2, которые не пересекаются, а γ_2 целиком лежит внутри γ_1. Допустим, что $f(z)$ является аналитической в области между контурами и на самих контурах γ_1 и γ_2. Проведём в заданной области разрез по линии AB. Предполагая, что разрез имеет как бы два берега, мы превратим эту область в односвязную. Положительное направление обхода по контуру указано на рисунке. Применим теорему Коши к полученной односвязной области, ограниченной контуром $\Gamma\{AEA + AB + BFB + BA\}$.

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad \text{или} \quad \oint_{AEA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \oint_{BFB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0\,.$$

Так как $\int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0$, то $\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz.$

Из полученной формулы видно, что интегралы от $f(z)$ по внешнему контуру γ_1 и по внутреннему контуру γ_2, обходимым в одном и том же направлении, равны по величине, но, вообще говоря, не равны нулю, так как $f(z)$ может быть неаналитической внутри области, ограниченной контуром γ_2.

Теперь рассмотрим теорему Коши для $(n+1)$- связной области, которая с помощью системы разрезов может быть сделан односвязной.

Если $f(z)$- аналитическая функция в замкнутой многосвязной области, ограниченной внешним замкнутым контуром γ и замкнутыми контурами $\gamma_1,\ \gamma_2, ..., \gamma_n,$, лежащими внутри γ, то интеграл от этой функции по внешнему контуру γ равен сумме интегралов по внутренним контурам, причём интегрирование по всем контурам выполняется в одном и том же направлении, то есть

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + ... + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

8.5. Вычисление интеграла от аналитической функции

Если функция $f(z)$, аналитическая в односвязной области D, содержащей внутри себя точки z_0 и z, то величина $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ не зависит от пути интегрирования, а зависит, лишь от вида подынтегральной функции и точек z_0 и z.

Если точка z_0 зафиксирована, то интеграл $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ определяет функцию $F(z)$ для каждой выбранной точки $z\in D$. Функция $F(z)$ является аналитической в D и $F'(z)=f(z)$.

Назовём функцию $\Phi(z)$ первообразной для $f(z)$ в области D, если $\Phi(z)$ аналитическая в D и $\Phi'(z)=f(z)$. Тогда $\Phi(z)-F(z)=C$, где C постоянное комплексное число. При $z=z_0$ имеем $\Phi(z_0)-F(z_0)=C$, отсюда $C=\Phi(z_0)$, так как $F(z_0)=0$.

Следовательно, $\int_{z_0}^{z} f(z)dz=\Phi(z)-\Phi(z_0)$.

Получснная формула показываст, что значснис интсграла от аналитичсской функции равно приращению какой-либо первообразной для подынтегральной функции на пути интегрирования.

Таким образом, определение первообразной и формула Ньютона-Лейбница для функций действительной переменной и аналитических функций комплексной переменной полностью совпадают. Поэтому интегралы от элементарных функций комплексной переменной вычисляются с помощью тех же формул и правил, что и в обычном анализе.

Пример 1

Вычислить: а) $\int_{\gamma} z^2 dz$ вдоль контура γ, соединяющего точки $z=0$ и $z=2+i$;
б) $\int_{\gamma} e^z dz$ по отрезку, соединяющему точки $z=0$ и $z=i$.

Решение

а) Так как $f(z)=z^2$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости, а первообразной для неё является функция. $F(z)=\dfrac{z^3}{3}$, то

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{z=0}^{z=2+i} z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{1}{3}(8+12i-6-i) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

Получили тот же результат, что и в примере 8.3.1

б) Так как $f(z)=e^z$ - аналитическая функция на всей комплексной плоскости, а первообразной для неё является функция $F(z)=e^z$, то

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_{z=0}^{z=i} e^z dz = \left. e^z \right|_0^i = e^i - e^0 = e^i - 1 = \cos 1 + i\sin 1 - 1 = (\cos 1 - 1) + i \sin 1.$$

8.6. Особые точки - полюсы

Точка z_0 называется особой точкой для $f(z)$, если в этой точке нарушается аналитичность функции. Точка z_0 называется изолированной особой точкой, если можно указать такую окрестность точки $z_0 : |z - z_0| < r$, в которой, кроме z_0, других особых точек функции $f(z)$ нет.

Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то точка $z = z_0$ называется полюсом функции $f(z)$.

Функция $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z - z_0}$ имеет в z_0 простой полюс или полюс первого порядка, а функция $g(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$ имеет в z_0 полюс m-го порядка, если $\varphi(z)$ аналитическая функция в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Так для функции $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z(z-3)(z+1)^4} = \dfrac{z-1}{z(z-3)(z+1)^3}$ точки $z=0$ и $z=3$ - простые полюсы, а точка $z=-1$ - полюс третьего порядка.

8.7. Определение вычета

Понятие вычета является одним из важнейших понятий теории функций комплексной переменной в силу большой практической ценности основной теоремы о вычетах, которую мы рассмотрим ниже.

Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D, то $\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$, где γ - любой замкнутый контур, лежащий целиком в области D. Если же внутри контура γ есть единственная изолированная особая точка функции $f(z)$, то $\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz$, вообще говоря, не равен нулю. Значение этого интеграла, как известно, не зависит от формы контура γ.

Условились величину этого интеграла, делённую на $2\pi i$, называть вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 и обозначать символом

$$res[f(z); z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz.$$

Здесь при интегрировании обход контура γ идёт против движения часовой стрелки.

8.8. Формулы для вычисления вычетов

1. Если z_0 есть простой полюс функции $f(z)$, то вычет $f(z)$ относительно z_0 равен

$$res[f(z); z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

2. Если z_0 - простой полюс функции $f(z)$, которая может быть представлена в виде $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ - аналитические функции в точке $z = z_0$, причём $z = z_0$ - простой полюс $f_2(z)$, а $f_1(z_0) \neq 0$. Тогда при $f_2{}'(z_0) \neq 0$

$$res\,[f(z);\, z_0] = \frac{f_1\,(z_0)}{f_2{}'\,(z_0)}.$$

3. Если точка $z = z_0$ - полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$res[f(z); z_0] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z - z_0)^n f(z)\right],$$

здесь вычисляется предел производной $(n-1)$ порядка.

Пример 1

Вычислить вычеты функции $f(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2}$ относительно всех её особых точек.

Решение

Для заданной функции точка $z = -1$ является простым полюсом, а $z = 1$ - полюсом второго порядка.

$$res[f(z);-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2}=\lim_{z\to -1}\frac{z+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{4};$$

$$res[f(z);1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}((z-1)^2\frac{z+2}{(z+1)(z-1)^2})'=\lim_{z\to 1}(\frac{z+2}{z+1})'=\lim_{z\to 1}\frac{z+1-(z+2)}{(z+1)^2}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 2

Найти вычеты в каждой из особых точек функций:

$$\text{а) } f(z)=\frac{\cos z}{z^3};\ \text{ б) } f(z)=\frac{z^2-2}{z^2+z};\ \text{ в) } f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}.$$

Решение

а) Для $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ точка $z=0$ является полюсом третьего порядка.

$$res\,[f(z);\,0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}(z^3\frac{\cos z}{z^3})''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(\cos z)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(-\sin z)'=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{2};$$

б) Для функции $f(z)=\dfrac{z^2-2}{z^2+z}=\dfrac{z^2-2}{z(z+1)}$ точка $z=0$ является простым полюсом, а $z=-1$- тоже простым полюсом

$$res\,[f(z);\,0]=\lim_{z\to 0}z\frac{(z^2-2)}{z(z+1)}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2-2}{z+1}=-\frac{2}{1}=-2;$$

$$res\,[f(z);\,-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{(z^2-2)}{z(z+1)}=\lim_{z\to -1}\frac{z^2-2}{z}=\frac{1-2}{-1}=1;$$

в) $z^2+1=0$ при $z=\pm i$. Поэтому точки $z=i$ и $z=-i$ являются простыми полюсами $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$

$$res\,[f(z);\,i]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{e^z}{z+i}=\frac{e^i}{2i}$$

$$=\frac{(\cos 1+i\sin 1)(-i)}{2i\,(-i)}=\frac{\sin 1-i\cos 1}{2}=\frac{\sin 1}{2}-i\frac{\cos 1}{2};$$

$$res\,[f(z);\,-i]=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to -i}\frac{e^z}{z-i}=\frac{e^{-i}}{-2i}$$

$$=\frac{(\cos 1-i\sin 1)\,i}{2i\,(-i)}=\frac{\sin 1+i\cos 1}{2}=\frac{\sin 1}{2}+i\frac{\cos 1}{2}.$$

8.9. Теорема Коши о вычетах

Теорема

Если функция $f(z)$, аналитическая в односвязной области D, ограниченной контуром γ, всюду, кроме конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, лежащих внутри области D (но не на кривой γ), то интеграл от функции $f(z)$ по кривой γ равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов $f(z)$ относительно всех особых точек, лежащих внутри γ, т. е.

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} res\,[f(z); z_k]\,.$$

Доказательство

Для простоты окружим точки $z_1, z_2, ..., z_n$ окружностями $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ с центрами в этих точках и радиусами такими малыми, чтобы окружности не пересекались и лежали в области D, ограниченной контуром γ. Тогда функция $f(z)$ будет аналитической в многосвязной области, ограниченной контурами $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$.

По теореме Коши для многосвязной области имеем

$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + ... + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz$, но $\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi\, i\, res\,[f(z); z_k]$.

Тогда

$$\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} res\,[f(z); z_k]\,.$$

Теорема доказана.

Пример 1

Найти значение $\int_{\gamma} \frac{(z+1)}{(z-2)^2}\,dz$, где

а) γ - окружность $|\,z\,| = 3$; б) γ - окружность $|\,z + 2 - i\,| = 1$.

Решение

Подынтегральная функция имеет единственную особую точку $z = 2$ - полюс второго порядка, которая находится внутри окружности $|\,z\,| = 3$ (центр вначале координат, радиус равен 3).

Тогда

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z+1)\,dz}{(z-2)^2} = 2\pi\, i\; res\,[f(z);\, 2] = 2\pi\, i \frac{1}{1!} \lim_{z\to 2} ((z-2)^2 \frac{(z+1)}{(z-2)^2})' = 2\pi\, i \lim_{z\to 2} (z+i)' = 2\pi\, i\,.$$

б) Окружность $|\, z+2-i\,| = 1$ имеет центр в точке $z_0 = -2+i$, радиус 1, а полюс $z=2$ лежит вне этой окружности. Поэтому в области, ограниченной этим контуром γ, функция аналитическая. Тогда по основной теореме Коши

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{(z+1)}{(z-2)^2}\, dz = 0\,.$$

Пример 2

Вычислить $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-i)(z-1)}$, где γ - окружность $x^2+y^2 = 2x+2y$.

Решение

Преобразуем уравнение окружности $x^2+y^2 = 2x+2y$, выделяя полный квадрат по x и по y:

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) = 2 \text{ или } (x-1)^2+(y-1)^2 = 2\,.$$

Точка $(-1;\ 1)$ - центр окружности, радиус - $\sqrt{2}$.

Для подынтегральной функции $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-1)}$ точки $z=i$ и $z=1$ являются простыми полюсами и находятся внутри окружности γ.

Тогда по теореме Коши о вычетах имеем:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-i)(z-1)} = 2\pi\, i\,(res\,[f(z);\, i] + res\,[f(z);\, 1]\,);$$

$$res\,[f(z);\, i] = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{1}{(z-i)(z-1)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z-1} = \frac{e^i}{2i} = \frac{1}{i-1} = \frac{-i-1}{(i-1)(-i-1)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i;$$

$$res\,[f(z);\, 1] = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{1}{(z-i)(z-1)} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Тогда

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi\, i(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i) = 0.$$

Пример 3

Вычислить $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{-2z}}{z^2}$, где γ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$.

Решение

Для подынтегральной функции $f(z)=\dfrac{e^{-2z}}{z^2}$ точка $z=0$ является полюсом второго порядка и находится внутри эллипса с полуосями 3 и 2.
По теореме Коши о вычетах

$$\oint_\gamma \frac{e^{-2z}}{z^2}dz = 2\pi\, i res\,[f(z);0] = 2\pi\, i \lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{e^{-2z}}{z^2}\right)' = 2\pi\, i \lim_{z\to 0}\left(e^{-2z}\right)' =$$

$$= 2\pi\, i \lim_{z\to 0}(-2)e^{-2z} = 2\pi\, i\quad(-2)\,e^0 = -4\pi\, i.$$

Самостоятельная работа № 7

Вариант 1

1) Вычислить $\int_\gamma \cos z dz$ по отрезку прямой, соединяющему точки $z=i$ и $z=-2+i$.

2) Вычислить $\int_\gamma (4i+3\operatorname{Re} z)dz$, где $\gamma:\ 2x^2-y+3=0$ от $z=3i$ до $z=1+5i$.

Вариант 2

1) Вычислить $\int_\gamma \sin z dz$, где $\gamma:\ x-3y+1=0$ от $z=-1$ до $z=2+i$.

2) Вычислить $\int_\gamma (2i\, Jmz+3)\,dz$, где $\gamma:\ y=2-x^2$ от $z=2i$ до $z=1+i$.

Самостоятельная работа № 8

Вариант 1

1) Вычислить $\int_\gamma (2iz-z^2)dz$, где $\gamma:\ x^2+y^2-x=0$.

2) Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\dfrac{4z}{(z-1)^3(z+2)^2}$.

Вариант 2

1) Вычислить $\int_\gamma e^{z-2i}dz$, где $\gamma:\ |\,z-2\,|=2$.

2) Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^2(z-i)}$.

Самостоятельная работа № 9

Вариант 1

С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}dz$, $\gamma:\ x^2+4y^2=4$.

Вариант 2

С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{(3z^2+1)}{(z+2)^2(z-2i)}dz$, $\gamma: |\ z+1-i\ |=3$.

Самостоятельная работа № 10

1) Вычислить: $(-1-i)^{2i}, \sin(3i+2)$.

2) Найти образ линии $x^2+y^2+x=0$ при отображении $w=3\bar{z}-i$.

3) Является ли аналитической функция $w=z+e^{\bar{z}}$?

4) На комплексной плоскости (z) построить множество точек z, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} |\ z+i\ |\le 2, \\ \operatorname{Re} z > -1. \end{cases}$$

5) Вычислить $\int\limits_{\gamma} e^{\bar{z}}dz$ по отрезку прямой, соединяющему точки $z=0$ и $z=2-2i$.

4) С помощью вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{(z^2+3)\,dz}{z^3-1}; \gamma: x^2+y^2=9$.

Самостоятельная работа № 10 содержит набор основных типовых задач по теме изучаемого раздела математики и может быть использована для подготовки к контрольной работе.

С помощью вычетов удается вычислять некоторые определённые интегралы от функций действительной переменной, для чего эти интегралы предварительно преобразуются в интегралы по замкнутому контуру.

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью вычетов вычисляют некоторые несобственные интегралы от функции действительной переменной вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Пусть $f(z)$- рациональная функция $f(z)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, а разность степеней знаменателя и числителя $m-n>1$, $\quad Q_m(x)\ne 0, \quad x\in R$.

Пусть функция $f(z)$, аналитическая на действительной оси, имеет выше действительной оси (в верхней полуплоскости $Jmz > 0$) конечное число особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$. Тогда существует несобственный интеграл от функции $f(z)$ по промежутку $(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx - 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} res\,[f(z);\, z_k].$$

Пример

Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}$.

Функция $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$.

Решение

Введём функцию комплексной переменной z

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}.$$

Она имеет в верхней полуплоскости $Jmz > 0$ единственную особую точку $z = i$ -полюс третьего порядка. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi\, i\; res\,[f(z);\, i]$.

Найдем

$$res\,[f(z);\, i] = \frac{1}{2!} \lim_{z \to i} ((z-i)^3 \frac{z^2}{(z-i)^3 (z+i)^3})'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{z^2}{(z+i)^3})'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2z(z+i)^3 - z^2 3(z+i)^2}{(z+i)^6})' == \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2z^2 + 2zi - 3z^2}{(z+i)^4})' = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} (\frac{2zi - z^2}{(z+i)^4})' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{(2i - 2z)(z+i)^4 - (2zi - z^2)4(z+i)^3}{(z+i)^8} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{2z^2 - 2 - 8zi}{(z+i)^5} = \frac{1}{2} \frac{(-2-2+8)}{(2i)^5} = \frac{4}{2 \cdot 32i} = \frac{1}{16i} = \frac{-i}{16i\,(-i)} = -\frac{i}{16}.$$

Окончательно получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi\, i\, (-\frac{i}{16}) = \frac{\pi}{8}.$$

Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(z) = e^{imz} \cdot F(z)$, где $m > 0$ и $F(z) \to 0$ при $|\, z \,| \to \infty$ равномерно по φ для $Jmz \geq 0$;

2) $f(z)$ на действительной оси имеет конечное число простых полюсов $x_1, x_2, ..., x_p$;

3) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости всюду, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\, i\,(\sum_{k=1}^{n} res\,[f(z);\, z_k] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} res\,[f(z);\, x_k]).$$

Пример

Вычислить интеграл Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение

Рассмотрим $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$. Введём функцию $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Здесь $m = 1$, $F(z) = \frac{1}{z} \to 0$ при $|\,z\,| \to \infty$. Для $f(z)$ точка $z = 0$ - простой полюс, расположенный на действительной оси. Других особых точек нет.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = 2\pi\, i\frac{1}{2}\, res\,[f(z);\, 0] = \pi\, i \lim_{z\to 0} z\,\frac{e^{iz}}{z} = \pi\, i \lim_{z\to 0} e^{iz} = \pi\, i.$$

Но $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\cos x}{x} + i\frac{\sin x}{x})\,dx = \pi i.$$

В силу определения равенства двух комплексных чисел имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0, \quad \text{а} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Так как $\frac{\sin x}{x}$ - чётная функция, то $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$, откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. - М.: Наука, 1970. – 380 с.

Волковысский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л. И. Волковысский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. - М.: Наука, 1975. – 220 с.

Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. - М.: Наука, 1968. – 620 с.

Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - М.: Наука, 1979. – 410 с.

Маркушевич, А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. - М.: Наука, 1978. – 360 с.

Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. - М.: Наука, 1984. – 480 с.

Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. - М.: Наука, 1979. – 720 с.

Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. - М.: Наука, 1980. – 510 с.

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

В. Я. Раевский

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов
всех специальностейи очного обучения

Екатеринбург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие содержит основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы) по теме «Числовые и степенные ряды». Основное внимание уделяется многочисленным типовым задачам, решение которых приводится с детальной подробностью. Для проверки и закрепления полученных знаний в пособие включены разделы «Тренировочные задачи» и «Вопросы и задачи для самопроверки».

Работа содержит 30 вариантов наборов задач для самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы для контрольных работ.

Учебное пособие может быть использовано студентами всех специальностей для изучения темы «Числовые и степенные ряды».

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Основные понятия

До появления числовых рядов имела смысл только сумма конечного набора чисел: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Когда-то считалось, что складывать бесконечный набор чисел бессмысленно, так как казалось очевидным, что, складывая бесконечно много, например, положительных чисел, должна получаться бесконечная сумма. На этом, казалось бы, верном, утверждении строились многие известные парадоксы (например, «Ахилл и черепаха»). Однако во многих практических задачах и чисто математических построениях возникали суммы бесконечного набора чисел, что привело к необходимости сделать их предметом исследования математики. Приведем пример практической задачи, в которой (в одном из подходов к ее решению) возникает необходимость сложения бесконечного набора чисел.

Пример1. Допустим, что при добыче нефти десятая ее часть идет на обеспечение самой добычи (механизмы, обеспечивающие добычу, работают на бензине, который производится из той же нефти). Сколько необходимо добыть нефти, чтобы можно было продать 10 тонн?

Решение. Ясно, что нужно добыть, по крайней мере, эти 10 тонн. Но тогда нужно добавочно добыть $10 \cdot 0.1 = 1$ тонну для обеспечения добычи этих 10 тонн. Но для обеспечения добычи этой 1 тонны необходимо добавочно добыть $1 \cdot 0.1 = 0.1$ тонны. Но для обеспечения ее добычи нужно еще добыть $0.1 \cdot 0.1 = 0.01$тонны. И так далее. Таким образом, общее количество добытой нефти должно быть равно

$$10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots \qquad (1)$$

Таким образом, при таком подходе к решению возникла необходимость сложить бесконечный набор чисел.

Замечание. Конечно, предложенный выше подход к решению примера имеет чисто иллюстративную цель (естественное появление бесконечной суммы), поскольку очевиден следующий более простой путь решения. Пусть x – необходимое количество нефти, которое нужно добыть, чтобы на продажу иметь 10 тонн. Тогда $0.1\cdot x$ тонн из добытого пойдет на обеспечение самой добычи. Таким образом, продать можно будет только $x-0.1\cdot x$ тонн. Откуда получаем уравнение : $x-0.1\cdot x=10$, откуда $x=\frac{10}{0.9}=11.1111\ldots$ тонн.

Приступим все же к понятию бесконечных сумм. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (2)$$

называется *числовым рядом.* Числа $a_1, a_2,, a_3, \ldots$ называются *членами (или слагаемыми) ряда.* Выражение для a_n под знаком суммы в (2), позволяющее найти любое слагаемое по его порядковому номеру n, называется *общим членом* ряда. При подстановке в это выражение $n=1,2,3,\ldots$ получаем значения, соответственно, *1*-го слагаемого, *2*-го, *3*-го ... . Например, ряд (1) можно с использованием знака суммы записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty} 10\cdot 0.1^{n-1}$, а потому общий член этого ряда имеет вид: $a_n = 10\cdot 0.1^{n-1}$. Действительно, подставляя в это выражение *n=1, 2, 3,* ... получаем значения, соответственно, *1*-го слагаемого, *2*-го, *3*-го и т.д. слагаемого ряда (1).

Пример 2. Рассмотрим ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – так называемый *гармонический* ряд. Числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ … являются членами ряда, а выражение $a_n=\frac{1}{n}$ является общим членом ряда.

Как же определить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, т.е. сумму бесконечного набора слагаемых? Можно воспользоваться тем, что мы умеем складывать любой конечный набор чисел, и попытаемся исчерпать указанную бесконечность «постепенно». Сначала составим «сумму» из одного первого слагаемого: $S_1 = a_1$. Потом сложим первые 2 слагаемых: $S_2 = a_1 + a_2$. Потом первые 3 слагаемых: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, и так далее. И будем следить за поведением бесконечной последовательности чисел $S_1, S_2, S_3, \dots$, которые представляют собой суммы все большего числа слагаемых исходного ряда. Если эта последовательность сумм все увеличивающегося числа слагаемых ряда (2) приближается к определенному числу (т.е. имеет предел), то это число естественно назвать суммой всего ряда. Если же эта последовательность не приближается ни к какому числу (или идет к бесконечности), то естественно считать, что такой ряд суммы не имеет. Число $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называется *n-ой частичной суммой ряда* $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ называется *сходящимся,* если существует (конечный) предел его частичных сумм: $\lim_{n \to \infty} S_n = S$. В этом случае число S называется *суммой* ряда, что записывается как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если же такого предела не существует (или он равен ∞), то ряд называется *расходящимся* (такой ряд суммы не имеет).

Пример 3. Исследуем на сходимость следующий ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}. \tag{3}$$

Решение. Вычислим несколько первых последовательных частичных сумм и попробуем найти закономерность:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}, \dots \tag{4}$$

Легко, глядя на (4), угадать общую формулу для частичных сумм: $S_n = \frac{n}{n+1}$ (можно доказать эту формулу строго методом математической индукции). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \{\text{делим числитель и знаменатель на } n\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Поэтому по приведенному выше определению данный ряд (3) сходится, а его сумма равна 1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$.

Пример 4. Пусть число $a \neq 0$. Рассмотрим ряд

$$a - a + a - a + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a. \quad (5)$$

Тогда $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, $S_4 = 0$, $S_5 = a$ и так далее. Понятно, что такая последовательность частичных сумм $a, 0, a, 0, a, 0, \ldots$ предела не имеет, поэтому ряд (5) расходится.

Пример 5. Геометрическая прогрессия. Напомним, что геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен предыдущему, умноженному на одно и то же для этой последовательности число q (которое называется *знаменателем* данной прогрессии). Если обозначить буквой a первый член прогрессии, то прогрессия (по определению) имеет вид: $a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$. Соответствующий ряд имеет вид $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n-1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$ (или $\sum_{n-0}^{\infty} a\cdot q^n$, если начать нумерацию слагаемых не с единицы, а с нуля). Отметим сразу, что если знаменатель прогрессии $q = 1$, то соответствующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + a + \cdots$ (при $a \neq 0$)

расходится, поскольку его частичные суммы имеют вид $S_n = a + a + a + \cdots + a = n \cdot a$, а потому $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(n \cdot a) = a \cdot \lim_{n\to\infty} n = \pm\infty$ в зависимости от знака числа a. Для $q \neq 1$ из школьной программы известна общая формула для суммы первых n слагаемых геометрической прогрессии $S_n = a + a\cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n = \frac{a\cdot(1-q^n)}{1-q}$. Поэтому, переходя к пределу $\lim_{n\to\infty} S_n$, легко получить:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\cdot(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-q^n\right) = \frac{a}{1-q}\cdot\left(1-\lim_{n\to\infty} q^n\right).$$

Несложно выяснить, что предел $\lim_{n\to\infty} q^n$ существует (и при этом равен нулю) только в том случае, если $|q|<1$. Отсюда следует, что ряд, составленный из геометрической прогрессии, сходится (и имеет суммой число $S = \frac{a}{1-q}$) только тогда, когда $|q|<1$. В этом случае (когда $|q|<1$) геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией* и для нее

$$a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \cdots + a\cdot q^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1} = \frac{a}{1-q}. \tag{6}$$

Заметим, что ряд (1) тоже является бесконечно убывающей геометрической прогрессией с $a = 10$ и $q = 0.1$, а потому из (6) получаем для примера 1, что необходимо добыть $\frac{10}{1-0.1} = \frac{10}{0.9} = 11.111111\ldots$ тонн нефти, что выше было получено из простого алгебраического уравнения.

Рассмотрим *свойства сходящихся рядов.* Они напоминают свойства конечных сумм.

1. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то для любого числа c сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n$ и выполнено:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \qquad (7)$$

Фактически это означает возможность вынесения общего множителя c в сумме за скобку (точнее, за знак суммы).

2. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и выполняется:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,. \qquad (8)$$

Справедливость этих свойств легко доказывается из определения сходящихся рядов и соответствующих свойств пределов последовательностей (предел суммы-разности равен сумме-разности пределов, а постоянный множитель можно выносить за знак предела).

Пример 6. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{4}{n\,(n+1)} \right)$.

Решение. Используя свойство (8), а затем (7), последовательно получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{4}{n\,(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\,(n+1)} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} \,.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вида (6) с первым членом $a = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$, а потому по формуле (6): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ была вычислена в примере 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$. Окончательно получаем: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{4}{n\,(n+1)} \right) = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -1$.

Далее мы сосредоточим свое внимание на вопросе о том, как по виду ряда

(2) определить, является ли он сходящимся или расходящимся.

Теорема (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а число S является его суммой. Тогда по определению сходящегося ряда предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$ равен S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{9}$$

где

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь вспомогательную последовательность $\{\bar{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$, построенную из последовательности $\{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$ добавлением числа 0 в качестве ее первого члена: $\{\bar{S}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \ldots, \bar{S}_n, \ldots\} = \{0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$. Таким образом, $\bar{S}_1 = 0$, $\bar{S}_2 = S_1$, $\bar{S}_3 = S_2$ и вообще

$$\bar{S}_n = S_{n-1} \quad , \; n = 2,3,\ldots \quad . \tag{11}$$

Из (11) и (10) следует, что, начиная с $n = 2$:

$$S_n - \bar{S}_n = S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1}) = a_n.$$

Ясно, что такое соотношение выполняется и для $n = 1$: $S_1 - \bar{S}_1 = a_1 - 0 = a_1$. Таким образом, для всех $n = 1,2,\ldots$ выполнено

$$a_n = S_n - \bar{S}_n. \tag{12}$$

Поскольку последовательность чисел $\{\overline{S}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$, а из (9) последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$ имеет пределом число S, то это же число будет являться и пределом последовательности $\{\overline{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S. \tag{13}$$

Тогда из (12), (9), (13) и свойств пределов вытекает:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - \overline{S}_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает важное

Следствие (признак расходимости ряда). Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ общего члена ряда при $n \to \infty$ либо не существует, либо существует, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Таким образом, при выяснении вопроса о сходимости некоторого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует (если это не сложно) проверить прежде всего выполнение необходимого условия сходимости : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Если оно не выполняется, то сразу можно сказать, что ряд расходится. А вот если выполняется, то без дополнительного исследования ничего о сходимости сказать нельзя и вопрос о сходимости-расходимости остается открытым. Стремление к нулю общего члена ряда является лишь необходимым условием сходимости. Например, ниже будет показано, что гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ оказывается расходящимся, однако нет сомнений в том, что для него $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Таким образом, для сходимости ряда нужно, чтобы слагаемые не просто стремились к нулю, а делали бы это «достаточно быстро».

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100000\cdot n+1}$.

Решение. Общий член этого ряда $a_n=\frac{n}{100000n+1}$. Тогда

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100000n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{100000+\frac{1}{n}}=\frac{1}{100000}\neq 0$. Поэтому, по

приведенному выше следствию, исследуемый ряд расходится.

Большинство признаков сходимости рядов относятся к так называемым положительным рядам (члены которых неотрицательны).

1.2. Положительные ряды

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots \qquad (1)$$

называется *положительным,* если все его члены неотрицательны: $a_1\geq 0, a_2\geq 0,\ldots$. Сначала изучим так называемые признаки сравнения, которые требуют для исследования сходимости данного ряда строить некоторый вспомогательный ряд. Ниже сформулировано соответствующее утверждение, смысл которого достаточно прозрачен.

Теорема (признак сравнения рядов). Пусть имеется два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad , \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ , \tag{3}$$

причем члены ряда (2) не превосходят соответствующих членов ряда (3):

$$a_n \le b_n \tag{4}$$

хотя бы начиная *с некоторого* номера n. Тогда

1) Если *сходится* ряд с большими членами (3), то *сходится* и ряд с меньшими членами (2).

2) Если *расходится* ряд с меньшими членами (2), то *расходится* и ряд с большими (3).

Рассмотрим примеры применения признака сравнения.

Пример 1. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\,. \tag{5}$$

Решение. Ряд (5) сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$, сходимость которого была доказана в предыдущем параграфе. В нашем примере ряд (2) имеет вид исследуемого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ (а потому $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$), а ряд для сравнения (3) имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ (а потому $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$). Установим выполнение условия (4) для любого номера n: $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)} \le \frac{1}{n\cdot(n+1)} = b_n$. Тогда по первому утверждению признака сравнения рядов исходный ряд (5) сходится.

Основные недостатки при практическом применении приведенного признака сравнения − это

- необходимость правильного подбора вспомогательного ряда, сходимость или расходимость которого известна;

- необходимость доказательства соответствующего неравенства между членами исследуемого и вспомогательного рядов.

Второго из этих недостатков лишен *признак сравнения в предельной форме*.

Теорема (признак сравнения в предельной форме). Пусть имеются два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (ряды (2) и (3)), для которых выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c, \text{ причем } c\neq 0 \text{ и } c\neq\infty. \tag{6}$$

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно, т.е. если мы знаем о сходимости или расходимости одного из рядов (например, ряда (3)), то тот же вывод можно сделать и о втором ряде (ряде (2)).

Для применения признаков сравнения необходимо иметь так называемые *эталонные* ряды, про которые известно, сходятся они или расходятся, чтобы сравнивать с ними исследуемые ряды. Чаще всего в качестве таких рядов выступает геометрическая прогрессия, а также ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots, \tag{7}$$

про которые известно, что они сходятся при $\alpha>1$ и расходятся при $\alpha\leq 1$ (это будет доказано ниже в примере 8). В частности, гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (это ряд вида (7) при $\alpha=1$). Самый важный этап применения признаков сравнения – это правильный выбор эталонных вспомогательных рядов для сравнения с исследуемым рядом. При этом надо обеспечить либо нужное неравенство между слагаемыми двух рядов, либо обеспечить выполнение условия (6). Например, если мы хотим в качестве ряда сравнения выбрать ряд вида (7), то надо правильно выбрать значение параметра

α в (7), чтобы обеспечить выполнение условия (6). При неправильном выборе значения этого параметра значение c этого предела в (6) как раз и оказывается равным либо нулю, либо бесконечности, при которых предельный признак сравнения не работает. Ниже приводится один из возможных приемов выбора правильного значения параметра α при использовании для сравнения эталонного ряда вида (7).

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+5n-7}{n^3(n+1)} \ . \tag{8}$$

Решение. Для ряда (8) подберем для сравнения вспомогательный ряд вида (7) с таким значением параметра α, при которым окажется выполненным соотношение (6). В нашем примере ряд (2) есть исследуемый ряд (8), а ряд (3) есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, а потому общие члены этих рядов $a_n=\frac{3n^3+5n-7}{n^3(n+1)}$, $b_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$. Для выбора подходящего значения параметра α оценим поведение a_n, оставляя в числителе и знаменателе только старшие степени n, которые и определяют скорости роста числителя и знаменателя с ростом n. Далее значок $\sim$ можно перевести как «при $n\to\infty$ ведет себя так же, как». Итак,

$$a_n=\frac{3n^3+5n-7}{n^3(n+1)}=\frac{3n^3+5n-7}{n^4+n^3} \sim \frac{n^3}{n^4}=\frac{1}{n}.$$

Поэтому если взять $b_n=\frac{1}{n}$, то окажется $a_n \sim b_n$, что обеспечит в дальнейшем выполнение условия (6). Поэтому проведем сравнение (в предельной форме) ряда (8) с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который, является рядом вида (7) при $\alpha=1$, а потому расходится. Для проверки выполнения условия (6) вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^3+5n-7}{n^3(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+5n^2-7n}{n^4+n^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ ={делим числитель и знаменатель

на n^4 }$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}-\frac{7}{n^3}}{1+\frac{1}{n}}=3$. Поскольку число 3 – это не 0 и не ∞, то по признаку сравнения в предельной форме ряд (8) ведет себя (в смысле сходимости-расходимости) так же, как и гармонический. Но гармонический ряд – расходится, следовательно, ряд (8) тоже расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}} \ . \qquad (9)$$

Решение. Опять сравним (в предельной форме) ряд (9) с рядом вида (7) с подходящим значением параметра α. Для его выбора опять оценим поведение общего члена $a_n=\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}$, оставляя в числителе и знаменателе только старшие степени n :

$$a_n=\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}} \sim \frac{n}{\sqrt{n^5}}=\frac{n}{n^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{n^3}}=b_n .$$

Поэтому сравним (в предельной форме) ряд (9) с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Этот ряд сходится, так как это ряд вида (7) при $\alpha=\frac{3}{2}>1$. В нашем примере ряд (2) есть ряд (9) (а потому $a_n=\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}$), а ряд (3) есть сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ (а потому $b_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}$) . Вычислим предел (6):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^5+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^5}{n^5+n+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

{делим числитель и знаменатель на n^5 }$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}}}=1$. Поскольку число 1 – это не 0 и не ∞, то по признаку сравнения в предельной форме ряд (9) ведет себя так же, как и сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$. Поэтому ряд (9) тоже сходится.

Перейдем к другой группе признаков сходимости-расходимости положительных рядов. Их преимущество состоит в том, что для их применения не надо строить вспомогательные ряды, как это необходимо при применении признаков сравнения рядов.

Теорема (признак Даламбера). Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l. \tag{10}$$

Тогда при $l>1$ ряд расходится, а при $l<1$ сходится.

В выражении (10): a_n – общий член исследуемого ряда, а выражение для a_{n+1} получается из выражения для a_n заменой в нем n на $(n+1)$. Доказательство признака Даламбера построено на сравнении ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ со специально построенной сходящейся (в случае $l<1$) или расходящейся (в случае $l>1$) геометрической прогрессией. Оно достаточно формализовано, а потому мы его опускаем.

Большим недостатком признака Даламбера является то, что он не отвечает на вопрос о сходимости-расходимости в случае $l=1$ (что встречается достаточно часто) и тогда требуется дополнительное исследование. Например, такая ситуация возникает при исследовании гармонического ряда, да и вообще рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots$, сходимость которых в зависимости от значения параметра α обсуждалась выше.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{n\cdot 3^{n}}\ . \tag{11}$$

Решение. Общий член ряда (11) имеет вид $a_n=\frac{2^{2n+1}}{n\cdot 3^{n}}$. Тогда выражение для a_{n+1} имеет вид: $a_{n-1}=\frac{2^{2\cdot(n+1)-1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{2^{2n+3}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$. Тогда их отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ равно : $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{2n+3}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}:\frac{2^{2n+1}}{n\cdot 3^{n}}=\frac{2^{2n+3}\cdot n\cdot 3^{n}}{2^{2n+1}\cdot(n+1)\cdot 3^{n+1}}=${при делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются}$=\frac{2^{2}\cdot n}{(n+1)\cdot 3}=\frac{4n}{3n+3}$. Вычисляем предел (10):

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{3n+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{3+\frac{3}{n}}=\frac{4}{3}$. Итак, в (10) $l=\frac{4}{3}>1$, а потому по признаку Даламбера ряд (11) расходится.

Для дальнейших примеров напомним понятие *факториала* числа. Пусть n – натуральное число (т.е. целое положительное). Тогда *факториалом* этого числа (обозначается $n!$) называется произведение всех целых чисел от 1 до этого числа n :

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\qquad .$$

Например, $1!=1$, $2!=1\cdot 2=2$, $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$. Факториалом числа ноль называется число 1: $0! = 1$.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(n+1)!} \quad . \tag{12}$$

Решение. Общий член ряда (12) имеет вид $a_n = \dfrac{2^{2n}}{(n+1)!}$. Тогда выражение для a_{n+1} имеет вид: $a_{n+1} = \dfrac{2^{2\cdot(n+1)}}{(n+2)!} = \dfrac{2^{2n+2}}{(n+2)!}$. Тогда их отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ равно :

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{2n+2}}{(n+2)!} : \dfrac{2^{2n}}{(n+1)!} = \dfrac{2^{2n-2}\cdot(n+1)!}{2^{2n}\cdot(n+2)!} = \dfrac{2^{2n+2}}{2^{2n}} \cdot \dfrac{(n+1)!}{(n+2)!} = 4 \cdot \dfrac{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n+1)\cdot(n+2)} =$

={сокращаем в числителе и знаменателе $1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n+1)$ }=$\dfrac{4}{n+2}$. Вычисляем предел (10): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n+2} = 0$. Итак, в (10) $l = 0 < 1$, а потому по признаку Даламбера ряд (12) сходится.

Признак Даламбера удобно использовать для выяснения сходимости таких рядов, общие члены которых содержат степени (с постоянным основанием) и факториалы. В этом случае в выражении $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ многое сокращается (как это было видно на примерах), а само выражение оказывается достаточно простым для последующего вычисления предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. В некоторых других случаях удобно использовать следующий ниже признак.

Теорема (радикальный признак Коши). Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \, . \tag{13}$$

Тогда при $l > 1$ ряд расходится, а при $l < 1$ сходится.

Аналогичным недостатком этого признака является то, что он не отвечает на вопрос о сходимости в случае $l = 1$ и тогда требуется дополнительное исследование.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n . \tag{14}$$

Решение. Общий член ряда (14) имеет вид $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Вычислим предел (13):

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Итак, для предела (13) получилось $l = \frac{1}{2} < 1$, а потому по радикальному признаку Коши ряд (14) сходится.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n} . \tag{15}$$

Решение. Общий член ряда (15) имеет вид $a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$. Вычислим предел (13):

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}} = \{$извлекаем корень из числителя и знаменателя$\}=$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \{$полученный предел представляет собой как раз второй замечательный предел, определяющий знаменитое число $e = 2.718281828\ldots\} = \dfrac{1}{2} \cdot e = \dfrac{e}{2}$ Итак, для предела (13) получилось $l = \dfrac{e}{2} > 1$, а потому по радикальному признаку Коши ряд (15) расходится.

Признак Коши удобно использовать для выяснения сходимости таких рядов, общий член которых a_n является n-ой степенью некоторого несложного выражения. В этом случае в выражении $\sqrt[n]{a_n}$ корень и степень «сокращаются», а полученное выражение оказывается достаточно простым для последующего вычисления предела (13). В некоторых более сложных случаях удобно использовать следующий ниже признак.

Теорема (интегральный признак Коши). Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n-m}^{\infty} a_n$ (индекс суммирования n может начинаться с любого целого числа m) существует такая положительная непрерывная и убывающая на $[m,+\infty)$ функция $f(x)$, что $a_n = f(n)$. Тогда для сходимости этого ряда необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_m^{+\infty} f(x)\,dx$.

Для применения этого признака функция $f(x)$, фигурирующая в теореме, может быть построена следующим образом: в выражении для общего члена ряда a_n букву n заменяют на x.

Только этот признак из приведенных выше сможет ответить на вопрос о сходимости гармонического ряда и вообще рядов вида (7), что видно из следующего примера.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots \qquad (16)$$

в зависимости от величины параметра α.

Решение. Если $\alpha<0$, то общий член ряда $a_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$ не стремится к нулю (он будет даже стремиться к бесконечности), а потому по сформулированному в предыдущем параграфе признаку расходимости ряда этот ряд расходится. Рассмотрим теперь числа $\alpha\geq 0$. Общий член ряда (16) имеет вид $a_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$. Заменяя в этом выражении n на x, получим функцию $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$, для которой, очевидно, выполнено: $f(n)=a_n$. Проверим для нее выполнение условий интегрального признака Коши: функция $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ должна быть положительной, непрерывной и убывающей на $[1,+\infty)$. Очевидно, все эти свойства выполняются в рассматриваемом случае $\alpha\geq 0$. Поэтому по интегральному признаку Коши сходимость ряда (16) совпадает со сходимостью несобственного интеграла $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. Как известно, этот интеграл сходится для всех $\alpha>1$ и расходится для $\alpha\leq 1$. Таким образом, как это и утверждалось выше, ряд вида (16) сходится для всех $\alpha>1$ и расходится для $\alpha\leq 1$.

Пример 9. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}\ . \qquad (17)$$

Решение. Суммирование начато с $n=2$, поскольку при $n=1$ общий член ряда $a_n=\frac{1}{n\cdot\ln n}$ не определён (деление на $\ln 1=0$). Общий член ряда (17) имеет вид $a_n = \dfrac{1}{n \cdot \ln n}$. Заменяя в этом выражении n на x, получим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$, для которой, очевидно, выполнено: $f(n) = a_n$. Далее, очевидно, что эта функция положительна, непрерывна и является убывающей на $[2,+\infty)$ (последнее следует из очевидного факта, что функция $x \cdot \ln x$ положительная и возрастающая). Поэтому по интегральному признаку Коши сходимость ряда (17) совпадает со сходимостью несобственного интеграла $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x \cdot \ln x}$. Исследуем этот интеграл на сходимость. Сходимость этого несобственного интеграла (по определению сходимости) зависит от того, будет ли существовать конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^b \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad . \tag{18}$$

Вычислим значение интеграла под знаком предела методом замены переменной:

$$\int\limits_2^b \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = d(\ln x) = (\ln x)' dx = \dfrac{1}{x} dx \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dt \\ \textit{нижний предел по переменной } t = \ln 2 \\ \textit{верхний предел по переменной } t = \ln b \end{array} \right] = \int\limits_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big\|_{\ln 2}^{\ln b} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2).$$

Таким образом, предел в (18): $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_2^b \dfrac{dx}{x \cdot \ln x} = \lim\limits_{b \to +\infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = +\infty$. Поэтому по интегральному признаку Коши ряд (17) расходится.

Замечание. Легко теперь установить (по тому же интегральному признаку Коши), что «чуть исправленный» ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ уже сходится.

1.3. Знакочередующиеся ряды

Мы рассматривали признаки сходимости положительных рядов, все члены которых неотрицательны. Теперь мы будем допускать и отрицательные слагаемые, но для начала будем считать, что знаки слагаемых строго чередуются. *Знакочередующимся рядом* называется ряд, знаки слагаемых которого строго чередуются, начиная с положительного или отрицательного слагаемого. Поскольку число (-1) в четной степени равно 1, а в нечетной (-1), то такие ряды можно записать в форме

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad (1)$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n\,, \qquad (2)$$

причем в (1) и (2) уже считаем $a_n \geq 0$, так как знак слагаемых мы учли множителем $(-1)^{n+1}$ или $(-1)^n$. Эти множители попеременно принимают значения 1 и (−1), обеспечивая чередование знаков слагаемых рядов (1) и (2). Для обоснования сходимости таких рядов чаще всего используется так называемый *признак Лейбница*.

Теорема (признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов). Пусть для знакочередующегося ряда (1) или (2) выполнено:

1. Последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает, т.е. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда исходный знакочередующийся ряд сходится.

Это только *достаточный* признак сходимости знакочередующихся рядов. Поэтому если для какого-либо знакочередующегося ряда условия признака не выполнены, это не означает, что этот ряд обязательно расходится. Однако если условия выполнены, то ряд обязательно сходится. Впрочем, понятно, что второе-то условие ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) является необходимым для сходимости рядов вида (1) или (2), иначе общие члены этих рядов $(-1)^{n+1} a_n$ и $(-1)^n a_n$ не стремились бы к 0 тоже, а потому ряды бы оказались расходящимися (см. признак расходимости ряда в параграфе «Числовые ряды основные понятия»).

Таким образом, справедливо следующее

*Утверждение (*достаточное условие расходимости знакочередующегося ряда). Если для знакочередующегося ряда (1) или (2)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{или не существует, или} \quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\,, \tag{3}$$

то он является расходящимся.

Пример 1. Попробуем через один поменять знаки слагаемых у гармонического ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (который, как выше было выяснено, расходится). Получим следующий знакочередующийся ряд: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Это знакочередующийся ряд вида (1), для которого $a_n=\frac{1}{n}$ и оба условия признака Лейбница, очевидно, выполняются. Действительно, очевидно, что последовательность $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ убывает (с ростом номера n) и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Поэтому этот ряд (в отличие от гармонического) сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^2=-1+4-9+16-25+\cdots \quad . \tag{4}$$

Решение. Это знакочередующийся ряд вида (2), у которого $a_n = n^2$. Очевидно $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, а потому выполнено условие (3) расходимости ряда. Итак, ряд (4) расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n} = -1 + \frac{1}{2-\ln 2} - \frac{1}{3-\ln 3} + \cdots \quad . \tag{5}$$

Решение. Покажем, что ряд (5) является знакочередующимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ с

$$a_n = \frac{1}{n-\ln n} \tag{6}$$

и к нему применим признак Лейбница. Для того, чтобы доказать, что ряд (5) является знакочередующимся, нужно показать, что в (6)

$$a_n \geq 0, \quad n = 1,2,\ldots \quad . \tag{7}$$

Затем, чтобы показать, что к ряду (5) применим признак Лейбница, нужно доказать, что

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \tag{9}$$

Для доказательства свойств (7), (8) и (9) рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = x - \ln x \ , \quad x \in [1, +\infty) \quad . \tag{10}$$

Функция $g(x)$ в (10) это знаменатель в (6), где n заменено на x . Ясно, что производная $g'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$, а потому $g'(x) \geq 0$ для всех $x \in [1, +\infty)$, что влечет возрастание функции $g(x)$ на $[1, +\infty)$. Но поскольку $g(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1 > 0$, то и для всех $x > 1$ выполнено $g(x) > 0$. Отсюда сразу следует справедливость (7) (так как в (6) числитель равен 1, а знаменатель больше нуля) и (8) (так как в (6) числитель не меняется, а знаменатель растет). Покажем выполнение свойства (9):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{\ln n}{n}} \quad . \tag{11}$$

Ясно, что в числителе $\frac{1}{n} \to 0$. Найдем предел выражения $\frac{\ln n}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$={применяем правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределах}$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Итак, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, а потому из (11) следует $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0}{1-0} = 0$, т.е. выполнение свойства (9). Таким образом, ряд (5) действительно является знакочередующимся рядом, к которому применим признак Лейбница, а потому ряд (5) сходится.

1.4. Знакопеременные ряды

Переходим теперь к изучению рядов с произвольным распределением знаков его слагаемых. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

с произвольными по знаку слагаемыми $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Опять нужно исследовать его на сходимость. Поскольку большинство пройденных нами признаков сходимости-расходимости касались положительных рядов, то попробуем составить по данному ряду вспомогательный положительный ряд, для которого сможем применить эти признаки. Вспомогательный положительный ряд для ряда (1) построим так: положительные слагаемые оставим на месте, а у отрицательный поменяем знак. То же самое делает взятие модуля от числа (положительное число оставляет на месте, а у отрицательного поменяет знак), поэтому вспомогательный положительный ряд есть ряд, составленный из модулей слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots \quad . \tag{2}$$

Допустим, что имеющимися признаками для положительных рядов мы узнали, сходится ряд (2) или расходится. Можно ли теперь ответить на вопрос о сходимости или расходимости исходного ряда (1)? Иногда да, а иногда нет. Поскольку справедлива следующая

Теорема. Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

А вот если ряд из модулей (2) расходится, то о сходимости или расходимости ряда (1) ничего сказать нельзя. Может быть всякое.

В связи с этим для знакопеременного ряда (1) могут возникнуть только 3 взаимоисключающие ситуации.

1. Ряд (2) сходится. В этом случае (по теореме) сходится и ряд (1), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся* рядом. Этим подчеркивается, что сходится не только этот ряд, но и ряд, составленный из абсолютных величин (т.е. модулей) слагаемых ряда.

2. Ряд (2) расходится, но, тем не менее, сам ряд (1) сходится. В этом случае ряд (1) называется *условно сходящимся рядом.* Этим подчеркивается, что

сходится только сам ряд, но ряд, составленный из абсолютных величин слагаемых ряда, расходится.

3. Исходный ряд (1) расходится. Конечно, расходится при этом и ряд из модулей (2) (т.к. если бы он сходился, то по теореме сходился бы и исходный ряд).

Поэтому, когда ставится вопрос об исследовании сходимости произвольного знакопеременного ряда, то ответом будет являться одно из: а) ряд сходится абсолютно; б) ряд сходится условно; в) ряд расходится.

Пример 1. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится *условно*. Это следует из того, что сам ряд сходится (это было доказано в примере 1 предыдущего параграфа), а составленный из модулей ряд суть гармонический $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Пример 2. Ряд $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится абсолютно. Это следует из того, что сходится составленный из модулей ряд $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

поскольку это ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots$ при $\alpha=2>1$ (см. пример 8 параграфа «Положительные ряды»).

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot n=\ -1-2+3+4-5-6+7+8-\ldots$ расходится, так как общий член ряда, очевидно, не стремиться к 0.

Для исследования ряда на абсолютную сходимость может помочь следующая

Теорема (обобщенный признак Даламбера). Дан произвольный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = l$. Тогда при $l < 1$ ряд *абсолютно* сходится, а при $l > 1$ ряд расходится.

Этот признак может быть использован в дальнейшем и для исследования так называемых степенных рядов.

2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.1. Функциональные ряды

Складывать можно не только бесконечно много чисел (т.е. составлять числовые ряды), но и бесконечно много функций. Пусть $u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \ldots$ − бесконечный набор некоторых функций. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots \qquad (1)$$

называется *функциональным рядом.* Если в каждую из этих функций подставить одно и то же конкретное (допустимое) значение x и вычислить ее значение, затем подставить в функциональный ряд (1), то он перейдет в числовой ряд. При подстановке некоторых числовых значений x получающийся числовой ряд может оказаться сходящимся, а некоторых − расходящимся.

Областью сходимости функционального ряда (1) называется множество всех чисел x, при подстановке которых в этот ряд получается сходящийся числовой ряд.

Пусть D − область сходимости ряда (1). Тогда для всех x из D ряд (1) сходится, а потому имеет некоторое число S в качестве своей суммы. При разных x сумма ряда S может быть различной, а потому сумма ряда является некоторой *функцией* от x: $S = S(x)$. Тогда можно записать, что для всех x из D:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots = S(x). \qquad (2)$$

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots \quad . \qquad (3)$$

Решение. Ряд (3) это функциональный ряд вида (1) при $u_n(x) - \dfrac{1}{n^x}$. Нужно выяснить, при подстановке каких числовых значений x в (3) получается сходящийся числовой ряд. Ранее (в параграфе «Положительные ряды», пример 8) мы уже рассматривали подобные числовые ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots$ и выяснили, что они сходятся только при условии $\alpha > 1$. Отсюда следует, что и ряд (3) сходится только при $x > 1$. Поэтому областью сходимости D данного ряда является интервал $(1, +\infty)$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots \qquad (4)$$

и выражение для суммы этого ряда $S = S(x)$.

Решение. При подстановке любого числа x в (4) получается, как легко видеть, геометрическая прогрессия с первым членом 1 и со знаменателем прогрессии $q = x$. В параграфе 1.1 мы уже рассматривали условия сходимости геометрической прогрессии и получили, что она сходится только при условии $|q|<1$. Поэтому *областью сходимости ряда* (4) *является интервал* $(-1,\ 1)$, а для всех x из этого интервала сумма ряда (по формуле суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии – формула (6) в параграфе 1.1) равна : $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3\ldots \ = \frac{1}{1-x} \quad \text{для всех } x\in(-1,1)\,. \qquad (5)$$

2.2. Степенные ряды – основные понятия

Более подробно рассмотрим специальные функциональные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots$, для которых слагаемые $u_n(x)$ имеют вид: $u_n(x)=a_n(x-x_0)^n$, где x_0 – некоторое число, а $\{a_n\}$ – некоторая заданная последовательность чисел. Итак, *степенным рядом* с центром в точке x_0 называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3\ldots \ . \qquad (1)$$

Числа $a_0, a_1, a_2\ldots$ называются *коэффициентами* степенного ряда.

Пример 1. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot(x+5)^n = 1+\frac{1}{2}(x+5)+\frac{1}{3}(x+5)^2+\ldots.$$

является степенным рядом с центром в точке $x_0=-5$, а его коэффициенты $a_n=\dfrac{1}{n+1}$, $n=0,1,2,\ \ldots$.

Проще всего выглядит степенной ряд (1) с центром в нуле, т.е. когда $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots \quad . \tag{2}$$

Этот ряд можно рассматривать как многочлен бесконечной степени. Ряд (1) с переменной x всегда можно свести к ряду (2), сделав в нем замену переменной $y = x - x_0$. Тогда получится ряд вида (2) с переменной y.

Степенной ряд (1) всегда имеет непустую область сходимости, так как *число* x_0 (для ряда (2) это число 0) *всегда входит в эту область*, поскольку при $x = x_0$ степенной ряд (1) обрывается на первом слагаемом (остальные слагаемые зануляются), а потому сходится и сумма его равна a_0.

Область сходимости степенного ряда (1) имеет специфическую структуру – это либо только одна точка x_0, либо некоторый интервал с центром в этой точке (концы интервала могут входить или не входить в эту область), либо вся числовая прямая (которая, при желании, может тоже рассматриваться как *бесконечный* интервал с центром в точке x_0). А именно, справедлива следующая

Теорема (об области сходимости степенного ряда). Областью сходимости степенного ряда (1) является либо одно число x_0, либо вся числовая прямая, либо интервал вида $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ и, возможно, одна или обе концевых точки этого интервала.

Интервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$, фигурирующий в теореме, называется *интервалом сходимости* степенного ряда (1), а число R называется *радиусом сходимости* этого ряда. Для всех значений x внутри интервала сходимости степенной ряд (1) сходится *абсолютно*. Для ряда (2) (случай $x_0 = 0$) интервал сходимости имеет вид $(-R,\ R)$.

Радиус сходимости может быть вычислен по одной из следующих формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \qquad (3)$$

или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad (4)$$

если, конечно, соответствующие пределы существуют. Доказательство теоремы, а также формула (3) для радиуса сходимости могут быть получены несложными рассуждениями из обобщенного признака Даламбера, приведенного в конце параграфа 1.4, но здесь мы на этом останавливаться не будем.

Если по (3) или (4) получается $R = 0$, то область сходимости состоит только из одной точки x_0. Если же $R = \infty$, то областью сходимости является вся числовая прямая.

Для нахождения области сходимости произвольного степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ применяется *следующая схема*.

1) Находим интервал сходимости ряда $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. Для этого либо вычисляется радиус сходимости R по приведенным выше формулам (3) или (4), либо напрямую применяется обобщенный признак Даламбера, приведенный в конце параграфа 1.4. Этот признак удобнее применять тогда, когда в степенном ряде бесконечно много коэффициентов $\{a_n\}$ обращаются в 0, а потому вычисление радиуса сходимости по формуле (3) или (4) невозможно. Это происходит, например тогда, когда ряд содержит только четные (либо только

нечетные) степени $(x-x_0)$, это означает, что в (1) все коэффициенты a_n при нечетных (соответственно, четных) показателях степени $(x-x_0)^n$ обращаются в ноль.

2) Проверяем принадлежность концевых точек интервала сходимости (x_0-R) и (x_0+R) области сходимости. Для этого подставляем каждое из этих чисел в исходный степенной ряд (вместо x) и исследуем на сходимость получившийся числовой ряд. Если ряд оказался сходящимся, то проверяемая граница интервала сходимости принадлежит области сходимости, а если нет, то нет.

3) Выписываем область сходимости как интервал сходимости с возможным включением его концевых точек (в зависимости от результатов пункта 2).

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x+5)^n}{n\cdot 4^n}. \tag{5}$$

Решение. Поскольку $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(x+5)^n}{n\cdot 4^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}\cdot(x+5)^n$, то ряд (5) есть степенной ряд вида (1) с центром в точке $x_0=-5$ и коэффициентами $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}$.

Согласно приведенной выше схеме нахождения области сходимости степенного ряда, сначала вычислим радиус сходимости по формуле (3). В данном примере

$$|a_n|=\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}\right|=\frac{|(-1)^n|}{|n\cdot 4^n|}=\frac{1}{n\cdot 4^n}, \tag{6}$$

поскольку $(-1)^n$ при любом натуральном числе n принимает значение либо 1, либо (−1), а выражение $n\cdot 4^n$ всегда положительно. Подставляя в (6) выражение $(n+1)$ вместо n, получим выражение для $|a_{n+1}|$: $|a_{n+1}|=\dfrac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}$. Тогда по формуле (3) радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\cdot4^n}:\frac{1}{(n+1)\cdot4^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot4^{n+1}}{n\cdot4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot4}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+4}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{n}\right)=4\,.$$

Таким образом, $R=4$. Поэтому интервалом сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$ будет в данном случае интервал $(-9,-1)$. Область сходимости состоит из точек этого интервала и, возможно, одной или обеих граничных точек этого интервала (-1) и (-9). Проверим эти точки на принадлежность области сходимости ряда (5). Для этого (по определению области сходимости ряда) будем подставлять эти числа вместо x в (5) и выяснять, будет ли получающийся при этом числовой ряд сходящимся или расходящимся.

Рассмотрим сначала $x=-1$. Подставляя $x=-1$ в ряд (5) получим числовой ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{4^n}{n\cdot4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots$. Этот знакочередующийся ряд уже был рассмотрен в параграфе 1.3 (пример 1) и по признаку Лейбница было доказано, что он сходится. Поэтому число $x=-1$ будет включаться в область сходимости ряда (5).

Рассмотрим другую граничную точку интервала сходимости $x=-9$. Подставляя $x=-9$ в ряд (5) получим числовой ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(-4)^n}{n\cdot4^n}$. Упростим выражение для общего члена полученного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-4)^n}{n\cdot4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-1\cdot4)^n}{n\cdot4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-1)^n\cdot4^n}{n\cdot4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\quad.$$

При этом выводе мы воспользовались тем, что (-1) в четной степени $2n$ всегда дает 1. Полученный *гармонический* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots$, как неоднократно было заявлено, расходится. Поэтому число $x = -9$ не будет включаться в область сходимости ряда (5). Таким образом, областью сходимости ряда (5) является полуинтервал $(-9,\ 1]$.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \ . \tag{7}$$

Решение. Ряд (7) есть степенной ряд вида (1) с центром в точке $x_0 = 0$ (т.е. ряд вида (2)) и коэффициентами $a_n = n!$. Согласно приведенной выше схеме нахождения области сходимости степенного ряда, сначала вычислим радиус сходимости по формуле (3). В данном примере $|a_n| = |n!| = n!$, а потому $|a_{n+1}| = (n+1)!$. Тогда по формуле (3) радиус сходимости

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Таким образом, радиус сходимости $R = 0$. В этом случае (как выше сказано) область сходимости состоит из единственной точки $x_0 = 0$.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ . \tag{8}$$

Решение. Ряд (8) есть степенной ряд вида (1) с центром в точке $x_0 = 0$ (т.е. опять ряд вида (2)) и коэффициентами $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Вычислим радиус сходимости по формуле (3). В данном примере $|a_n| = \left|\dfrac{1}{n!}\right| = \dfrac{1}{n!}$, а потому $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Тогда по формуле (3) радиус сходимости

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$. Таким образом, радиус сходимости $R = \infty$. В этом случае (как выше сказано) областью сходимости является вся числовая прямая $(-\infty,+\infty)$.

2.3. Свойства суммы степенного ряда

Рассмотрим теперь свойства функции $S(x)$, являющейся суммой степенного ряда (1) в предыдущем параграфе и определенной на его области сходимости:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3\ldots \qquad (1)$$

Теорема (о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда). Сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является непрерывной функцией на интервале сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$. Внутри этого интервала степенной ряд можно почленно дифференцировать и брать неопределенный интеграл. Получающиеся при этом степенные ряды *имеют тот же радиус сходимости*, что и исходный степенной ряд.

Утверждение о возможности почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда означают справедливость следующих формул:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(x-x_0)^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1}=$$

$$=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots \qquad (2)$$

$$\int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int(x-x_0)^n\,dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}=$$

$$=C+a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\frac{a_2}{3}(x-x_0)^3+\frac{a_3}{4}(x-x_0)^4+\ldots \qquad (3)$$

Произвольная постоянная C возникла, как и должно быть, при вычислении неопределенного интеграла, только здесь ее удобно записать в начале, а не в конце.

По утверждению теоремы сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является дифференцируемой (т.е. имеющей производную) функцией на интервале сходимости $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. После вычисления ее производной по формуле (2) эта производная $S'(x)$ опять представляется суммой степенного ряда $S'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots$ с тем же интервалом сходимости $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. А потому от функции $S'(x)$ опять можно вычислять производную (будет получаться уже вторая производная $S''(x)$), которая опять будет представляться степенным рядом на интервале $(x_0 - R,\ x_0 + R)$. И так далее. Отсюда вытекает важное следствие.

Следствие. Сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является бесконечно дифференцируемой (т.е. имеет производные любого порядка) функцией на интервале сходимости этого ряда $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

С помощью приведенной выше теоремы можно находить области сходимости и (что наиболее важно) формулы для сумм некоторых степенных (или числовых) рядов. Для этого с помощью интегрирования или дифференцирования исследуемых рядов получают степенной ряд с известной суммой (например, геометрическую прогрессию), т.е. получают формульное выражение для производной или интеграла от искомой суммы $S(x)$, а затем по этому выражению восстанавливают и саму функцию $S(x)$.

Пример 1. Найти интервал сходимости и сумму степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \quad . \tag{4}$$

Решение. Обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда, пусть R − его радиус сходимости. Тогда выполнено: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ для всех точек из интервала сходимости $x \in (R, R)$. Тогда по формуле (3):

$$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int x^n dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} = C + \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}. \tag{5}$$

Степенной ряд в правой части (5) $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} = x + x^2 + x^3 + \cdots$ при каждом числе x представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом x и знаменателем прогрессии $q = x$. В параграфе 1.1 мы уже рассматривали условия сходимости геометрической прогрессии и получили, что она сходится только при условии $|q|<1$. Поэтому областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$ является интервал $(-1,\ 1)$, а для всех x из этого интервала сумма ряда (по формуле суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии – формула (6) в параграфе 1.1) равна $\frac{x}{1-x}$. Таким образом, по приведенной выше теореме о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда интервал сходимости исходного ряда (4) тоже $(-1,\ 1)$. Подставляя $\frac{x}{1-x}$ в правую часть (5), получаем $\int S(x)dx = \frac{x}{1-x} + C$. Отсюда следует, что функция $\frac{x}{1-x}$ является одной из первообразных для $S(x)$, а потому $S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{(x)'\cdot(1-x)-(1-x)'\cdot x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Итак, мы нашли выражение для суммы степенного ряда (4):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad x \in (-1,1). \tag{6}$$

Пример 2. Найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0.3^{n-1}}{n+1}=0.3+\frac{0.3^2}{2}+\frac{0.3^3}{3}+\cdots \quad . \tag{7}$$

Решение. Рассмотрим вспомогательный степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, сумму которого обозначим $S(x)$:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots \quad . \tag{8}$$

Найдем формулу для $S(x)$, а тогда $S(0.3)$ даст нам искомую сумму ряда (8). Вычислим производную функции $S(x)$ в (8), используя формулу (2) почленного дифференцирования ряда:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots \; . \tag{9}$$

Для степенного ряда в правой части (9) мы уже находили сумму и область сходимости (см. параграф 2.1, формула (5)): $1+x+x^2+x^3\ldots \; =\frac{1}{1-x}$ для всех $x\in(-1,1)$. Поэтому из (9) получаем, что $S'(x)=\frac{1}{1-x}$ для $x\in(-1,1)$. Таким образом, функция $S(x)$ оказывается одной из первообразных функции $\frac{1}{1-x}$. Найдем множество всех первообразных этой функции (т.е. неопределенный интеграл от нее), а затем среди них найдем и $S(x)$: $S(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=-\int\frac{d(1-x)}{1-x}=-\ln|1-x|+C$. Таким образом, получили, что для $x\in(-1,1)$:

$$S(x)=-\ln|1-x|+C \tag{10}$$

при некотором значении произвольной постоянной C. Найдем это значение C. Из (8) следует, что значение функции $S(x)$ при $x=0$ будет

$S(0)=0+\dfrac{0^2}{2}+\dfrac{0^3}{3}+\cdots=0+0+0+\cdots=0$. Таким образом, $S(0)=0$, а потому из (10): $0=-\ln|1-0|+C$, откуда $C=0$. Поэтому из (10) получаем, что $S(x)=-\ln|1-x|$ для всех $x\in(-1,\ 1)$. А потому $S(0.3)=-\ln|1-0.3|=-\ln 0.7$. Итак, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{0.3^{n+1}}{n+1}=0.3+\dfrac{0.3^2}{2}+\dfrac{0.3^3}{3}+\cdots=-\ln 0.7\approx 0.35$.

2.4. Разложение функций в степенные ряды

Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, мы в параграфе 2.1 (формула (5)) получили, что сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3\ldots\quad=\dfrac{1}{1-x}$ для всех $x\in(\ \ 1,1)$. Если теперь поменять местами левую и правую часть этого равенства, то получится, что выполнено равенство

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+x^3\ldots \text{ для всех } x\in(-1,\ 1). \tag{1}$$

Это означает, что функция $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ представлена на интервале $(-1,\ 1)$ в виде сходящегося степенного ряда. А для каких еще функций возможно такое представление? И как его найти?

Введем следующее определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ *разлагается в степенной ряд* с центром в x_0 на интервале (x_0-R,x_0+R), если для всех x из этого интервала справедливо равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3\ldots\quad. \tag{2}$$

Теперь заданные выше вопросы можно переформулировать следующим образом. Какие функции разлагаются в степенные ряды с центром в некоторой точке x_0 и (если разложение возможно) как найти коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ этого разложения?

В предыдущем параграфе было сформулировано следствие о том, что сумма степенного ряда является бесконечно дифференцируемой функцией на интервале сходимости ряда. Поэтому разлагаться в степенной ряд могут только функции, имеющие производные любого порядка (да и то не все!). Пусть некоторая функция $f(x)$ имеет производные *любого* порядка в некоторой окрестности точки x_0. Найдем значения самой функции и всех ее производных (по предположению они существуют!) в этой точке : $f(x_0),\ f'(x_0),\ f''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0),\ \ldots$. Теперь, используя эти числа, составим следующий степенной ряд:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ . \qquad (3)$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ с центром в точке x_0. Таким образом, каждой бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции можно поставить в соответствие некоторый степенной ряд − ее ряд Тейлора. Оказывается, что уж *если функция разлагается в окрестности некоторой точки в какой-либо степенной ряд, то этот ряд может быть только рядом Тейлора этой функции*. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема (о единственности разложения в степенной ряд). Пусть функция $f(x)$ разлагается в окрестности точки x_0 в степенной ряд:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3\ldots\ . \qquad (4)$$

Тогда она бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки и

$$a_0 = f(x_0),\ \ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ \ \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots\ ,\ \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots\ . \qquad (5)$$

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость функции $f(x)$, являющейся суммой степенного ряда, уже отмечалась в предыдущем параграфе. Подставив в правую и левую части равенства (4) $x = x_0$, получим первую из формул в (5). Дифференцируя почленно степенной ряд в (4) (а это можно делать с суммой степенного ряда!), получим $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots$. Снова подставляя в это равенство $x = x_0$, получим вторую из формул в (5). Снова дифференцируя это равенство и подставляя $x = x_0$, получим третью формулу в (5). И так далее, что завершает доказательство теоремы.

Формулы (5) и дают ответ на вопрос о способе нахождения коэффициентов $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ разложения функции $f(x)$ в степенной ряд (коли такое разложение вообще возможно). Теперь ответим на вопрос о том, для каких функций гарантирована возможность такого разложения.

Теорема (о разложении). Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некотором интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ и ее производные всех порядков ограничены на этом интервале одним и тем же числом (т.е. в формальной записи $\exists M\ \ \forall n\ \ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R):\ | f^{(n)}(x) | < M$), то она разлагается в свой ряд Тейлора на этом интервале, т.е. для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ имеет место представление:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots \qquad (6)$$

Особенно просто ряд Тейлора (3) для функции $f(x)$ выглядит при $x_0 = 0$:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

В этом случае ряд Тейлора называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$. Учитывая (6), находим вид разложения функции в ряд Маклорена ($x_0=0$):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ . \quad (7)$$

Согласно приведенной выше теореме о разложении, представление (7) функции $f(x)$ в виде ряда Маклорена имеет место на любом интервале вида $(-R,R)$, если только функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $(-R,R)$ и ее производные всех порядков ограничены на этом интервале одним и тем же числом .

Разложение функций в ряд Маклорена применяется значительно чаще, поскольку представляет собой удобное для приложений разложение функции по степеням x (т.е. представляет собой многочлен «бесконечной степени»). Найдем разложения в ряд Маклорена некоторых основных элементарных функций.

2.5. Разложения элементарных функций в ряды Маклорена

В этом параграфе мы, используя вид разложения функции в ряд Маклорена

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ , \quad (1)$$

найдем разложение по степеням x некоторых элементарных функций.

1. Пусть $f(x)=e^x$. Тогда, очевидно, $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\cdots=e^x$. Поэтому на *любом* конкретном интервале $(-R,R)$ эти производные ограничены одним и тем же числом (например, числом $M=e^R$) и

$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1$. Поэтому условия теоремы о разложении выполняются на *любом* интервале $(-R, R)$, а потому, согласно (1), для всех $x \in (-\infty, +\infty)$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad . \tag{2}$$

2. Рассмотрим $f(x) = \sin x$. Тогда $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, $f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$, $f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$, $f''''(x) = (-\cos x)' = -\sin x$. Поскольку опять получилась функция $f(x) = \sin x$, то дальнейшие производные будут повторять те, что мы уже нашли. Поэтому все производные ограничены на всей числовой прямой (например, числом *1*, как все синусы и косинусы) и условия теоремы о разложимости в степенной ряд на всей числовой прямой выполнены. Далее, $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin 0 = 0$, $f'''(0) = -\cos 0 = -1$, $f''''(0) = -\sin 0 = 0$ и далее все циклически повторяется. Поэтому разложение (1) будет содержать только нечетные степени x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3}$$

для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. Рассмотрим $f(x) = \cos x$. Тогда можно получить разложение в ряд Маклорена тем же путем, что для $f(x) = \sin x$. Но мы сделаем это проще, если учтем полученное разложение (3) для $f(x) = \sin x$ и то, что $\cos x = (\sin x)'$. Дифференцируя (т.е. беря производную) почленно правую и левую части равенства (3), получим, учитывая возможность почленного дифференцирования степенных рядов внутри их интервала сходимости,

$$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{7x^7}{6!} + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \; .$$

Таким образом, для всех $x \in (-\infty, +\infty)$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (4)$$

4. Рассмотрим $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда, интегрируя почленно полученное ранее разложение $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots$, можно получить

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (5)$$

для всех $x \in (-1, 1)$. Произвольная постоянная C появилась, как обычно, после вычисления неопределенного интеграла. Найдем ее значение. Для этого подставим в (5) $x = 0$: $\ln 1 = C$, т.е. $C = 0$. Поэтому из (5) получаем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1). \quad (6)$$

5. Рассмотрим $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α − любое действительное число. Тогда, вычисляя значения производных в нуле, из (1) можно (хотя чуть более громоздко, чем в предыдущих примерах) получить:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + \dots \quad (7)$$

для всех $x \in (-1, 1)$. Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем разложение для квадратного корня:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad \text{для всех } x \in (-1, 1). \quad (8)$$

С помощью приведенных выше разложений для основных элементарных можно находить разложения по степеням x более сложных функций.

Пример1. Разложить по степеням x (т.е. в ряд Маклорена) функцию

$f(x) = x \cdot \ln(1+x^2)$.

Решение. Заменяя в правой и левой части (6) x на x^2, получим

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Умножая обе части этого равенства на x, получаем

$$x \cdot \ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \frac{x^9}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Пример2. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Применяя формулу понижения степени, получаем

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x). \tag{9}$$

Подставляя $2x$ вместо x в разложение (4) для косинуса, последовательно для (9) получаем:

$$\cos 2x = = 1 - \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} - \frac{2^6 \cdot x^6}{6!} + \ldots ,$$

$$1 - \cos 2x = \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} + \frac{2^6 \cdot x^6}{6!} - \ldots ,$$

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} \cdot x^2 - \frac{2^3}{4!} \cdot x^4 + \frac{2^5}{6!} \cdot x^6 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Пример3. Разложить по степеням $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ функцию $f(x) = \sin 2x$.

Решение. Введем новую переменную

$$y = x + \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

и выразим $\sin 2x$ через y. Из (10) следует $x = y - \frac{\pi}{2}$, а потому

$\sin 2x = \sin 2\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2y - \pi) = \{$пользуемся нечетностью синуса$\}$ $= -\sin(\pi - 2y) =$ $=\{$пользуемся формулой приведения $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\} = -\sin 2y = \{$в разложение синуса (3) по степеням x подставляем $2y$ вместо $x\}$ $=$ $= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}\cdot y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}\cdot y^{2n-1}}{(2n+1)!}$. Подставляя, согласно (10), $y = x + \frac{\pi}{2}$, окончательно получаем:

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n-1}}{(2n+1)!}\cdot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} = -2\cdot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2^3}{3!}\cdot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^3 - \cdots \quad .$$

Это и есть искомое разложение.

С помощью рядов Тейлора и Маклорена *можно вычислять приближенные значения функции*, обрывая эти ряды на каком-нибудь слагаемом (чем больше оставим членов ряда, тем точнее будет вычисленное значение).

Пример 4. Вычислить приближенно $\sqrt{4.1}$.

Решение. Имеем: $\sqrt{4.1} = \sqrt{4 + 0.1} = \sqrt{4\cdot\left(1 + \frac{0.1}{4}\right)} = 2\cdot\sqrt{1 + 0.025}$. Из написанного выше в (8) разложения $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$, оставляя 3 слагаемых, получаем приближенную формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$. Применяя ее при $x = 0.025$, получим $\sqrt{4.1} = 2\cdot\sqrt{1+0.025} \approx 2\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0.025 - \frac{1}{8}\cdot 0.025^2\right) = 2.02484375$. Отметим, что точное значение $\sqrt{4.1} = 2.024845673\ldots$.

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие числовые ряды называются сходящимися? Что называется суммой сходящегося ряда?
2. Каков общий признак расходимости рядов?
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{100n+30}$.
4. Как формулируется признак сравнения для положительных рядов (в простой и предельной форме)? Какие ряды являются «эталонными»?
5. Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(2n)|}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{100n^2+3n-30}$.
6. Как формулируются признаки Даламбера и Коши (радикальный и интегральный) сходимости положительных рядов?
7. Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.
8. Какие ряды называются знакочередующимися? Как формулируется признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов?
9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.
10. Какая связь между сходимостью, абсолютной сходимостью и условной сходимостью знакопеременных рядов?
11. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{100n+30}$.
12. Какой вид имеет область сходимости степенного ряда? Как она ищется?
13. Найти области сходимости степенных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n-1}}{10n+1}$.
14. Какие функции могут быть разложены в ряд Тейлора? Как вычислить коэффициенты такого ряда? Что такое ряд Маклорена?

15. Какой вид имеют разложения в степенные ряды функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$, $y = arctg(x)$, $y = (1+x)^m$.

16. Разложить функцию $y = \cos^2 x$ по степеням x.

4. ВАРИАНТЫ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+7}{n^3 \cdot (n+1)}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} x^n}{(n+1)!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = e^{-x^2}$.

Вариант 2

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = x^2 \ln(1 + x^3)$.

Вариант 3

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 0.5}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{1}{n}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^{4n}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = \sin^2 x$.

Вариант 4

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot 2^{2n}}{(n+3)!}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^3 \cdot 3^{2n}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Вариант 5

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак

признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+5)^{2n}}{(n+1)^2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням *x*: $f(x)=\left(1+e^x\right)^2$.

Вариант 6

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{\sqrt{3^n}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-3\right)^n}{n^2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням *x*: $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$.

Вариант 7

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2\cdot\sin\frac{1}{n}}{2n^2+1}\right)^n$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sin x+\sin 3x$.

Вариант 8

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{(n+1)^3}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=2^x$.

Вариант 9

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n\cdot(n+1)}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n-\sqrt{n}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\cos^2 x$.

Вариант 10

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\sin\frac{1}{n+1}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)}\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=e^{-x^2}$.

Вариант 11

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3}-1}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n-2)!}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n+1}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sqrt{x+3}$.

Вариант 12

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)\cdot 5^{2n+10}}{(n-1)!}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln 2$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n(x+2)^n$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\ln(x+2)$.

Вариант 13

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2-1}{5+2n^2}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^n}{n!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=e^x+e^{2x}$.

Вариант 14

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+3}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\ln n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=3e^x-2\ln(1-x)$.

Вариант 15

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2\cdot\sin\frac{1}{n+6}}{4n+3}\right)^n$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n-1}n^2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sqrt[3]{1+2x}$.

Вариант 16

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^5+2n^2-1}{(n^3+1)\cdot(n^3+2)}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную

сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-1}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^n}{(2n+1)!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = e^{x^3}$.

Вариант 17

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^2 \cdot \sqrt{n+1}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = x\ln(1-x^3)$.

Вариант 18

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{(2n-1) \cdot 3^{2n+1}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2\cdot 3^{2n+1}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=-x\sin^2 x$.

Вариант 19

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\frac{2n+1}{3+n}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2\cdot 3^n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{x}$.

Вариант 20

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{2n^2+1}\right)^n$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^n$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{n^3}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\left(1-e^x\right)^2$.

Вариант 21

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi-2\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{3\cos\frac{1}{n+3}}\right)^{n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-1}{\sqrt{2^{3n}}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+23)^{n}}{(n+2)^{2}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\cos x+x\sin x$.

Вариант 22

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}+2n+1}{5n^{2}-2n-1}\right)^{n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+3)\ln(2n+3)}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n}}{n+2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$

Вариант 23

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{(n+2)^4}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{3n-1}}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = 3^{2x}$.

Вариант 24

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{5n^2+n+1}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n^2-n}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+3} n^2}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x) = \frac{1+cos4x}{x}$.

Вариант 25

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий

признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{3^{n+1}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)}\frac{1}{\sqrt{n^4+5}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n x^n$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=e^{-2x}$.

Вариант 26

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{3n}\cdot(3n+2)}{n\,!}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-2)!}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{3n+1}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sqrt{2x+3}$.

Вариант 27

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\,!}{n\cdot 7^n}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную

сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln 2}{\ln 23}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n (x-2)^n$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\ln(2x+1)$.

Вариант 28

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+3}}{n^5}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\frac{3}{n^3}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+3}\frac{(n+1)x^n}{(n-1)!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=2e^x-e^{2x}$.

Вариант 29

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)+5\sin\left(3\pi-\frac{1}{n+6}\right)}{3n+4\ln\left(1+\frac{1}{n^5}\right)}\right)^n$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\ln\sqrt{n}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{(n+1)^2 n!}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=3e^{-x}-\ln(1+x)^2$.

Вариант 30

1. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя подходящий признак: $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[5]{\ln^2 n}}$.

2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную или условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3^{n-1}}$.

3.Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^{2n-1}n}$.

4. Найти разложение функции в ряд Маклорена по степеням x: $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). М.: Айрис Пресс, 2006.
2. Щипачев В.С. Курс высшей математики. М.: Проспект, 2002.
3. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Оникс 21 век, 1998.
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. СПб.: Лань, 2009.

Министерство образования и науки РФ
ГОУ ВПО
«Уральский государственный горный
университет»

Т. И. Королюк

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика»
для студентов всех специальностей
очного и заочного обучения

Екатеринбург
2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей очного и заочного обучения.

Операционное исчисление является одним из методов прикладного математического анализа. С помощью операционного исчисления во многих случаях удается упростить решение задач, встречающихся в автоматике, электронике и других областях.

В пособии изложены основные сведения о преобразовании Лапласа, его свойствах и применении для решения линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений в объеме курса лекций по этому разделу дисциплины «Математика».

Теоретический материал сопровождается подробным разбором решений типовых задач, а также даны варианты заданий для самостоятельной работы студентов.

Целью работы является активизация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению разделов курса математики и ее приложений.

1. Функция-оригинал и её изображение

Любую функцию $f(t)$ действительной переменной t называют оригиналом, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t) = 0$ при всех $t < 0$;

2) $f(t)$ кусочно непрерывна, т. е. такая, что в любом конечном интервале она имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $S_0 \geq 0$, что $|f(t)| < Me^{S_0 t}$ при любом значении $0 \leq t < \infty$.

Лапласовым изображением оригинала $f(t)$ называют функцию $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$, определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt .$$

Если функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$, то это соответствие записывают так:

$$f(t) = F(p), \quad F(p) = f(t), \quad L(f(t)) = F(p).$$

Для любого оригипала $f(t)$ иптеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ сходится абсолютно при $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 - показатель роста функции $f(t)$.

В этой полуплоскости изображение $F(p)$ является аналитической функцией. Переход от функции $f(t)$ к функции $F(p)$ называется *преобразованием Лапласа.*

2. Линейность преобразования Лапласа

Теорема

Если $f(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t),$ C_k - постоянные и $F(p) = f(t), F_k(p) = f_k(t),$

то $F(p) = \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p).$

Доказательство

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{n} C_k \left(\int_0^\infty f_k(t)\, e^{-pt} dt \right) = \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p).$$

3. Изображение единичной функции 1 (*t*)

Простейшей функцией–оригиналом является единичная функция

$$1\ (t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$$

Найдем ее изображение

$$L(1(t)) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}\, e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p} \qquad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Итак,

$$1(t) = \frac{1}{p} \qquad (\operatorname{Re} p > 0).$$

4. Изображения функций e^{at}, $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $sh\, \omega t$, $ch\, \omega t$

$$L(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a).$$

Таким образом, $e^{at} = \dfrac{1}{p-a}$.

В этой формуле a может быть и комплексным. Применяя свойство линейности преобразования Лапласа, найдем изображения тригонометрических функций

$$\sin \varpi t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad coc\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \omega \text{ - положительное число.}$$

$$L(\sin \omega t) = \frac{1}{2i}\left(L(e^{i\omega t}) - L(e^{-i\omega t})\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{(p+i\omega - p + i\omega)}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad \text{при } \operatorname{Re} p > 0$$

$$L(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\left(L(e^{i\varpi t}) + L(e^{-i\varpi t})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

при $\operatorname{Re} p > 0$.

Аналогично, исходя из определения гиперболических функций

$$sh\, \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad ch\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2},$$

найдем их отображения.

$$L(sh\omega t)=\frac{1}{2}\left(L(e^{\omega t})-L(e^{-\omega t})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\quad\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

$$L(ch\omega t)=\frac{1}{2}\left(L(e^{\omega t})+L(e^{-\omega t})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\quad\frac{p}{p^2-\omega^2}\quad \text{при } \operatorname{Re}p>\omega.$$

Получили формулы

$$\sin\omega t=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\qquad sh\omega t=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},$$

$$\cos\omega t=\frac{p}{p^2+\omega^2},\qquad ch\omega t=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

Пример 1

Найти изображение функции $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t<1,\\ 0, & t\ge 1.\end{cases}$

Решение

$$L\big(f(t)\big)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_0^1(1-t)e^{-pt}dt+\int_1^\infty 0\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=(1-t)\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1-\frac{1}{p}e^{-pt}\cdot(-dt)=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}e^{-p}-\frac{1}{p^2}.$$

Пример 2

Найти изображение функции

$$f(t) = 2 + \frac{1}{3}e^{-2t} + 4\cos 3t\,.$$

Решение

Пусть $f(t) = F(p)$.

Тогда

$$F(p) = 2L(1(t)) + \frac{1}{3}L\left(e^{-2t}\right) + 4L(\cos 3t) = 2\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+2} + 4\cdot\frac{p}{p^2+9}\,.$$

Пример 3

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p) = \frac{6}{p} - \frac{5p}{p^2+4} + \frac{2}{p-3}\,.$$

Решение

$$f(t) = 6 - 5\cos 2t + 2e^{3t}\,.$$

Пример 4

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p) = \frac{3}{p^2+25} - \frac{2}{p^2+25} = 3\cdot\frac{p}{p^2+25} + \frac{2}{5}\frac{5}{p^2+25}\,.$$

Тогда

$$f(t) = 3\cos 5t + \frac{2}{5}\sin 5t\,.$$

5. Теорема смещения

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, a – любое действительное или комплексное число, то

$$e^{at} f(t) \doteqdot F(p-a).$$

Доказательство

$$L\left(e^{at} f(t)\right) = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a)$$

при $\operatorname{Re}(p-a) > S_0$.

С помощью этой теоремы находим изображения функций:

$$e^{at} \sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-a^2)+\omega^2}, \quad e^{at} sh\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-a^2)-\omega^2},$$

при $\operatorname{Re}(p-a) > 0$ *при* $\operatorname{Re}(p-a) > \omega$;

$$e^{at} \cos \omega t \doteqdot \frac{p-a}{(p-a^2)+\omega^2}, \quad e^{at} ch\omega t \doteqdot \frac{p-a}{(p-a^2)-\omega^2},$$

при $\operatorname{Re}(p-a) > 0$ *при* $\operatorname{Re}(p-a) > \omega$.

6. Дифференцирование изображения

Если $f(t) = F(p)$, то $t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}(p)$.

Доказательство

Функция $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt$ является аналитической. Ее производные $F^{(n)}(p)$ по переменной p находятся под знаком интеграла Лапласа

$$F'(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt} \cdot (-t)\, dt,$$

из этого равенства следует, что $tf(t) = -F\ (p)$.

Дифференцируя еще раз, получим

$$F''(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt} \cdot t^2 dt,$$

откуда

$$t^2 f(t) = F''(p).$$

Дифференцируя n раз, получим

$$t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}\ (p).$$

7. Изображения функций t^n, $t^n e^{at}$

Известно, что $1(t) = \dfrac{1}{p}$, тогда $t \cdot 1(t) = -\left(\dfrac{1}{p}\right)'$ или $t = \dfrac{1}{p^2}$. Аналогично $t^2 = \dfrac{2}{p^3}$, при любом n получаем $t^n = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Применяя теорему смещения, находим

$$t^n e^{at} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(p-a) > 0.$$

Пример 1

Найти изображение функции

$$f(t) = 2t^3 - \frac{1}{5} sh\frac{t}{2} + t^4 e^{-5t}.$$

Решение

Пусть $f(t) = F(p)$.

Тогда

$$F(p) = 2 \cdot \frac{3!}{p^4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{p^2 - \frac{1}{4}} + \frac{4!}{(p+5)^5}$$

или

$$F(p) = \frac{12}{p^4} - \frac{1}{10\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)} + \frac{24}{(p+5)^5}.$$

Пример 2

Найти изображение функции

$$g(t) = 3e^{-t}\cos 2t + \frac{7}{2}e^{4t} + t\sin 3t.$$

Решение

Пусть $g(t) = G(p)$, тогда

$$G(p) = 3\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{p-4} - \left(\frac{3}{p^2+9}\right) =$$

$$= \frac{3(p+1)}{(p+1)^2+4} + \frac{7}{2(p-4)} + \frac{6p}{(p^2+9)^2}.$$

Пример 3

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p) = \frac{4p-3}{p^2+5p-1}.$$

Решение

Преобразуем $F(p)$, выделяя полный квадрат по p в знаменателе дроби

$$p^2+5p-1 = \left(p^2 + 2\cdot\frac{5}{2}p + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} - 1 = \left(p+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}.$$

Тогда

$$F(p)=\frac{4\left(p+\dfrac{5}{2}\right)-10-3}{\left(p+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{29}{4}}$$

или

$$F(p)=4\cdot\frac{4p+\dfrac{5}{2}}{\left(p+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{29}{4}}-13\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}\,\frac{\dfrac{\sqrt{29}}{2}}{\left(p+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{29}{4}}.$$

Используя известные изображения, находим искомый оригинал

$$f(t)=4e^{-\frac{5}{2}t}\cdot ch\,\frac{\sqrt{29}}{2}t-\frac{26}{\sqrt{29}}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot sh\,\frac{\sqrt{29}}{2}t.$$

Пример 4

Найти оригинал $x(t)$ для изображения

$$X(p)=\frac{6}{p+2}-\frac{3}{(p-4)^3}+\frac{2p-1}{p^2-3}.$$

Решение

$$X(p)=6\cdot\frac{1}{p-(-2)}-\frac{3}{2}\frac{2!}{(p-4)^{2+1}}+2\cdot\frac{p}{p^2-3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{p^2-3}.$$

Используя табличные изображения, находим оригинал

$$x(t)=6e^{-2t}-\frac{3}{2}t^2e^{4t}+2ch\sqrt{3}\,t-\frac{1}{\sqrt{3}}sh\sqrt{3}\,t.$$

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1) найти изображение функции

$$f(t)=\frac{1}{5}-3\sin\frac{2t}{3}+6ch5t-4t;$$

2) найти изображение функции

$$g(t)=\frac{1}{4}e^{-2t}\cos 5t-\frac{1}{6}tsh2t;$$

3) найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{6}{p+2}-\frac{2}{p^3}+\frac{2-p}{p^2+5}.$$

Вариант 2

1) найти изображение функции

$$f(t)=5t^2+\frac{1}{2}-4sh\frac{t}{3}+8\cos 3t;$$

2) пайти изображепие фупкции

$$g(t)=3e^{-t}\sin 2t-\frac{1}{10}tch4t;$$

3) найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{5p+1}{p^2-2}+\frac{3}{p^4}-\frac{8}{(p+1)^2}.$$

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

1) найти, используя интеграл Лапласа, изображение функции

$$g(t)=\begin{cases} 0, & t<0,\\ 2t+3, & 0\le t\le 1,\\ 0, & t>1;\end{cases}$$

2) найти оригинал $x(t)$ для изображения

$$X(p)=\frac{3-4p}{p^2+3p+4}-\frac{2}{(p-3)^3}.$$

Вариант 2

1) найти оригинал $y(t)$ для изображения

$$Y(p)=\frac{1+6p}{p^2+p+3}-\frac{7}{(p+5)^4};$$

2) используя интеграл Лапласа, найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0,\\ 3-t, & 0\le t\le 2,\\ 0, & t>2.\end{cases}$$

8. Теорема запаздывания

Если $f(t)=F(p)$, то $f(t-\tau)=e^{-\tau p}F(p)$, τ - любое положительное число.

Доказательство

Известно, что $f(t)=0$ при всех $t<0$. При $t<\tau$ аргумент $t-\tau<0$, поэтому $f(t-\tau)=0$. Это значит, что оригинал включается с запаздыванием на τ. График функции $f(t-\tau)$ получается из графика $f(t)$ смещением последнего вправо на расстояние τ. С помощью единичной функции запаздывающую функцию $f(t-\tau)$ можно записать и так: $f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$, так как $1(t-\tau)=0$ при $t<\tau$ и $1(t-\tau)=1$ при $t>\tau$.

Найдем изображение $f(t-\tau)$:

$$L\big(f(t-\tau)\big)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t-\tau)\,dt=\int_0^\tau e^{-pt}f(t-\tau)\,dt+\int_\tau^\infty e^{-pt}f(t-\tau)\,dt.$$

Здесь $\int_0^\tau e^{-pt}f(t-\tau)\,dt=0$, так как $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$.

Во втором интеграле сделаем замену, полагая $t-\tau=u$, тогда $t=u+\tau$; $dt=du$, при $t=\tau$ $u=0$, при $t=\infty$ и $u=\infty$.

Таким образом,

$$L\big(f(t-\tau)\big)=\int_\tau^\infty e^{-pt}f(t-\tau)\,dt=\int_0^\infty e^{-p(u+\tau)}f(u)\,du=$$

,

$$=e^{-\tau p}\int_0^\infty e^{-pu}f(u)\,du=e^{-\tau p}F(p),$$

что и требовалось доказать.

Пример 1

$1(t) = \dfrac{1}{p}$. Тогда $1(t-\tau) = e^{-\tau p} \cdot \dfrac{1}{p}$.

Пример 2

Найти изображение функции $f(t) = (t-3)^3 \cdot 1(t-3)$.

Решение

Известно, что $t^3 = \dfrac{3!}{p^4}$. В нашем случае запаздывание на $\tau = 3$. Поэтому $(t-3)^3 1(t-3) = e^{-3p} \cdot \dfrac{3!}{p^4}$.

Пример 3

Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t+1, & 0 < t < 1, \\ 3t, & 1 < t < 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$

Решение

Пусть $f(t) = F(p)$.

Искомое изображение $F(p)$ найдем двумя способами. Сначала по определению с помощью интеграла Лапласа.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=\int_0^1(t+1)\,e^{-pt}dt+3\int_1^4 te^{-pt}dt=$$

$$=(t+1)\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\Big|_0^1-\int_0^1-\frac{1}{p}e^{-pt}dt+3t\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-pt}\,{}_1^4-3\int_1^4-\frac{1}{p}e^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1-\frac{12}{p}e^{-4p}+\frac{3}{p}e^{-p}-\frac{3}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^4=$$

$$=-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p^2}-\frac{12}{p}e^{-4p}+\frac{3}{p}e^{-p}-\frac{3}{p^2}e^{-4p}+\frac{3}{p^2}e^{-p}=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}\right)e^{-p}-\left(\frac{3}{p^2}+\frac{12}{p}\right)e^{-4p}.$$

А теперь найдем $F(p)$ с помощью теоремы запаздывания. Для этого запишем наш оригинал $f(t)$ одним аналитическим выражением с помощью единичной функции.

При $t<0$ $f(t)=0$. В момент $t=0$ «включается» функция $t+1$; в момснт $t=1$ она «снимастся» и «включастся» функция $3t$, которая «снимается» в момент $t=4$. Поэтому

$$f(t)=(t+1)\cdot 1(t)-(t+1)\cdot 1(t-1)+3t\cdot 1(t-1)-3t\cdot 1(t-4)=$$
$$=(t+1)\cdot 1(t)+(2t-1)\cdot 1(t-1)-3t\cdot 1(t-4)=$$
$$=(t+1)\cdot 1(t)+(2(t-1)+1)\cdot 1(t-1)-(3(t-4)+12)\cdot 1(t-4).$$

Применяя линейность преобразования Лапласа и теорему запаздывания, получим искомое изображение

$$F(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\frac{3}{p^2}+\frac{12}{p}\right)e^{-4p}.$$

Пример 4

Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{5}{(p+2)^4}e^{-p}+\frac{4}{p^3}-\frac{8}{p^2+7}e^{-2p}.$$

Решение

Находим оригинал для каждого слагаемого:

$$\frac{5}{(p+2)^4}=5\,\frac{1}{(p+2)^{3+1}}=\frac{5}{3!}\cdot\frac{3!}{(p-(-2))^{3+1}}=\frac{5}{6}e^{-2t}\cdot t^3,$$

$$\frac{4}{p^3}=4\,\frac{1}{p^{2+1}}=\frac{4}{2!}\cdot\frac{2!}{p^{2+1}}=2t^2,$$

$$-\frac{8}{p^2+7}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{p^2+7}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}\,t,$$

$$\frac{5}{(p+2)^4}\cdot e^{-p}=\frac{5}{6}\cdot e^{-2(t-1)}\cdot(t-1)^3\cdot 1(t-1),$$

оригинал с запаздыванием на $\tau=1$.

$$\frac{4}{p^3}=2t^2$$

$$-\frac{8}{p^2+7}e^{-2p}=-\frac{8}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}(t-2)\cdot 1(t-2)$$

оригинал с запаздыванием на $\tau=2$.

Суммируя оригиналы для каждого слагаемого, находим

$$f(t) = \frac{5}{6} e^{\ 2(t\ \ 1)} \cdot (t-1)^3 \cdot 1(t-1) + 2t^2 - \frac{8}{\sqrt{7}} \sin \sqrt{7}\,(t-2) \cdot 1(t-2).$$

Самостоятельная работа № 3

Вариант 1

1) найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{(5-3p)e^{-p}}{2p^2+5} + \frac{7e^{-3p}}{2p^2+4p+1} - \frac{3}{(p+6)^4}.$$

2) найти изображение функции

$$x(t) = 5\sin\frac{2t}{5} - 2 + \frac{1}{4}(t-2)e^{-2(t-2)} ch\frac{3}{2}(t-2) \cdot 1(t-2).$$

Вариант 2

1) найти изображение функции

$$y(t) = 7te^t \cos\frac{5t}{4} - \frac{1}{6}(t-4)^2 \cdot e^{-5(t-4)} \cdot 1(t-4) + 3ch\frac{t}{4}.$$

2) найти оригинал для изображения

$$G(p) = \frac{8p}{p^2+2p+6} - \frac{(2-p)e^{-2p}}{4p^2+5} + \frac{10e^{-5p}}{(p-3)^3}.$$

9. Дифференцирование оригинала

Теорема

Если $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, $f'(t)$ принадлежит множеству оригиналов и $f(t) = F(p)$, то $f'(t) = pF(p) - f(0)$.

Доказательство

$$L\,(f'(t)) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt.$$

Интсгрируя по частям, положим

$$u = e^{-pt}, \quad du = -pe^{-pt}dt, \quad d\mathrm{v} = f'(t)dt, \mathrm{v} = f(t).$$

Получаем

$$f'(t) = (f(t)\ \ e^{-pt})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}(-p)dt.$$

Так как $\operatorname{Re} p = x > s_0$, то $\left| f(t)\,e^{-pt} \right| \le Me^{-(x-s_0)t}$, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\,e^{-pt} = 0$, а $\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt = F(p)$.

Следовательно, $f'(p) = pF(p) - f(0)$.

Теорема доказана.

Следствие

Если $f''(t), f'''(t), ..., f^{(n)}(t)$ - оригиналы, то находим:

$$f''(t) = p(pF(p) - f(0)) - f'(0)$$

или

$$f''(t) = p^2F(p) - pf(0)) - f'(0).$$

Аналогично, для производной n–го порядка имеем

$$f^{(n)}(t) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Для практических приложений полученное свойство является очень важным. Оно показывает, что сложная операция дифференцирования в пространстве оригиналов заменяется в пространстве изображений элементарным действием – умножением изображения на степень аргумента p с добавлением многочлена, коэффициентами которого являются начальные значения оригинала. Это очень удобно для рсшсния диффсрснциальных уравнсний опсрационным мстодом, так как начальные условия здесь учитываются автоматически.

10. Интегрирование оригинала

Теорема

Если $f(t) = F(p)$, то $\int\limits_0^t f(u)\,du = \dfrac{F(p)}{p}$, т. е. интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p.

Доказательство

$f(t)$ принадлежит множеству оригиналов, тогда и $\int\limits_0^t f(u)\,du$ тоже является оригиналом. Обозначим $\int\limits_0^t f(u)\,du = g(t)$, пусть $g(t) = G(p)$. $g'(t) = (\int\limits_0^t f(u)\,du)' = f(t)$, $g(0) = 0$, $L(g'(t) = L(f(t))$.

Поэтому $pG(p) = F(p)$, откуда $G(p) = \dfrac{F(p)}{p}$. Значит, $\int\limits_0^t f(u)\,du = \dfrac{F(p)}{p}$, что и требовалось доказать.

11. Свёртка оригиналов, ее свойства.
Теорема умножения

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - оригиналы. Свёртку этих функций обозначают $f * g$. Она равна

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du .$$

Свёртка $f * g$ обладает свойствами:

1) переместительным

$$f * g = g * f \text{ или}$$

$$\int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du ;$$

2) сочетательным

$$(f * g)\,\varphi = f\,(g * \varphi),$$

в силу, которого свёртка нескольких функций всегда даёт одинаковый результат, независимо от того, в каком порядке выполняется свёртывание;

3) распределительным

$$(f + g) * \varphi = (f * \varphi) + (g * \varphi).$$

Свёртка оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ тоже является оригиналом, причём показатель роста свёртки $f * g$ равен наибольшему из показателей роста функций $f(t)$ и $g(t)$.

Пример

Найти свёртку функций $f(t)=t, \quad g(t)=e^{at}$.

Решение

$$f*g=t*e^{at}=\int_0^t ue^{a(t-u)}du=e^{at}\int_0^t ue^{-au}du=$$

$$=e^{at}\left(-u\frac{e^{-au}}{a}\Bigg|_0^t-\int_0^t-\frac{1}{a}e^{-au}du\right)=e^{at}\left(-\frac{t}{a}e^{-at}+\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-au}\Bigg|_0^t\right)=$$

$$=e^{at}\left(-\frac{t}{a}e^{-at}-\frac{1}{a^2}e^{-at}+\frac{1}{a^2}\right)=-\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}e^{at}.$$

В другом порядке

$$g*t=e^{at}*t=\int_0^t e^{au}(t-u)du=\int_0^t te^{au}du-\int_0^t ue^{au}du.$$

Произведя интегрирование по частям во втором интеграле, получим

$$e^{at}*t=t\frac{e^{au}}{a}\Bigg|_0^t-u\frac{1}{a}e^{au}\Bigg|_0^t+\int_0^t\frac{1}{a}e^{au}du=$$

$$=t\frac{e^{at}}{a}-\frac{t}{a}-\frac{t}{a}e^{at}+\frac{1}{a^2}e^{at}-\frac{1}{a^2}=-\frac{t}{a}+\frac{1}{a^2}e^{at}-\frac{1}{a^2}.$$

Получили

$$f*g=g*f.$$

Теорема умножения

Если $f(t) = F(p)$ и $g(t) = G(p)$, то $f * g = F(p) \cdot G(p)$, т. е. при свертывании оригиналов изображения перемножаются.

Доказательство

$$L(f * g) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(u) g(t-u) du =$$

$$= \int_0^\infty f(u) du \int_u^\infty e^{pt} g(t-u) dt,$$

изменим порядок интегрирования.

Во внутреннем интеграле проведём замену переменной, положив $t - u = z$, тогда $t = u + z$, $dt = dz$, при $t = u$ $z = 0$, при $t = \infty$ $z = \infty$, получим

$$L(f * g) = \int_0^\infty f(u) du \int_0^\infty e^{-p(u+z)} g(z) dz =$$

$$= \int_0^\infty f(u) e^{-pu} du \int_0^\infty g(z) e^{-pz} dz = F(p) \cdot G(p),$$

что и требовалось доказать.

Теорема умножения имеет важное значение для приложений, так как позволяет находить оригинал, соответствующий произведению двух изображений $F(p)$ и $G(p)$, если известны оригиналы сомножителей $f(t)$ и $g(t)$.

Пример

Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-a)}$.

Решение

Изображение $F(p)$ можно подставить в виде произведения двух функций

$$F(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-a}.$$

Пусть $F(p)=f(t)$.

Так как $\dfrac{1}{p^2}=t,\quad \dfrac{1}{p-a}=e^{at},$ то по теореме умножения искомый оригинал $f(t)=t*e^{at}$. Эту свёртку в предыдущем примере мы нашли, поэтому

$$f(t)=-\frac{t}{a}+\frac{1}{a^2}e^{at}-\frac{1}{a^2}.$$

12. Интеграл Дюамеля

Частным случаем теоремы умножения изображений является формула Дюамеля, часто применяемая для нахождения оригиналов.

Найдем оригинал, соответствующий произведению $pF(p)\,G(p)$, где $f(t) \risingdotseq F(p), \quad g(t) \risingdotseq G(p)$.

Это произведение представим в виде

$$pF(p)\,G(p) = \big(pF(p) - f(0)\big)G(p) + f(0)G(p).$$

Так как $pF(p) - f(0) \risingdotseq f'(t)$, то по теореме умножения изображений $\big(pF(p) - f(0)\big)G(p) \risingdotseq f'(t) * g(t)$, а $f(0)G(p) \risingdotseq f(0)\cdot g(t)$.

Теперь можно записать формулу Дюамеля

$$pF(p)\,G(p) \risingdotseq \int_0^t f'(u)\,g(t-u)\,du + f(0)\,g(t).$$

Правую часть этого соотношения называют интегралом Дюамеля.

Если учесть свойство свёртки $f * g = g * f$, то из последнего равенства получим

$$pF(p)\,G(p) \risingdotseq \int_0^t g(u)\,f'(t-u)\,du + f(0)\,g(t).$$

Аналогично, если $pF(p)\,G(p) = \big(pG(p) - g(0)\big)F(p) + g(o)F(p)$, получим

$$pF(p)\,G(p) \risingdotseq \int_0^t g'(u)\,f(t-u)\,du + g(0)\,f(t),$$

$$pF(p)\,G(p) \risingdotseq \int_0^t f(u)\,g'(t-u)\,du + g(0)\,f(t).$$

Пример

Найти оригипал для фупкции $\dfrac{p\omega}{(p-a)(p^2+\omega^2)}$.

Решение

Представим заданную функцию в виде произведения

$$p \ \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \cdot \frac{1}{p-a}.$$

Имеем

$$F(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\sin \omega t = f(t); \quad G(p)=\frac{1}{p-a}=e^{at}=g(t),$$

$$f(0)=0, \quad f'(t)=\omega\cos\omega t.$$

Тогда запишем

$$pF(p)G(p)=p\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p-a}=\int_0^t f'(u)\,g(t-u)\,du=$$

$$=\int_0^t \omega\cos\omega u\cdot e^{a(t-u)}du=\omega e^{at}\int_0^t \cos\omega u\cdot e^{-au}du.$$

Дважды интегрируя по частям последний интеграл, получим

$$\omega e^{at}\int_0^t \cos\omega u\, e^{-au}du=\frac{1}{a^2+\omega^2}\left(\omega^2\sin\omega t+a\omega\left(e^{at}-\cos\omega t\right)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)(p-a)}=\frac{\omega^2\sin\omega t+a\omega\left(e^{at}-\cos\omega t\right)}{a^2+\omega^2}.$$

13. Нахождение оригинала по изображению

При нахождении оригинала по его изображению широко пользуются свойствами прсобразования Лапласа и таблицсй соотвстствий между оригиналами и их изображениями:

Таблица

Соответствия между оригиналами и их изображениями

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$f(t)$	$F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
5	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
8	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
9	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

Окончание таблицы

10	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
11	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
12	$e^{at} sh\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
13	$e^{at} ch\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
14	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\, sh\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\, ch\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$te^{at}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$te^{at}\cos\omega t$	$\frac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\cos^2\omega t$	$\frac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
21	$\sin^2\omega t$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$

Пример

Найти оригиналы для следующих изображений:

1) $F(p) = \dfrac{1}{p^5}$.

Решение

Используем соотношение 3 из таблицы, откуда $\dfrac{1}{p^{n+1}} = \dfrac{t^n}{n!}$, поэтому

$$\frac{1}{p^5} = \frac{t^4}{4!} = \frac{1}{24} t^4 .$$

2) $F(p) = \dfrac{3}{(p+2)^4}$.

Решение

Из соотношения 5

$$\frac{t^n e^{at}}{n!} = \frac{1}{(p-a)^{n+1}}\text{, здесь } a = -2, \quad n = 3,$$

поэтому

$$\frac{3}{(p+2)^4} = 3 \cdot \frac{t^3 e^{-2t}}{3!} = \frac{1}{2} t^3 e^{-2t} .$$

3) $F(p) = \dfrac{5}{p^2 + 4}$.

Решение

Из соотношения 6

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \sin \omega t ,$$

здесь $\omega^2 = 4, \quad \omega = 2$, поэтому

$$\frac{5}{p^2+4} = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4} = \frac{5}{2}\sin 2t .$$

4) $F(p) = \dfrac{7p}{3p^2+5}.$

Решение

Из соотношения 7

$$\frac{p}{p^2+\omega^2} = \cos\omega t$$

$$\frac{7p}{3p^2+5} = \frac{7p}{3\left(p^2+\frac{5}{3}\right)} = \frac{7}{3}\cdot\frac{p}{p^2+\frac{5}{3}} = \frac{7}{3}\cos\sqrt{\frac{5}{3}}t \;.$$

5) $F(p) = \dfrac{3}{(p-2)^2-5}.$

Решение

Из соотношения 10

$$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}=e^{at}sh\omega t$$

$$\frac{3}{(p-2)^2-5}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{(p-2)^2-5}=\frac{3}{\sqrt{5}}e^{2t}sh\sqrt{5}\,t$$

$$\omega=\sqrt{5},\quad a=2.$$

6) $F(p)=\dfrac{p+5}{p^2-4p+7}$.

Решение

$$p^2-4p+7=\left(p^2-4p+4\right)+3=(p-2)^2+3$$

$$\frac{p+5}{p^2-4p+7}=\frac{p+5}{(p-2)^2+3}.$$

Из соотношений 11 и 10

$$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}=e^{at}\cos\omega t,\qquad \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}=e^{at}\sin\omega t$$

$$\frac{p+5}{(p-2)^2+3}=\frac{(p-2)+7}{(p-2)^2+3}=\frac{p-2}{(p-2)^2+3}+\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+3}=$$

$$=e^{2t}\cos\sqrt{3}\,t+\frac{7}{\sqrt{3}}e^{2t}\sin\sqrt{3}\,t.$$

7) $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^2+9}$.

Решение

Из соотношения 6

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\sin\omega t,\qquad \frac{2}{p^2+9}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}=\frac{2}{3}\sin 3t.$$

Применяя теорему запаздывания, получим

$$\frac{2e^{-p}}{p^2+9}==\frac{2}{3}\sin 3(t-1)\cdot 1(t-1)$$

(при умножении изображения на $e^{-\tau p}$ оригинал запаздывает на τ единиц, в нашем случае $\tau=1$).

Если изображение оригинала является правильной рациональной дробью, выраженной отношением двух многочленов $F(p)=\dfrac{\Phi(p)}{G(p)}$ (степень числится меньше степени знаменателя), то эту дробь разлагают сначала на сумму простейших дробей, затем для каждой полученной дроби находят соответствующий оригинал.

Пример

Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}$.

Решение

Изображение $F(p)$ является правильной рациональной дробью. Разложим эту дробь на сумму простейших дробей

$$\frac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}=\frac{A}{(p+1)^2}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Приводя в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители дробей слева и справа, получим тождество, из которого нужно получить систему из четырех уравнений для определения A, B, C, D.

$$3p^2-2=A(p^2+1)+B(p+1)(p^2+1)+(Cp+D)(p+1)^2$$

$$\begin{matrix} p=-1 \\ p^3: \\ p: \\ p=0 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} 1=2A,\ A=\dfrac{1}{2} \\ 0=B+C \\ 0=B+2D+C \\ -2=A+B+D \end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} B+C=0 \\ B+2D+C=0,\ \textit{отсюда}\ D=0 \\ B=-2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2} \\ C=-B=\dfrac{5}{2} \end{matrix}$$

Тогда

$$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Применяя свойство линейности преобразования Лапласа и соотношения 5, 4 и 7 из таблицы, получим искомый оригинал

$$f(t)=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{5}{2}\cos t.$$

Если изображение $F(p)=\dfrac{\Phi(p)}{G(p)}$ является правильной рациональной дробью и $p_1, p_2, ..., p_n$ - полюсы $F(p)$, то для нахождения оригинала $f(t)$ применяют теорию вычетов, а именно:

$$F(p) = f(t) = \sum_{k=1}^{n} res\left[F(p)e^{pt};\, p_k\right],$$

где $res\left[F(p)e^{pt};\, p_k\right]$ - вычет функции $F(p)e^{pt}$ относительно полюса p_k.

Пример

С помощью вычетов найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{3p^2-2}{(p+1)^2(p^2+1)}$.

Решение

Для $F(p)$ $p=-1$ - полюс второго порядка, $p=\pm i$ - простые полюсы.

Тогда

$$f(t) = res\left[F(p)e^{pt}; -1\right] + res\left[F(p)e^{pt}; i\right] + res\left[F(p)e^{pt}; -i\right].$$

Найдем вычеты.

$$res\left[F(p)e^{pt};-1\right]=\lim_{p\to-1}\left((p+1)^2\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p^2+1)}\right)'=\lim_{p\to-1}\left(\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{p^2+1}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{1}{(p^2+1)^2}\left(\left(p^2+1\right)\left(6pe^{pt}+\left(3p^2-2\right)e^{pt}\cdot t\right)-\left(3p^2-2\right)e^{pt}\cdot 2p\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\left(-6e^{-t}+e^{-t}\cdot t\right)-e^{-t}(-2)\right)=\frac{1}{4}\left(-12e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-10e^{-t}+2te^{-t}\right)=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}.$$

$$res\left[F(p)e^{pt};i\right]=\lim_{p\to i}(p-i)\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)(p+i)}=\lim_{p\to i}\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p+i)}=$$

$$=\frac{-5e^{it}}{(-1+2i+1)\,2i}=\frac{-5e^{it}}{-4}=\frac{5}{4}(\cos t+i\sin t)=\frac{5}{4}\cos t+i\frac{5}{4}\sin t.$$

$$res\left[F(p)e^{pt};-i\right]=\lim_{p\to-i}(p+i)\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)(p+i)}=\lim_{p\to-i}\frac{(3p^2-2)e^{pt}}{(p+1)^2(p-i)}=$$

$$=\frac{-5e^{-it}}{-2i\,(-2i)}=\frac{-5e^{-it}}{-4}=\frac{5}{4}(\cos t-i\sin t)=\frac{5}{4}\cos t-\frac{5}{4}i\sin t.$$

Складывая вычеты, получим искомый оригинал

$$f(t)=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{5}{2}\cos t.$$

14. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Задача Коши

Требуется найти частное решение уравнения

$$a_0 y^{(n)}(t) + + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t)\ (a_0 \neq 0),$$

удовлетворяющее условиям: $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$.

Операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) эта задача может быть решена в предположении, что функция $f(t)$, искомая функция $y(t)$ и ее производные до n-го порядка включительно, являются оригиналами.

Пусть $y(t) = Y(p), \quad f(t) = F(p)$, тогда по теореме о дифференцировании оригинала имеем

$$y'(t) = pY(p) - y^0; \quad y''(t) = p^2 Y(p) - py_0 - y_1, \ldots,$$

$$y^{(n)}(t) = p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \ldots py_{n-2} - y_{n-1}.$$

Применяя линейность преобразования Лапласа, перейдем в заданном дифференциальном уравнении от оригиналов к изображениям:

$$a_0(p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \ldots - py_{n-2} - y_{n-1}) +$$

$$+ a_1(p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - \ldots - y_{n-2}) +$$

$$+ \ldots + a_{n-1}(pY(p) - y_0) + a_n Y(p) = F(p).$$

Полученное уравнение – это алгебраическое уравнение первой степени относительно $Y(p)$. Решая его, находим

$$Y(p)=\frac{F(p)+\Phi(p)}{\Psi(p)},$$

где

$$\Psi(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n,$$

$$\Phi(p)=y_0(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1})+$$

$$+\,y_1(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2})+\ldots+$$

$$+\,y_{n-2}(a_0p+a_1)+a_0y_{n-1}.$$

$\Phi(p)$ - многочлен степени не выше, чем n-1, с коэффициентами, зависящими от начальных условий. Если все начальные значения равны нулю, то $\Phi(p)=0$.

Далее, для найденного изображения $Y(p)$ находим оригинал $y(t)$, который и будет искомым частным решением дифференциального уравнения.

Преимущество операционного метода решения задачи Коши перед классическими методами состоит в том, что уравнение для $Y(p)$ является линейным алгебраическим и, следовательно, в математическом отношении более простым, чем исходное дифференциальное уравнение. Во-вторых, операционным методом сразу находится частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, и не надо искать общее решение этого уравнения.

Пример 1

Решить уравнение $y''-4y=te^{-t}$ при начальных условиях $y(0)=2,\quad y'(0)=0.$

Решение

Пусть $y(t)=Y(p)$, тогда

$$y'(t)=pY(p)-y(0)=pY(p)-2,$$
$$y''(t)=p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-2p.$$

Переходим в уравнении к изображениям:

$$p^2Y(p)-2p-4Y(p)=\frac{1}{(p+1)^2},$$

решаем это уравнение

$$(p^2-4)Y(p)=\frac{1}{(p+1)^2}+2p;\quad (p^2-4)Y(p)=\frac{1+2p^3+4p^2+2p}{(p+1)^2}.$$

$$Y(p)=\frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p+1)^2(p^2-4)}\ \text{ или }\ Y(p)=\frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p+1)^2(p-2)(p+2)}.$$

Разложим полученную для $Y(p)$ правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей.

$$\frac{2p^3+4p^2+2p+1}{(p-2)(p+2)(p+1)^2}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{(p+1)^2}+\frac{D}{p+1},$$

$$2p^3+4p^2+2p+1=A(p+2)(p+1)^2+B(p-2)(p+1)^2+$$

$$+C(p-2)(p+2)+D(p+1)(p-2)(p+2).$$

$$p=2 \qquad 16+16+4+1=A\cdot 36, \qquad 37=36A, \qquad A=\frac{37}{36}$$

$$p=-2 \qquad -16+16-4+1=B\cdot(-4), \qquad -3=-4B, \qquad B=\frac{3}{4}$$

$$p=-1 \qquad -2+4-2+1=C\cdot(-3), \qquad 1=-3C, \qquad C=-\frac{1}{3}$$

$$p^3: \quad 2=A+B+D, \quad D=2-A-B=2-\frac{37}{36}-\frac{3}{4}=\frac{72-37-27}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}.$$

Тогда

$$Y(p)=\frac{37}{36}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p+1},$$

а искомое частное решение дифференциального уравнения есть

$$y(t)=\frac{37}{36}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-\frac{1}{3}te^{-t}+\frac{2}{9}e^{-t}.$$

Пример 2

Решить уравнение $x'''+2x'=4e^{-t}$ при начальных условиях $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

Решение

Пусть $x(t) = X(p)$, тогда

$$x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x'''(t) = p^3 X(p) - p^2(x(0)) - px'(0) - x''(0) = p^3 X(p),$$

$$4e^{-t} == \frac{4}{p+1}.$$

Переходим в дифференциальном уравнении к изображениям

$$p^3 X(p) + 2pX(p) = \frac{4}{p+1},$$

$$(p^3 + 2p)X(p) = \frac{4}{p+1},$$

откуда

$$X(p) = \frac{4}{(p+1)(p^3+2p)} \text{ или } X(p) = \frac{4}{p(p+1)(p^2+2)}.$$

$$\frac{4}{p(p+1)(p^2+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2}$$

$$4 = A(p+1)(p^2+2) + Bp(p^2+2) + (Cp+D)p(p+1)$$

$p = 0 \qquad 4 = 2A, \qquad A = \frac{4}{2} = 2$

$p = -1 \qquad 4 = B \cdot (-3), \qquad B = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

$p^3: \qquad 0 = A + B + C, \qquad C = -A - B = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

$p^2: \qquad 0 = A + D + C, \qquad D = -A - C = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$

Тогда

$$X(p)=2\cdot\frac{1}{p}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{p^2+2}-\frac{4}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{p^2+2}.$$

Искомое частное решение $x(t)$ есть

$$x(p)=2-\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}\cdot\cos\sqrt{2}\,t-\frac{4}{3\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,t.$$

15. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом решаются так же, как и одно уравнение. Отличие будет лишь в том, что вместо одного изображающего уравнения будем иметь систему таких уравнений, причем эта система в отношении изображений искомых функций будет линейной алгебраической.

Пример 1

Решить систему $\begin{cases} x'+3x+y=0 \\ y'-x+y=0 \end{cases}$ при начальных условиях $x(0)=1,\ \ y(0)=1.$

Решение

Пусть

$$x(t) = X(p), \quad y(t) = Y(p),$$

тогда

$$x'(t) = pX(p) - 1; \quad y'(t) = pY(p) - 1.$$

Переходим в уравнениях к изображениям

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + 3X(p) + Y(p) = 0 \\ pY(p) - 1 - X(p) + Y(p) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p+3)X(p) + Y(p) = 1 \\ -X(p) + (p+1)Y(p) = 1 \end{cases}$$

Получили линейную алгебраическую систему с неизвестными $X(p)$ и $Y(p)$.

Решение этой системы находим по формулам Крамера.

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+3)(p+1) + 1 = p^2 + 3p + p + 3 + 1 = (p+2)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = p + 1 - 1 = p,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p + 3 + 1 = p + 4.$$

Тогда $X(p) = \dfrac{p}{(p+2)^2}$; $\quad Y(p) = \dfrac{p+4}{(p+2)^2}$.

Для нахождения оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ найденные их изображения преобразуем

$$X(p) = \frac{p}{(p+2)^2} = \frac{(p+2)-2}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} - \frac{2}{(p+2)^2} = e^{-2t} - 2te^{-2t};$$

$$Y(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2} = \frac{(p+2)+2}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)^2} = e^{-2t} + 2te^{-2t}.$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений есть

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t}(1-2t), \\ y(t) = e^{-2t}(1+2t). \end{cases}$$

Пример 2

Решить систему $\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ y' - x + y = \sin t \end{cases}$

при начальных условиях $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

Решение

Пусть

$$x(t) = X(p), \quad y(t) = Y(p),$$

тогда

$$x'(t) = pX(p) - 1; \quad y'(t) = pY(p).$$

Переходим в уравнениях к изображениям

$$\begin{cases} pX(p)-1+X(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ pY(p)-X(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p+1)X(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1}+1 \\ -X(p)+(p+1)Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1}, \end{cases}$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix}=(p+1)^2-1=p^2+2p,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{p}{p-1} & -1 \\ \dfrac{1}{p^2+1} & p+1 \end{vmatrix}=\frac{p(p+1)}{p-1}+\frac{1}{p^2+1}=$$

$$=\frac{p^4+p^3+p^2+p+p-1}{(p-1)(p^2+1)}=\frac{p^4+p^3+p^2+2p-1}{(p-1)(p^2+1)},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1 & \dfrac{p}{p-1} \\ -1 & \dfrac{1}{p^2+1} \end{vmatrix} = \frac{p+1}{p^2+1} + \frac{p}{p-1} =$$

$$= \frac{p^2 - 1 + p^3 + p}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{p^3 + p^2 + p - 1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{p^4 + p^3 + p^2 + 2p - 1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}, \quad Y(p) = \frac{p^3 + p^2 + p - 1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}.$$

Каждую из правильных рациональных дробей прсдставим в видс суммы простейших дробей

$$\frac{p^4 + p^3 + p^2 + 2p - 1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-1} + \frac{Dp+E}{p^2+1},$$

$$p^4 + p^3 + p^2 + 2p - 1 = A(p+2)(p-1)(p^2+1) + Bp(p-1)(p^2+1) +$$

$$+ Cp(p+2)(p^2+1) + (Dp+E)p(p+2)(p-1)$$

$p = 0 \qquad -1 = -2A, \qquad A = \dfrac{1}{2}$

$p = 1 \qquad 4 = 6C, \qquad C = \dfrac{2}{3}$

$$p=-2 \qquad 16-8+4-4-1=30B, \quad 7=30B, \quad B=\frac{7}{30}$$

$$p^4: \quad 1=A+B+C+D, \qquad D=1-A-B-C=1-\frac{1}{2}-\frac{7}{30}-\frac{2}{3}=-\frac{2}{5}$$

$$p=-1 \quad -2=-4A+4B-2C-2D+2E.$$

$$E=-1+2A-2B+C+D=-1+1-\frac{7}{15}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$X(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{7}{30}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{2}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

По изображению $X(p)$ находим оригинал $x(t)$:

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{t}-\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t,$$

$$x(0)=\frac{1}{2}+\frac{7}{30}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{15+7+20-12}{30}=\frac{30}{30}=1.$$

$$\frac{p^3+p^2+p-1}{p(p+2)(p-1)(p^2+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p-1}+\frac{Dp+E}{p^2+1},$$

$$p^3+p^2+p-1=A(p+2)(p-1)(p^2+1)+Bp(p-1)(p^2+1)+$$

$$+Cp(p+2)(p^2+1)+(Dp+E)p(p+2)(p-1)$$

$$p=0 \qquad -1=-2A, \qquad A=\frac{1}{2}$$

$$p=1 \qquad 2=6C, \qquad C=\frac{1}{3}$$

$p=-2 \qquad -7=30B, \qquad\qquad B=-\dfrac{7}{30}$

$p^4: \qquad 0=A+B+C+D, \qquad D=-A-B-C=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{30}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{3}{5}$

$p=-1 \qquad -2=-4A+4B-2C-2D+2E$

$$E=-1+2A-2B+C+D=-1+1+\frac{7}{15}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=+\frac{1}{5}$$

$$Y(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{7}{30}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{3}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Искомый оригинал $y(t)$ равен

$$y(t)=\frac{1}{2}-\frac{7}{30}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t,$$

$$y(0)=\frac{1}{2}-\frac{7}{30}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=\frac{15-7+10-18}{30}=\frac{0}{30}=0.$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений есть

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{30}e^{-2t}+\dfrac{2}{3}e^{t}-\dfrac{2}{5}\cos t-\dfrac{1}{5}\sin t \\ y(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{30}e^{-2t}+\dfrac{1}{3}e^{t}-\dfrac{3}{5}\cos t+\dfrac{1}{5}\sin t. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти изображения для заданных оригиналов

$$1)\ f(t) = 2\cos 5t - e^{-t}\sin 4t;$$
$$2)\ f(t) = \sin 2(t-1)\cdot 1(t-1);$$
$$3)\ f(t) = 3t\cos 4t;$$
$$4)\ f(t) = (t-2)^3 e^{t-2}\cdot 1(t-2).$$

2. С помощью таблицы оригиналов и соответствующих им изображений и свойств преобразования Лапласа найти оригиналы по заданным изображениям:

$$1)\ F(p) = \frac{3p}{p^2-25} + \frac{2}{(p-2)^2+9};$$

$$2)\ F(p) = \frac{4p}{p^2-2p+5};$$
$$3)\ F(p) = \frac{p+8}{p^2+4p+7}e^{-p};$$

$$4)\ F(p) = \frac{7}{(p+3)^3} - \frac{pe^{-2p}}{p^2-16}.$$

3. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1) $y''-4y'+5y=e^t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

2) $y''-3y'+2y=e^t$, $y(0)=2$, $y'(0)=6$;

3) $y''+y'=\sin 2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

4) $y''+4y'=3\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1970. – 380 с.

Ершова В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. – М.: Наука, 1976. – 255 с.

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Г. М. ПЛОТНИКОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
по разделу дисциплины «Математика» для студентов всех специальностей очного обучения

Екатеринбург
2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей очного обучения.

Пособие содержит 30 вариантов заданий по теме «Теория вероятностей». В начале пособия даны методические указания с подробными решениями аналогичных задач. В конце пособия указаны ответы.

Целью работы является активизация самостоятельной работы студентов и содействие более глубокому усвоению разделов курса математики и её приложений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

В данном разделе приведены подробные решения задач, подобных указанным в вариантах.

Задача 1

При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке 0,2. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов ровно 84 будут бракованными?

Решение

Так как $n = 400$ представляет собой достаточно большое число и $p = 0{,}2$, то можно считать, согласно локальной теореме Лапласа, что случайная величина $X = k$ распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно k раз, приближённо равна

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

По условиям задачи $k = 84$; $q = 0{,}8$, $p = 0{,}2$, $n = 400$, тогда

$$P(X = 84) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\varphi\left(\frac{84 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\varphi(0{,}5) = \frac{1}{8}0{,}3521 \approx 0{,}044.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приводится в приложениях к учебникам (см., например [4], прил. 1. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике). Для отрицательных значений x пользуются той же таблицей, так как функция $\varphi(x)$ – чётная.

Задача 2

Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}4;\ \ p_2 = 0{,}5;\ \ p_3 = 0{,}7.$$

Найти вероятности того, что в результате этих трёх выстрелов по мишени будет:

а) ровно одно попадание;

б) хотя бы одно попадание;

в) ровно два попадания.

Решение

а) Пусть событие A – одно попадание в мишень. Обозначим $A_1 - A_3$ – события, означающие попадания в мишень соответственно при первом, втором и третьем выстрелах. Событие A выражается так

$$A = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3,$$

где $\overline{A}_1 - \overline{A}_3$ – события, противоположные соответственно событиям $A_1 - A_3$.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, получим

$$P(A) = P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

б) Пусть событие B – хотя бы одно попадание в мишень, тогда

$$B = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 .$$

Но легче подсчитать вероятность противоположного события $\overline{B}$ – ни одного попадания при трёх выстрелах:

$$\overline{B} = A_1 A_2 A_3 .$$

Тогда $P(B) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$

в) Пусть событие C равно двум попаданиям, тогда

$$C = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 ,$$

$$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41.$$

Задача 3

По каналу связи передаётся один из двух возможных сигналов x_1 или x_2. Сигнал x_2 передаётся в среднем в два раза чаще, чем сигнал x_1. Из-за наличия помех возможны искажения: вместо сигнала x_1 на приёме может быть получен сигнал x_2 и наоборот. Свойства канала связи таковы, что сигнал x_1 подвергается искажениям в 10 %, а сигнал x_2 – в 20 % случаев. Предположим, что получен сигнал x_1. Какова вероятность, что передан этот же сигнал?

Решение

Введём обозначения:
событие A – передан сигнал x_1;
событие B – получен сигнал x_1.

Тогда событие $\overline{A}$ – передан сигнал x_2. Событие B может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) A и A.

По условиям задачи:

$$P(A) = \frac{1}{3}; \quad P(A) = \frac{2}{3}.$$

Вероятность того, что получен сигнал x_1, при условии, если передали этот же сигнал:

$$P(B/A) = 0{,}9.$$

Вероятность того, что получен сигнал x_1, если передали сигнал x_2:

$$P(B/\overline{A}) = 0{,}2.$$

Искомую вероятность $P(A/B)$ находим по формуле Бейеса

$$P(A/B) = \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(A)\cdot P(B/A) + P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}2} \approx 0{,}692.$$

Задача 4

"n" стрелков независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для каждого стрелка равна $p = 0{,}004$. Определить количество стрелков, которое потребуется для поражения цели с вероятностью не меньшей, чем $P = 0{,}98$.

Решение

Пусть событие A – поражение цели стрелками, тогда $\overline{A}$ – промахи всех стрелков. Так как выстрелы производятся независимо друг от друга, то по теореме умножения вероятностей

$$P(\overline{A}) = (1-p)^n,$$

а вероятность наступления события A

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1-p)^n.$$

По условию задачи необходимо, чтобы

$$1-(1-p)^n \geq P$$

или

$$1 - P \geq (1 - p)^n.$$

Отсюда

$$\lg(1 - P) \geq n \cdot \lg(1 - p)$$

и, с учетом того, что $\lg(1 - p) < 0$:

$$n \geq \frac{\lg(1 - P)}{\lg(1 - p)}.$$

При $p = 0{,}004$ и $P = 0{,}98$ получим

$$n \geq \frac{\lg 0{,}02}{\lg 0{,}996} \approx 976.$$

Ответ

Для поражения цели требуется не менее 976 стрелков.

Задача 5

Из партии, состоящей из 50 изделий, среди которых имеется 5 бракованных, выбраны случайным образом четыре изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке, и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

Решение

Возможными значениями случайной величины X будут

$x_1 = 0$ (в выборке нет бракованных изделий);

$x_2 = 1$ (в выборке одно бракованное изделие);

$x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$ (все четыре выбранных изделия бракованные).

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет эти значения.

а) $x_1 = 0$.

Согласно классическому определению вероятности, вероятностью события A называется отношение числа благоприятных случаев m к общему числу случаев n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Общее число состоит из возможных комбинаций, которые можно образовать из 50 изделий по четыре, т. е.

$$n = C_{50}^4,$$

где число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Из этого числа случаев благоприятными являются только те выборки, которые не содержат бракованных изделий. Так как имеется 45 небракованных изделий, то число благоприятных случаев – это число способов, которыми можно выбрать 4 изделия из 45, т. е.

$$m = C_{45}^4,$$

тогда для $x_1 = 0$

$$p_1 = \frac{C_{45}^4}{C_{50}^4} = \frac{\frac{45!}{4!\cdot 41!}}{\frac{50!}{4!\cdot 46!}} = \frac{42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{47\cdot 48\cdot 49\cdot 50} = 0{,}64696.$$

б) $x_2 = 1$.

Общее число случаев $n = C_{50}^4$.

Благоприятными случаями являются те выборки, которые содержат одно бракованное изделие и три небракованных.

Число способов, которыми можно выбрать одного бракованное изделие из пяти, равно числу сочетаний из 5 по 1, т. е. C_5^1.

Кроме того, число способов, которыми можно выбрать остальные три небракованных изделия из 45, равно C_{45}^3. А так как каждое выбранное бракованное изделие может оказаться в одной выборке с каждой из троек небракованных изделий, то число всех выборок по 4 изделия, в которых одно бракованное, а три небракованных, равно: $C_5^1 \cdot C_{45}^3$, тогда

$$p_2 = \frac{C_5^1 \cdot C_{45}^3}{C_{50}^4} = 0{,}30807.$$

в) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное 2, равна $(x_3 = 2)$

$$p_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_{45}^2}{C_{50}^4} = 0{,}043.$$

г) $x_4 = 3$.

$$p_4 = \frac{C_5^3 \cdot C_{45}^1}{C_{50}^4} = 0{,}00195.$$

д) $x_5 = 4$.

$$p_5 = \frac{C_5^4 \cdot C_{45}^0}{C_{50}^4} = 0{,}00002.$$

Получим следующий ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	0,64696	0,30807	0,043	0,00195	0,00002

Определяем математическое ожидание (округлим до 0,001).

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}647 + 1 \cdot 0{,}308 + 2 \cdot 0{,}043 + 3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0 = 0{,}398 \approx 0{,}4.$$

Дисперсию вычислим по формуле

$$D(X) = \sum_{i-1}^{5} x_i^2 p_i - \left(M(X)\right)^2.$$

Для нахождения дисперсии составим ряд распределения для величины x^2 (вероятности округлены до 0,001)

X^2	0	1	4	9	16
P	0,647	0,308	0,043	0,002	0

тогда

$$D(X) = 0 \cdot 0{,}647 + 1 \cdot 0{,}308 + 4 \cdot 0{,}043 + 9 \cdot 0{,}002 + 16 \cdot 0 - (0{,}4)^2 \approx 0{,}338 \approx 0{,}34.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ рассчитывается по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}34} \approx 0{,}58.$$

Найдём функцию распределения $F(x)$. Согласно определению, функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем заданное x:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

1. Пусть $x \le 0$; так как число изделий отрицательным быть не может, то для любого $x \le 0$ (включая 0) $F(x) = 0$.
2. Пусть $0 < x \le 1$ (например, $x = 1/2$):

$$F(x) = P\{X = 0\} = 0{,}64696.$$

3. Пусть $1 < x \le 2$ (например, 1,75):

$$F(x) = P\{X < 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0{,}64696 + 0{,}30807 = 0{,}95503.$$

Очевидно, что и $F(2) = 0{,}95503$.

4. Пусть $2 < x \le 3$, тогда

$$F(x) = P\{X < 3\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} + P\{x = 2\}$$

$$= 0{,}95503 + 0{,}043 = 0{,}99803.$$

5. Пусть $3 < x \le 4: F(x) = P\{X < 4\} = 0{,}99803 + 0{,}00195 = 0{,}999.$

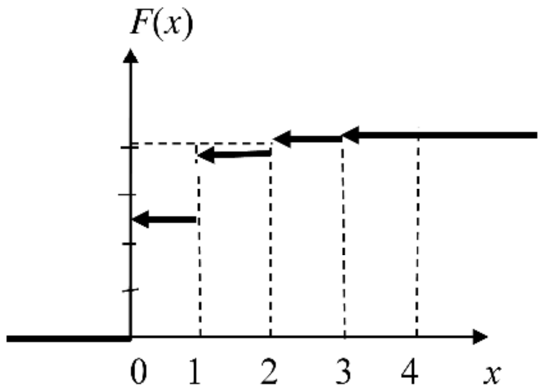
Тогда и $F(4) = 0{,}99998.$

6. Пусть $x > 4: F(x) = 0{,}99998 + 0{,}00002 = 1.$

Итого:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}64696, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}95503, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}99803, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}99998, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

Изобразим графические функции $F(x)$:



Задача 6

Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X)$ и $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины, если $p_1 = 0{,}3;\quad M(X) = 3{,}4;\quad D(X) = 0{,}84.$

Решение

Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что X примет x_2, равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Напишем закон распределения X:

X	x_1	x_2
P	0,3	0,7

Для отыскания x_1 и x_2 надо составить два уравнения, связывающие эти числа. С этой целью выразим известные математическое ожидание и дисперсию через x_1 и x_2

Найдем $M(X)$

$$M(X) = 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2.$$

По условию: $M(X) = 3{,}4$, следовательно,

$$0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 3{,}4 \qquad (1)$$

Напишем закон распределения X^2

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,3	0,7

Найдём $M(X^2)$

$$M(X^2) = 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2.$$

Формула для нахождения дисперсии имеет вид

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Подставляя, $D(X) = 0{,}84$, получим

$$0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 - (3{,}4)^2 = 0{,}84$$

или

$$0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 12{,}4. \qquad (2)$$

Объединяя уравнения (1) и (2), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 3{,}4 \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 12{,}4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 34 \\ 3x_1^2 + 7x_2^2 = 124. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$x_1 = \frac{34 - 7x_2}{3}.$$

Подставляя это значение x_1 во второе уравнение, получим после упрощения

$$5x_2^2 - 34x_2 + 56 = 0.$$

Корнями этого квадратного уравнения будут числа $x_2' = 2{,}8$ и $x_2'' = 4$.
Для $x_2' = 2{,}8$ находим

$$x_1' = \frac{34 - 7 \cdot 28}{3} = 4{,}8.$$

Для $x_2'' = 4$ находим

$$x_1'' = \frac{34 - 7 \cdot 4}{3} = 2.$$

Но по условию задачи $x_1 < x_2$, поэтому остаётся принять, что $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид

X	2	4
P	0,3	0,7

Задача 7

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$. Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{12}\right)$, если

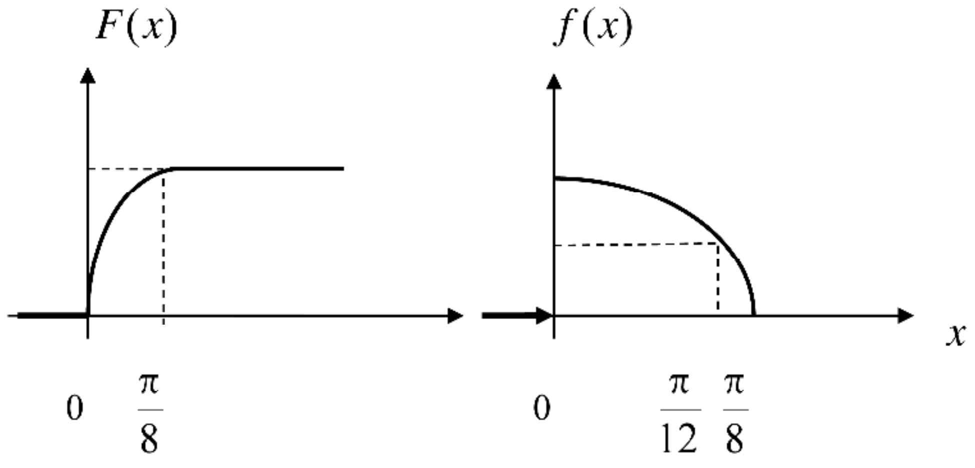
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ \sin 4x, & \text{при} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{8} \\ 1, & \text{при} \quad x > \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

Решение

Для нахождения плотности вероятности $f(x)$ воспользуемся формулой $f(x) = F'(x)$. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ 4\cos 4x, & \text{при} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{8} \\ 0, & \text{при} \quad x > \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Графики $F(x)$ и $f(x)$ таковы:



Для нахождения математического ожидания используем формулу

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)\,dx,$$

где a и b – границы интервала, которому принадлежат все возможные значения X.

Подставив $a=0$; $b=\frac{\pi}{8}$; $f(x)=4\cos 4x$, получим

$$M(X)=\int_0^{\pi/8} x\cdot 4\cos 4x\,dx = 4\int_0^{\pi/8} x\cdot \cos 4x\,dx =$$

$$= \begin{matrix} u=x; & dv=\cos 4x\,dx \\ du=dx; & v=\frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix} =$$

$$=4x\frac{1}{4}\sin 4x\,{}_0^{\pi/8}-4\int_0^{\pi/8}\frac{1}{4}\sin 4x=$$

$$=x\sin 4x\Big|_0^{\pi/8}-4\int_0^{\pi/8}\sin 4x\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{4\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\pi/8}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X),$$

тогда

$$D(X) = 4\int_a^b x^2 \cos 4x dx - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^2, & \cos 4x dx = dv \\ du = 2x dx, & v = \frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix} \right| =$$

$$= 4\,\frac{1}{4}\sin 4x \cdot x^2 \,{}_0^{\pi/8} - 4\,\frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} 2x \sin 4x - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= x^2 \sin 4x \Big|_0^{\pi/8} - 2\int_0^{\pi/8} x \sin 4x dx - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = u, & \sin 4x dx = dv \\ dx = du, & v = -\frac{1}{4}\cos x \end{matrix} \right. =$$

$$\frac{\pi^2}{64} - 2\left(-\frac{1}{4}x \cos 4x\Big|_0^{\pi/8} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} \cos 4x dx\right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{64} - 2\,\frac{1}{16}\sin 4x\Big|_0^{\pi/8} - -\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{8} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi - 3}{16}.$$

Вероятность того, что заданная величина X примет значения, заключённые в интервале $\left(\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{12}\right)$, находится по формуле

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

тогда

$$P\left(\frac{\pi}{16} < X < \frac{\pi}{12}\right) = \sin 4x\Big|_{\pi/16}^{\pi/12} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \approx 0{,}159.$$

Задача 8

Найти вероятность того, что в четырёх независимых испытаниях событие A повторится:

а) ровно два раза;

б) не менее двух раз;

в) не более двух раз;

г) хотя бы один раз,

если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,4.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой Бернулли: вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события $p(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$; тогда вероятность того, что в четырёх испытаниях событие A наступит:

а) ровно два раза, равна

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}3456;$$

б) не менее двух раз:

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=0{,}3456+0{,}1536+0{,}0256=0{,}5248;$$

в) не более двух раз:

$$P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)=1-P_4(3)-P_4(4)=$$

$$=1-0{,}1536-0{,}0256=0{,}8208;$$

г) хотя бы один раз:

$$P_4(1)+P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-P_4(0)=$$

$$=1-C_4^0\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^4=1-0{,}1296=0{,}8704.$$

Задача 9

Известны математическое ожидание $a=7$ и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (4, 13).

Решение

Вероятность того, что нормально распределённая величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β), равна:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Подставив $\alpha=4$, $\beta=13$, $a=7$ и $\sigma=3$, получим

$$P(4<X<13)=\Phi\left(\frac{13-7}{3}\right)-\Phi\left(\frac{4-7}{3}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1).$$

По таблице значений функций Лапласа (смотреть, например [4]. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, прил. 2) находим:

$$\Phi(2) = 0{,}4772; \quad \Phi(1) = 0{,}3413,$$

тогда

$$P(4 < X < 13) = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185.$$

Задача 10

В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на четвёртом этаже;

B – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение

Общее число случаев $n = 6^3 = 216$, $P(A) = \dfrac{1}{216}$. Вероятность события B вшестеро больше вероятности события A (так как этажей, на которых можно выйти, 6); $m = 6$ и $\mathrm{P(B)} = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$. Для события C число способов, которыми можно распределить трёх пассажиров по шести этажам: $m = C_6^3 = 20$; $P(C) = \dfrac{20}{216} = \dfrac{5}{54}$.

Задача 11

Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Решение

Вероятность выигрыша для игроков обозначим p_1 и p_2.

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{2}{3}.$$

Имеем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{4}, S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{3}.$

$$p_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{1}{3},$$

где $b_1 = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{4}.$

Другое решение:

$$p_1 + p_2 = 1,\ p_2 = \frac{1}{2} p_1, \quad \text{т. е.} \quad p_1 = \frac{2}{3},\ p_2 = \frac{1}{3}.$$

Задача 12

Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma e^{-x^2+2x+3}$. Найти γ, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $-\frac{1}{3} < X < \frac{4}{3}$.

Решение

Используем формулы для нормального распределения. Плотность нормального распределения: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Преобразуем заданную функцию:

$$f(x) = \gamma e^{-((x^2-2x+1)-1-3)} = \gamma e^{-(x-1)^2+4} = \gamma e^4 e^{-(x-1)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$2\sigma^2 = 1, \quad D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma e^4 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}; \quad \gamma = \frac{1}{e^4\sqrt{\pi}};$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{1}{2}+\Phi(\sqrt{2}(x-1));$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right);$$

$$P\left(-\frac{1}{3}<X<\frac{4}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)-\Phi\left(\frac{-\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+\Phi\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=$$

$$=\Phi(0{,}4714)+\Phi(1{,}8856)=0{,}1808+0{,}4706=0{,}6514.$$

Задача 13

Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь квадрата со стороной x, если $a=4$, $b=6$.

Решение

$$Y = \varphi(x) = x^2, \qquad M(Y) = \int_a^b \varphi(x) f(x)dx,$$

$$M(Y) = \int_4^6 x^2 \frac{(x-4)}{2} dx = \frac{86}{3};$$

$$D(Y) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x)dx - M^2(Y);$$

$$D(Y) = \int_4^6 x^4 \frac{(x-4)}{2} dx - \left(\frac{86}{3}\right)^2 = \frac{1084}{45} \approx 24{,}1.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № 1

1. Два брата входят в состав двух различных спортивных команд, состоящих из 12 человек каждая. В двух урнах имеется по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат номер 6.

2. Радиолампа может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий, соответственно, 0,1; 0,2; 0,5. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

3. Чему равна вероятность того, что при бросании трёх игральных костей 6 очков появится хотя бы один раз?

4. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя:

а) не менее 20 конденсаторов;

б) менее 28 конденсаторов;

в) от 14 до 26 конденсаторов.

5. Опыт состоит из трёх бросаний монеты, из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0{,}5$. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения.

Вариант № 2

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два; в) только один вопрос.

2. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

3. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в соотношении 5/3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажён.

4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах, стрелок поразит мишень 8 раз. Результат, полученный применением локальной теоремы Лапласа, сравнить с результатом, полученным по формуле Бернулли.

5. Опыт состоит из четырех независимых бросаний монеты, в каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0{,}5$. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения;
в) функцию распределения.

Вариант № 3

1. В каждой из двух урн находится 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется чёрным.

2. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

3. В лотерее 1000 билетов, из них на 1 билет падает выигрыш 500 рублей, на 10 билетов – по 100 рублей, на 50 билетов – по 20 рублей, на 100 билетов – по 5 рублей, остальные билеты невыигрышные. Некто покупает 1 билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.

4. Для определения содержания полезных компонентов на металлургическом комбинате проводится опробование вагонов с товарной рудой. Найти вероятность того, что из 400 вагонов опробование пройдут ровно 80 вагонов, если из 5 вагонов опробуется только один.

5. Производится 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. Для случайного числа попаданий построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения, г) найти математическое ожидание.

Вариант № 4

1. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях производят по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадает в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

2. Наборщик пользуется двумя кассами. В первой кассе – 90 %, а во второй – 80 % отличного шрифта. Найти вероятность того, что любая извлечённая литера из наудачу взятой кассы будет отличного качества.

3. Студент знает 70 из 90 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 3 вопроса.

4. Имеются 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включённым в течение $p = 0{,}8$ всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 80 станков?

5. Производится взрывание пяти скважин. Вероятность высокой эффективности объёма взорванной массы одной скважины равна 0,7. Построить ряд распределения эффективности объёма взорванной массы и найти её математическое ожидание.

Вариант № 5

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

2. Автомат штампует детали. Вероятность того, что за один час не будет выпущено ни одной нестандартной детали, равна 0,9. Найти вероятность того, что будут стандартными все детали, выпущенные за 3 часа.

3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин как 3/2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

4. Из цифр 1 – 5 выбирается наудачу одна, затем из оставшихся также наудачу выбирается вторая. Найти вероятности следующих событий:

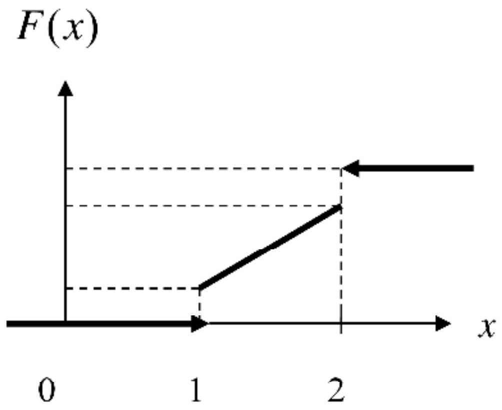
событие A – первая цифра чётная;

событие $Б$ – вторая цифра чётная;

событие B – обе цифры чётные;

событие D – хотя бы одна цифра чётная.

5. Случайная величина X имеет функцию распределения, заданную графически.



Значения $x = 1$ и $x = 2$ имеют отличные от нуля вероятности:

$$P\{x = 1\} = 0{,}25,$$

$$P\{x = 2\} = 0{,}75,$$

при $x < 1$ $F(x) = 0$, при $x > 2$ $F(x) = 1$.

На участке $1 \le x \le 2$ $F(x)$ изменяется по линейному закону. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Вариант № 6

1. Для сигнализации об аварии установили три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9; второе – 0,95 и третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

2. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02; для второго – 0,03; для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего – в два раза меньше, чем второго. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

3. Какова вероятность того, что квадрат выбранного наудачу целого числа будет оканчиваться цифрой 1.

4. В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий окажется стандартных не менее 84.

5. Производятся последовательные испытания приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надёжным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

Вариант № 7

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1400 испытаниях событие наступит ровно 28 раз.

2. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,06, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна.

3. Из колоды в 52 карты вынимается наудачу три карты. Найти вероятность того, что это тройка, семёрка и туз.

4. Монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность следующих событий:
событие A – все пять раз появится герб;
событие $Б$ – хотя бы один раз появится герб;
событие B – герб появится ровно два раза.

5. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб.; четыре выигрыша по 25 руб.; десять – по 10 руб.; остальные невыигрышные. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета (случайная величина X – стоимость возможного выигрыша) и найти математическое ожидание.

Вариант № 8

1. В партии из 100 деталей имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 5 изделий, наудачу взятых из этой партии, только 2 окажутся дефектными.

2. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причём из них в первом ящике 17, а во втором – 15 нестандартных деталей. Из второго ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из первого ящика будет стандартной.

3. Данное предприятие в среднем даёт $21\ \%$ продукции высшего сорта и $70\ \%$ продукции первого сорта. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта.

4. Вероятность того, что в результате четырёх независимых опытов событие A произойдёт хотя бы один раз, равна 0,5. Определить вероятность появления события A при одном опыте, если она во всех опытах остаётся неизменной.

5. Игральная кость брошена 2 раза. Написать ряд распределения числа появлений «тройки» и найти математическое ожидание.

Вариант № 9

1. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

2. Две перфораторщицы набили по одинаковому комплекту перфокарт, вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05, для второй эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица.

3. Два студента ищут нужную им книгу в букинистических магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом, равна 0,6, а вторым – 0,7. Какова вероятность того, что только один из студентов найдет книгу?

4. С помощью карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово «ракета»?

5. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить ряд и многоугольник распределения вероятностей числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

Вариант № 10

1. На трёх станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляется 10 %, на втором – 30 %, на третьем – 60 % всех деталей. Для каждой детали вероятность быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 – если она изготовлена на втором станке; 0,9 – на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

2. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено 2 залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из 1-го орудия равна 0,3, а из второго – 0,4.

3. На столе лежат 36 экзаменационных билетов с номерами 1, 2, …, 36. Преподаватель берёт три любых билета. Какова вероятность того, что они из первых четырёх?

4. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна 0,6. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

5. Энергосистема состоит из четырёх блоков, работающих независимо. Вероятность исправного состояния блоков в течение времени T равна 0,6. Рассматривается случайная величина X – число блоков, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Построить ряд распределения, функцию распределения величины X. Найти её математическое ожидание.

Вариант № 11

1. Из трёх орудий произведены залпы по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,9, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадает в цель.

2. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат даёт 0,2 % брака, а второй – 0,3 % брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 3000, а со второго 2000 деталей.

3. На экзамене студенту предлагается 20 билетов. В каждом билете 3 вопроса. Из 60 вопросов, вошедших в билеты, студент знает 50. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять из известных ему вопросов?

4. Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа от каждого из которых равна $p = 0{,}0005$. Какова вероятность отказа: а) одного элемента; б) хотя бы одного элемента.

5. В техническом устройстве работают независимо 2 блока. Вероятность безотказной работы первого блока 0,4; второго – 0,7. Случайная величина X – число работающих блоков. Построить ряд распределения, многоугольник распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант № 12

1. Из 50 проб химического состава рудной массы в 35 пробах обнаружено наличие тяжелых металлов. Найти вероятность того, что тяжёлые металлы содержатся в двух взятых наудачу пробах.

2. Детали проходят три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02; на второй – 0,03; на третьей – 0,02. Найти вероятность получения небракованной детали после трёх операций, предполагая, что получение брака на отдельных операциях являются событиями независимыми.

3. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1 : 3 : 6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9; средний – 0,3; мелкий – 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьёт её?

4. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Найти $M(X); D(X); \sigma(X)$. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 4 абонента?

Вариант № 13

1. В каждой из двух урн содержатся 3 чёрных и 7 белых шаров. Из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в первую урну, после чего из первой урны наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется белым.

2. Охотники Александр, Виктор и Павел попадают в летящую утку с вероятностями, соответственно равными: 2/3, 3/4 и 1/4. Все одновременно стреляют по пролетающей утке. Какова вероятность того, что утка будет убита?

3. Детали могут быть изготовлены с применением двух технологий: в первом случае деталь проходит 3 технологических операции, вероятность получения брака при каждой из которых равны, соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Во втором случае имеются 2 операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,3. Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если в первом случае вероятность получения продукции первого сорта для небракованной детали равна 0,9, а во втором – 0,8.

4. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что в течение 1 минуты не будет ни одного вызова?

5. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 руб., четыре – по 50 руб., 5 – по 40 руб. и десять по 10 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета (случайная величина X – стоимость возможного выигрыша). Найти $M(X)$, $D(X)$, составить функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

Вариант № 14

1. Три автомата изготовляют детали, которые поступают на общий контейнер. Производительность первого, второго и третьего автоматов относится как 2/3/5. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, отличного качества, равна 0,9, для второго и третьего автоматов эти вероятности, соответственно, равны 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь окажется отличного качества.

2. В записанном номере телефона оказалась стёртой последняя цифра. Какова вероятность того, что, наудачу набирая последнюю цифру телефонного номера, Вы сразу позвоните нужному лицу? Вычислить эту вероятность, предлагая, что Вы вспомнили, что последняя цифра: а) нечётная; б) не больше 5.

3. Производится выстрел по трём складам боеприпасов. Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй – 0,008, в третий – 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

4. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 родившихся детей мальчиков и девочек будет поровну.

Вариант № 15

1. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии первое устройство сработает, равна 0,8, для второго и третьего устройства эти вероятности, соответственно, равны 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что при аварии сработают: а) только одно устройство, б) только два устройства; в) все три устройства.

2. На сборку поступают детали с трёх автоматов. Первый автомат даёт 0,3 % брака, второй – 0,2 % брака, третий – 0,4 % брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступает 1000 деталей, со второго – 2000, а с третьего – 2500.

3. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделён на 6 секторов, отмеченных определёнными цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, когда цифры образуют определённую комбинацию. Какова вероятность открыть замок, установив определённую комбинацию цифр?

4. Игральная кость брошена 3 раза. Написать ряд распределения числа появлений шестёрки. Найти $M(X), D(X)$, составить функцию распределения $F(x)$.

5. Вероятность изделия некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10000 наудачу взятых изделий бракованных окажется ровно 40?